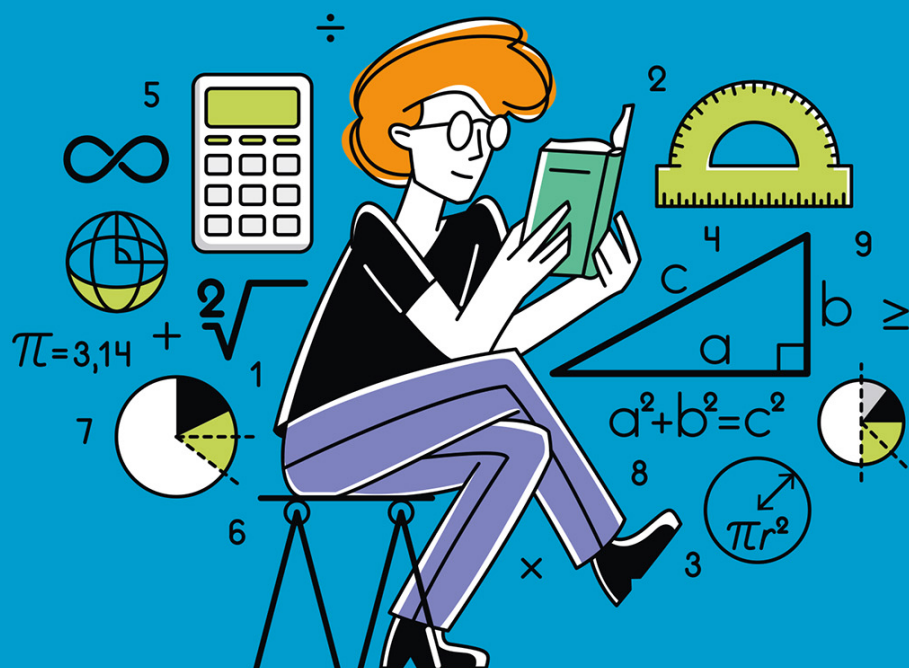


10-15
ans

COMPRENDRE LES MATHS

AVEC L'HISTOIRE DES SCIENCES



Catherine d'Andrea



**Comprendre
les Maths
avec l'Histoire
des Sciences**

Comprendre les Maths avec l'Histoire des Sciences

10-15 ans

Catherine d'Andrea



De la même auteure chez le même éditeur

- *Une histoire des mathématiques et des mathématiciens – Du XVI^e au XX^e siècle, 312 pages, 2024*
- *Histoire et légendes mathématiques, 192 pages, 2023*

Conception graphique couverture: Nathalie FOULLOY

Conception graphique intérieure et mise en pages: Nord Compo

ISBN 9782340-102705

Dépôt légal: avril 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Les mathématiques sont la matrice de beaucoup de matières (physique, biologie, arts plastiques...). La pluralité des notions abordées dans cet ouvrage montre à quel point il est facile d'y découvrir leur contribution. Sans mathématiques, ni mesure, ni calcul, ni construction, ni explication. Pas non plus d'architecture, donc de maison, pas d'orientation en mer, donc de voyages ou de commerce maritime, pas de statistiques donc de prévision d'une évolution, pas de médecine, donc de traitement contre les maladies, et pas d'informatique.

Le langage mathématique permet d'expliquer le Monde, comme l'affirme Galilée :

« La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur. »

Les mathématiques trouvent leur fondation dans la mesure de la Terre, la bien nommée géométrie. Leur idée étant avant tout de s'expliquer le Monde, les mathématiciens se sont donc tout naturellement tournés vers le ciel, cherchant à interpréter le mouvement des planètes et la place de la Terre dans l'univers. Cependant, la matière ne se borne pas à la géométrie : les nombres ont également une importance capitale, ne serait-ce que pour calculer des longueurs ou des aires. Et très naturellement, les mathématiques ont été la pierre angulaire des Arts, que ce soit en peinture comme en musique.

Les notions abordées dans ce livre peuvent être comprises par un collégien, mais un lecteur plus aguerri pourra porter son attention sur les anecdotes, l'histoire d'une idée ou encore les astuces pour mesurer, tracer, calculer. On trouvera toutes les occasions de saisir à quoi servent les mathématiques et de découvrir une matière essentielle, indispensable dans de très nombreux domaines.

Table des matières

Partie 1 ♦ Géométrie	13
♦ Chapitre 1 Le théorème de Thalès	15
Ce qu'on apprend au collège	15
La réciproque du théorème de Thalès	16
La contraposée du théorème de Thalès	17
Du côté de l'histoire : Thalès de Milet (env. -624/-547)	18
La mesure de la pyramide de Khéops	19
Pour aller plus loin : La croix du bûcheron	21
♦ Chapitre 2 Le théorème de Pythagore	23
Ce qu'on apprend au collège	23
La réciproque du théorème de Pythagore	24
La contraposée du théorème de Pythagore	24
Pour aller plus loin : Une démonstration du théorème de Pythagore	25
Du côté de l'histoire : Pythagore (env. -580/-495)	26
♦ Chapitre 3 La construction à la règle et au compas	29
Ce qu'on apprend au collège	29
Tracé de la médiatrice d'un segment	29
Tracé de la bissectrice d'un angle	30
Tracé du symétrique d'un point par rapport à une droite	31
Pour aller plus loin : La construction du pentagone régulier	33
Du côté de l'histoire : Hippias de Métaponte (env. -500)	34
♦ Chapitre 4 Les angles	35
Ce qu'on apprend au collège	35
Cas particuliers	35
Propriétés	36
Pour aller plus loin : Le calcul de la circonférence de la terre	37
Du côté de l'histoire : Ératosthène (env. -276/-194)	39

Table des matières

◆ Chapitre 5 Aire d'un triangle	41
Ce qu'on apprend au collège	41
Aire d'un triangle rectangle	41
Aire d'un triangle quelconque	41
Du côté de l'histoire : Le redécoupage équitable des terres	43
Pour aller plus loin	46
La démonstration du théorème de Thalès	46
La démonstration du théorème de Pythagore	47
Du côté de l'histoire : Euclide (env. -325/-265)	49
La bibliothèque d'Alexandrie	49
◆ Chapitre 6 Trigonométrie	53
Ce qu'on apprend au collège	53
Du côté de l'histoire : Le système métrique	55
Pour aller plus loin : La mesure par triangulation	56
Pour aller encore plus loin : Distance Terre-Lune et distance Terre-Soleil	58
Du côté de l'histoire : Aristarque (-310/-230)	62
◆ Chapitre 7 Repérage sur la Terre	63
Ce qu'on apprend au collège	63
Pour aller plus loin : Mesures de latitude et de longitude	64
Du côté de l'histoire : Ptolémée (env. 100-168)	68
Pour aller plus loin : L'astrolabe	69
Pour aller encore plus loin : Les mesures nautiques	71
◆ Chapitre 8 Homothéties	77
Ce que l'on apprend au collège	77
Effet sur les aires et les volumes	78
Pour aller plus loin : King Kong	79
Pour aller encore plus loin : Le pantographe	80
◆ Chapitre 9 Les figures de l'espace	81
Ce que l'on apprend au collège	81
Les prismes et les cylindres	81
Les pyramides et les cônes	82
La sphère	82
Pour aller plus loin : Les solides de Platon	83
Du côté de l'histoire : Platon (-428/-348)	85
Pour aller encore plus loin : La formule d'Euler	86

◆ Chapitre 10 Les aires et les volumes	87
Ce que l'on apprend au collège	87
Aire d'un triangle	87
Cas du cercle, du disque et de la sphère	88
Volume d'un prisme ou d'un cylindre	88
Volume d'un pavé droit	89
Volume des pyramides et des cônes	89
Pour aller plus loin	90
Du côté de l'histoire : Eudoxe (env. -408/-355)	92
Partie 2 ◆ La numération	93
◆ Chapitre 11 La numération de position	95
Ce qu'on apprend au collège	95
Pour aller plus loin : Les numérations anciennes	97
Du côté de l'histoire : Archimède (env. -287/-212)	104
◆ Chapitre 12 Les opérations	107
Ce qu'on apprend au collège	107
L'addition	107
La soustraction	107
La multiplication	108
Division décimale	108
Division euclidienne	109
Pour aller plus loin : Les systèmes de numération	110
Pour aller encore plus loin	112
L'abaque	112
Le boulier chinois	114
Du côté de l'histoire : Gerber d'Aurillac (945-1003)	122
◆ Chapitre 13 Les nombres premiers	125
Ce qu'on apprend au collège	125
La division euclidienne	125
Multiples et diviseurs	126
Les nombres premiers	126
Du côté de l'histoire : Carl Friedrich Gauss (1777-1855)	127
Pour aller plus loin : La date de Pâques	129
Pour aller encore plus loin	130
Le numéro de sécurité sociale	130
Le relevé d'identité bancaire (RIB)	130

Table des matières

◆ Chapitre 14 Les nombres relatifs	133
Ce qu'on apprend au collège	133
Addition/soustraction	133
Produit	134
Division	135
Pour aller plus loin : Les températures	136
Du côté de l'histoire : Gabriel Fahrenheit (1686-1736)	139
◆ Chapitre 15 Les unités de mesure du temps	141
Ce qu'on apprend au collège	141
Techniques de calcul	141
Conversions	142
Du côté de l'histoire : La mesure du temps	143
La clepsydre	143
Le sablier	144
Pour aller plus loin : Le cadran solaire	145
◆ Chapitre 16 Les puissances de 10	151
Ce qu'on apprend au collège	151
Notation scientifique	151
Propriétés	152
Du côté de l'histoire : La vision du système solaire	153
Dans l'Antiquité	153
Au Moyen Âge	156
À la Renaissance	156
Nicolas Copernic (1473-1543)	157
Giordano Bruno (1584-1600)	158
Tycho Brahé (1546-1601)	158
Kepler (1571-1630)	160
Pour aller plus loin : Distances entre les astres	161
◆ Chapitre 17 Les vitesses	163
Ce qu'on apprend au collège	163
Pour aller plus loin : Vitesse du son et vitesse de la lumière	164
Pour aller encore plus loin : L'orage	168
◆ Chapitre 18 Les racines carrées	169
Ce qu'on apprend au collège	169
Racine carrée d'un produit, d'un quotient	169
Carré parfait	170

Pour aller plus loin : L'extraction d'une racine carrée	171
Du côté de l'histoire : Aryabhata (476/550)	173
♦ Chapitre 19 Les fonctions affines	175
Ce qu'on apprend au collège	175
Les fonctions affines et linéaires.	175
Pour aller plus loin : Les codes secrets.	178
Du côté de l'histoire : François Viète (1540-1603)	181
Partie 3 ♦ Arts et Mathématiques	183
♦ Chapitre 20 Les formats de papier	185
Pour aller plus loin : Les autres formats de papier.	187
Du côté de l'histoire	189
♦ Chapitre 21 Les frises	191
Du côté de l'histoire : La maison de la sagesse	193
♦ Chapitre 22 Les pavages	195
Du côté de l'histoire : L'Alhambra	198
♦ Chapitre 23 La perspective	199
La perspective parallèle	199
La perspective cavalière	199
La perspective axonométrique.	200
Pour aller plus loin : La perspective linéaire	202
Du côté de l'histoire : Histoire de la perspective.	204
♦ Chapitre 24 La gamme musicale	207
Pour aller plus loin : Le cycle des quintes.	210
Du côté de l'histoire : L'école pythagoricienne	211
♦ Chapitre 25 Le nombre d'or	213
Pour aller plus loin : Pentagone régulier et pentagramme	215
Du côté de l'histoire : Leonardo Fibonacci (1170-1250)	218
Conclusion	219
Liste des Mathématiciens par ordre chronologique	221
Annexes	223

PARTIE 1

Géométrie

(d)

N

C

(d')

CHAPITRE 1

Le théorème de Thalès

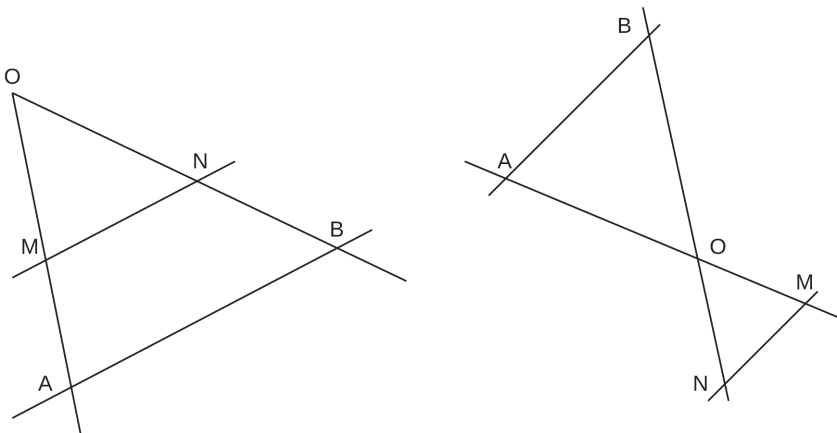
Le théorème de Thalès permet de calculer une longueur lorsque l'on se trouve dans une configuration où l'on sait que des droites sont parallèles. Sa réciproque permet de prouver que deux droites sont parallèles et sa contraposée de déterminer qu'elles ne le sont pas. On attribue à Thalès ce théorème, en pensant qu'il s'en serait servi pour mesurer la pyramide de Khéops.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Ce théorème est vu en classe de 3^e.

Soient O, A, B, M et N cinq points.

Si O, A et M sont alignés, si O, B et N sont alignés et si $(MN) \parallel (AB)$ alors $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}$.



Exemple :

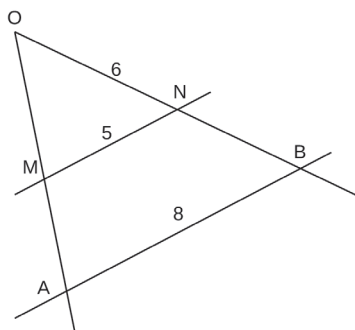
Sur la figure ci-dessous, les points O , M et A sont alignés, les points O , N et B sont alignés et les droites (MN) et (AB) sont parallèles. On peut donc calculer la longueur OB :

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}.$$

Soit donc $\left(\frac{OA}{OM} = \right) \frac{OB}{6} = \frac{8}{5}.$

On obtient donc $OB = \frac{6 \times 8}{5} = 9,6.$



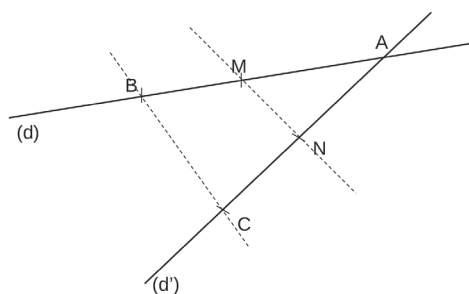
• La réciproque du théorème de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A .

B et M sont deux points de (d) distincts de A .

C et N sont deux points de (d') distincts de A .

Si les points A , B , M d'une part et les points A , C , N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



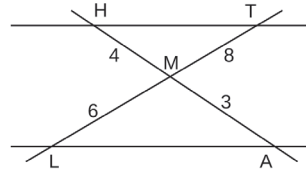
Exemple :

Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \text{ et } \frac{ML}{MT} = \frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Donc } \frac{MA}{MH} = \frac{ML}{MT}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut en conclure que $(LA) \parallel (HT)$.



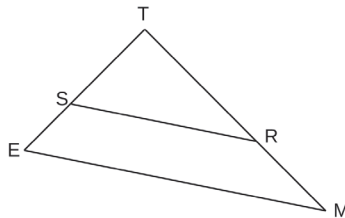
• La contraposée du théorème de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A .

B et M sont deux points de (d) distincts de A .

C et N sont deux points de (d') distincts de A .

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Exemple :

Sur la figure ci-dessus $TR = 11$ cm ; $TS = 8$ cm ; $TM = 15$ cm et $TE = 10$ cm.

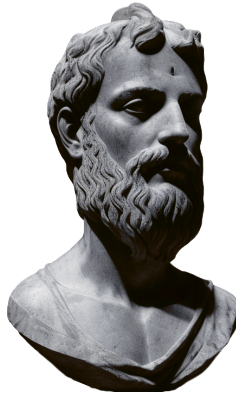
$$\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ et } \frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} \approx 0,7.$$

Donc $\frac{TS}{TE} \neq \frac{TR}{TM}$ et par la contraposée du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (SR) et (EM) ne sont pas parallèles.

Du côté de l'histoire

Thalès de Milet

(env. -624/-547)



Thalès est considéré comme le premier mathématicien connu de l'histoire. Marchand de profession, c'est un homme avisé : un jour, alors qu'il conduisait une caravane, un mulet chargé de sacs de sel tomba à l'eau au passage d'un gué. Une partie du sel se trouva ainsi dissoute. Le mulet se sentit plus léger et au gué suivant, se jeta volontairement à l'eau pour alléger à nouveau son fardeau. Afin de lui faire perdre cette fâcheuse habitude, Thalès le chargea d'éponges à l'expédition suivante.

Il aurait prédit une éclipse de soleil, il aurait également découvert l'inégalité des jours et des nuits suivant les saisons, et qu'une année dure environ 365 jours. Enfin, il observe que la constellation de la petite ourse permet de repérer aisément l'étoile polaire, et donc le nord.

Ses calculs lui permettent de prédire une récolte d'olives abondante la saison suivante. Il aurait acquis tous les pressoirs de la région et, en imposant le prix de l'huile, se serait enrichi rapidement. Thalès se consacre alors pleinement à l'étude de la géométrie et de la philosophie. Il fonde une école à Milet, où il transmet ses connaissances à de nombreux élèves, dont un est particulièrement célèbre, puisqu'il s'agit de Pythagore.

Tout occupé à ses problèmes, Thalès a la réputation d'être passablement distrait. On raconte qu'alors qu'il marchait à travers la campagne en compagnie de sa servante, regardant le ciel pour y observer les astres, il ne vit pas un grand trou au milieu du chemin et tomba dedans. La jeune femme lui dit,

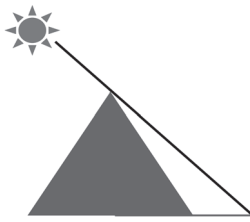
en l'aidant à sortir du trou : « *Tu n'arrives pas à voir ce qui est à tes pieds et tu crois pouvoir connaître ce qui est dans le ciel !* »

Thalès meurt vers 547 av. J.-C. Il se passionnait pour la gymnastique et on l'aurait trouvé, mort par déshydratation, dans les gradins d'un stade, lors d'une compétition à laquelle il assistait.

La mesure de la pyramide de Khéops

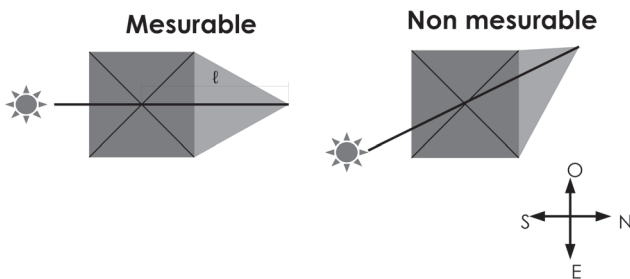
Lors de son voyage en Égypte, Thalès a été ébloui par les pyramides. Il a décidé de mesurer la hauteur de la plus grande, la pyramide de Khéops. Voyons comment il s'y est pris.

Pour commencer, il lui fallait choisir une unité de longueur : il utilisa sa propre taille, et nomma cette unité *le thalès*. L'idée étant que lorsque son ombre serait égale à sa taille, il en serait de même pour la pyramide. Il suffisait alors de mesurer la longueur de l'ombre de cette pyramide.



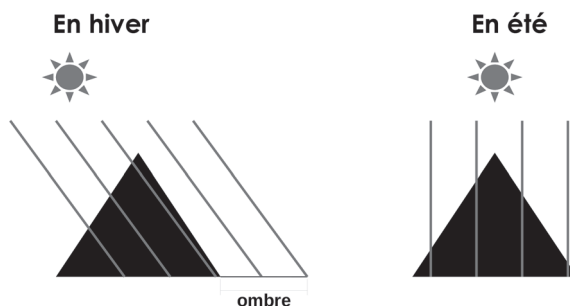
Pour faire cette mesure, l'ombre doit être perpendiculaire à un côté de la base, ce qui correspond à un moment où le soleil est orienté plein sud, c'est-à-dire à midi (heure solaire), la pyramide ayant elle-même une face orientée plein sud.

Vue de dessus :

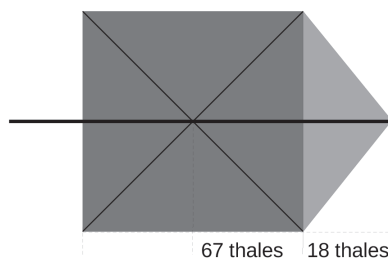


Enfin, le soleil doit être suffisamment bas pour que l'ombre de la pyramide dépasse au sol, donc plutôt en hiver. Gizeh étant situé à 30° de latitude nord, il a été calculé que cela n'est possible que deux jours par an : le 21 novembre

et le 20 janvier. Thalès n'a donc pas pu mesurer la hauteur de cette pyramide n'importe quand !



Il obtient 18 thalès pour l'ombre, puis il mesure la partie cachée de l'ombre, soit donc la moitié de la longueur du côté de la pyramide, et obtient 67 thalès.



La pyramide de Khéops mesure donc $18 + 67 = 85$ thalès.

Or, 1 thalès vaut 3,25 coudées égyptiennes.

Ainsi, la pyramide fait $85 \times 3,25 = 276,25$ coudées.

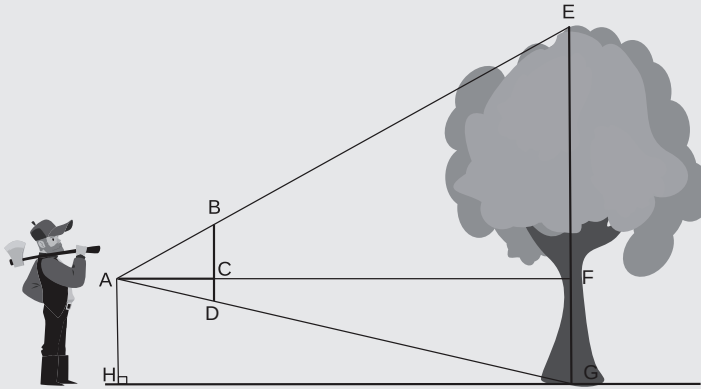
On sait aujourd'hui que la pyramide mesure 147 mètres, soit 280 coudées. La mesure de Thalès était assez précise !

Notons au passage que nous pouvons calculer la taille de Thalès :

$$\frac{147}{276,25} \times 3,25 \approx 1,73 \text{ m.}$$

→ Pour aller plus loin

La croix du bûcheron



La croix du bûcheron est une croix telle que $AC = BD$.

(AC) doit être positionnée horizontalement et (BD) verticalement.

Le bûcheron se place de telle sorte qu'en regardant les deux extrémités verticales de sa croix, il voit le haut et le bas de l'arbre :

A, B et E alignés, A, D et G alignés.

On place un point F au niveau de l'arbre, de telle sorte que A, C et F soient alignés.

Dans le triangle AEF : $(BC) \parallel (EF)$.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$ donc $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. (1)

Dans le triangle AEG : $(BD) \parallel (EG)$.

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AG} = \frac{BD}{EG}$ donc $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EG}$. (2)

De (1) et de (2), on en déduit que $\frac{AC}{AF} = \frac{BD}{EG}$.

Or $AC = BD$, donc $AF = EG$.

Ainsi, dans la position prise par le bûcheron, il sera à une distance de l'arbre égale à sa hauteur.

CHAPITRE 2

Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore permet de calculer une longueur dans un triangle rectangle, lorsque l'on connaît les deux autres. Sa réciproque permet de montrer qu'un triangle est rectangle, et donc que deux droites sont perpendiculaires, sa contraposée permet d'affirmer que deux droites ne sont pas perpendiculaires.

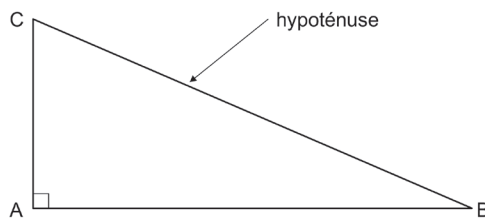
Ce théorème n'a pas été découvert par Pythagore : les Babyloniens l'utilisaient déjà. Mais si on considère les théorèmes de Thalès et de Pythagore, on se rend compte que l'un traite de droites parallèles et l'autre de droites perpendiculaires. On peut donc penser que ces deux théorèmes portent le nom de ces mathématiciens pour leur rendre hommage : ce sont les deux premiers mathématiciens de l'histoire des mathématiques dont on connaisse le nom.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Ce théorème est vu en classe de 4^e.

Soit ABC un triangle rectangle en A .

Alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



Si ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exemple 1

Soit EFG un triangle rectangle en E , tel que $EF = 3$ cm et $EG = 4$ cm.

Alors forcément : $FG^2 = EF^2 + EG^2$.

Soit donc $FG^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, et par suite $FG = \sqrt{25} = 5$.

Exemple 2

Soit ABC un triangle rectangle en B , tel que $AC = 8$ cm et $AB = 3$ cm.

Alors $AC^2 = BA^2 + BC^2$

Soit donc $8^2 = 3^2 + BC^2$ ou encore $64 = 9 + BC^2$

Et donc $BC^2 = 64 - 9 = 55$, c'est-à-dire $BC = \sqrt{55} \approx 7,4$

• La réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$.

On choisit la plus grande longueur et on calcule son carré :

$$BC^2 = 10^2 = 100.$$

On calcule la somme des carrés des deux autres côtés :

$$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

On remarque que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. On en déduit que, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A .

• La contraposée du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple

Soit DEF un triangle tel que $DE = 7$, $DF = 9$ et $EF = 6$.

On choisit la plus grande longueur et on calcule son carré :

$$DF^2 = 9^2 = 81.$$

On calcule la somme des carrés des deux autres côtés :

$$DE^2 + EF^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85.$$

On remarque que $DE^2 + EF^2 \neq DF^2$. On en déduit que, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

→ Pour aller plus loin

Une démonstration du théorème de Pythagore

C'est le théorème dit « chinois ».

Dans le grand carré, on place quatre triangles rectangles semblables, comme indiqué sur la figure :

Intéressons-nous au quadrilatère blanc :

Ses quatre côtés sont de même longueur, donc c'est un losange.

En outre, dans le triangle ABC , la somme des angles vaut 180° .

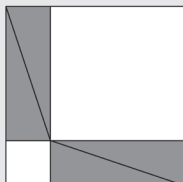
Donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Or $\widehat{DBE} = \widehat{ACB}$, donc $\widehat{ABC} + \widehat{DBE} = 90^\circ$.

On en déduit que l'angle $\widehat{CBE}$ est un angle droit.

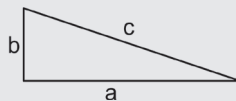
Par suite, $ABEF$ est un carré.

Modifions la position des quatre triangles :



Pour des raisons évidentes, on remarque ici que les triangles forment deux rectangles, et que les deux figures blanches sont des carrés.

Notons a , b et c les longueurs des côtés du triangle rectangle.



Le carré blanc de la première figure a une aire de c^2 .

Les deux carrés blancs de la seconde figure ont pour aires a^2 et b^2 .

Dans les deux figures, l'aire du grand carré ne change pas, ni celle des quatre triangles.

On en déduit donc que $a^2 + b^2 = c^2$.

Du côté de l'histoire

Pythagore

(env. -580/-495)



Pythagore serait né dans l'île de Samos, au large de la Turquie, vers 580 av. J.-C. Avant sa naissance, ses parents auraient consulté la Pythie, l'oracle de Delphes. Elle leur aurait annoncé qu'ils attendaient un enfant, qui serait d'une grande beauté et ferait preuve d'une grande sagesse. Pythagoras se traduit en effet par « celui qui a été annoncé par la Pythie ». À 18 ans, il participe aux jeux Olympiques, où il remporte l'épreuve du pugilat (c'est une sorte de boxe). Il a été l'élève de Thalès. Celui-ci lui aurait enseigné tout ce qu'il savait, puis lui aurait conseillé de poursuivre son instruction auprès des prêtres égyptiens. Pythagore entreprend alors un long voyage qui le conduit d'abord en Syrie, puis au Liban, en Égypte et enfin à Babylone.

Lorsqu'il retourne à Samos, il décide d'enseigner ce qu'il a lui-même appris. Mais il a peu de succès. Il aurait fini par dénicher un jeune homme pauvre, dont le comportement laissait prévoir une bonne capacité d'apprentissage. Il lui aurait promis une pièce d'argent pour chaque théorème qu'il parviendrait à comprendre. Pythagore lui aurait donné les pièces comme prévu, jusqu'à ce qu'il juge son élève prêt à recevoir son enseignement gratuitement. L'élève aurait alors choisi de rembourser Pythagore, en lui rendant une pièce à chaque nouveau théorème enseigné.

Pythagore s'installe finalement à Crotone, une cité située au sud de l'Italie. Il y fonde son école. En chemin, il avait croisé des pêcheurs : il réussit à prévoir le nombre de poissons pêchés dans leur filet ; fort de l'impression faite, sa réputation grandit et son école a cette fois-ci du succès. Elle prend la forme d'une congrégation religieuse.

Les pythagoriciens ne sont pas que mathématiciens : leurs préoccupations sont également politiques et religieuses. Mais Pythagore pense que, politiquement parlant, les mathématiques peuvent fournir un modèle pour la gestion d'une cité et religieusement parlant, il croit qu'elles permettent d'accéder au divin. Les Mathématiques prennent avec lui leur indépendance des choses matérielles. Les nombres existent pour eux-mêmes, ils ne sont plus assujettis à des objets. Les notions deviennent abstraites et on s'impose les démonstrations.

CHAPITRE 3

La construction à la règle et au compas

Depuis toujours, la géométrie se trace, évidemment, avec des instruments. À l'origine, pas d'équerre, ni de règle graduée. C'est l'idée de la construction à la règle et au compas : une règle non graduée pour tracer des lignes droites, et un compas pour reporter des longueurs.

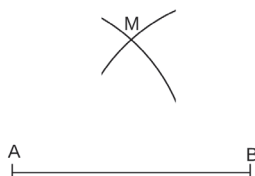
✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée à n'importe quel niveau.

• Tracé de la médiatrice d'un segment

Soit $[AB]$ un segment donné. On veut tracer sa médiatrice.

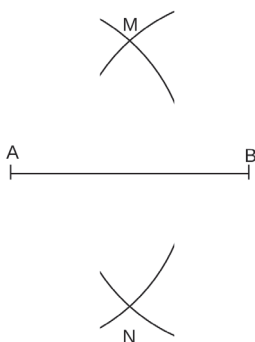
Étape 1 : on trace un arc de cercle de centre A et de rayon suffisamment grand (plus grand que $\frac{AB}{2}$), ainsi qu'un arc de cercle de centre B et de même rayon.



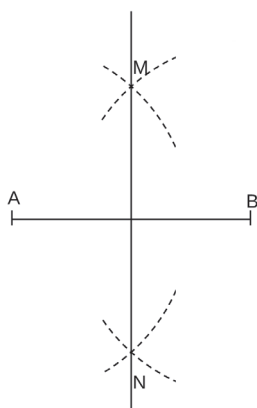
Ces deux arcs se coupent en un point M .

Par construction, $MA = MB$, donc M est un point de la médiatrice de $[AB]$.

Étape 2 : On recommence, en traçant deux nouveaux arcs de cercle (on peut tracer les arcs de même rayon, mais en dessous du segment $[AB]$). Ces deux arcs de cercle se coupent en un point N . De même que précédemment, le point N est sur la médiatrice du segment $[AB]$.

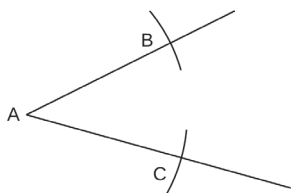


Une droite étant définie par deux points, on en déduit que la médiatrice de $[AB]$ est la droite (MN) .

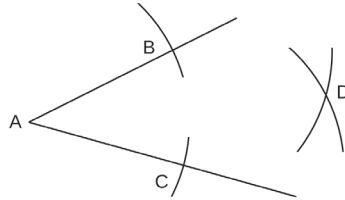


• Tracé de la bissectrice d'un angle

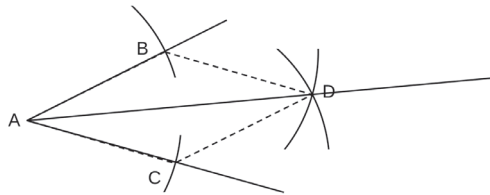
Étape 1 : on trace un cercle de centre A et de n'importe quel rayon. Ce cercle coupe les deux côtés de l'angle $\hat{A}$ en deux points B et C .



Étape 2 : on trace un arc de cercle de centre B et de même rayon, ainsi qu'un arc de cercle de centre C et de même rayon. Ces deux arcs de cercle se coupent en un point D .



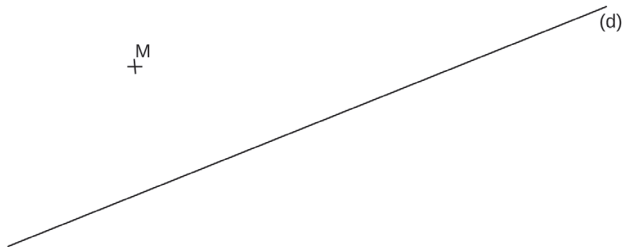
Par construction, $AB = BD = DC = CA$, donc $ABDC$ est un losange.



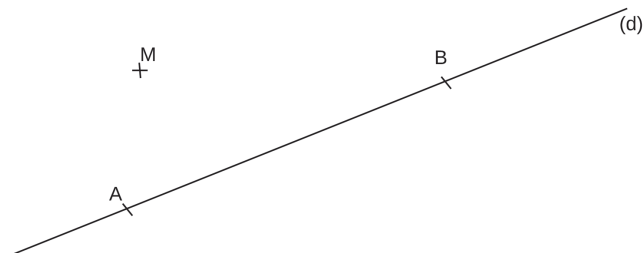
Or $[AD]$ est une diagonale de ce losange, et en conséquence, $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

• Tracé du symétrique d'un point par rapport à une droite

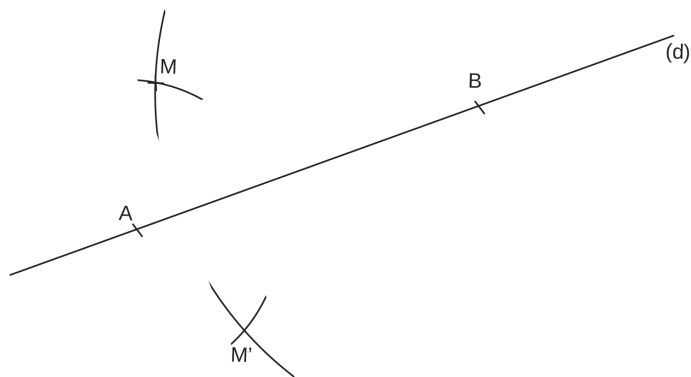
On veut tracer le symétrique du point M par rapport à la droite (d) .



Étape 1 : on choisit deux points A et B sur la droite (d) .



Étape 2 : on trace un arc de cercle de centre A passant par le point M , ainsi qu'un arc de cercle de centre B passant également par le point M . Ces deux arcs de cercle se coupent en un point M' , qui est le symétrique du point M par rapport à la droite (d) .

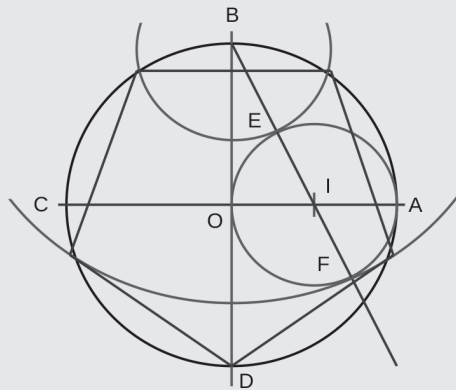


→ Pour aller plus loin

La construction du pentagone régulier

On doit la construction à la règle et au compas du pentagone régulier au pythagoricien Hippase de Métaponte :

- 1 – Tracer un cercle de centre O et de rayon R .
- 2 – Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AC]$ et $[BD]$.
- 3 – Placer le point I milieu de $[OA]$.
- 4 – Tracer le cercle de centre I passant par A .
- 5 – Tracer la droite (BI) . Elle coupe le cercle vert en deux points E et F .
- 6 – Tracer les cercles de centre B passant par E et F .
- 7 – Ces deux cercles coupent le cercle de départ en quatre points.
- 8 – Le pentagone est constitué de ces quatre points et du point D .



Du côté de l'histoire

Hippase de Métaponte

(env. -500)



C'est un pythagoricien de la première heure, originaire de Métaponte. Il vénérât beaucoup Pythagore, qu'il appelait « le grand homme ». Il dirigeait le groupe des acousmaticiens, ceux qui écoutent, pendant que Pythagore s'occupait du groupe des mathématiciens. En bon pythagoricien, il pensait que le nombre est « l'organe de décision du dieu artisan de l'ordre du monde ». Il a découvert la construction du pentagone vue dans ce chapitre, mais il est surtout célèbre pour avoir dévoilé l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$. Il aurait alors été banni de la communauté, et aurait choisi de se noyer en mer.

CHAPITRE 4

Les angles

Dans le plan, un angle est une figure formée par deux demi-droites de même origine, dont on mesure l'ouverture. Les angles vus au collège sont des angles saillants : ils font moins de 180° . (Notons qu'il existe trois mesures pour les angles : le degré, le grade et le radian : $180^\circ = 200 \text{ grades} = \pi \text{ radians}$. La mesure utilisée au collège est le degré, le radian étant utilisé au lycée).

✓ Ce qu'on apprend au collège

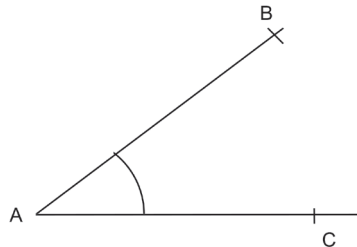
Les angles sont abordés en 6^e et en 5^e.

On considère l'angle $\widehat{BAC}$.

Son sommet est le point A.

Ses côtés sont les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut désigner l'angle $\widehat{BAC}$ par $\hat{A}$, tout simplement.



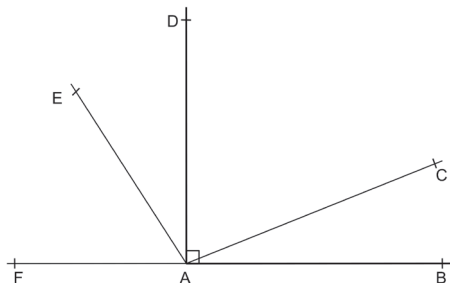
● Cas particuliers

$\widehat{BAC}$ est un angle aigu : sa mesure est inférieure à 90° .

$\widehat{BAD}$ est un angle droit : sa mesure est égale à 90° .

$\widehat{BAE}$ est un angle obtus : sa mesure est supérieure à 90° .

$\widehat{BAF}$ est un angle plat : sa mesure est égale à 180° .



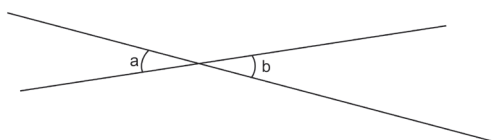


Les angles $\widehat{URT}$ et $\widehat{TRS}$ sont complémentaires : la somme de leurs mesures fait 90° .

Les angles $\widehat{JKM}$ et $\widehat{MKL}$ sont supplémentaires : la somme de leurs mesures fait 180° .

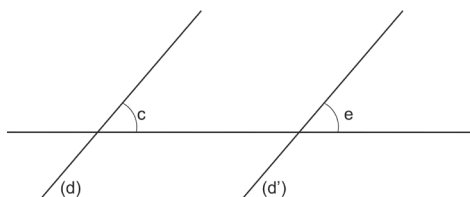
• Propriétés

Les angles a et b sont opposés par le sommet : ils sont toujours de la même mesure.



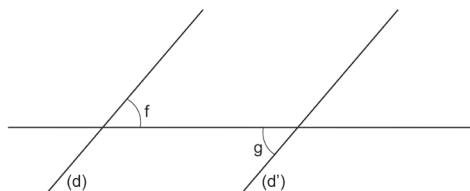
Les angles c et e sont correspondants :

Si $(d) \parallel (d')$ alors $c = e$ et réciproquement si $c = e$ alors $(d) \parallel (d')$.

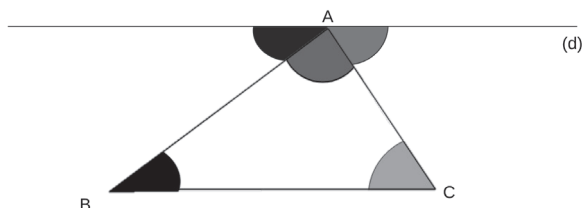


Les angles f et g sont alternes-internes :

Si $(d) \parallel (d')$ alors $c = e$ et réciproquement si $c = e$ alors $(d) \parallel (d')$.



Dans un triangle, la somme des angles fait 180° :



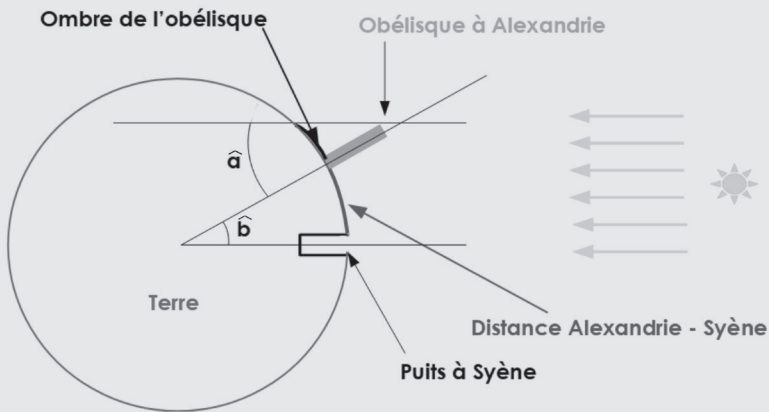
Sur cette figure, la droite (d) est parallèle à (BC) . On voit que les angles « noirs » sont alternes-internes, ainsi que les angles « gris clair ». Ils sont donc de même mesure.

Les trois angles en A font 180° , donc dans le triangle ABC , $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

→ Pour aller plus loin

Le calcul de la circonférence de la terre

C'est le mathématicien Ératosthène qui s'est occupé de cette mesure. Il avait remarqué que lorsque le soleil est à son zénith (à midi, donc), on peut voir son reflet dans le fond d'un puits, à Syène (actuelle Assouan). Mais au même moment, à Alexandrie, l'obélisque a une ombre ! À l'époque d'Ératosthène, on sait déjà que la terre est ronde. Cette ombre va donc lui permettre de calculer son rayon.

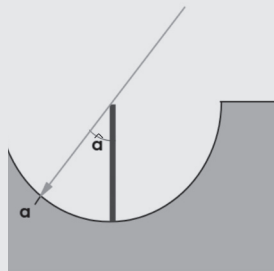


D'une part, Alexandria et Syène sont sur le même méridien, donc $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont dans le même plan.

D'autre part, les rayons du soleil sont considérés parallèles, car le soleil est très éloigné de la terre, et les deux angles $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont alternes-internes.

Donc les deux angles sont égaux.

Pour mesurer cet angle $\hat{a}$, Ératosthène utilise un gnomon circulaire, à Alexandrie :



Il trouve que l'angle $\hat{a}$ mesure un 50° d'un grand cercle,

Soit donc $\frac{360^\circ}{50} = 7,2^\circ$.

Ératosthène n'avait plus qu'à mesurer la distance Alexandrie-Syène. C'est ici que se pose le plus gros problème : comment a-t-il fait ?

Plusieurs hypothèses ont été émises : des caravanes faisaient régulièrement le trajet. Peut-être a-t-il calculé la distance cherchée en tenant compte de la vitesse moyenne des caravanes et du temps qu'elles mettaient pour faire le trajet. Il est possible aussi qu'il ait compté les pas des chameaux, qui sont réputés avoir un pas très régulier. Mais peut-être a-t-il utilisé les services d'un métreur, ou peut-être a-t-il fait une moyenne avec toutes ces mesures. Toujours est-il qu'il a fini par obtenir que la distance séparant les deux villes était de 5 000 stades.

Longueur d' 1° de méridien = $5\,000 : 7,2 \approx 700$ stades.

P = longueur d'un méridien $\approx 700 \times 360 \approx 252\,000$ stades.

Or un stade égyptien valait 157,5 m,

Ce qui nous donne donc $p \approx 252\,000 \times 157,5$
 $\approx 39\,690\,000$ m
 $\approx 39\,690$ km

Un résultat particulièrement précis pour l'époque, puisque les méridiens ont une longueur de 40 000 km !

Du côté de l'histoire

Ératosthène

(env. -276/-194)



Ératosthène est né en 276 av. J.-C. environ, à Cyrène, sur la côte sud de la Méditerranée (actuelle Libye). Jusqu'à l'âge de 40 ans, il séjourne à Athènes, puis il rejoint le roi Ptolémée III, à Alexandrie. Il devient le précepteur de son fils, futur Ptolémée IV, et assure des cours en tant que professeur à la bibliothèque. Il en est même le directeur. Il suit également les cours d'astronomie et de mathématiques d'Aristarque de Samos, avant de se lier d'amitié avec Archimède, lors des séjours en Égypte du savant sicilien.

En tant que directeur de la bibliothèque, Ératosthène a eu tout le loisir de consulter les papyrus. Il s'est intéressé à beaucoup de disciplines : philosophie, poétique, histoire, musique, mathématiques, astronomie, etc. C'est aussi un athlète confirmé, ce qui lui vaut le surnom de *pentathlos*. Ses élèves lui ont trouvé un autre surnom : β (bêta, 2^e lettre de l'alphabet grec). On n'est pas certain de l'explication : certains expliquent que, dans chaque discipline, il n'est que le second ; d'autres que cela vient de la numérotation de la classe où il enseigne. Apollonius, un autre professeur, serait surnommé ε.

Ératosthène décède à l'âge de 82 ans. Devenu aveugle, il se serait laissé mourir de faim parce qu'il ne pouvait plus lire, ni observer les étoiles.

CHAPITRE 5

Aire d'un triangle

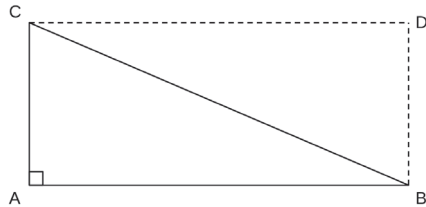
En géométrie, le triangle est une figure importante, qu'on retrouve dans les théorèmes de Thalès et de Pythagore, par exemple. Et comme c'est une figure fermée, on peut calculer son aire.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée en classe de 6^e.

● Aire d'un triangle rectangle

$$\text{Aire}(\triangle ABC) = \frac{\text{Aire}(\text{ABDC})}{2} = \frac{AB \times AC}{2}.$$

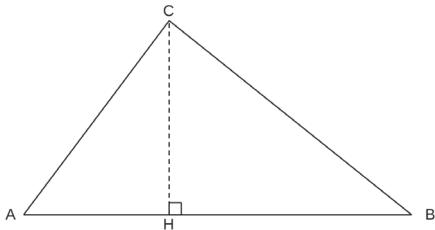


● Aire d'un triangle quelconque

Soit ABC un triangle et soit H le pied de la hauteur issue de C .

$$\text{Aire}(\triangle ABC) = \text{Aire}(\triangle ACH) + \text{Aire}(\triangle BCH)$$

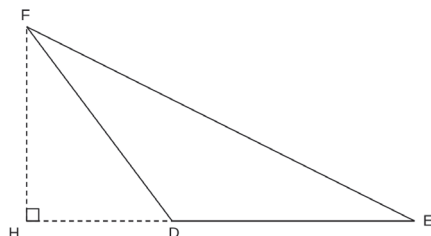
$$\text{Aire}(\triangle ABC) = \frac{AH \times HC}{2} + \frac{BH \times HC}{2}$$



En factorisant par $\frac{HC}{2}$, on obtient $\text{Aire}(\triangle ABC) = \frac{HC}{2} \times (AH + BH)$.

$$\text{Or } AH + BH = AB, \text{ donc } \text{Aire}(\triangle ABC) = \frac{HC}{2} \times AB = \frac{HC \times AB}{2}.$$

Attention, la hauteur peut parfois être extérieure au triangle :



Ici, $\text{Aire}(\text{FDE}) = \text{Aire}(\text{FHE}) - \text{Aire}(\text{FHD})$.

$$\text{Donc } \text{Aire}(\text{FDE}) = \frac{\text{FH} \times \text{HE}}{2} - \frac{\text{FH} \times \text{HD}}{2}.$$

En factorisant par $\frac{\text{FH}}{2}$, on obtient $\text{Aire}(\text{FDE}) = \frac{\text{FH}}{2} \times (\text{HE} - \text{HD})$.

$$\text{Or } \text{HE} - \text{HD} = \text{DE}, \text{ donc } \text{Aire}(\text{FDE}) = \frac{\text{FH}}{2} \times \text{DE} = \frac{\text{FH} \times \text{DE}}{2}.$$

D'une manière générale, on retient cette formule de la façon suivante :

$$\text{Aire d'un triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

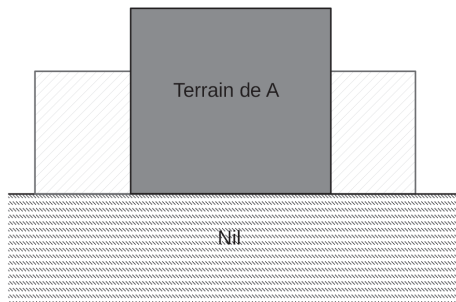
Du côté de l'histoire

Le redécoupage équitable des terres

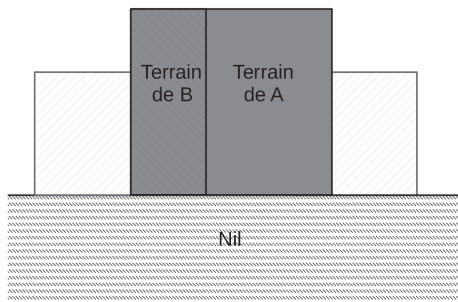
Dans l'Égypte ancienne, le Nil était très important : source d'eau vitale, il permettait en outre, par ses crues annuelles, d'enrichir le sol en limon. Mais ces inondations détruisaient les limites des terrains des agriculteurs. D'où la nécessité de redéfinir, chaque année, des zones de même aire que l'an précédent.

Premier problème

C'est l'objet de la propriété 43 du livre 1 des *éléments* d'Euclide. Le problème est le suivant : pour un agriculteur égyptien, il est important que son terrain soit au bord du Nil, afin d'avoir accès à l'eau :

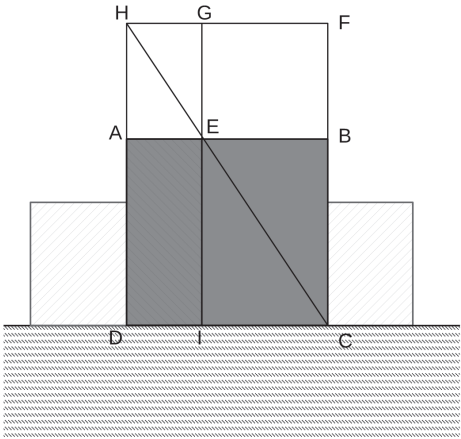


Si un nouvel agriculteur B arrive, il faut lui fournir un accès au Nil, mais comment faire ? Bien sûr, si l'on prend une partie du terrain de A, cela ne sera pas très équitable :



La solution proposée par Euclide est la suivante :

- on prolonge les côtés du terrain perpendiculaires au Nil ;
- on trace la diagonale (CE) , qui coupe (AD) en H ;
- on trace finalement (HF) , parallèle à (DC) .

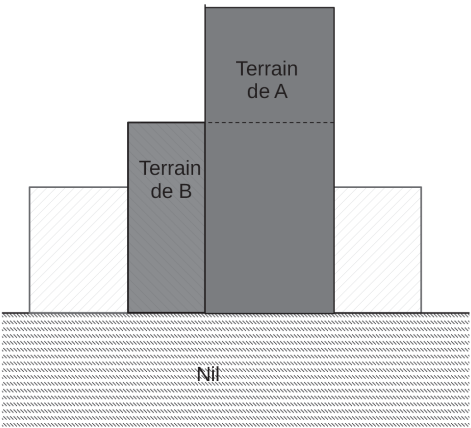


Sur la figure obtenue, les triangles HCF et HCD ont la même aire.

On voit également que les triangles ECB et ECI ont la même aire, ainsi que les triangles HEG et HEA .

On en déduit donc que les rectangles $AEID$ et $GFBE$ ont la même aire.

Ainsi, le redécoupage des terres peut être fait sans qu'aucun des agriculteurs ne soit lésé :



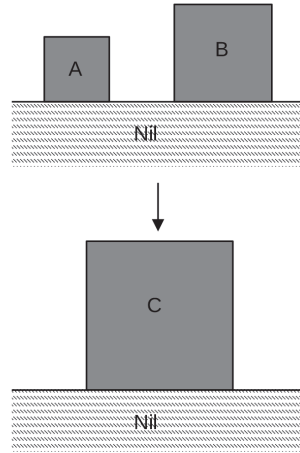
Deuxième problème

Un agriculteur possède deux terrains carrés sur le bord d'un Nil, Mais il souhaiterait n'en avoir qu'un, de surface égale à celle des deux premières :

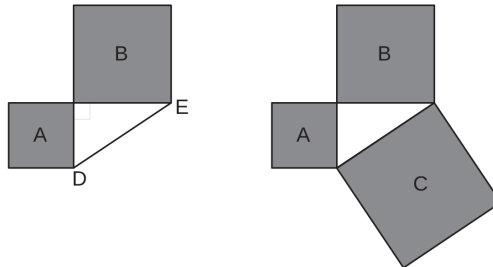
Notons a la longueur du côté du terrain carré A , b celle de B et c celle de C .

On doit donc avoir la relation $c^2 = a^2 + b^2$.

On reconnaît ici le célèbre théorème de Pythagore !



Pour répondre au problème de répartition, voici la méthode : on place sur une figure les deux carrés A et B , perpendiculaires l'un à l'autre, on trace le segment $[DE]$, qui sera le côté du carré que l'on cherche.

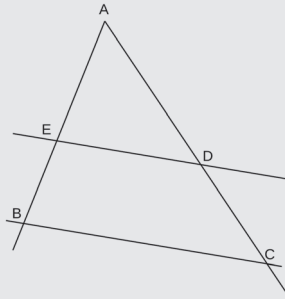


→ Pour aller plus loin

La démonstration du théorème de Thalès

C'est la proposition 2 du Livre VI des *éléments* d'Euclide : si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un côté du triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle.

Soit ABC un triangle, D un point de $[AC]$ et E un point de $[AB]$ tels que $(DE) \parallel (BC)$.



Les triangles BDE et CDE ont la même aire (1) :

$\mathcal{A}(BCE) = \frac{BC \times h}{2}$ et $\mathcal{A}(BCD) = \frac{BC \times h}{2}$, h étant la hauteur des deux triangles, qui est la même : c'est la distance entre les deux droites (ED) et (BC) .

Or $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BCE) + \mathcal{A}(AEC)$ et

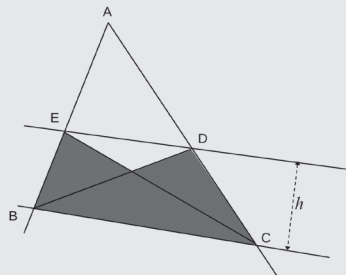
$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(ABD)$, donc

$\mathcal{A}(BCE) + \mathcal{A}(AEC) = \mathcal{A}(BCD) + \mathcal{A}(ABD)$.

Et donc d'après (1) : $\mathcal{A}(AEC) = \mathcal{A}(ABD)$.

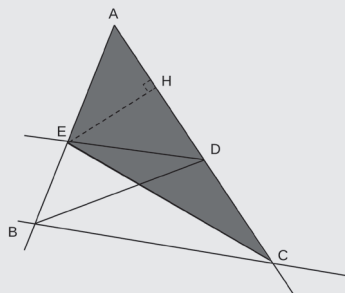
Dans le triangle AEC ,
le rapport des aires de AED à AEC est égal
au rapport des longueurs AD à AC :

$$\frac{\mathcal{A}(AED)}{\mathcal{A}(AEC)} = \frac{\frac{AD \times EH}{2}}{\frac{AC \times EH}{2}} = \frac{AD \times EH}{2} \times \frac{2}{AC \times EH} = \frac{AD}{AC}$$



Et de même, dans le triangle ADB ,
le rapport des aires de AED à ABD est égal
au rapport des longueurs AE à AB .

Or les deux rapports d'aire étant égaux,
on obtient que les rapports des longueurs
sont égaux également, par suite : $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$.



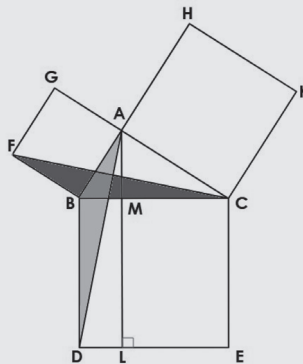
La démonstration du théorème de Pythagore

Le livre de Elisha Scott Loomis *The Pythagorean proposition* (1940) recense 367 démonstrations différentes de ce théorème. Les grands noms, Euclide, Fibonacci, Léonard de Vinci, Leibniz (...) y côtoient des maîtres d'école, des étudiants, des amateurs anonymes et même un président des États-Unis, James Abraham Garfield (1831-1881) !

Nous voyons ici la démonstration proposée par Euclide, mais écrite de manière moderne.

C'est la proposition 47 du livre 1 : dans les triangles rectangles, le carré décrit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABC un triangle rectangle en A . On construit des carrés sur les côtés $[BC]$, $[BA]$ et $[AC]$. Soit L le point de $[DE]$ tel que $(AL) \perp (DE)$.



$\widehat{BAC} = \widehat{BAG}$, donc A , C et G sont alignés.

De même B , A et H sont alignés.

et puisque $\widehat{DBC} = \widehat{FBA}$, alors $\widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC}$.

soit $\widehat{DBA} = \widehat{FBC}$.

Or $DB = CB$ et $BA = BF$

donc les triangles DBA et FBC sont semblables ; par conséquent, ils ont la même aire.

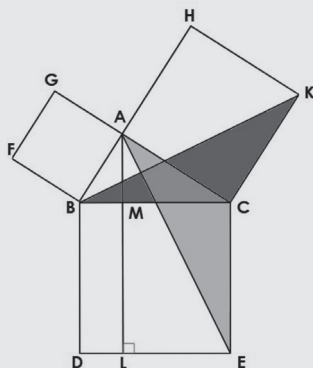
$$\text{Or } \text{Aire}(DBA) = \frac{BD \times BM}{2} = \text{Aire}(DBM) = \text{Aire}\left(\frac{BMLD}{2}\right)$$

$$\text{Et } \text{Aire}(FBC) = \frac{FB \times BA}{2} = \text{Aire}(FBA) = \text{Aire}\left(\frac{ABFG}{2}\right)$$



Donc $\text{Aire}(\text{BMLD}) = \text{Aire}(\text{ABFG})$

On démontre de la même façon que $\text{Aire}(\text{CMLE}) = \text{Aire}(\text{HKCA})$.



Par suite $\text{Aire}(\text{BMLD}) + \text{Aire}(\text{CMLE}) = \text{Aire}(\text{ABFG}) + \text{Aire}(\text{HKCA})$

Or $\text{Aire}(\text{BMLD}) + \text{Aire}(\text{CMLE}) = \text{Aire}(\text{BCED})$

et donc $\text{Aire}(\text{BCED}) = \text{Aire}(\text{ABFG}) + \text{Aire}(\text{HKCA})$

On peut donc en déduire que $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2$.

Du côté de l'histoire

Euclide

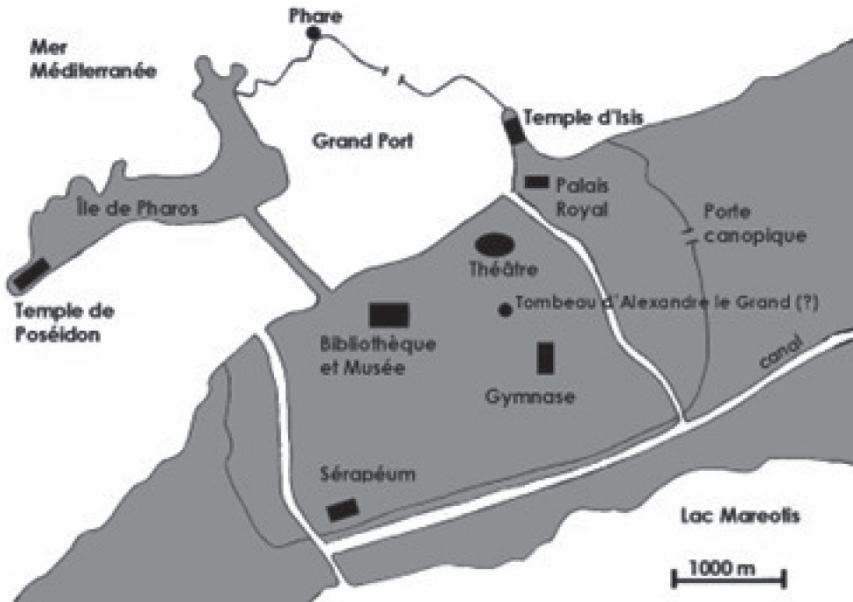
(env. -325/-265)

On ne connaît rien de la vie d'Euclide. À tel point que l'on peut douter de son existence : il est tout à fait possible que sous le nom d'Euclide se cachent plusieurs mathématiciens, ou qu'Euclide soit un professeur qui, à la manière de Pythagore, aurait enseigné à des disciples qui auraient poursuivi son œuvre après sa disparition. En effet, l'étude des différents livres des *Éléments* incite à penser qu'ils ont été écrits par plusieurs personnes, et non pas par un seul homme. Au Moyen Âge, on a même imaginé que le nom grec d'Euclide se traduisait par « la clé de la géométrie ». En effet, clé (κλεισ) et deux (δισ) se prononcent (très) approximativement comme le nom du mathématicien, et deux représente la droite, et par extension la géométrie.

Tout comme Pythagore, Euclide enseignait à ses élèves que l'apprentissage doit se faire pour l'amour du savoir. Alors qu'il venait de terminer une leçon, un élève voulut savoir quel profit il allait en retirer. Alors Euclide appela un esclave : « Donne-lui trois oboles [Ndlr : argent grec de l'époque], lui ordonna-t-il, puisqu'il faut absolument retirer un bénéfice de ce qu'il vient d'apprendre. »

La bibliothèque d'Alexandrie

Alexandrie a été fondée par Alexandre le grand. Malheureusement, il ne vécut pas suffisamment longtemps pour voir sa ville achevée. À sa mort, l'empire d'Alexandre a été partagé entre ses généraux. C'est Ptolémée qui obtint l'Égypte, en 306 av. J.-C. Il régna sous le nom de Ptolémée 1^{er}, et fonda ainsi la dynastie lagide, qui s'éteindra en -30, avec la mort de Cléopâtre. Ptolémée fonda deux institutions qui firent la gloire d'Alexandrie : le musée et la grande bibliothèque. Le nom grec de papyrus est « byblos », c'est pourquoi on appelle cet endroit bibliothèque, et le musée est appelé ainsi en l'honneur des muses. Le lieu est composé, outre la bibliothèque, d'une grande salle, pour les repas, d'une promenade, de logements pour les pensionnaires, de salles de dissection, d'observatoires pour les astronomes. Et peut-être aussi d'un jardin zoologique.



Le projet de Démétrios était de rassembler dans un même lieu tout le savoir du monde. Mais créer une bibliothèque est une entreprise considérable. Il faut évidemment des livres pour remplir les étagères : une formidable chasse aux manuscrits fut donc lancée. On sillonna les principaux marchés du monde méditerranéen, on acheta à prix d'or tous les écrits trouvés.

Il fallut construire un entrepôt, le sérapéum, pour ranger une partie des livres. Cette bibliothèque attira de nombreux savants, des philosophes, des scientifiques, des artistes. C'est à cette époque qu'Euclide aurait fréquenté le lieu.

Pour fabriquer des livres, il faut du papyrus, qui pousse en abondance sur les rives du Nil. Dès que le papyrus est coupé, il se dessèche. Il faut donc traiter la feuille immédiatement, ce qui ne peut se faire qu'à proximité de l'endroit où pousse la plante. L'Égypte a donc été le fournisseur exclusif de papyrus de tout le monde grec.

Après la construction de la bibliothèque à Alexandrie, des répliques ont poussé un peu partout, notamment à Pergame, qui se posait en grande rivale d'Alexandrie. Mais Ptolémée I^{er} était en position de monopole, avec le papyrus ; il en profita et décida d'interdire son exportation. Pergame, sans papyrus, ne pouvait plus recopier de livre. Mais ce fut un mauvais calcul : en désespoir de cause, on mit au point une méthode pour créer du papier à partir de peaux de bêtes et on inventa ainsi le parchemin ! Alexandrie perdit le monopole du papier...

Lors de la guerre l'opposant à Jules César, Pompée, défait à Pharsale, se réfugie à Alexandrie, où, à peine débarqué, il est assassiné par les hommes de Ptolémée XIII, pour complaire à César. Mais celui-ci, élimine les assassins : s'ensuit une guerre contre Ptolémée, à l'issue de laquelle la flotte égyptienne est incendiée par les Romains : c'est alors que le feu se serait propagé à la bibliothèque, 40 000 rouleaux auraient été détruits. Plus tard, Marc Antoine offrira à Cléopâtre 200 000 rouleaux provenant de la bibliothèque de Pergame pour remplacer les livres brûlés. Après la mort de Cléopâtre, la bibliothèque subit les aléas de l'histoire de l'Égypte : elle devient institution publique de la province romaine. Mais les querelles religieuses entre les différentes communautés provoquent des affrontements. En 391, l'évêque Théophile ordonne la destruction des temples, statues et livres païens, afin d'asseoir la religion chrétienne et en 642, Alexandrie fut envahie par l'émir Amrou ben al'as. Ce fut l'occupation musulmane. Le calife Omar aurait ordonné lui aussi la destruction des livres...

CHAPITRE 6

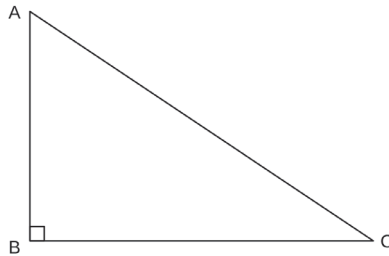
Trigonométrie

Au collège, la trigonométrie est une discipline qui permet de relier les longueurs d'un triangle rectangle à ses angles.

✓ Ce qu'on apprend au collège

C'est une notion abordée en classe de 3^e.

Soit ABC un triangle rectangle en B .



$[AC]$ est l'hypoténuse de ce triangle rectangle.

Et on dit que $[BC]$ est le côté opposé à l'angle $\hat{A}$, et que $[AB]$ est son côté adjacent.

Inversement, $[BC]$ est le côté adjacent à l'angle $\hat{C}$, et $[AB]$ est son côté opposé.

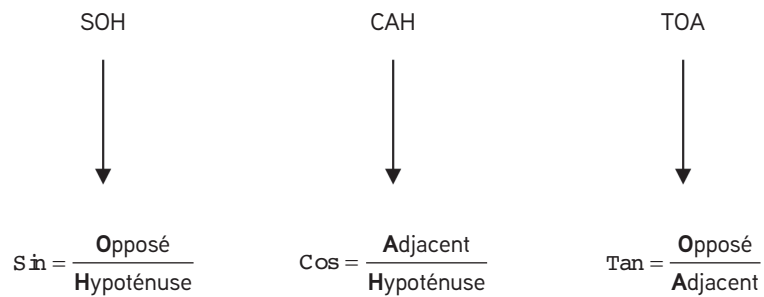
Les formules :

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}$$

Un truc pour retenir : SOH CAH TOA



Du côté de l'histoire

Le système métrique

Jusqu'au XVIII^e siècle, il n'existait aucun système de mesure unifié. En 1795, on comptait en France plus de 700 unités de mesure différentes : le doigt, la palme, le pied, la coudée... Les mesures de volume et celles de longueur n'avaient aucun lien entre elles. Pour chaque unité de mesure les multiples et sous multiples s'échelonnaient de façon aléatoire, ce qui rendait les calculs extrêmement laborieux. C'était une source d'erreurs et de fraudes lors des transactions commerciales, et les cahiers de doléances réclamaient une mesure universelle pour s'affranchir de l'arbitraire de ces unités de mesure seigneuriales.

Le 8 mai 1790, un décret propose à l'Académie des sciences de mettre au point un système d'unification des poids et mesures. La commission mise en place est composée de Lagrange, Laplace, Borda, Condorcet et Monge, entre autres. Ils ont alors l'idée d'assurer des mesures en les rapportant à un étalon emprunté à un phénomène naturel, un étalon universel qui ne serait fondé sur aucune vanité nationale, permettant l'adhésion de toutes les nations étrangères. On choisit la longueur du quart du méridien terrestre. C'est Pierre-François MÉCHAIN (1744-1804) et Jean-Baptiste DELAMBRE (1747-1822) qui vont se charger de mesurer ce méridien. Les travaux prirent près de sept ans de 1792 à 1798, et les conduisirent de Dunkerque à Barcelone (environ 1 47 km).

L'unité de mesure de base étant déterminée, on établit toutes les autres unités de mesure qui en découlent : le mètre carré (carré de 1 m de côté) et le mètre cube (cube de 1 m de côté), le litre (1 dm^3) et le kilogramme (masse d'un litre d'eau pure à 4 °C). Le système métrique décimal est alors institué le 18 germinal an III (7 avril 1795) par la loi « relative aux poids et mesures ».

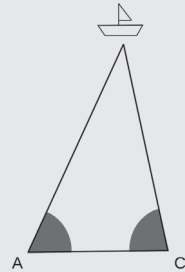
Le 14 août 1960, le mètre est redéfini comme étant égal à 1 650 763,73 fois la longueur d'onde, dans le vide, d'une radiation orangée de l'atome krypton 86. En 1983, le mètre est redéfini comme étant égal « à la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant $1/299\,792\,458$ de seconde ».

→ Pour aller plus loin

La mesure par triangulation

La triangulation est le processus qui permet de déterminer une distance en mesurant la longueur de l'un des côtés d'un triangle, ainsi que deux angles de ce triangle.

La méthode a un intérêt si nous voulons déterminer de grandes distances, mais dépend de la précision de mesure des angles ; on comprend aisément qu'une petite erreur de mesure d'un angle aura une grande répercussion sur l'estimation de la position de l'objet, particulièrement quand le troisième angle du triangle est très aigu. Il importe donc de placer les deux observateurs (A et C) suffisamment éloignés l'un de l'autre, afin d'augmenter le troisième angle du triangle et d'ainsi réduire l'impact des erreurs de mesure sur la précision de la mesure finale.



Jusque dans les années 1980, on utilisait essentiellement la triangulation pour mesurer les distances (en ligne droite et non à parcourir, la surface ayant un relief et une courbure).

La triangulation consiste à obtenir par des visées les angles d'un triangle dont les sommets sont choisis pour leur visibilité (tour, sommet, clocher...). On enchaîne ensuite ce premier triangle à un autre qui a un côté en commun avec lui, en poursuivant la chaîne le long du méridien à mesurer.

La loi des sinus

On notera $\hat{a}$ l'angle en A, $\hat{b}$ l'angle en B, etc.

Les angles $\hat{a}$ et $\hat{c}$ sont connus, donc l'angle $\hat{b}$ aussi :

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} - \hat{c}$$

$$\text{De plus : } \sin \hat{c} = \frac{BH}{BC} \text{ et } \sin \hat{a} = \frac{BH}{BA}$$

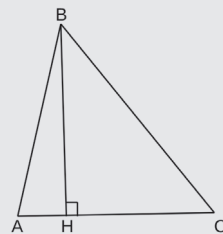
$$\text{donc } BC \sin \hat{c} = BH \text{ et } BA \sin \hat{a} = BH$$

$$\text{donc } BC \sin \hat{c} = BA \sin \hat{a}$$

$$\text{Par suite } AB = \frac{BC \sin \hat{c}}{\sin \hat{a}} \text{ (c'est la loi des sinus)}$$

Ainsi, dans le plan, la longueur AB s'obtient à partir de la longueur BC et des

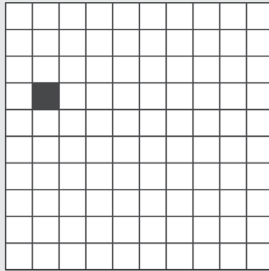
$$\text{angles } \hat{a} \text{ et } \hat{c} \text{ par la relation } AB = \frac{BC \sin \hat{c}}{\sin \hat{a}}.$$



Les autres mesures

Le mètre carré est défini comme unité de base pour la mesure des aires : il s'agit d'un carré d'un mètre de côté.

Construisons un décimètre carré et quadrillons-le de manière régulière tous les cm. On obtient $10 \times 10 = 100$ carrés de 1 cm de côté, comme celui grisé sur la figure.

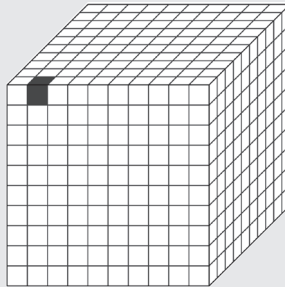


Ce qui nous indique que $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$.

De même, $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$ et il en est de même pour toutes les conversions de ces mesures d'aire.

Le mètre cube est défini comme unité de base pour la mesure des volumes : il s'agit d'un cube d'un mètre de côté.

Si l'on représente un cube d'un décimètre de côté que l'on remplit de petits cubes d'un cm de côté, on obtient 1 000 petits cubes, comme celui grisé sur la figure.



Ce qui nous indique que $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$, et il en est également de même pour toutes les conversions de ces mesures de volume.

Le litre est défini comme étant égal à 1 dm^3 . Et le kilogramme correspond à la masse d'un litre d'eau pure à 4 °C.

Notons encore une anecdote intéressante : on a voulu également changer la mesure des angles. L'unité utilisée était le degré, mais les scientifiques révolutionnaires ont voulu « décimaliser » cette mesure, en créant *le grade*, défini de la façon suivante : $100 \text{ grades} = 90^\circ$. Mais la corporation des marins, qui utilise beaucoup les angles sur ses cartes, a refusé cette modification : le grade est resté aux oubliettes.

→ *Pour aller encore plus loin*

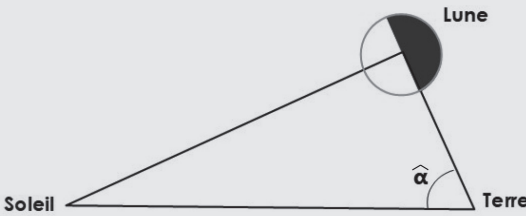
Distance Terre-Lune et distance Terre-Soleil

Ces calculs ont été élaborés par Aristarque. Il suppose que :

- la Lune reçoit sa lumière du Soleil ;
- la Terre est considérée comme un point, et comme le centre de l'orbite de la Lune ;
- lorsque la Lune nous paraît coupée en deux portions égales, elle offre à nos regards son grand cercle, qui détermine la partie éclairée et la partie obscure de cet astre ;

Notons *SLT* le triangle Soleil-Terre-Lune.

Lorsque la Lune est au dernier quartier, on voit un grand cercle de la Lune, et *SLT* est rectangle en *L*.



La Lune fait un tour complet autour de la terre en 29 jours. Et entre le dernier quartier et la nouvelle Lune (lorsque la Lune n'est plus visible de la terre), il se passe 7 jours.

Ainsi :

Durée (jours)	29	7
Angle (°)	360	$\hat{\alpha}$

Donc : $\hat{\alpha} \approx \frac{360 \times 7}{29} \approx 87^\circ$.

SLT est un triangle rectangle en *L* donc $\cos \hat{\alpha} = \frac{TL}{TS}$

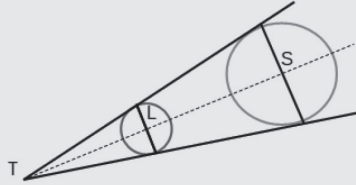
Soit donc $\frac{TS}{TL} = \frac{1}{\cos \hat{\alpha}} = \frac{1}{\cos 87^\circ} \approx 19,11$.

Par conséquent

distance Terre – Soleil $\approx 19 \times$ **distance Terre – Lune**



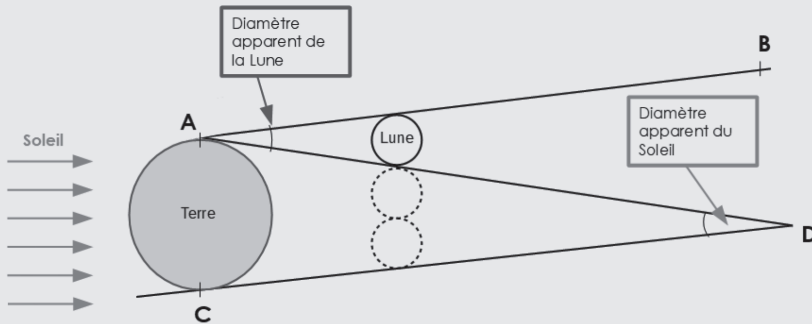
De plus, puisque les éclipses totales de Soleil sont possibles, les diamètres apparents du Soleil et de la Lune sont quasiment égaux (le diamètre apparent est l'angle sous lequel un observateur voit l'astre) :



Or d'après le théorème de Thalès : $\frac{TS}{TL} = \frac{\text{diamètre du Soleil}}{\text{diamètre de la Lune}} \approx 19$.

Soit donc **diamètre Soleil $\approx 19 \times$ diamètre Lune.**

Enfin, en observant les éclipses de Lune, il constate que les éclipses durent environ deux heures. Il remarque qu'à chaque heure la Lune avance par rapport à l'ombre de la Terre d'une fois son diamètre. Il en conclut que l'ombre provoquée par la Terre est deux fois plus grande que le diamètre de la Lune. (2)



Construisons un cylindre de diamètre la Terre. On vient de voir qu'on peut placer deux Lunes dans cette ombre.

De plus $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ADC}$ sont alternes-internes et $(AB) \parallel (CD)$

donc $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$.

Or $\widehat{ADC}$ est le diamètre apparent du Soleil et donc on peut considérer que $\widehat{BAD}$ est le diamètre apparent de la Lune, car ces deux diamètres apparents sont égaux. Donc on peut dire que dans le cylindre de diamètre Terre, on peut mettre 3 Lunes.

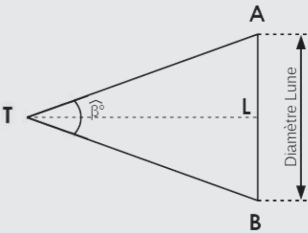
Et donc **diamètre Lune $\approx 1/3$ diamètre Terre.**

Soit donc diamètre Soleil $\approx \frac{19}{3}$ diamètre Terre.

Par suite **diamètre Soleil $\approx 6,33 \times$ diamètre Terre.**



D'autre part, on suppose que le diamètre apparent de la Lune est de $b = 2^\circ$ (3)



TAB est un triangle isocèle en T et L milieu de $[AB]$

donc TAL est rectangle en L et on peut écrire que $\widehat{\tan ATL} = \frac{LA}{TL} = \frac{AB}{2TL}$

soit $\tan 1^\circ = \frac{\text{diamètre de la Lune}}{2 \times TL}$

et donc $TL = \frac{\text{diamètre de la Lune}}{2 \times \tan 1^\circ}$

ou encore $TL \approx 9 \times \text{diamètre de la Lune}$.

Par suite **distance Terre-Lune $\approx 9,5$ diamètres Terre**

Et $TS \approx 19 \times TL$ donc **distance Terre-Soleil $\approx 180,5$ diamètres Terre**

Bien sûr, on constate que les résultats sont faux, à la lumière de nos connaissances actuelles.

(1) : l'angle $\hat{\alpha}$ n'est pas tout à fait juste : la bonne valeur est de $89,85^\circ$. Cela n'a l'air de rien, mais si on reprend le calcul, $\frac{1}{\cos 89,85} \approx 382$, au lieu de 19 !

(2) : en fait, l'ombre de la Terre peut contenir 2,6 lunes.

(3) : l'angle de la Lune n'est pas de 2° , mais de $0,5^\circ$. L'erreur est étonnante, étant donné qu'Archimède, dans l'Arénaire, cite Aristarque et lui fait utiliser la valeur de $0,5^\circ$. On peut penser alors que les valeurs prises par Aristarque dans son livre ne sont qu'hypothétiques, les calculs d'Aristarque ayant plus une valeur didactique que physique.

En prenant 12 742 km pour le diamètre de la terre :

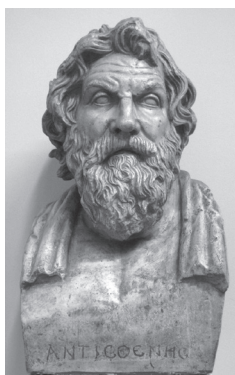
	Valeurs Aristarque	Valeurs Aristarque rectifiées	Valeurs réelles
Diamètre Lune	4 247 km	3 539 km	3 474,2 km
Diamètre Soleil	80 657 km	1 352 068 km	1 392 700 km
Distance Terre-Lune	121 049 km	405 588 km	384 400 km
Distance Terre-Soleil	2 299 931 km	154 934 571 km	149 600 000 km

Il faut néanmoins faire remarquer qu'Aristarque a réalisé une véritable prouesse : non seulement les raisonnements sont justes et particulièrement astucieux, les erreurs n'étant dues qu'à des difficultés de mesure, mais surtout il a eu une idée réellement révolutionnaire, lorsqu'on pense aux croyances de ses contemporains : pour eux, Soleil et Lune avaient la même taille, le Soleil était plus petit que la Terre... Et bien sûr, le Soleil n'était pas au centre du système.

Du côté de l'histoire

Aristarque

(-310/-230)



Aristarque est originaire de Samos, une petite île au large de la Turquie (tout comme Pythagore). Mais c'est à Alexandrie, au sein de la bibliothèque, qu'il réalise les calculs rassemblés dans son livre *Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*. Il est également l'un des précurseurs de la théorie héliocentrique : bien avant Galilée ou Copernic, il affirme que les étoiles et le Soleil sont immobiles et que la Terre tourne autour du Soleil. Sa théorie n'a pas retenu l'attention, seul Archimède en fait mention, lorsqu'il entreprend de calculer le nombre de grains de sable contenus dans l'univers.

CHAPITRE 7

Repérage sur la Terre

Pour se repérer dans le plan, on a à disposition les coordonnées cartésiennes (abscisse, ordonnée). Pour s'orienter dans l'espace, on peut également utiliser les coordonnées cartésiennes en ajoutant une troisième coordonnée : la hauteur. Cependant, on peut se repérer d'une autre façon, lorsqu'on se trouve sur Terre, par exemple à la manière des marins : on utilise alors latitude et longitude.

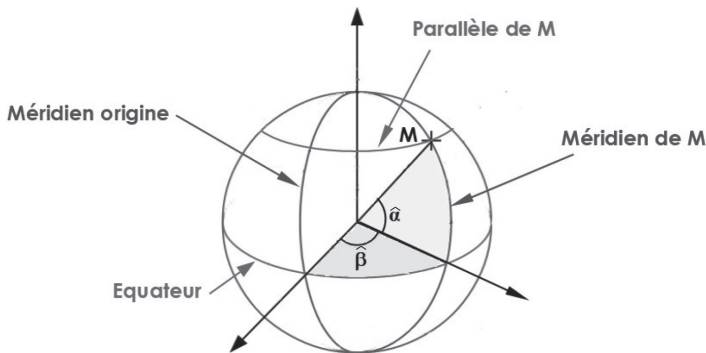
✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée en classe de 3^e.

Pour repérer un point M sur la Terre, on définit ses coordonnées géographiques :

$\hat{\alpha}$: latitude (Nord – Sud, à partir de l'équateur).

$\hat{\beta}$: longitude (Est – Ouest, à partir d'un méridien origine, à définir).



→ Pour aller plus loin

Mesures de latitude et de longitude

Malgré les apparences, latitude et longitude ne sont pas identiques : la façon dont on peut les mesurer est très différente.

Mesure de la longitude

La Terre est divisée en 360 méridiens séparés de 500 stades chacun, définissant ainsi le degré de longitude. Le méridien origine est fixé au point le plus à l'ouest connu à l'époque, soit les îles « Fortunata » (îles Canaries).

La Terre fait un tour complet, c'est-à-dire de 360° , en 24 h, soit 1 440 minutes.

Donc en 1 minute, elle tourne de $0,25^\circ$.

Le mouvement apparent du Soleil se fait d'Est en Ouest, donc le mouvement réel de la Terre s'effectue d'Ouest en Est. S'il est midi solaire au méridien origine, alors que l'heure solaire est de 3 heures 12 minutes après midi au point M , alors la longitude de M sera $0,25^\circ \times (3 \times 60 + 12) = 48^\circ$ Est.

Mais la détermination de la longitude en un point de la Terre nécessite de connaître l'heure au méridien d'origine, ainsi que l'heure au point où l'on se trouve. Au XVIII^e siècle, une horloge à ressort était d'une imprécision allant jusqu'à une heure par jour : le calcul de la longitude n'a donc été que très approximatif, causant quelques naufrages.

Mesure de la latitude

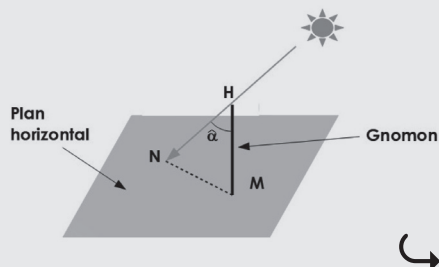
Cette mesure a d'abord été effectuée à l'aide d'un gnomon (cadran solaire), puis d'un astrolabe. Contrairement à la longitude, c'est une mesure qui a pu se faire très tôt, car elle ne dépend pas du déplacement de la Terre.

Avec un gnomon

À midi solaire en un point M de la Terre, le soleil est à la verticale de l'équateur (au point de l'équateur de même longitude).

L'angle $\hat{\alpha}$ dans l'ombre du gnomon (situé au point M) est égal à la latitude.

Le schéma en coupe de la Terre ci-dessous le montre (La distance Terre soleil étant très grande, on suppose les rayons du soleil parallèles).



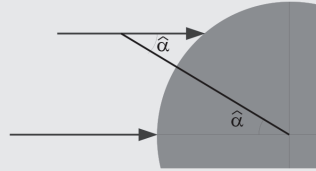
On retrouve l'angle $\hat{\alpha}$ comme angle « interne-alterne ».

Il s'agit donc de déterminer cet angle $\hat{\alpha}$.

Le triangle NMH est rectangle en M .

On connaît la longueur MH et on peut facilement mesurer la longueur NM .

Donc on peut calculer la tangente de l'angle $\hat{\alpha}$: $\tan(\hat{\alpha}) = \frac{NM}{MH}$
et par suite $\hat{\alpha} = \arctan\left(\frac{NM}{MH}\right)$.

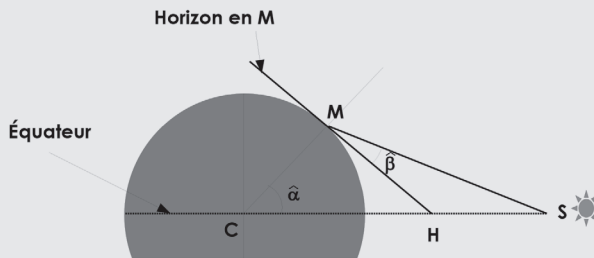


C'est ce principe qui a été utilisé par Ératosthène, pour mesurer la circonférence de la Terre.

Avec un astrolabe

Il permet de mesurer la hauteur d'un astre S en un point M de la Terre (on appelle cette opération « peser l'astre »). Malgré son nom, cette hauteur est un angle : c'est l'angle β formé par (MS) et l'axe de l'horizon en M .

La figure ci-dessous correspond à la situation à l'équinoxe, à midi solaire.



La connaissance de :

$\hat{\beta}$ (donné par l'astrolabe),

$L = CS$ (distance Terre-Soleil, que l'on connaît)

permettent de déterminer la latitude de M , c'est-à-dire l'angle $\hat{\alpha}$.

On admettra la formule suivante : dans le triangle MCS , $\frac{\sin \hat{S}}{MC} = \frac{\sin \hat{M}}{CS}$.

(C'est la loi des sinus, démontrée au chapitre 5)

Le triangle CMH est rectangle en M .

Or $\widehat{CSM} + \widehat{CMS} + \widehat{SCM} = 180^\circ$



$$\text{donc } \hat{S} + (\hat{\beta} + 90^\circ) + \hat{\alpha} = 180^\circ$$

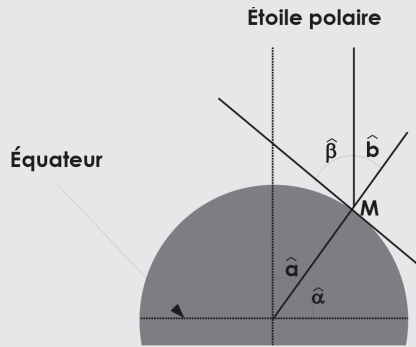
$$\text{et donc } \hat{S} = 180 - \hat{\alpha} - 90 - \hat{\beta} = 90 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}.$$

$$\text{Par suite, } \frac{\sin(90 - \hat{\beta} - \hat{\alpha})}{MC} = \frac{\sin(\hat{\beta} + 90)}{CS}.$$

Cela permet de déterminer la latitude $\hat{\alpha}$, après avoir mesuré la hauteur $\hat{\beta}$ du soleil.

De nuit

Dans l'hémisphère nord, on mesure la hauteur de l'étoile polaire, qui indique le nord, soit donc l'angle $\hat{\beta}$. On pèse donc l'étoile polaire. La latitude est l'angle $\hat{\alpha}$.



Les deux angles $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont correspondants :

Axe vertical de la Terre



En outre, la droite œil-étoile polaire et l'axe vertical de la Terre sont considérés comme parallèles (Ils ne le sont pas vraiment, mais à l'échelle terrestre, l'erreur est si infime qu'on ne la remarque pas).

Nous pouvons donc dire que $\hat{a} = \hat{b}$.

α et a sont complémentaires, donc $\hat{a} = 90^\circ - \hat{\alpha}$.

β et b sont complémentaires, donc $\hat{b} = 90^\circ - \hat{\beta}$.

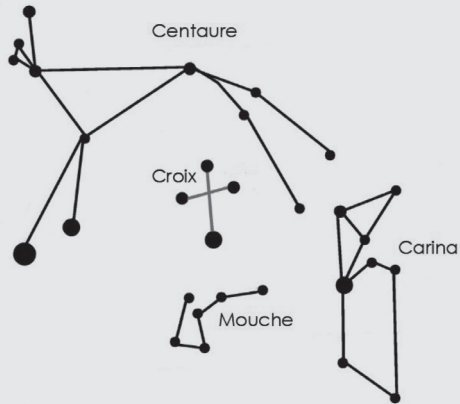
Et comme $\hat{a} = \hat{b}$, alors $90 - \hat{\alpha} = 90 - \hat{\beta}$

et donc $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.



Remarque

Dans l'hémisphère sud, l'étoile polaire n'est pas visible et il n'y a pas d'étoile suffisamment grosse qui indique le pôle Sud : on se sert d'une petite constellation, la croix du sud. Ce qui est nettement moins aisé.



Du côté de l'histoire

Ptolémée

(env. 100-168)



Son vrai nom est Claudios Ptolemaios et il n'a absolument rien à voir avec les Ptolémée de la dynastie lagide. Il a vécu à Alexandrie. C'est le plus célèbre astronome de l'antiquité. Il est également géographe. On pense qu'il était meilleur astronome que mathématicien, alors que c'est certainement le contraire : pour effectuer ses calculs, il a forcément étudié la géométrie du cercle et a d'ailleurs fait quelques avancées en trigonométrie.

L'œuvre la plus célèbre de Ptolémée est intitulée *Composition mathématique*. Cette œuvre a ensuite été traduite en arabe, sous le nom d'*Almageste* (« le plus grand »). Il s'agit d'un traité constitué de treize livres, où il rassemble toutes les connaissances astronomiques de son temps. Il a grandement repris les travaux d'Hipparque de Nicée et cet ouvrage reste la principale source sur les connaissances astronomiques antiques. Il aura une influence considérable et ses travaux ne seront remis en cause qu'au XVI^e siècle, avec le système héliocentrique de Copernic.

En géographie, il dessine une carte du monde et dresse des tables de latitude et longitude de 8 000 lieux. Il prédit même qu'au pôle Nord, le jour dure six mois, de même que la nuit et cela en restant à Alexandrie, soit à 6 500 km de là ! Mais il évalue la circonférence de la Terre à 180 000 stades, alors qu'Ératosthène avait calculé 252 000 stades. On dit que Christophe Colomb se serait basé sur ses calculs pour entreprendre son voyage qui devait l'emmener en Inde et qui l'a fait accoster en Amérique. Si Christophe Colomb avait pris en considération les calculs d'Ératosthène, peut-être ne serait-il jamais parti ?

→ Pour aller plus loin

L'astrolabe

L'astrolabe désigne un instrument de mesure très ancien, dont l'histoire remonte au II^e siècle de notre ère. Sa construction et son usage ont été perfectionnés par les plus grands astronomes arabes dès le VIII^e siècle, et son emploi se développe en Occident à la fin du X^e siècle. Ce sont toutefois les Portugais qui aboutissent à partir de 1485 à des progrès décisifs en adaptant l'astrolabe à la navigation maritime.



Le plus souvent fabriqués en laiton, en bronze ou en argent, les astrolabes sont donc métalliques ; néanmoins, quelques-uns sont construits en bois, encollés de papier.

L'astrolabe nautique se présente comme un disque d'une épaisseur de quelques millimètres et de 20 à 40 cm de diamètre. Ce disque est gradué en degrés. D'autre part, une alidade munie de viseurs est en rotation sur le centre. Ce disque est ajouré pour donner moins de prise au vent et était alourdi pour augmenter sa stabilité sur le bateau. Ainsi, son poids variait entre 2 et 6 kg.

En haut était fixé un anneau qui permettait de tenir librement l'astrolabe en le suspendant au pouce ou bien au mât du navire.

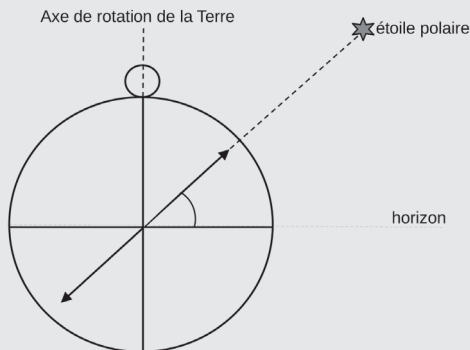
Utilisation

La couronne graduée matérialise le plan méridien.

L'axe vertical de l'astrolabe fournit l'axe de rotation de la Terre.

L'alidade coïncide avec la direction de l'astre et la valeur lue sur la couronne graduée fournit la valeur de l'angle que fait l'axe de l'astrolabe avec l'axe vertical.

L'utilisateur s'assure d'abord que la ligne d'horizon partage en deux parties égales le disque de l'astrolabe. L'alidade est alors amenée dans la direction de l'astre :



L'étoile polaire est visée en tournant l'alidade jusqu'à ce qu'elle soit vue par les deux bouts. La graduation cherchée est indiquée au bout de la flèche, et la latitude est égale à la valeur indiquée sur la couronne.

Pour viser le soleil, afin d'éviter d'être ébloui, le navigateur devait tenir l'astrolabe de façon à permettre aux rayons de passer à travers le viseur du haut, en tournant l'alidade jusqu'à ce qu'un rayon tombe sur le trou du viseur inférieur : le rayon indique la graduation cherchée, et la valeur de la latitude est de 90 moins la graduation lue.

Notons que les astrolabes sont souvent munis, sur leur recto, de pièces permettant de calculer l'heure équatoriale (ou solaire).

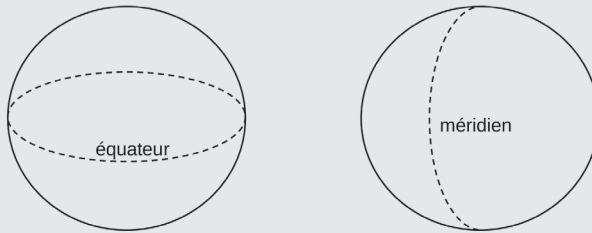
→ Pour aller encore plus loin

Les mesures nautiques

Le mille marin

C'est une unité de mesure de longueur répandue en navigation.

Le repérage sur une carte marine se fait par la latitude et la longitude, exprimées en degrés et minutes. Le mille marin correspond à la longueur d'un arc de méridien d'une minute (un méridien est un demi-grand cercle passant par les pôles).



La Terre est une sphère légèrement écrasée : la longueur de l'équateur vaut 40 074 km, alors que dans le sens Nord-Sud, le périmètre vaut environ 40 008 km.

Un méridien mesure donc 20 004 km.

Ainsi, un arc de 1° mesure $\frac{20\,004}{180} \approx 111,13$ km

et un mille marin $\frac{111,13}{60} \approx 1,852$ km.

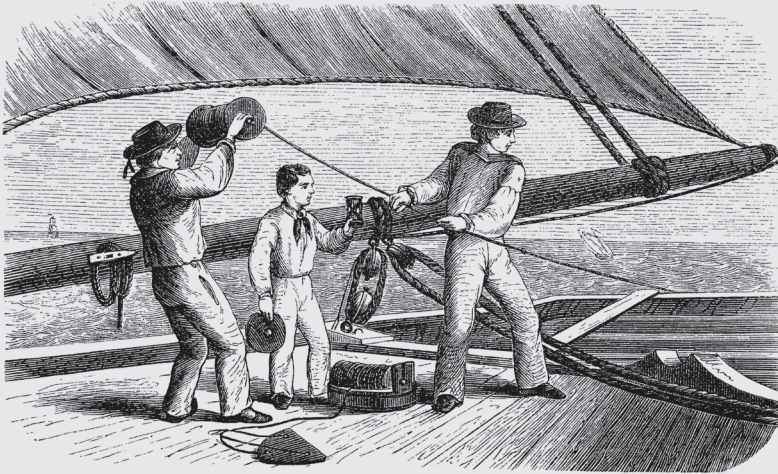
(Attention, il ne faut pas confondre mille marin [mil] avec le mile anglais [majl], qui vaut 1,609 km.)

Le nœud marin

C'est une mesure de vitesse pour les bateaux, qui date du XVI^e siècle. Ce sont les marins anglais qui ont eu cette idée.

Pour mesurer la vitesse de leur bateau, les marins se plaçaient à la poupe du bateau (à l'arrière) et lançaient dans la mer une corde à nœuds à laquelle était accrochée une planche en bois triangulaire, nommée « loch » [lok]. Les nœuds étant régulièrement espacés, on laisse filer la corde durant trente secondes (comptées avec un sablier), puis on la remonte : on compte alors le nombre de nœuds qui se sont déroulés.





Les nœuds sont espacés de $\frac{1}{120}$ de mille (env. 15,4 mètres).

Donc 1 nœud = $2 \times \frac{1}{120} \text{ mille/m in} = \frac{1}{60} \text{ mille/m in} = 1 \text{ mille/h}$.

C'est-à-dire 1 nœud = 1,852 km/h.

Pour avoir une petite idée de ce que cela représente :

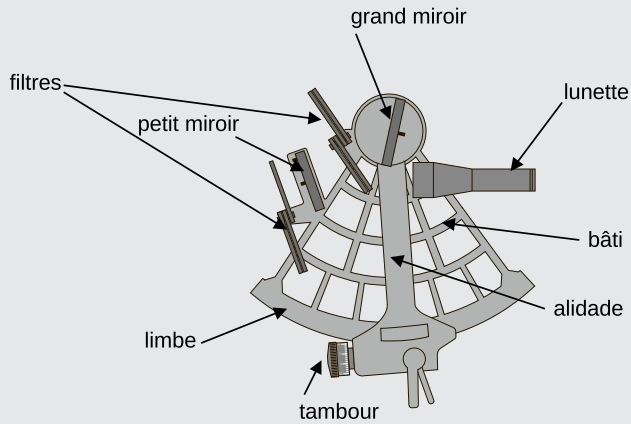
- Les bateaux à voiles avancent généralement à une vitesse de 5 à 8 nœuds en fonction de la force du vent (soit environ 9 à 15 km/h).
- Les bateaux à moteur, eux, ont une vitesse moyenne de navigation de 5 ou 6 nœuds (soit environ 10 km/h).

Le sextant

Le sextant est un instrument de navigation servant à mesurer la distance angulaire entre deux points. Il a été inventé simultanément par deux scientifiques, indépendamment l'un de l'autre, vers 1730 : John Hadley (1682-1744) et Thomas Godfrey (1704-1749).

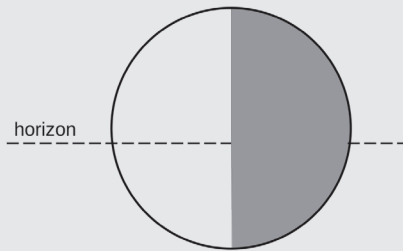
Le sextant est utilisé principalement pour faire le point sur un bateau (ou un avion) : on mesure la hauteur angulaire du soleil à midi, ce qui permet de déterminer la latitude du point de l'observation. Il est bien plus pratique qu'un astrolabe, car l'angle est mesuré directement. De plus, on tient le sextant à hauteur des yeux, alors que l'astrolabe nécessite d'être suspendu, à bout de bras, ou par un autre marin. Bien que les systèmes de positionnement par satellites soient plus efficaces, les sextants sont toujours utilisés : chaque navire marchand doit en avoir un à son bord.





Mesure

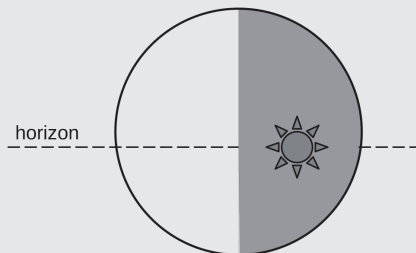
La lunette est alignée avec le petit miroir, qui est fixé au bâti de l'instrument. Ce miroir est à moitié transparent :



Le navigateur peut voir l'horizon directement. Le petit miroir réfléchit également l'image du grand miroir où l'on voit l'astre.

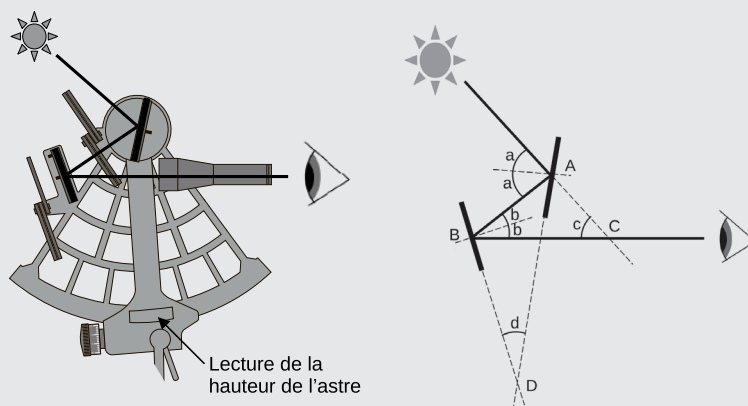
Le grand miroir est mobile et s'incline avec l'alidade. En bougeant l'alidade, on change l'angle entre les deux miroirs.

Il faut bouger l'alidade de manière à faire coïncider l'astre avec l'horizon :



La hauteur de l'astre est lue sur le limbe ; un tambour permet d'affiner la visée. (Afin de ne pas s'abîmer la vue, les sextants sont munis de filtres.)

Explications :



On note A le grand miroir et B le petit.

La somme des angles d'un triangle fait 180° :

Dans ABD , $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ$.

Donc $(90^\circ - a) + (90^\circ + b) + d = 180^\circ$.

Ainsi $90^\circ - a + 90^\circ + b + d = 180^\circ$ et donc $d = a - b$.

D'autre part dans ABC , $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$.

Ainsi : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$, soit $(180^\circ - 2a) + 2b + c = 180^\circ$.

Donc $180^\circ - 2a + 2b + c = 180^\circ$ ou encore $c = 2(a - b)$.

Par suite $d = 2c$.

Sur le limbe, on lit la mesure de l'angle d , qui correspond à deux fois la hauteur de l'astre. Les degrés du limbe sont donc des demi-degrés.

Précision des mesures

La lecture d'un sextant bien réglé permet une précision de $0,2'$ d'arc, ce qui correspond à une précision de 0,2 mille marin (370 m). Mais en réalité, dans les conditions où sont prises les mesures, la précision est plutôt de 2 à 5 milles : ne pas oublier que sur un bateau, il y a le mouvement et les conditions météo qui ne facilitent pas toujours la tâche.



Il faut faire en outre quelques rectifications :

La hauteur réelle est donnée par la formule

$$h = d + (\varepsilon + c) - d - R + P \pm \delta :$$

- $(\varepsilon + c)$ sont les erreurs de l'instrument (excentricité et collimation) ;
- d est la dépression de l'horizon : la mesure ne se faisant pas au niveau du sol, l'horizon visible est plus éloigné que l'horizon réel ;
- R est la réfraction astronomique : lorsque la lumière passe à travers un milieu, ses rayons sont réfractés. Plus l'atmosphère est épaisse, plus les rayons sont réfractés ;
- P est la parallaxe : les mesures devraient être prises depuis le centre de la Terre ;
- δ est le demi-diamètre de l'astre : à la vue, il faut placer le centre de l'astre au niveau de la ligne d'horizon. On peut également, ce qui est plus sûr, placer le bas (ou le haut) de l'astre au niveau de la ligne d'horizon, et suivant les cas, ajouter ou soustraire le demi-diamètre.

Pour la lune et le soleil, les éphémérides donnent les valeurs de $-d - R + P \pm \delta$.

Pour les étoiles et planètes, δ est négligeable, ainsi que P (sauf pour Mars et Venus). Les valeurs nécessaires sont fournies par les éphémérides.

CHAPITRE 8

Homothéties

Les transformations du plan sont des fonctions qui déplacent les points. Au collège, on voit les symétries centrale et axiale, la translation et la rotation (**voir annexe 4**). L'homothétie est également une transformation du plan, qui ne conserve pas les longueurs. Elle est la représentation mathématique d'un agrandissement ou d'une réduction, et est en lien avec le théorème de Thalès.

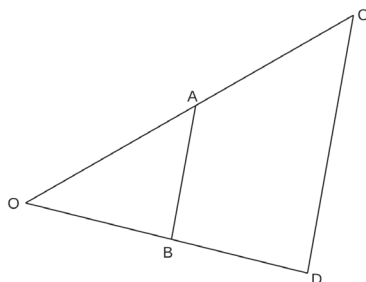
✓ Ce que l'on apprend au collège

C'est une notion abordée en classe de 3^e.

Sur cette figure, $(AB) \parallel (CD)$.

On reconnaît la configuration du théorème de Thalès, qui nous permet d'établir que

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}.$$



On peut également considérer l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{OA}{OC}$:

Par cette homothétie, le point A a pour image le point C :

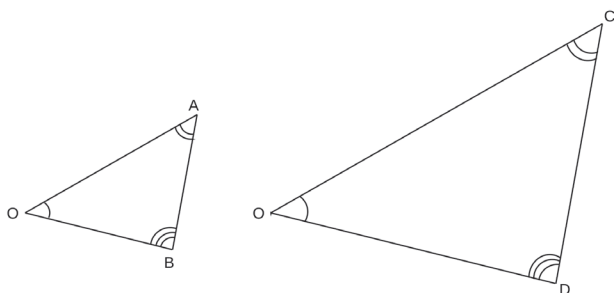
$$OA = \frac{OA}{OC} \times OC \text{ donc } OA = k \times OC.$$

De même, le point B a pour image le point D .

Et le triangle OAB a pour image le triangle OCD :

OCD est un agrandissement de OAB de rapport k (et inversement OAB est une réduction de OCD , par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$).

On dit alors que les triangles OAB et OCD sont semblables :

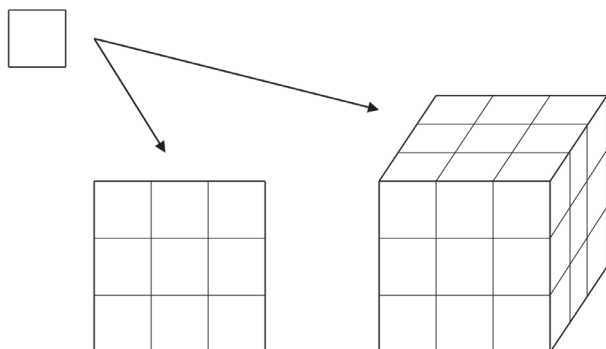


Les mesures des angles sont égales et les longueurs sont proportionnelles.

● Effet sur les aires et les volumes

Si une figure est agrandie dans un rapport de 3, alors :

- ses longueurs seront multipliées par 3 ;
- son aire sera multipliée par $3 \times 3 = 3^2 = 9$;
- son volume sera multiplié par $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.



→ Pour aller plus loin

King Kong

Notons que la propriété concernant les aires et les volumes a une conséquence inattendue : en imaginant une machine capable d'agrandir un organisme quelconque, est-il possible de considérer un singe de la taille d'un gratte-ciel ? C'est une question que s'était posée déjà en son temps Galilée, bien qu'il ne connût pas King Kong : *« Si l'on voulait conserver chez un géant particulièrement grand la même proportion qu'ont les membres chez un homme ordinaire, il faudrait, ou trouver une matière bien plus dure et plus résistante pour en constituer les os, ou bien admettre que sa robustesse serait proportionnellement beaucoup plus faible que celle des hommes de taille médiocre ; sinon, à augmenter sans mesure sa hauteur, on le verrait plier sous son propre poids et s'écrouler. »* [Galilei 1638, Leçons sur l'Enfer de Dante]



Effectivement : d'une façon générale, plusieurs arguments nous permettent d'affirmer que les monstres comme King Kong ne peuvent pas exister.

Tout d'abord, il faut considérer leur masse : celle-ci est proportionnelle au volume, donc un singe qui aurait multiplié sa taille par 10, par exemple, aurait une masse multipliée par 1 000. Mais dans ces conditions, les os de l'animal ne pourraient le soutenir : ce sont eux qui soutiennent la masse corporelle de l'animal, et leur capacité dépend de deux facteurs : la résistance de la matière osseuse et leur section. Or cette section n'est multipliée que par 100. Ce ne sera donc pas suffisant pour compenser l'augmentation de la charge.

Ensuite, un autre facteur intervient : les animaux à sang chaud perdent de l'énergie, car ils sont généralement plus chauds que le milieu dans lequel ils vivent. La perte de chaleur se fait par la surface externe du corps, elle est donc proportionnelle à l'aire du corps, donc multipliée par 100 dans le cas d'un animal agrandi 10 fois. Par contre, l'énergie nécessaire au maintien de la température du corps est produite par une activité métabolique qui est proportionnelle au volume du corps, donc 1 000 fois plus importante dans la version géante de l'animal. Conséquence, le géant risque la surchauffe.

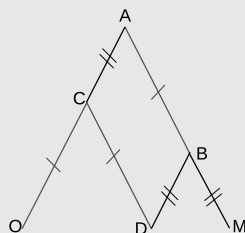
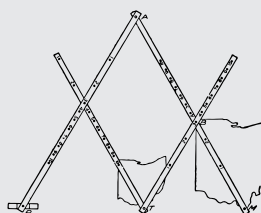


→ Pour aller encore plus loin

Le pantographe

C'est un appareil qui permet de réaliser des agrandissements ou des réductions d'une figure, en utilisant les propriétés des homothéties. Il a été inventé vers 1630 par l'astronome allemand Christoph Scheiner.

C'est un système articulé composé de quatre tiges, comme l'indiquent les figures ci-dessous :



$ABDC$ est un parallélogramme. Le point O est fixe, on place un stylet en D et un crayon en M . Avec le stylet, on suit le tracé de la courbe à reproduire. Elle est dessinée par le crayon placé en M . On obtient ainsi un agrandissement. En inversant le stylet et le crayon, on obtient alors une réduction.

Par construction, on a les relations suivantes : $OC = CD = AB$ et $CA = BD = BM$. Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus, concernant les triangles OCD et OAM :

$\widehat{COD} = \widehat{AOM}$, $\widehat{OCD} = \widehat{OAM}$ car ces deux angles sont correspondants et $(CD) \parallel (AB)$, et donc on a également $\widehat{CDO} = \widehat{AMO}$. Les triangles OCD et OAM sont donc semblables.

Par suite, les points O , D et M sont alignés et les points D et M sont images l'un de l'autre par une homothétie de centre O .

Si M est l'image de D , alors le rapport de l'homothétie est $k = \frac{OM}{OD}$. Dans ce cas, $k > 1$.

Si D est l'image de M , alors le rapport de l'homothétie est $k = \frac{OD}{OM}$. Dans ce cas, $k < 1$.

CHAPITRE 9

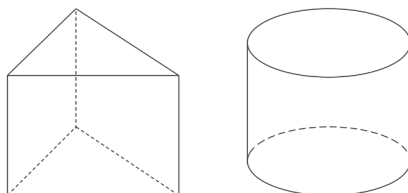
Les figures de l'espace

Au collège, on étudie surtout la géométrie plane. Cependant, à chaque niveau, sont abordées les propriétés des figures essentielles de l'espace.

✓ Ce que l'on apprend au collège

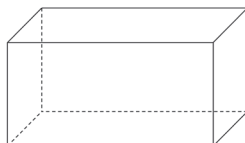
On en voit la description dès la 6^e.

• Les prismes et les cylindres



Les prismes sont des figures composées de deux bases identiques (des triangles sur la première figure ci-dessus), ainsi que de faces latérales rectangulaires. Dans le cas du cylindre, les deux bases sont des cercles et la face latérale est un rectangle (comme une étiquette sur une boîte de conserve).

Le pavé droit (ou parallélépipède rectangle) est un prisme particulier : ses deux bases sont des rectangles :

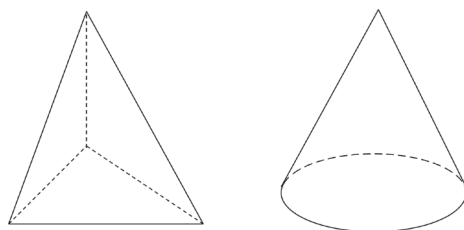


Le cube est un prisme particulier également : toutes ses faces sont des carrés.

• Les pyramides et les cônes

Une pyramide est un polygone surmonté d'un sommet.

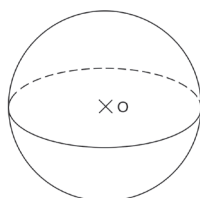
Un cône est un cercle surmonté d'un sommet.



Les pyramides égyptiennes sont des pyramides particulières : ce sont des pyramides régulières (voir ci-dessous) à base carrée.

• La sphère

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $OM \leq R$.



→ Pour aller plus loin

Les solides de Platon

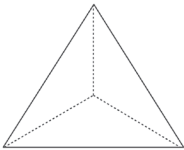
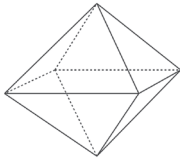
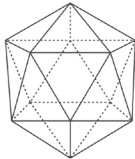
Les polygones réguliers, c'est-à-dire les figures planes dont les côtés sont tous de la même longueur et qui sont inscrits dans un cercle sont en nombre infini : il y a le triangle équilatéral (3 côtés), le carré (4 côtés), le pentagone régulier (5 côtés) et ainsi de suite.

Par contre, dans l'espace, il n'y a que cinq solides réguliers. Le philosophe grec Platon est le premier à démontrer qu'il n'existe pas d'autres solides réguliers.

Ce qu'ils ont de remarquable :

- Ce sont des polyèdres réguliers et convexes.
- Leurs faces sont des polygones réguliers convexes tous identiques.
- Ils possèdent une sphère inscrite.
- Ils sont inscriptibles dans une sphère.

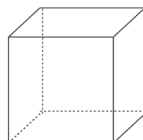
Ces cinq solides furent utilisés par Platon pour symboliser les cinq éléments du Monde : le feu, l'air, l'eau, la terre et l'univers. Aristote a nommé ce cinquième élément l'éther, qui contient tous les autres éléments.

Le tétraèdre : Il représente le feu, la pointe du solide évoquant la flamme.	
L'octaèdre : Il représente l'air.	
L'icosaèdre : Il représente l'eau, qui s'échappe de la main comme si elle était faite de boules minuscules.	



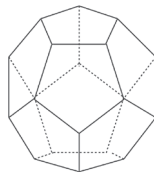
L'hexaèdre :

C'est l'autre nom du cube.
Il représente la terre,
car c'est le solide le plus stable.



Le dodécaèdre

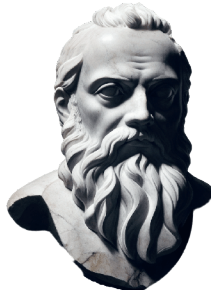
Il représente l'univers, le Tout,
car c'est le solide qui ressemble
le plus à la sphère.



Du côté de l'histoire

Platon

(-428/-348)



Platon naît à Athènes en -428 et mourut en -348. Issu d'une famille aristocratique, il reçoit une éducation poussée : il étudie les arts, la littérature, l'arithmétique, puis la géométrie et l'astronomie. Il fait également des exercices physiques. D'ailleurs, Platon n'est pas son véritable nom, il s'appelle en fait Aristoclès. C'est son professeur de gymnastique qui l'a surnommé *platon* : cela signifie « le large », en référence à sa forte musculature. Vers 20 ans, il rencontre Socrate et suit son enseignement. Mais en -403, Socrate est accusé d'impiété et de corruption de la jeunesse : il est condamné à mort. En -387, Platon fonde sa propre école, dans un ancien gymnase, appelé « Académie ». C'est un immense succès. Il aura, entre autres, Aristote pour élève. L'école survivra à Platon : elle ne sera dissoute qu'en 529, par l'empereur Justinien, qui voulait détruire ce lieu d'enseignement des idées païennes.

Platon est avant tout un philosophe. Mais il a une grande culture mathématique. Il porte un grand intérêt à cette matière, en témoigne l'inscription sur le fronton de l'Académie :

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Il introduit la notion d'idée, dans *Le Ménon*. L'idée d'un objet est sa représentation parfaite, immuable, en opposition à l'objet matériel, imparfait, changeant. En géométrie, cela s'applique aux dessins, imparfaits, en comparaison avec leur représentation idéale. En fait, les mathématiciens raisonnent à partir des objets idéaux, les dessins n'en étant que des représentations imparfaites. Cela nécessite donc de donner des définitions claires de ces objets idéaux. De plus, raisonner sur les idées impose aux mathématiciens le raisonnement déductif : les dessins ne constituent plus une preuve.

→ *Pour aller encore plus loin*

La formule d'Euler

F = nombre de faces
 S = nombre de sommets
 A = nombre d'arêtes

Solide	F	S	A	$F + S - A$
Tétraèdre	4	4	6	2
Hexaèdre	6	8	12	2
Octaèdre	8	6	12	2
Dodécaèdre	12	20	30	2
Icosaèdre	20	12	30	2

On doit à Leonhard Euler (1707-1783) la formule suivante :

Si un polyèdre convexe de l'espace a S sommets, A arêtes et F faces,

Alors $F + S - A = 2$.

CHAPITRE 10

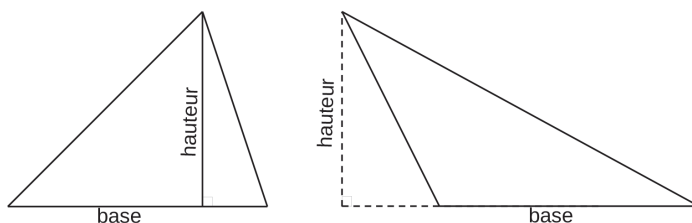
Les aires et les volumes

Une des préoccupations que l'on peut avoir très naturellement en considérant les figures du plan, c'est de calculer leur aire ; et en ce qui concerne l'espace, c'est le calcul de leur volume.

✓ Ce que l'on apprend au collège

On aborde cette notion à chaque niveau.

• Aire d'un triangle



$$\text{Aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

• Cas du cercle, du disque et de la sphère

Périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R$.

Aire d'un disque : $A = \pi R^2$.

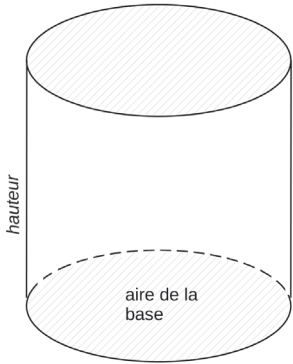
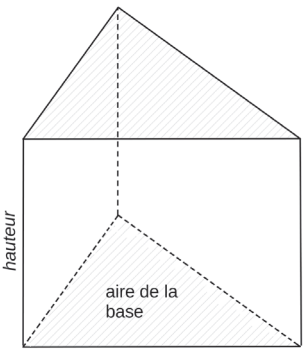
Aire de la sphère : $A' = 4\pi R^2$.

Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

On remarque que dans chaque formule, le nombre π intervient. Pour le périmètre (dimension 1), il est multiplié par R ; pour les aires (dimension 2), il est multiplié par R^2 ; pour les volumes (dimension 3), il est multiplié par R^3 . Il ne reste plus qu'à se rappeler le coefficient de multiplication :

pour P : 2	pour A : 1	pour A' : 4	pour V : $\frac{4}{3}$.
--------------	--------------	---------------	----------------------------

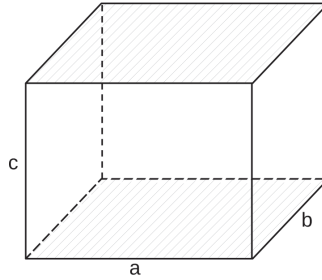
• Volume d'un prisme ou d'un cylindre



$V = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$.

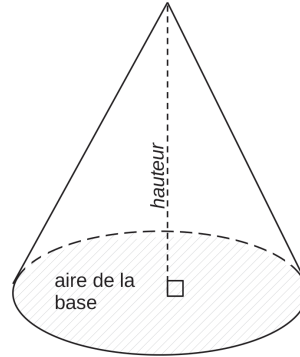
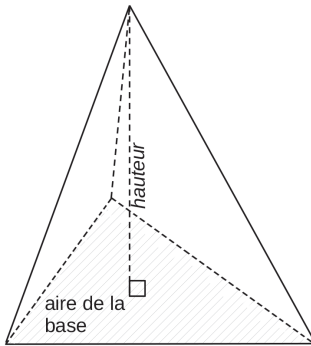
Pour un cylindre, la base étant un disque (de rayon R), on obtient $V = \pi R^2 \times \text{hauteur}$.

• Volume d'un parallépipède droit



$V = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur} = a \times b \times c.$

• Volume des pyramides et des cônes



$V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$

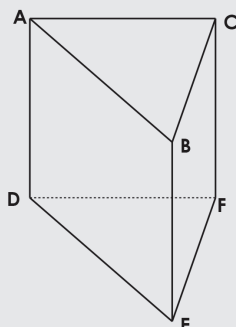
Pour un cône, la base étant un disque (de rayon R), on obtient $V = \frac{\pi R^2 \times \text{hauteur}}{3}.$

→ Pour aller plus loin

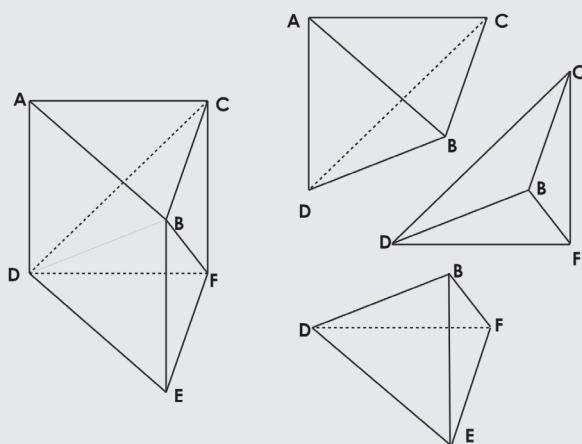
Il s'agit ici de faire le lien entre le volume d'un prisme et d'une pyramide.

Étape 1

Soit un prisme $ABCDEF$ à base triangulaire.



On peut le découper en trois pyramides :



Les pyramides ayant même base et même hauteur sont de même volume.

Pour la pyramide $ABCD$, si on choisit ABC pour base, elle a pour hauteur AD .

Pour la pyramide $BEFD$, si on choisit DEF pour base, elle a pour hauteur EB .

Comme ABC et DEF sont identiques et comme $AD = EB$ (hauteur du prisme), alors elles ont le même volume.

Pour la pyramide $BCDF$, on choisit CDF pour base

et pour la pyramide $ABCD$ on choisit la base ACD .



Or $ACDF$ est un rectangle, donc les deux bases sont identiques.

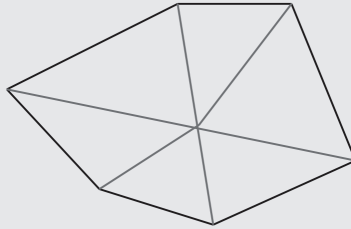
Les deux pyramides ont également la même hauteur : c'est la longueur BH , où BH est la distance du point B au plan $ACDF$. Donc elles ont le même volume.

On en conclut que les trois pyramides ont le même volume, et donc le volume d'une pyramide à base triangulaire est égal au tiers du volume du prisme ayant la même base et la même hauteur que la pyramide.

Étape 2

Tout polygone est décomposable en plusieurs triangles :

donc toute pyramide à base polygonale peut être décomposée en plusieurs pyramides à base triangulaire. Son volume est donc le tiers du volume du prisme ayant même base et même hauteur.



Étape 3

On généralise au cercle : tout cône a pour volume le tiers du volume du cylindre de même base et même hauteur.

Du côté de l'histoire

Eudoxe

(env. -408/-355)



Originaire de Cnide, Eudoxe est à la fois mathématicien, médecin, géographe, astronome et philosophe. Il commence par étudier la médecine, puis se tourne vers les mathématiques.

À vingt-trois ans, il part pour Athènes où il se lie d'amitié avec Platon. Il y apprendra la philosophie et la rhétorique (art de l'action des discours sur les esprits). Puis il part pour l'Égypte, où, durant deux ans, il s'initiera à l'astronomie. Il acquiert une très bonne réputation et fonde une école, à Cnide.

En astronomie, on peut le considérer comme le fondateur de l'astronomie scientifique. Les planètes n'ont pas un mouvement régulier, quand on les regarde depuis la Terre : elles vont vers l'est, puis ralentissent, s'arrêtent et rétrogradent vers l'ouest, ralentissent à nouveau, s'arrêtent, et repartent vers l'est. Il a essayé de comprendre ces irrégularités apparentes des astres, par des considérations géométriques. Sa solution propose un système composé d'une vingtaine de sphères de cristal, portant toutes des objets célestes. Ces sphères seraient concentriques et la Terre en serait le centre.

PARTIE 2

La numération

CHAPITRE 11

La numération de position

C'est la manière que nous avons d'écrire les nombres. Au départ, les nombres entiers, puis les nombres décimaux. Ceux-ci peuvent s'écrire de manière fractionnaire.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée en classe de 6^e.

Les nombres entiers s'écrivent à l'aide des dix chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

Pour écrire correctement un nombre entier, il faut écrire les chiffres 3 par 3, de droite à gauche.

Exemples : 27 653; 5876 465; 983 456; 894 444 654.

Notre système d'écriture des nombres est une numération de position : la valeur d'un chiffre change suivant sa position dans l'écriture du nombre :

dans 5687, le 7 vaut 7 : c'est le chiffre des unités;

dans 342573, le 7 vaut 70 : c'est le chiffre des dizaines;

dans 89753, le 7 vaut 700 : c'est le chiffre des centaines;

dans 7342, le 7 vaut 7000 : c'est le chiffre des milliers (ou unités de mille);

dans 176598, le 7 vaut 70000 : c'est le chiffre des dizaines de mille;

dans 789654, le 7 vaut 700000 : c'est le chiffre des centaines de mille;

dans 67456123, le 7 vaut 7000000 : c'est le chiffre des millions;

et ainsi de suite.

On peut donc décomposer un nombre entier de la façon suivante :

$$45\,298 = (4 \times 10\,000) + (5 \times 1\,000) + (2 \times 100) + (9 \times 10) + (8 \times 1).$$

Les nombres décimaux sont des nombres à virgule, dont l'écriture est finie.

Exemples : 122,33; 3,543; 0,0076 sont des nombres décimaux

ATTENTION

- 0,3333... n'est pas un nombre décimal : son écriture est infinie.
- Les nombres entiers sont des nombres décimaux particuliers : ils peuvent être écrits sans virgule : $4 = 4,0 = 4,00 = \dots$
- Les nombres décimaux non entiers ont également plusieurs écritures : $2,3 = 2,30 = 2,300 = \dots$
- $37,892 = (3 \times 10) + (7 \times 1) + (8 \times 0,1) + (9 \times 0,01) + (2 \times 0,001)$

Remarque pour le nombre 2 345,71

Chiffre des unités : 5

Nombre d'unités : 2345

Chiffre des dizaines : 4

Nombre de dizaines : 234

Chiffre des centaines : 3

Nombre de centaines : 23

Chiffre des milliers : 2

Nombre de milliers : 2

Chiffre des dixièmes : 7

Nombre de dixièmes : 23457

Chiffre des centièmes : 1

Nombre de centièmes : 234571

Tout nombre décimal admet une (et même plusieurs) écriture fractionnaire

$$\begin{array}{c}
 \text{Partie entière} \quad \text{Partie décimale} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \underbrace{37}, \underbrace{892} = \frac{37\,892}{1\,000} = \frac{378\,920}{10\,000} = \dots \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \text{Écriture décimale} \quad \text{Écriture fractionnaire}
 \end{array}$$

→ Pour aller plus loin

Les numérations anciennes

Les premiers nombres utilisés sont les nombres entiers : ils servent à compter des objets, des troupeaux, des individus... Les premières traces de comptage connues sont les os entaillés des chasseurs du Paléolithique (environ 15 000 ans av. J.-C.).

Un système d'écriture s'appelle une numération. Les chiffres sont les symboles qui servent à écrire les nombres. Les chiffres modernes 0, 1, 2, ..., 9 ont été inventés en Inde vers le III^e siècle avant J.-C. Ils nous ont été transmis par les mathématiciens du monde arabe (IX^e–XIV^e siècle).

Il existe deux types de numération :

- la numération de position, dans laquelle un chiffre peut avoir une valeur différente selon sa place dans l'écriture du nombre (c'est notre système actuel de numération);
- la numération par juxtaposition, dans laquelle on additionne les chiffres.

La numération romaine

Un exemple très connu de numération par juxtaposition est la numération romaine : elle est encore utilisée aujourd'hui, sur les monuments pour indiquer une date, sur les montres et les horloges, pour nommer les rois (Henri IV par ex.), pour numéroter les arrondissements des villes, ou encore les paragraphes d'un cours !

Il y a sept chiffres romains :

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Un nombre romain s'écrit par juxtaposition de chiffres. Les chiffres les plus grands s'écrivent à gauche et on additionne les chiffres successifs d'un nombre. Cependant, si un chiffre est inférieur à son suivant, il doit être soustrait.

Ex. Pour VI, puisque V est plus grand que I, on lit 6.

Pour IV, puisque I est plus petit que V, on lit 4.

Un nombre romain peut avoir plusieurs représentations. En pratique, on évite quatre chiffres identiques qui se suivent : 4 s'écrit IV (et rarement IIII) et 40 s'écrit XL (et rarement XXXX).



Exemples :

II	III	VIII	XII	XIX	LI	MCMXXII
2	3	8	12	19	51	1922

Notons au passage que la façon d’écrire le nombre 4 sous la forme IV, date du xvi^e siècle. Les romains de l’antiquité, eux, écrivaient IIII.

La numération égyptienne

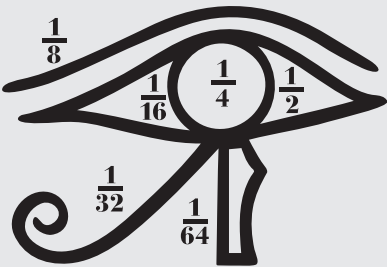
Il y a plus de 5 000 ans, la civilisation égyptienne s’est développée sur les rives du Nil. Les Égyptiens écrivaient avec des hiéroglyphes. Les chiffres égyptiens étaient au nombre de sept. Comme beaucoup de systèmes de numération anciens, c’est une numération par juxtaposition.

						
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Exemples :

II				
2	11	20	33	1 203 047

Notons qu’à l’époque, les nombres décimaux n’existaient pas encore mais pour partager une quantité, les Égyptiens avaient à leur disposition les fractions :



Dans la mythologie égyptienne, Horus est le fils d’Isis et d’Osiris.



Osiris est le dieu des morts et de la résurrection. Avec l'aide de Toth, dieu de l'arithmétique, de la parole et des scribes, il initie les Égyptiens à l'écriture et à la science. Mais Seth, le frère d'Osiris, est jaloux de celui-ci : il le tue, puis s'attaque à son fils, Horus. Un combat s'engage, au cours duquel Seth arrache l'œil gauche d'Horus ; il le coupe en six morceaux qu'il jette dans le Nil. À l'aide d'un filet, Thot repêche les six morceaux.

$$\text{Mais } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Il manque donc $\frac{1}{64}$ de l'œil. Or bien heureusement, Toth est également le dieu des guérisseurs : il soigne l'œil d'Horus et lui permet de fonctionner à nouveau.

Les Égyptiens l'utilisaient pour indiquer les fractions du hekat, unité de mesure de capacité pour les céréales (un hekat vaut environ 4,785 litres).

La numération maya

La numération maya est également une numération de position, mais elle s'effectue sur une base 20. On peut également noter qu'ils utilisaient un symbole représentant zéro.

				
0	1	2	3	4
				
5	6	7	8	9
				
10	11	12	13	14
				
15	16	17	18	19

Exemples :

				
20	21	22	30	33

La numération babylonienne

C'est la numération la plus ancienne, puisqu'elle date de 4 000 ans, et c'est certainement le système de numération qui est le plus éloigné de notre façon de compter, puisqu'il ne s'écrit qu'avec deux chiffres mais néanmoins se compte en base 60. Les Babyloniens écrivaient avec une sorte de « coin », d'où le nom de leur écriture : « Cunéiforme ».



L'héritage babylonien est toujours vivace. Nous continuons, encore aujourd'hui, à faire des groupes de 60, lorsque nous comptons le temps : 60 secondes font 1 minute, 60 minutes font une heure.

Exemples :

	Signifiait 1, mais selon sa taille ou sa place, il pouvait aussi représenter 60 ou 3600.
	Signifiait 10.

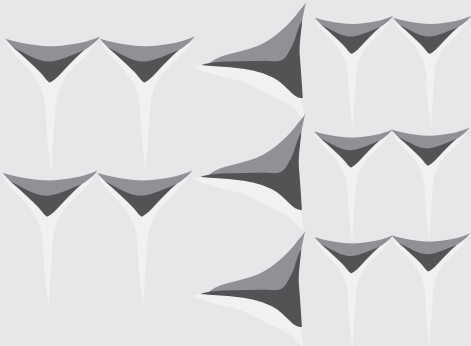
ATTENTION

Pour convertir un nombre en écriture babylonienne, il faut compter en base 60!

			
4	12	$134 = (60 \times 2) + 10 + 4$	

Exemple : $276 = (4 \times 60) + 36$

Donc :



La numération grecque

C'est encore une numération par juxtaposition, mais les chiffres sont les lettres de leur alphabet : $\alpha = 1$, $\beta = 2$...

Avec une écriture comme celle-ci (comme avec les autres, d'ailleurs), il est difficile d'écrire de très grands nombres. Archimède s'en était fait la réflexion, et s'était mis au défi d'en construire de vraiment très grands. Pour illustrer sa méthode d'écriture, il choisit de compter combien de grains de sable étaient contenus dans l'univers, rien que ça ! (Pour information, il a trouvé, avec notre écriture, 10^{63} grains.)

La numération chinoise

La civilisation chinoise est bien différente de la nôtre et son écriture est à base d'idéogrammes.

On dispose de neuf chiffres :

一	二	三	四	五
1	2	3	4	5
六	七	八	九	
6	7	8	9	

et de symboles représentant des puissances de dix :

十	百	千	萬	億
10	100	1 000	10 000	100 000

Exemples :

三百六十五	$= (3 \times 100) + (6 \times 10) + 5$ $= 365$
四千八百	$= (4 \times 1000) + (8 \times 100)$ $= 4800$

L'écriture avec un sens de lecture (de gauche à droite et de haut en bas), et les seuls neuf premiers chiffres codés en font presque une numération de position.



Le braille

Louis Braille (1809-1852) inventa le système d'écriture qui porte son nom. Il devient aveugle à l'âge de 5 ans et passe sa scolarité à l'Institut Royal des Jeunes Aveugles. Il y devient par la suite professeur, en 1828.

C'est là qu'en 1829 il proposa un nouveau procédé d'écriture à l'usage des aveugles. Il imagina pour ses camarades d'abord, puis pour ses élèves, ce système utilisant des points en relief (dit en *points saillants*) sur un rectangle (une cellule) de deux colonnes de trois points : on lit en suivant le texte avec ses doigts.

Louis Braille repose au Panthéon depuis 1952.

Les dix chiffres en braille :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
●○	●○	●●	●●	●○	●●	●●	●○	○●	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○

Notons que ces dix chiffres correspondent aux lettres A à J. Pour différencier les chiffres des lettres, on précède l'écriture du signe par ce symbole :

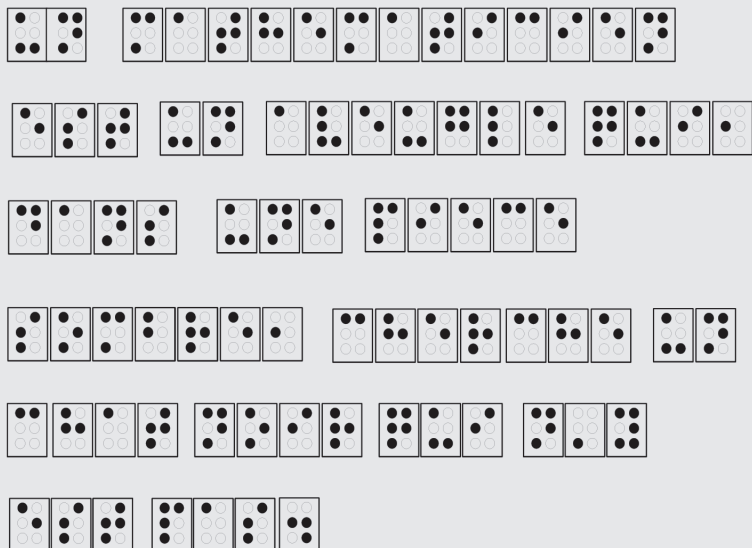


Et voici l'alphabet :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
●○	●○	●●	●●	●○	●●	●●	●○	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
○●	○●	●○	●●	●●	●○	●●	●●	●○
●●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○○	●○	●○	●○	●○	●○	●○	●○	●○
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
○●	○●	●○	●○	○●	●●	●●	●○	
●○	●●	○●	○●	●●	○●	○●	○●	
●○	●○	●●	●●	○●	●●	●●	●●	
.	,	?	!	'	-	CAPITAL	#	
○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○●	
●●	●○	●○	●●	○●	○●	○●	○●	
○●	○○	●●	○●	○●	●●	○●	●●	



Et voici une petite phrase à décoder (c'est une citation de Darwin) :



voir solution en annexe 5.

Du côté de l'histoire

Archimède

(env. -287 / -212)



Archimède est souvent considéré comme le plus grand savant de l'antiquité. Il a passé sa jeunesse à Syracuse, en Sicile. Il part à Alexandrie pour étudier, et y rencontre notamment Ératosthène. Ses travaux ne sont pas uniquement mathématiques : il est également un remarquable ingénieur. On lui doit l'invention de la poulie, des engrenages, des vis sans fin, etc. Il a également établi la théorie des leviers : *« Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde ! »*

Le roi de Syracuse avait commandé une couronne en or à un artisan. Mais il avait un doute sur la teneur en or de sa couronne et soupçonnait l'artisan d'avoir gardé une partie de l'or confié, le remplaçant par de l'argent, moins cher. Il demanda à Archimède de vérifier s'il y avait une fraude. L'or pesant plus lourd que l'argent, il suffisait de vérifier la masse de la couronne et de la comparer à la masse d'un objet en or de même volume. Le problème étant qu'il ne fallait pas détruire la couronne. Il eut l'idée de plonger la couronne dans un récipient rempli d'eau. En observant l'élévation du niveau de l'eau, il put en déduire le volume de l'objet. Après l'avoir pesé, il plongea une masse égale d'or et constata que le volume était inférieur à celui de la couronne. Il y avait donc bien eu fraude.

Lors d'une baignade, le savant découvrit ce qu'on appelle maintenant « le principe d'Archimède », à savoir :

Tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale égale au poids du fluide déplacé.

Il aurait été si heureux de sa découverte qu'il serait sorti de son bain et aurait couru dans la ville, nu, en s'écriant : «Eurêka!» («*j'ai trouvé*»).

Archimède aurait réussi à incendier les voiles des bateaux romains qui essayaient d'envahir Syracuse, en utilisant des miroirs pour concentrer les rayons du Soleil sur les voiles ennemies. Les Romains finirent tout de même par envahir la ville, et Archimède fut tué par un soldat qui ne l'avait pas reconnu : il était en train d'étudier une figure tracée sur le sol, quand le romain entra. Le savant aurait demandé à son visiteur de se pousser parce qu'il faisait de l'ombre sur sa figure. Le prenant pour un sorcier, le soldat l'aurait alors tué. On fit construire une tombe, sur laquelle, selon ses vœux, est gravée une sphère inscrite dans un cylindre.

CHAPITRE 12

Les opérations

Les opérations sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Mais attention : la division se sépare en deux groupes : la division décimale et la division euclidienne.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée en classe de 6^e.

● L'addition

On considère la somme $34 + 78$.

34 et 78 sont les termes de cette somme.

En calculant $34 + 78$, on effectue une addition.

On obtient alors l'égalité $34 + 78 = 112$.

Dans une somme, l'ordre des termes n'a pas d'importance : on dit que l'addition est commutative.

Pour calculer une somme de plusieurs termes, on peut déplacer ou supprimer les parenthèses : on dit que l'addition est associative.

● La soustraction

$72 - 25$ est la différence entre 72 et 25.

72 et 25 sont les termes de cette différence.

En calculant $72 - 25$, on effectue une soustraction.

Dans une différence, l'ordre des termes est très important :

Dans une expression comportant des additions et des soustractions, on calcule d'abord ce qui est entre parenthèses. Et s'il n'y a pas de parenthèses, on effectue les calculs de gauche à droite :

$$34 + (12 - 7 + 13) = 34 + (5 + 13) = 34 + 18 = 52$$

• La multiplication

34×23 est le produit de 34 par 23.

34 et 23 sont les facteurs de ce produit.

En calculant 34×23 , on effectue une multiplication.

Dans un produit, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance : $34 \times 23 = 23 \times 34$

On dit que la multiplication est commutative.

Pour calculer un produit de plusieurs facteurs, on peut déplacer ou supprimer les parenthèses : $5 \times (3 \times 23) = (5 \times 3) \times 23 = 5 \times 3 \times 23$

On dit que la multiplication est associative.

ATTENTION!

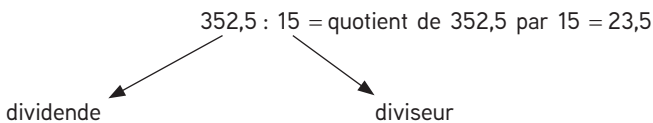
Dans une expression comportant les signes $+$, $-$, $\times$, il faut :

- Calculer d'abord ce qui est entre parenthèses.
- Effectuer en premier lieu tous les produits.
- Calculer ensuite de gauche à droite.

• Division décimale

La division décimale de a par b ($b \neq 0$) permet de calculer le quotient exact de a par b , ou une valeur approchée de celui-ci.

Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b , donne a .



Exemples

$$593,46 : 42 = 14,13$$

14,13 est la valeur exacte du quotient de la division de 593,46 par 42.

20,68556 est une valeur approchée du quotient de la division de 372,34 par 18.

• Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b , c'est trouver le quotient entier q et le reste r :

q est le nombre de paquets de b unités contenus dans le nombre a .

r est le nombre d'unités qui restent.

ATTENTION

Le reste r doit être inférieur au diviseur b .

$$19 = 3 \times 5 + 4 \quad (4 < 5)$$

$$a = q \times b + r \quad (r < b)$$

$$\text{dividende} = \text{quotient} \times \text{diviseur} + \text{reste} \quad (\text{reste} < \text{diviseur})$$

→ Pour aller plus loin

Les systèmes de numération

Dans le système décimal, on utilise 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Les groupements se font par 10, avec 10 unités on forme une dizaine, avec 10 dizaines on forme une centaine...

$$3\,247 = 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

$$67,253 = 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

C'est le système que l'on utilise habituellement pour compter, mais on peut choisir de se placer dans une autre base, par exemple 5. Dans ce cas, on utilise 5 chiffres : 0, 1, 2, 3 et 4. Les groupements se font par 5, avec 5 unités on forme un «groupe 5», avec 5 «groupes 5» on forme un «groupe 25» ...

Passage de la base 5 à la base 10 :

1302,4 (en base 5) correspond à :

$$\begin{aligned} 1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0 + 4 \times 5^{-1} &= 1 \times 125 + 3 \times 25 + 2 + \frac{4}{5} \\ &= 125 + 75 + 2 + 0,8 \\ &= 202,8 \end{aligned}$$

Passage de la base 10 à la base 5 :

Par exemple, écrivons 358 en base 5 :

$$\begin{array}{r|l} 358 & 5 \\ \hline 08 & 71 \\ 3 & 21 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 5 \\ \hline & 14 \\ & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 5 \\ \hline & 2 \\ & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

donc 358 s'écrit 2413 en base 5.

Pour les nombres décimaux :

On veut écrire 1,776 en base 5

$$0,776 \times 5 = 3,88$$

$$0,88 \times 5 = 4,4$$

$$0,4 \times 5 = 2,0$$

$$\text{Donc } 1,776 = 1,342$$



Notons qu'en informatique, deux systèmes de numération sont utilisés : le binaire (base 2) et l'hexadécimal (base 16). Dans ce système, il faut 16 chiffres, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F. Le A vaut 10, le B vaut 11...

→ Pour aller encore plus loin

L’abaque

Un abaque est une sorte de plateau séparé en 6 colonnes. On y trouve, de droite à gauche, les unités, les dizaines, les centaines, les unités de mille, les dizaines de mille et les centaines de mille. On plaçait des petits cailloux, des calculi, dans chaque colonne, pour représenter le nombre voulu. Par exemple, on écrivait 4506 de la façon suivante :

Ċ	Ī	I	C	X	I
		••	••		••
		••	••		••
			•		••

Gerber innova et simplifia l’utilisation de l’abaque en se servant de jetons sur lesquels étaient inscrits les chiffres arabes (sauf le zéro).

Voici un exemple de calcul : 625×38

Ċ	Ī	I	C	X	I
				3	8
			6	2	5

← Multiplicateur

← Multiplicande

On effectue le calcul $8 \times 5 = 40$ et on place le jeton correspondant. Puis $8 \times 2 = 16$: on insère les jetons en décalant d’une colonne. Enfin, on multiplie 8 par 6 : $8 \times 6 = 48$

La multiplication par le 8 étant finie, on l’enlève et on fait les multiplications par 3, en décalant d’un rang :

Ċ	Ī	I	C	X	I
				3	8
				4	
			1	6	
		4	8		
			6	2	5



$3 \times 5 = 15$, $3 \times 2 = 6$ et $3 \times 6 = 18$.

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
				3	
				4	
			1	6	
		4	8		
			1	5	
			6		
	1	8			
			6	2	5

On a terminé les multiplications par 3. On enlève le 3 et on effectue les additions des chiffres centraux : $4 + 6 + 5 = 15$. On place 5, et on ajoute 1 dans la colonne à sa droite. $1 + 8 + 1 + 6 + 1 = 17$, on place le 7 et sa retenue à droite. $4 + 8 + 1 = 13$, on place le 3 et sa retenue à droite. Et enfin $1 + 1 = 2$.

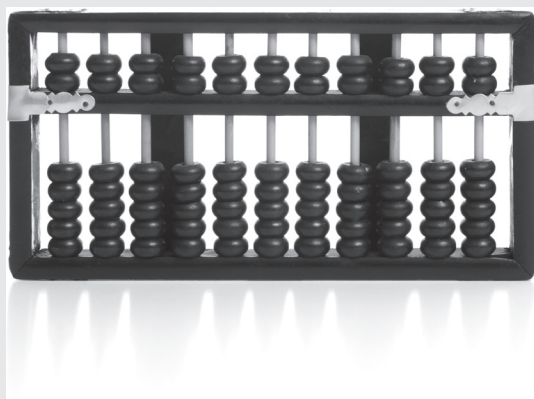
D'où le résultat : $625 \times 38 = 23\,750$

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
				4	
			1	6	
		4	8		
			1	5	
			6		
	1	8	1		
	1	1			
	2	3	7	5	



Le boulier chinois

Boulier se dit *abacus* en Anglais, et le mot vient du grec *Abax*, qui signifie *tablette recouverte de poussière*.



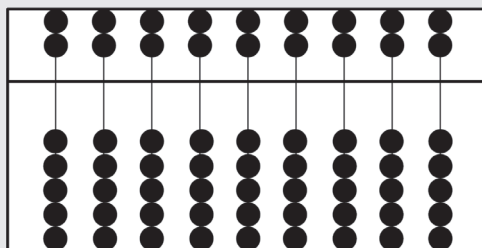
Le boulier chinois est donc une version évoluée de l'abaque utilisée en Occident.

Sa pratique régulière favorise l'ordre, l'adresse, la concentration et la méthode. Dans les pays asiatiques, sa pratique est considérée comme un art martial : on peut passer des examens de qualification, comme au Judo : il y a 6 degrés, puis 10 dans. Lorsqu'on a atteint le 10^e dan, on a une parfaite maîtrise du boulier. Le 1^{er} dan correspond à la maîtrise de l'extraction de racines carrées ou cubiques.

Le boulier est un cadre constitué d'une barre horizontale, et d'une douzaine des barres verticales (en général il y en a de 8 à 13), sur lesquelles glissent des boules. Il y a deux boules dans la zone supérieure, et cinq dans la zone inférieure.

Les boules situées sous la barre valent 1 (elles sont appelées *unaires*), celles situées au-dessus de la barre valent 5 (elles sont appelées *quinares*).

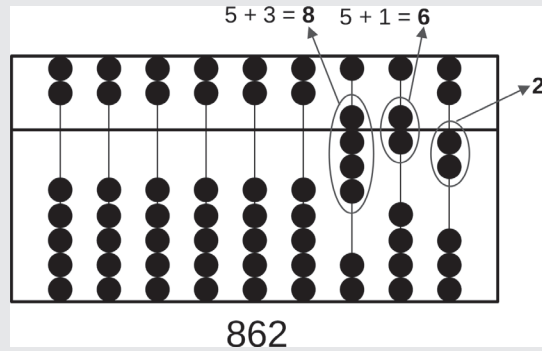
La première colonne, celle la plus à droite, donne le chiffre des unités, la seconde colonne donne le chiffre des dizaines, la troisième colonne donne le chiffre des centaines et ainsi de suite.



La position de départ est celle de la figure ci-dessus, qui représente donc 0.

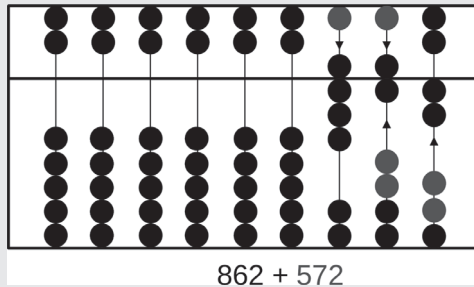


Pour représenter un nombre, on pousse les boules vers la barre centrale :

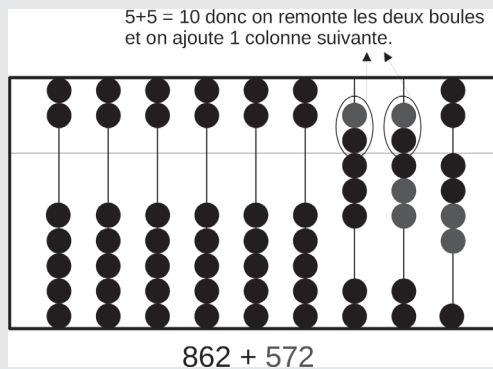


L'addition

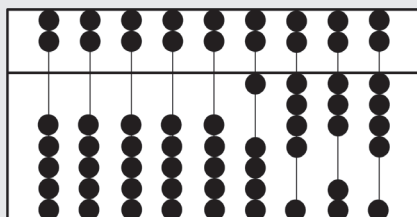
Pour faire l'addition $862 + 572$, on prend le boulier configuré comme dans la figure précédente, puis on ajoute 2 dans la première colonne, 7 dans la seconde et 5 dans la troisième :



Puis on simplifie :



Et on obtient le résultat :



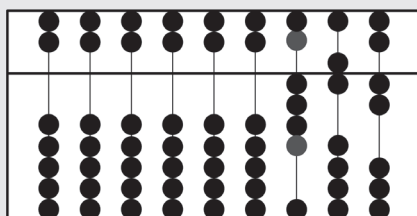
$$862 + 572 = 1\,434$$

La soustraction

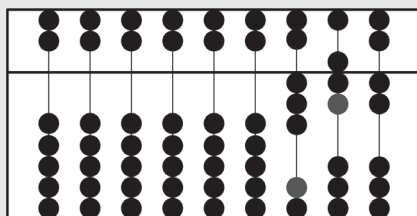
Par exemple, $862 - 498$.

Il s'agit ici de garder en tête qu'enlever 9, par exemple, revient à enlever 10 puis ajouter 1, ou enlever 5 puis enlever 4.

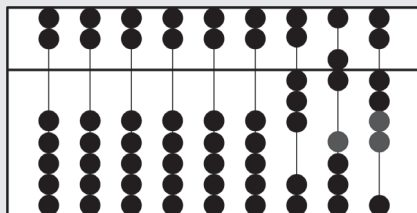
On enlève 400, donc dans la 3^e colonne, on enlève 5 et on ajoute 1 :



Enfin, on enlève 8 dans la 1^{re} colonne, donc on enlève 10 et on ajoute 2 :



On obtient alors $862 - 498 = 364$.



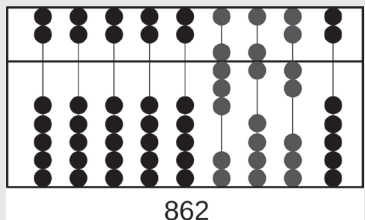
La multiplication à un chiffre

Par exemple, multiplions 862 par 3.

C'est une opération qui se fait en trois étapes :

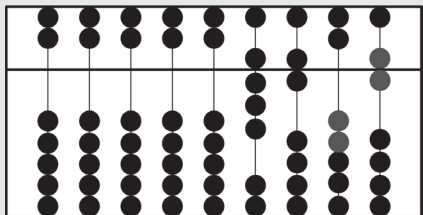
Étape 1 :	Étape 2 :	Étape 3 :
$3 \times 2 = 6$	$3 \times 60 = 180$	$3 \times 800 = 2400$

Afin de ne pas être bloqué, on écrit 862 en laissant une colonne de libre à droite :



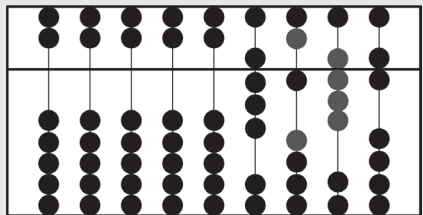
Étape 1 : on commence par la colonne des unités :

$3 \times 2 = 6$, donc on ajoute 6 dans la 1^{re} colonne, et on supprime le 2 dans la 2^e colonne qui a été multiplié (en enlevant 5 et en ajoutant 3) :

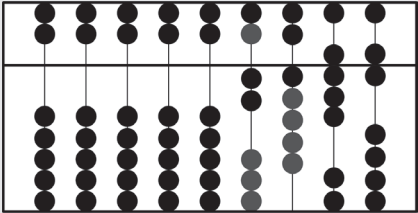


Étape 2 : on passe ensuite à la colonne des dizaines.

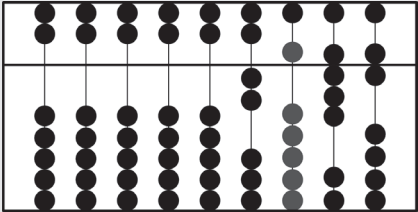
$3 \times 60 = 180$, donc on ajoute 1 à la 3^e colonne, et 8 à la 2^e. Pour ajouter 8 dans la 2^e colonne, on peut aussi ajouter 10, donc 1 dans la 3^e et enlever 2 dans la 2^e. Et on n'oublie pas d'enlever le 6 qui a été multiplié, dans la 3^e colonne.



Étape 3 : on multiplie la colonne des centaines par 3.
 $3 \times 800 = 2400$, donc on ajoute 2 à la 4^e colonne et 4 à la 3^e. Et toujours, on n'oublie pas d'enlever le 8 qui a été multiplié, dans la 4^e colonne.



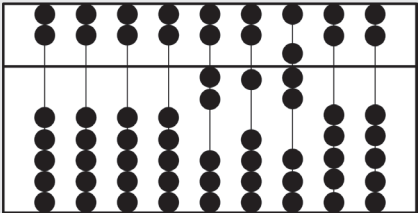
Et enfin on simplifie :



Finalement, on lit le résultat : $862 \times 3 = 2586$

La multiplication à deux chiffres

Par exemple, 217×35 .



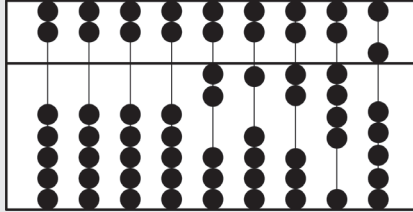
La procédure est la suivante :

On commence par écrire 217 en laissant deux colonnes de libre. Puis on procédera en trois étapes :

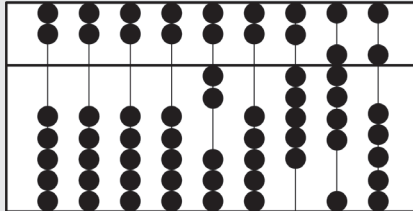
Étape 1 :	Étape 2 :	Étape 3 :
$7 \times 5 = 35$	$10 \times 5 = 50$	$200 \times 5 = 1000$
$7 \times 30 = 210$	$10 \times 30 = 300$	$200 \times 30 = 6000$



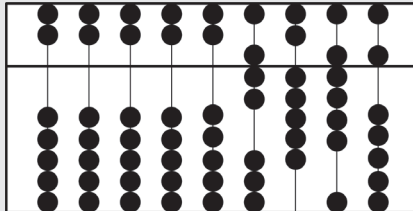
Procédons à l'étape 1 : on multiplie 7 par 5 puis par 30, et on supprime le 7 qui a été multiplié. Donc on ajoute 35 et 210, puis on enlève 7, dans la 3^e colonne.



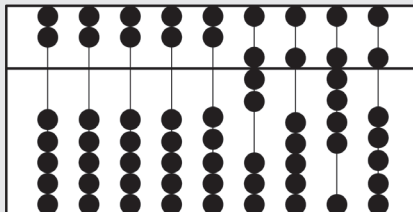
Puis on passe à l'étape 2 : on multiplie 10 par 5 puis par 30, et on enlève 1. On ajoute 50 et 300, puis on enlève 1, dans la 4^e colonne.



Enfin on passe à la troisième étape : on multiplie 200 par 5 puis par 30, et on enlève 2. Donc on ajoute 1000 et 6000, puis on enlève 2, dans la 5^e colonne.



On simplifie :



On obtient alors le résultat : 7595.

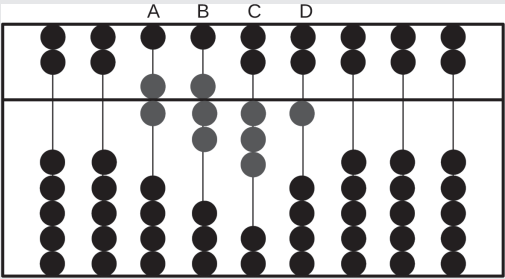
On peut faire des multiplications à trois, quatre, cinq chiffres, la méthode reste la même.



La division

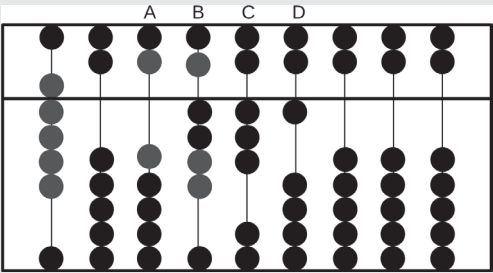
$6\,731 : 7 = ?$

Les deux premières colonnes à gauche du boulier servent à écrire le quotient. On écrit donc sur le boulier 6731, à partir de la colonne A.



$67 : 7$: il y va 9 fois.

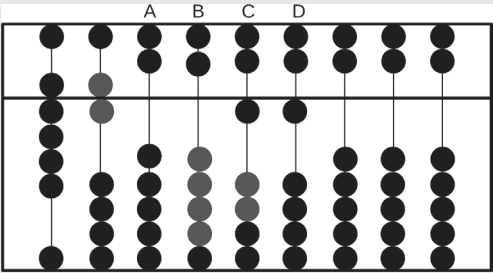
- On place le 9 sur la première rangée du boulier ;
- on multiplie ce quotient par 7, soit $9 \times 7 = 63$;
- on soustrait ce résultat de 67.



On continue en partant de la colonne B :

$43 : 7$: il y va 6 fois.

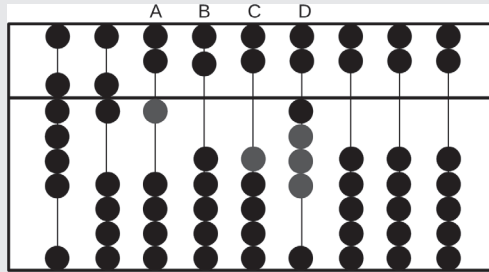
- On place le 6 dans la colonne à côté du 9 ;
- on multiplie ce 6 par 7 : $6 \times 7 = 42$;
- on soustrait ce résultat de 43.



On part de la colonne C :

11 : 7 : il y va 1 fois.

- On place le 1 dans la colonne à côté du 6, c'est-à-dire dans la colonne A ;
- on multiplie 7 par 1 : $7 \times 1 = 7$;
- on soustrait 7 à 11 (on enlève 10 et on ajoute 3).



On obtient alors le résultat :

6731 : 7 : quotient 961, reste 4.

Du côté de l'histoire

Gerber d'Aurillac (945-1003)



Comme son nom l'indique, Gerber est originaire d'Aurillac, en Auvergne. C'est un personnage qui a soif de savoir. À 18 ans, il part poursuivre ses études en Catalogne. Il a l'occasion, dans les abbayes de cette région, de s'initier aux connaissances arabes.

Il s'installe à Rome en 965. Il est présenté au Pape Jean XIII et est nommé directeur de l'école diocésaine de Reims, de 972 à 982. Il préconise un enseignement qui privilégie Mathématiques et Astronomie. Il use de son influence pour permettre à Hugues Capet de monter sur le trône (de France). Malgré plusieurs menaces d'excommunication et une réputation de commerce avec le diable, il devient le Pape Sylvestre II, en 999.

Il meurt le 12 mai 1003. Il fut enseveli à Saint-Jean-de-Latran. On raconte que son tombeau ruisselle extérieurement et inonde le sol du caveau chaque fois qu'un Pape va mourir...

C'est ce Pape mathématicien qui a permis l'introduction des chiffres dits « arabes » et de la numération décimale en Occident. En fait, il introduit principalement la nouvelle graphie des chiffres, mais il garde tout de même l'utilisation de l'abaque, sorte de boulier chinois, dont il simplifie l'utilisation. Mais avec sa réputation douteuse, ces nouveaux chiffres, à la graphie compliquée par rapport aux chiffres romains, prendront du temps avant d'être acceptés. Deux groupes s'affrontent :

- Les abacistes, qui veulent en rester à l'écriture avec les chiffres romains.
- Les algoristes, qui sont partisans de la nouvelle écriture.

Il faudra tout de même attendre le xvi^e siècle avec la diffusion des livres pour voir la nouvelle notation se diffuser. L'utilisation du papier et de l'écriture sonne alors la fin des abaques et la propagation de la nouvelle notation.

CHAPITRE 13

Les nombres premiers

Cette notion fait partie de la grande famille de l'Arithmétique. C'est la partie des mathématiques la plus ancienne, avec la géométrie, puisqu'elle ne fait intervenir que les nombres entiers positifs. D'ailleurs, son nom moderne est « Théorie des nombres » : les nombres n'étant pas tous les nombres, mais seulement les nombres entiers positifs.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est vue en classe de 3^e.

● La division euclidienne

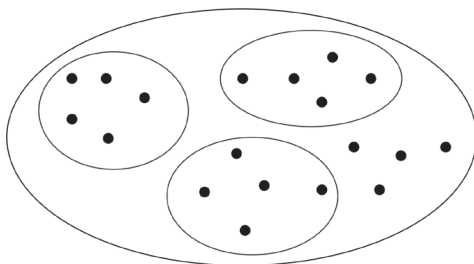
Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b , c'est trouver le quotient entier q et le reste r tels que :

q est le nombre de paquets de b unités contenus dans le nombre a .

r est le nombre d'unités qui restent

ATTENTION

Le reste r doit être inférieur au diviseur b .



$$19 = 3 \times 5 + 4 \quad (4 < 5)$$

$$a = q \times b + r \quad (r < b)$$

$$\text{dividende} = \text{quotient} \times \text{diviseur} + \text{reste} \quad (\text{reste} < \text{diviseur})$$

• Multiples et diviseurs

Lorsque le reste est nul, on a alors $a = q \times b$.

Dans ce cas, on dit que :

- a est un multiple de b ;
- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a .

Exemple : $21 = 7 \times 3 + 0$

On a également :

21 est un multiple de 7

21 est un multiple de 3

21 est divisible par 7

21 est divisible par 3

7 est un diviseur de 21

3 est un diviseur de 21

Les diviseurs de 21 sont : 1, 3, 7 et 21

• Les nombres premiers

Tous les nombres ont au moins deux diviseurs : 1 et eux-mêmes : $a = a \times 1$

Mais certains nombres n'ont que ces deux diviseurs. On les appelle les nombres premiers.

Exemple : 29 n'est divisible que par 1 et par 29. 29 est donc un nombre premier.

ATTENTION

1 n'est pas un nombre premier !

Du côté de l'histoire

Carl Friedrich Gauss

(1777-1855)



Carl Friedrich Gauss, surnommé « le prince des mathématiciens », est sans contexte le mathématicien associé à l'arithmétique : « *La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique est la reine des mathématiques.* » Il naît le 30 avril 1777 à Brunswick. Il est l'enfant unique d'une famille modeste : son père exerçait toutes sortes de petits métiers, sa mère était femme de chambre. Mais tous deux savent lire et soutiennent leur enfant dans son apprentissage. C'est d'ailleurs un enfant précoce, qui manifeste très tôt des prédispositions pour les mathématiques. On raconte qu'à trois ans, il sait déjà lire et aurait corrigé une erreur dans les comptes de son père. À neuf ans, il aurait réussi à relever le défi de son instituteur qui avait demandé de calculer la somme de tous les entiers de 1 à 100. Quelques minutes après l'énoncé du problème, le jeune Gauss se lève et annonce qu'il a la solution. De fait, il avait trouvé une technique très astucieuse et rapide pour calculer cette somme :

1	+	2	+	...	+	98	+	99	+	100
100	+	99	+	...	+	3	+	2	+	1
101	+	101	+	...	+	101	+	101	+	101

$$\text{Et donc } 1 + 2 + \dots + 98 + 99 + 100 = \frac{101 \times 100}{2} = 5\,050.$$

En 1788, Gauss a 11 ans, entre au lycée, et c'est en mathématiques qu'il obtient les meilleurs résultats. Il entre à l'Université de Göttingen, en 1795. Un an plus tard, au cours de ses recherches, il résout un problème posé par les mathématiciens de l'Antiquité : la construction à la règle et au compas d'un polygone régulier. Il démontre que ce type de construction n'est

possible qu'avec un nombre de côtés égal à l'un des nombres premiers 3, 5, 17, 257, 65 537 (ce sont les nombres premiers de Fermat, ou un produit de ces nombres). Il construit ainsi un polygone à 17 côtés.

En 1800, il donne une formule permettant de trouver la date de Pâques, dans les calendriers julien et grégorien.

1801 est l'année de la découverte de l'astéroïde Cérès, qui n'est apparu que furtivement puis a disparu derrière le soleil. Gauss cherche alors à déterminer la trajectoire du corps céleste et met au point la méthode des moindres carrés : c'est une technique qui consiste à créer un modèle mathématique à partir de données expérimentales. L'astéroïde est retrouvé au lieu précis prédit par Gauss, en décembre. À partir de là, sa réputation franchit les frontières. Il se voit offrir un poste à Saint-Petersbourg, mais préfère rester à Göttingen, où il accepte le poste de directeur du nouvel observatoire astronomique, en 1807, qu'il occupera jusqu'à sa mort.

Autre aspect connu de la vie de Gauss : la correspondance qu'il entretient avec Sophie Germain, à partir de 1804. Son interlocutrice se présente sous le nom de M. Leblanc, et n'avouera qu'en 1807 son véritable nom. L'échange de lettres se poursuivra, jusqu'en 1809. Chacun s'intéresse alors à une discipline autre, à savoir l'astronomie pour Gauss, la physique pour Germain.

En 1818, Gauss est chargé de la triangulation du royaume de Hanovre : on a besoin de cartes précises, à des fins civiles ou militaires. Pendant huit ans, sillonnant toute l'Allemagne du nord, rédigeant de nombreux traités de géodésie, Gauss améliore les instruments de mesure, s'intéresse aux surfaces courbes et à leur projection en vue d'établir des cartes. Il introduit la notion de représentation sphérique, et étudie les géodésiques (chemins les plus courts joignant deux points sur une surface).

En 1831, arrive à Göttingen Wilhelm Weber avec qui Gauss aura une collaboration productive. Ils travailleront ensemble pendant six ans, étudiant le magnétisme terrestre et mettant au point un télégraphe primitif qui pouvait envoyer des messages à plus d'un kilomètre de distance. En leur honneur, *Gauss* est aujourd'hui le nom d'une unité d'induction magnétique et *Weber* celui d'une unité du flux d'induction magnétique.

À partir de 1840, Gauss se tourne vers les statistiques et les mathématiques financières, réussissant grâce à cela à se constituer un capital équivalent à près de 200 fois son revenu annuel. Le mathématicien semble aussi prendre goût à l'enseignement, probablement encouragé par des étudiants brillants comme Cantor, Dedekind et Riemann.

Gauss achève sa carrière de mathématicien, lors d'un jubilé donné en son honneur, en 1849. Menant une vie sérieuse, il n'a jamais souffert de maladie notable, jusqu'à l'apparition de problèmes cardiaques en 1850. Peu à peu, sa santé se détériore, et il meurt à Göttingen le 23 février 1855, pendant son sommeil.

→ Pour aller plus loin

La date de Pâques

Choisir une année a .

Calculer la division euclidienne de a par 4. On note r le reste.

Calculer la division euclidienne de a par 7. On note s le reste.

Calculer la division euclidienne de a par 19. On note t le reste.

On pose $b = 19t + 24$

Calculer la division euclidienne de b par 30. On note u le reste.

On pose $c = 2r + 4s + 6u + 5$.

Calculer la division euclidienne de c par 7. On note v le reste.

On pose $p = u + v$.

Si $p < 10$ alors le jour de pâques est le $(22 + p)$ mars.

Si $p > 9$ alors le jour de Pâques est le $(p - 9)$ avril.

Exemple pour 2023 :

$$a = 2\,023$$

$$2\,023 = 4 \times 505 + 3 \text{ donc } r = 3.$$

$$2\,023 = 7 \times 289 + 0 \text{ donc } s = 0.$$

$$2\,023 = 19 \times 106 + 9 \text{ donc } t = 9.$$

$$b = 19 \times 9 + 24 = 195.$$

$$195 = 30 \times 6 + 15 \text{ donc } u = 15.$$

$$c = 2 \times 3 + 4 \times 0 + 6 \times 15 + 5 = 101.$$

$$101 = 7 \times 14 + 3 \text{ donc } v = 3.$$

$$p = 15 + 3 = 18$$

Comme $18 > 10$, alors la date de Pâques sera le 9 avril 2023.

→ *Pour aller encore plus loin*

Parmi tous les nombres premiers, il y en a un qui va nous intéresser tout particulièrement : c'est le plus grand nombre premier inférieur à 100, à savoir 97.

En effet, comme $97 < 100$, la racine carrée de 97 est inférieure à 10. Or 97 n'est pas divisible par 2, 3, 5, ou 7. Donc 97 est un nombre premier.

Le numéro de sécurité sociale

Le numéro INSEE d'une personne est formé de :

- 1 chiffre pour le sexe de l'individu (1 : homme et 2 : femme);
- 2 chiffres pour l'année de naissance;
- 2 chiffres pour le mois de naissance;
- 2 chiffres pour le département de naissance;
- 3 chiffres pour la commune de naissance;
- 3 chiffres correspondant au numéro d'inscription sur le registre d'état civil;
- un nombre à 2 chiffres, qui est une clé de contrôle.

Exemple :

2	07	11	29	025	129	?
---	----	----	----	-----	-----	---

Considérons le nombre A constitué des 13 premiers chiffres :

$A = 2\,071\,129\,025\,129.$

On divise ce nombre par 97 : $A = 21\,351\,845\,619 \times 97 + 86.$

Ce reste 86 est la clé de contrôle.

Le relevé d'identité bancaire (RIB)

Le relevé d'identité bancaire (RIB) est formé de :

- 5 chiffres identifiant la banque ;
- 5 chiffres identifiant le guichet ;
- 11 chiffres représentant le numéro de compte;
- d'un nombre de 2 chiffres qui est une clé de détection d'erreur.



Exemple :

12 345	67 890	12 345 678 910	?
--------	--------	----------------	---

Considérons le nombre constitué des 21 chiffres et multiplions-le par 100 :

$$N = 12\ 345\ 678\ 901\ 234\ 567\ 891\ 000$$

On divise ce nombre par 97 : $N = 97 \times 1\ 272\ 750\ 402\ 189\ 130\ 710\ 422 + 66$

Enfin on calcule $97 - 66 = 31$, ce qui nous donne la clé de contrôle.

CHAPITRE 14

Les nombres relatifs

Les nombres relatifs sont composés des nombres positifs (ceux que l'on utilise couramment, notamment en classe de 6^e) et des nombres négatifs, que l'on rencontre sur les thermomètres ou dans les ascenseurs.

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est vue en classe de 5^e.

Un nombre relatif est un nombre positif ou négatif.

Les nombres positifs sont plus grands que zéro, les nombres négatifs sont plus petits que zéro. Zéro est le seul nombre qui soit à la fois positif et négatif.

1, 56, 12 sont des entiers positifs.

-34, -23, -678 sont des entiers négatifs.

1,3, 89, 45,6 sont des décimaux positifs

-4,7, -67,87 sont des décimaux négatifs

Tous les entiers positifs et négatifs sont des entiers relatifs.

Tous les décimaux positifs et négatifs sont des décimaux relatifs.

ATTENTION!

Les nombres entiers sont des nombres décimaux ($23 = 23,0$)!

● Addition/soustraction

Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :

- On additionne les distances à zéro des deux nombres ;
- On met au résultat le signe commun aux deux nombres.

Exemples :

$$(+3) + (+2) = (+5) \rightarrow 3 + 2 = 5$$

$$(-3) + (-2) = (-5) \rightarrow -3 - 2 = -5$$

Pour additionner deux nombres relatifs de signes différents :

- On soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande ;
- On met au résultat le signe de la plus grande distance à zéro.

Exemples :

$$(+3) + (-2) = 1 \rightarrow 3 - 2 = 1$$

$$(-3) + (+2) = -1 \rightarrow -3 + 2 = -1$$

Remarques :

1. La somme de deux nombres relatifs opposés est égale à zéro :

$$(+9,7) + (-9,7) = 0 \rightarrow 9,7 - 9,7 = 0$$

2. Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé :

$$5 - 8 = 5 + (-8) \text{ (addition de l'opposé de 8, cad } -8).$$

$$2 - (-7) = -2 + 7 \text{ (addition de l'opposé de } -7, \text{ cad } 7).$$

● Produit

Remarque :

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6 \text{ et } 3 \times (-2) = -2 - 2 - 2 = -6.$$

Pour multiplier deux nombres décimaux relatifs, on multiplie les distances à zéro et on applique la règle des signes :

Règle des signes :

Le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif.

Le produit de deux nombres de signes différents est un nombre négatif.

Exemples :

$$5 \times 3 = 15$$

$$(-5) \times (-3) = 15$$

$$(-5) \times 3 = -15$$

$$5 \times (-3) = -15$$

Remarques :

Si l'un des facteurs du produit est nul, alors ce produit est nul :

$$0 \times 3,7 = 0$$

$$-5,4 \times 0 = 0$$

Le carré d'un nombre relatif est toujours positif :

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$$

ATTENTION!

$$(-3)^2 \neq -3^2$$

● **Division**

Pour diviser deux nombres relatifs, on divise les distances à zéro des deux nombres et on applique la règle des signes de la multiplication.

Exemples :

$$18 \div 3 = \frac{18}{3} = 6$$

$$18 \div (-3) = \frac{18}{-3} = -6$$

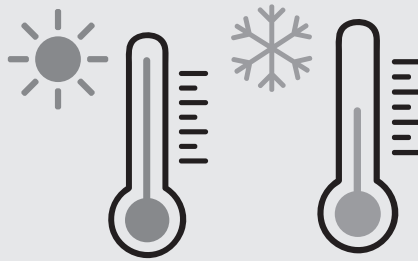
$$-18 \div 3 = \frac{-18}{3} = -6$$

$$-18 \div (-3) = \frac{-18}{-3} = 6$$

→ Pour aller plus loin

Les températures

Pour créer une échelle de température, les scientifiques se basent sur deux points de référence : l'un dit « froid », l'autre dit « chaud ». Cependant, pour que cela fonctionne, il faut nécessairement que ces deux références ne varient pas avec le temps.



Trois échelles de température sont utilisées aujourd'hui.

Gabriel Fahrenheit (1686-1736)

Le scientifique allemand Fahrenheit décide de définir son échelle par deux températures de référence :

- la température basse sera la plus basse qu'il ait pu mesurer, durant l'hiver de 1708 à 1709, à Dantzig. Il obtiendra cette même température en laboratoire, avec un mélange de chlorure d'ammonium et d'eau ;
- la température haute sera la température corporelle d'un cheval en bonne santé.

Il divise son échelle en 12×8 , soit 96 degrés.

Fahrenheit observe que, dans son échelle, l'eau gèle à 32°F et bout à 212°F.

Anders Celsius (1701-1744)

Le savant suédois Celsius, lui, choisit de prendre pour référence :

- l'ébullition de l'eau pour le point haut ;
- la congélation de l'eau pour le point bas.

Il divise son échelle en 100 intervalles, qu'il appelle « degré Celsius », démarrant de zéro pour le point bas et 100 pour le point haut : l'eau se transforme en glace à 0°C et bout à 100°C.

On appelle aussi parfois le °C « degré centigrade ».



William Thomson, dit Lord Kelvin (1824-1907)

Le physicien anglais Lord Kelvin propose une échelle de température où le zéro serait un zéro en dessous duquel on ne peut pas descendre : le « zéro absolu ». Cette température est connue, c'est $-273,15^{\circ}\text{C}$. Il prend donc l'échelle de Celsius (en gardant le même intervalle pour chaque degré) et décale le « zéro » à $-273,15^{\circ}\text{C}$. Dans ces conditions, les degrés Kelvin sont toujours positifs. Le « degré Kelvin » se note « K ».

Règles de conversion

Entre Fahrenheit et Celsius :	Entre Kelvin et Celsius :
$T(^{\circ}\text{F}) = 32 + T(^{\circ}\text{C}) \times \frac{9}{5}$	$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$
$T(^{\circ}\text{C}) = [T(^{\circ}\text{F}) - 32] \times \frac{5}{9}$	$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$

À quelle température les deux mesures donnent-elles la même valeur ?

Notons x cette valeur.

On doit avoir $x = 32 + x \times \frac{9}{5}$,

soit $x - x \times \frac{9}{5} = 32$.

Ainsi $\frac{5x}{5} - \frac{9x}{5} = 32$,

ce qui donne $-\frac{4x}{5} = 32$, ou encore $x = -32 \times \frac{5}{4}$,

C'est-à-dire $x = -40^{\circ}\text{F} = -40^{\circ}\text{C}$.

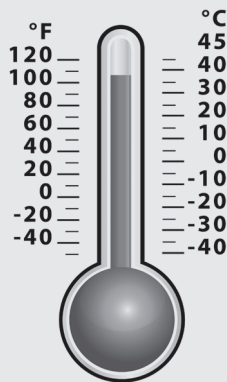
Quelques valeurs particulières dans les trois échelles de température :

	Fahrenheit	Celsius	Kelvin
Zéro absolu	$-459,67$	$-273,15$	0
Mélange chlorure d'ammonium et eau	0	$-17,78$	255,37
Congélation de l'eau	32	0	273,15
Ébullition de l'eau	212	100	373,15
Corps humain	98,6	37	310,15



Degrés Celsius ou fahrenheit?

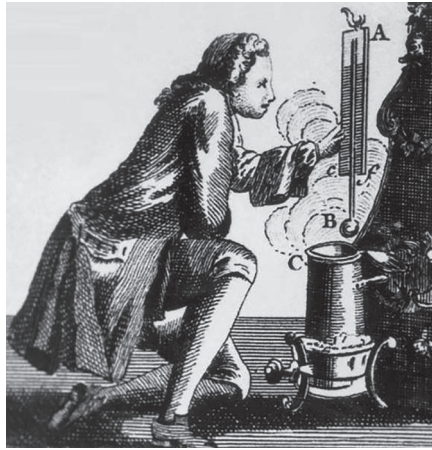
Malgré le succès de l'échelle de Celsius, certains pays continuent à mesurer leurs températures en degrés fahrenheit : les États-Unis, le Belize et les îles Caïman.



Du côté de l'histoire

Gabriel Fahrenheit

(1686-1736)



Gabriel Fahrenheit est né le 24 mai 1686 à Dantzig, alors en Allemagne, mais actuellement en Pologne. Il perd ses parents à 15 ans, qui ont mangé accidentellement des champignons vénéneux. Il est placé en apprentissage chez un marchand de Dantzig, qui l'envoie en 1704 à Amsterdam, pour apprendre le métier de négociant. Découvrant les thermomètres florentins, il montre un intérêt croissant pour les sciences : il souhaite fabriquer des instruments de mesure physique, pour les commercialiser. Mais la confection même des appareils le passionne : il apprend ainsi l'activité de souffleur de verre et délaisse son activité commerciale, ce qui déplaît à son patron. La ville de Dantzig lance contre lui un mandat d'arrêt. Il s'enfuit, voyageant de ville en ville, rencontrant au cours de son périple Christian Wolff et Gottfried Wilhelm Leibniz, ainsi que Ole Römer, inventeur d'un thermomètre à alcool.

De retour en Hollande, à sa majorité, Fahrenheit s'installe à La Haye. En 1714, il va concevoir un thermomètre à mercure, et établir son échelle de mesure. En 1718, il obtient la charge d'un enseignement en chimie à Amsterdam. Il est élu en 1724 membre de la Royal Society, en Angleterre. Il décède le 16 septembre 1736, à La Haye.

CHAPITRE 15

Les unités de mesure du temps

La mesure du temps a été depuis toujours une grande affaire : pour définir la durée d'une journée, par exemple, cela n'a pas été de soi : en hiver, les jours sont plus courts qu'en été.

✓ Ce qu'on apprend au collège

C'est une notion abordée en 6^e.

La durée est la mesure du temps entre deux instants. L'unité légale de durée est la seconde (s).

Il existe également :

la minute (min) : $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$;

l'heure (h) : $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$;

le jour : $1 \text{ jour} = 24 \text{ h}$.

● Techniques de calcul

Pour additionner, dans un premier temps, on additionne séparément les h, min et s :

1 h	26 min	43 s
3 h	48 min	25 s
4 h	74 min	68 s

Dans un second temps, on met de l'ordre dans la réponse : $68 \text{ s} = 1 \text{ min } 8 \text{ s}$, donc $4 \text{ h } 74 \text{ min } 68 \text{ s} = 4 \text{ h } 75 \text{ min } 8 \text{ s}$.

Puis $75 \text{ min} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$, donc $4 \text{ h } 74 \text{ min } 68 \text{ s} = 5 \text{ h } 15 \text{ min } 8 \text{ s}$.

Pour soustraire, c'est l'opération inverse : si on ne peut pas faire la soustraction, on enlève une heure et on ajoute 60 min (ou on enlève une min et on ajoute 60 s).

Puis on effectue la soustraction rendue possible.

3 h	26 min	43 s
2 h	86 min	43 s
2 h	44 min	25 s
0 h	42 min	18 s

● Conversions

Pour convertir une durée en minutes en nombre décimal d'heures, on doit diviser par 60.

Pour convertir un nombre décimal d'heures en durée en minutes, on doit multiplier par 60.

Remarque : Ces règles sont valables pour convertir une durée en secondes en nombre décimal de minutes et inversement.

Exemples

$$5,7\text{ h} = 5\text{ h} + 0,7\text{ h} = 5\text{ h} + (0,7 \times 60)\text{ min} = 5\text{ h}42\text{ min}$$

$$2\text{ h}18\text{ min} = 2\text{ h} + 18\text{ min} = 2\text{ h} + \frac{18}{60}\text{ h} = 2\text{ h} + 0,3\text{ h} = 2,3\text{ h}$$

Remarque : on peut ajouter d'autres unités de durée : le jour, la semaine, l'année, le siècle.

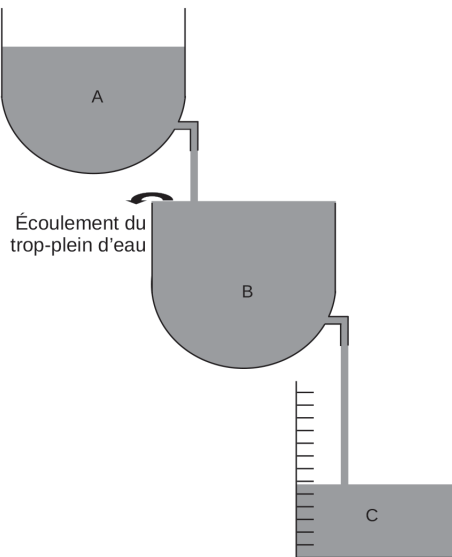
Du côté de l'histoire

La mesure du temps

La clepsydre

C'est une sorte de sablier rempli d'eau. Les premières clepsydes étaient des bols dont le centre était troué. Malheureusement, on observe assez facilement que lorsque le bol est plein, l'eau s'écoule plus vite que lorsqu'il est presque vide : la pression dépend de la hauteur de l'eau, qui diminue au fur et à mesure que le bol se vide. Les Égyptiens essayaient de régler le problème en construisant des bols cylindriques, mais le problème restait : l'écoulement de l'eau n'était pas constant.

Ctésibios (III^e siècle av. JC), un ingénieur d'Alexandrie, eut l'idée de régler le problème en utilisant trois réservoirs :



Le réservoir B est toujours entièrement rempli, afin que la pression ne varie pas. Il est alimenté par le réservoir A, le trop-plein se déversant par une soupape (au niveau de la flèche) ; ainsi, l'eau s'écoule régulièrement dans le réservoir C qui est gradué et permet de déterminer le temps écoulé.

Mais malgré tout, la mesure reste peu précise : les impuretés de l'eau, et la température, influencent encore la durée mesurée.

Le sablier

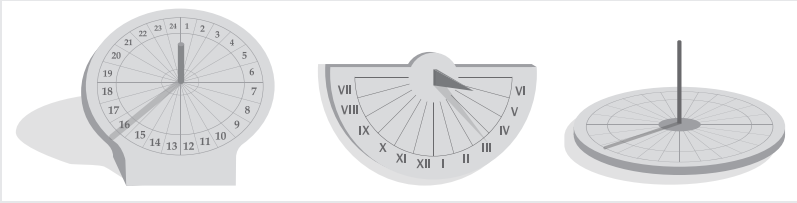
D'un usage très commode pour cuire des œufs, par exemple, mais pas pour des mesures précises. D'autant que la durée écoulée, censée être fixe, peut varier au bout d'un certain temps, par usure des grains de sable.



→ Pour aller plus loin

Le cadran solaire

Il s'agit ici de mesurer le temps avec le soleil. On notera tout de suite que cette mesure ne peut se faire que de jour, impossible de lire l'heure la nuit !



Les cadrans solaires sont très anciens : le grec Anaximandre en aurait construit un au ^{vi}e siècle avant JC, et il est attesté que les Babyloniens en utilisaient, vers le ^ve siècle av. J.-C. Mais on peut se douter que les cadrans solaires ont été utilisés bien avant encore. En Europe, ce sont les églises et les monastères qui s'occupent de la mesure du temps : ils utilisent le cadran solaire pour indiquer à la communauté religieuse les heures de prière. La nuit, le problème est réglé par ce qu'on appelle des horloges à feu : une bougie, par exemple, brûle de manière constante : il suffit de marquer le cierge sur le côté, et au fur et à mesure que la cire brûle, on voit combien de temps est passé. D'autres dispositifs ont été utilisés, fonctionnant sur le même principe : on utilise de l'encens ou une lampe à huile, par exemple.

La précision des cadrans solaires

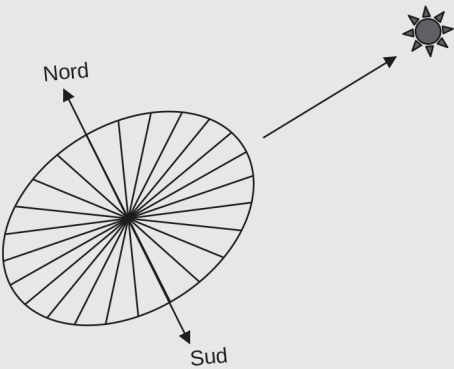
Ces cadrans manquent de précision : l'heure n'est pas constante tout au long de l'année, les journées hivernales étant plus courtes que les estivales. Les anciens considéraient que le jour était composé de 12 heures, et donc marquaient les cadrans de douze traits ; ce qui fait qu'en fonction de la période de l'année, les heures de ces cadrans étaient plus ou moins courtes. Par la suite, au ^{xv}e siècle, on prendra conscience que l'axe de la Terre est incliné, et que celle-ci tourne autour du soleil. En penchant le style (le bâton « vertical » du cadran) de façon à ce qu'il soit parallèle à l'axe de la Terre, on obtient une heure exacte. Ce qui a permis, outre de donner la bonne heure, d'étayer les propos de Copernic et Galilée.

Enfin, les horloges sont apparues, vers la fin du ^{xvi}e siècle. Leur prolifération aura raison des cadrans solaires qui n'auront plus aucune utilité, si ce n'est décorative.

Réglage d'un cadran solaire

La Terre tourne autour de son axe en 24 heures, soit $\frac{360}{24} = 15^\circ/\text{heure}$.





L'heure solaire donne midi lorsque le soleil passe exactement au Sud du lieu.

Mais ce temps dépend beaucoup de la position du cadran, en fonction de sa longitude.

Suivant le lieu où l'on prend la mesure, la longitude varie : par exemple, le soleil se couche une heure plus tard en Bretagne par rapport à l'Alsace. Et pourtant, notre montre nous donne la même heure. Il faut donc appliquer une correction de longitude sur la mesure trouvée : le méridien de référence est de 15°Est (pour le fuseau horaire dans lequel est située la France).

Par exemple, la longitude de Strasbourg est 7°46'Est.

Il faudra donc faire la correction suivante : il y a $15^\circ - 7^\circ46' = 7^\circ14'$ d'écart par rapport au fuseau :

Angle (en degrés)	15	$7 + \frac{14}{60}$
Durée (en minutes)	60	d

Donc $d = \left(7 + \frac{14}{60}\right) \times 4 \text{ min} = 28 \text{ min } 56 \text{ s}.$

Quand le Soleil passe au méridien à Strasbourg, il est déjà passé depuis presque 29 minutes au-dessus du méridien d'Europe Centrale, il faudra donc ajouter ces 29 minutes au temps mesuré, ou en tenir compte sur la graduation du cadran.

À Crozon, à la pointe du Finistère en Bretagne, la longitude est de 4°29' Ouest.

Il a par conséquent $15^\circ + 4^\circ29' = 19^\circ29'$ d'écart par rapport au méridien,

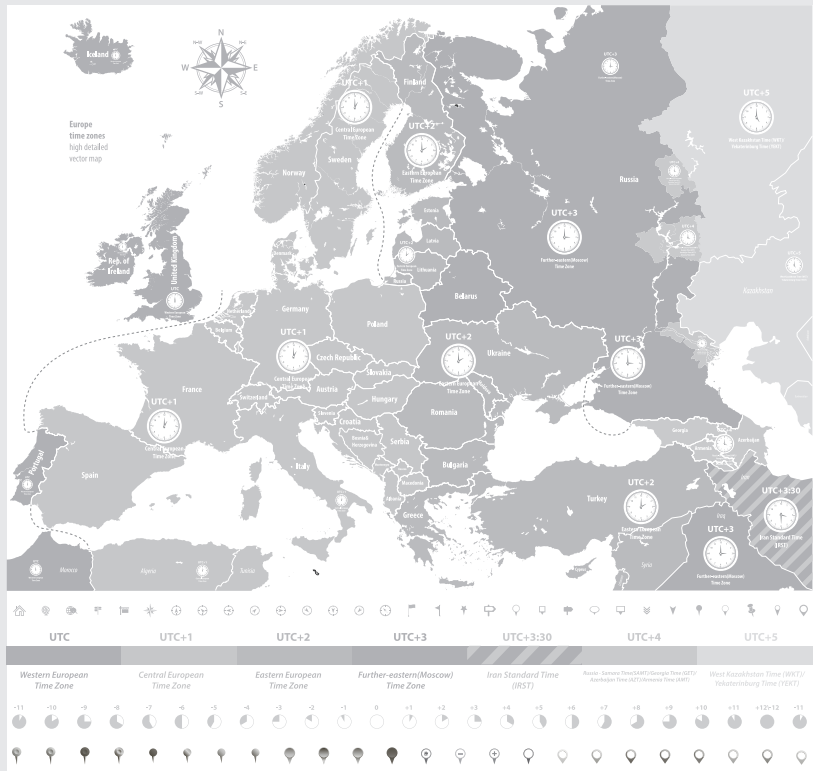
donc ici, $d = \left(19 + \frac{29}{60}\right) \times 4 \text{ min} = 77 \text{ min } 56 \text{ s}.$

Donc l'écart entre Strasbourg et Crozon est de :

$77 \text{ min } 56 \text{ s} - 28 \text{ min } 56 \text{ s} = 49 \text{ min}.$



Dans le cas général, le raisonnement est le même, mais il faut toujours tenir compte du fuseau horaire dans lequel on est. Notons GMT ce fuseau horaire.



La formule générale est alors :

$$\text{GMT} \times 15 - \text{longitude} = a^\circ b'$$

$$\text{et l'heure à déduire est } d = \left(a + \frac{b}{60} \right) \times 4 \text{ m in.}$$

Exemple avec la ville de New York : sa longitude est de 74° ouest, et elle est située dans le 5^e fuseau horaire à l'ouest de Greenwich.

$$-5 \times 15 + 74 = -1^\circ. \text{ Le décalage est donc de } -1 \times \frac{60}{15} = -4 \text{ m in.}$$

Un habitant de New York devra donc enlever 4 minutes sur sa mesure, autrement dit il aura la bonne heure directement (la ville de New York est presque au centre de son fuseau horaire, c'est donc assez logique).

Un autre exemple avec Pékin : sa longitude est de 116° 24' est, et la ville est dans le 8^e fuseau horaire à l'Est de Greenwich.



$8 \times 15 - 116^{\circ}24' = 3^{\circ}36'$. Le décalage est donc de $\left(3 + \frac{36}{60}\right) \times \frac{60}{15} = 14 \text{ min.}$

Un habitant de Pékin devra donc ajouter 14 minutes sur sa mesure.

Malheureusement, ce n'est pas la seule correction à apporter : il y a bien sûr, pour les pays qui la pratiquent, le décalage heure d'été/heure d'hiver. Il faut donc ajouter une heure en été sur la mesure faite (et rien en hiver).

De plus, la Terre effectue une ellipse autour du Soleil, et non un cercle. La distance entre la Terre et le Soleil n'est donc pas constante. En outre, lorsque la Terre est plus proche du soleil, elle se déplace plus vite. Conséquence directe : tous les jours (solaires) ne font pas exactement 24 heures. Et enfin, le soleil n'est pas tout à fait à la même place à midi, chaque jour de l'année. La courbe qu'il décrit s'appelle « analemme » :



De fait, l'heure lue sur le cadran solaire doit donc encore être modifiée, selon ce que l'on appelle « l'équation du temps », notée E . Pour résumer :

$$\text{heure du monde à l' montre} = \text{heure du monde solaire} - E$$

où E est de période annuelle :

- Elle présente un maximum absolu d'environ 14 min 15 s, vers le 11 février.
- Elle s'annule vers le 15 avril.
- Elle présente un minimum local d'environ - 3 min 40 s, vers le 14 mai.
- Elle s'annule vers le 15 juin.
- Elle présente un maximum local d'environ 6 min 30 s, vers le 26 juillet.
- Elle s'annule vers le 1^{er} septembre.



- Elle présente un minimum absolu d'environ $-16 \text{ min } 30 \text{ s}$, vers le 3 novembre.
- Enfin, elle s'annule vers le 25 décembre.

On peut donc se dire que la mesure de l'heure avec un cadran solaire reste une mesure, peu précise. Néanmoins, les connaissances qu'il faut avoir pour construire un cadran solaire fiable sont nombreuses. La discipline qui s'y consacre s'appelle la « gnomonique ».

CHAPITRE 16

Les puissances de 10

La puissance est à la multiplication ce que la multiplication est à l'addition :

$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

Les puissances de 10 fonctionnent sur le même modèle, mais du fait que la multiplication par 10 est particulièrement simple, elles se calculent aisément.

En outre, elles sont très utiles pour simplifier les écritures des très grands nombres (et des très petits également) par le biais des écritures scientifiques.

✓ Ce qu'on apprend au collège

C'est une notion abordée en classe de 4^e.

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10 \qquad 10^{-1} = 0,1$$

$$10^2 = 100 \qquad 10^{-2} = 0,01$$

$$10^3 = 1\,000 \qquad 10^{-3} = 0,001$$

Il suffit de compter le nombre de zéros.

● Notation scientifique

Écrire un nombre en notation scientifique, c'est l'écrire sous forme d'un produit d'un nombre décimal n'ayant qu'un seul chiffre avant la virgule (autre que 0) par une puissance de 10 :

$$2\,300 = 2,3 \times 10^4$$

$$78\,900\,000 = 7,89 \times 10^7$$

$$0,001\,2 = 1,2 \times 10^{-3}$$

$$0,000\,905 = 9,05 \times 10^{-4}$$

Remarque : La puissance de 10 indique un ordre de grandeur du nombre.

● Propriétés

$$10^2 \times 10^3 = 100 \times 1\,000 = 100\,000 = 10^5$$

$$\text{et } (10^2)^3 = 100^3 = 1\,000\,000 = 10^6.$$

On voit donc que $10^2 \times 10^3 = 10^{2+3}$ et que $(10^2)^3 = 10^{2 \times 3}$.

On peut généraliser :

Soient a et b deux nombres quelconques.

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b} \text{ et } (10^a)^b = 10^{a \times b}.$$

Du côté de l'histoire

La vision du système solaire

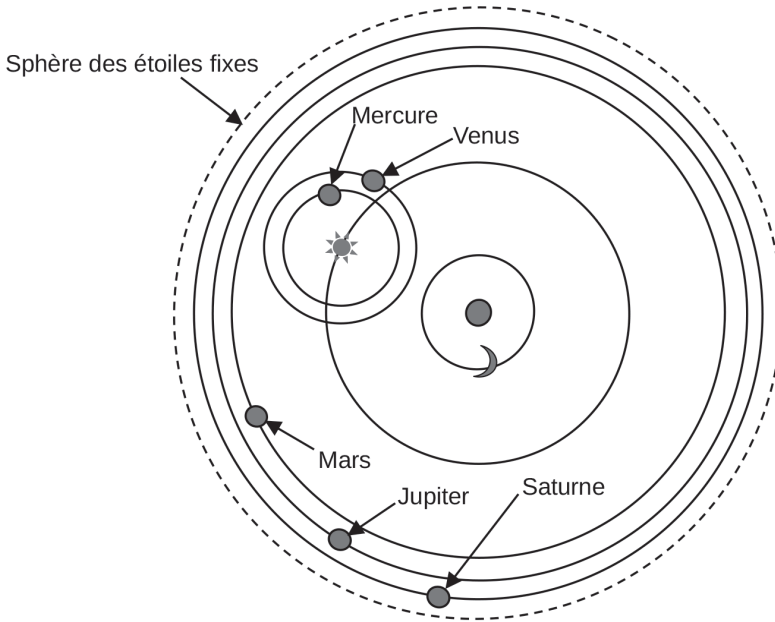
Dans l'Antiquité

Pythagore (env. -580/-495) est l'un des premiers à affirmer que la Terre est sphérique. Avant lui, on pensait qu'elle était plate et flottait sur un océan d'eau. On ne sait pas comment Pythagore a eu cette idée, peut-être en observant l'ombre de la Terre sur la Lune, ou en observant le mât d'un bateau qui disparaît à l'horizon, mais il est tout aussi envisageable qu'il ait voulu faire de la Terre un objet sphérique, simplement parce que le solide le plus beau et le plus parfait selon lui est la sphère. Ainsi, il a considéré les autres astres sphériques aussi.

Pour **Philolaos** (-470/-385), un disciple de Pythagore, le système astronomique n'est ni géocentrique, ni héliocentrique : au centre de l'univers, il y a un feu central, Hestia, qui anime le Cosmos. Autour de ce feu tournent neuf astres, dont la Terre et l'anti-Terre. L'hémisphère habité de la Terre tourne toujours le dos à l'anti-Terre, ce qui fait que les terriens ne la voient jamais ! Cette anti-Terre permettait d'expliquer les éclipses de Lune, qui sont beaucoup plus fréquentes que les éclipses de Soleil. Le tout est placé dans une « sphère des étoiles », entourée par un feu extérieur, le tout baignant dans l'« *apeiron* » : un vide indéterminé, le chaos primitif, mouvant, instable, indéfini. Le soleil est une boule de cristal qui réfléchit la lumière du feu central. La terre tourne autour du feu central en 24h. La Lune est semblable à la Terre : elle est peuplée d'animaux mythiques, plus grands et plus beaux que ceux de la Terre. Il faut noter que Philolaos est le premier astronome à envisager que la Terre n'est pas au centre de l'univers...

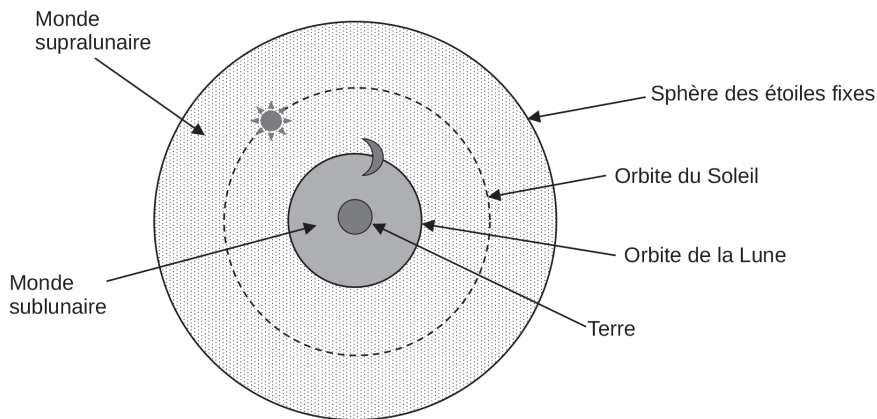
1	Feu central
2	Anti-Terre
3	Terre
4	Lune
5	Soleil
6	Venus
7	Mercure
8	Mars
9	Jupiter
10	Saturne

Héraclide du Pont (–390/–339) aurait été l'un des premiers à imaginer la rotation de la Terre sur elle-même, en faisant un tour en 24 heures, ce qui expliquerait le mouvement apparent des étoiles au cours de la nuit, ainsi que l'alternance jour/nuit. Pour lui, la sphère des étoiles est toujours fixe. Il laisse la Terre au centre du système, mais fait tourner Mercure et Venus autour du soleil.



Chez **Aristote** (–384/–322), le ciel est plus simple : La Terre est toujours au centre de l'Univers ; le Cosmos est formé de sphères centrées sur la Terre, qui est immobile. Il définit deux régions distinctes :

- le monde sublunaire, décrit par la Lune tournant autour de la Terre, est formé des quatre éléments eau-air-terre-feu. Il est soumis au temps et à la corruption. C'est le monde imparfait, où vivent les hommes.
- le monde supralunaire, situé entre la sphère lunaire et la sphère des étoiles fixes, formé d'un cinquième élément, l'éther. C'est dans ce monde que se déplacent le soleil et les planètes. Dans ce monde, vieillesse et décadence sont inconnues. C'est le monde parfait, où vivent les dieux. **Aristarque** (–310/–230) est l'un des précurseurs de la théorie héliocentrique : bien avant Galilée ou Copernic, il affirme que les étoiles et le Soleil sont immobiles et que la Terre tourne autour du Soleil. Il se servira de cette configuration pour calculer les distances Terre-Lune et Terre-Soleil (**voir chapitre suivant**). Sa théorie n'a cependant pas retenu l'attention, seul Archimède, dans l'*Arénaire*, en fait mention.

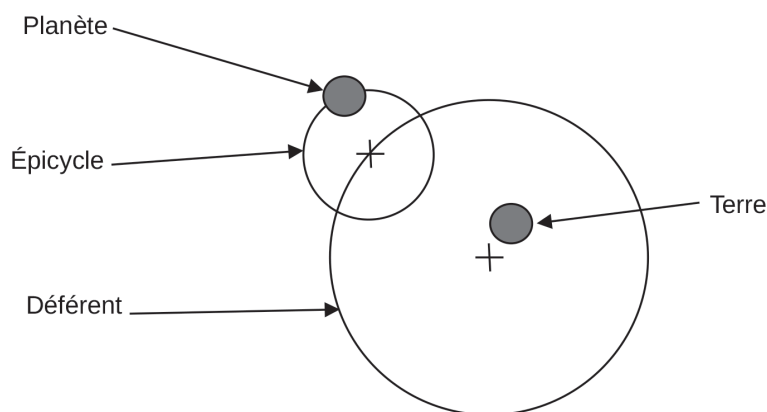


Hipparque (–180/–125), grâce à la rigueur de ses méthodes, en utilisant des instruments performants (Astrolabe) et en innovant par la création de tables de cordes (il est à l'origine de la trigonométrie), fait des mesures astrales précises. Il découvre la précession des équinoxes (c'est-à-dire le décalage progressif de la direction où sont vues les étoiles, et qui correspond au changement de direction de l'axe de rotation de la Terre) et les irrégularités des mouvements de la lune. Étendant à toutes les planètes le système d'Héraclide, il propose un système du cosmos où chaque planète tourne autour d'un petit cercle, l'épicycle, dont le centre tourne lui-même autour d'un grand cercle, le déférent. Tous ces déférents sont concentriques et leur centre commun est un point proche de la Terre (Elle est légèrement excentrée). Ses travaux seront grandement repris par Ptolémée (env. 100-168).

Dans l'ordre, il y a :

1	Terre
2	Lune
3	Mercure
4	Venus
5	Soleil
6	Mars
7	Jupiter
8	Saturne

Beaucoup de cratères de la Lune portent le nom d'un scientifique. Mais celui attribué à Hipparque est notable : C'est dans ce cratère que Tintin alunait dans « *On a marché sur la Lune* ».

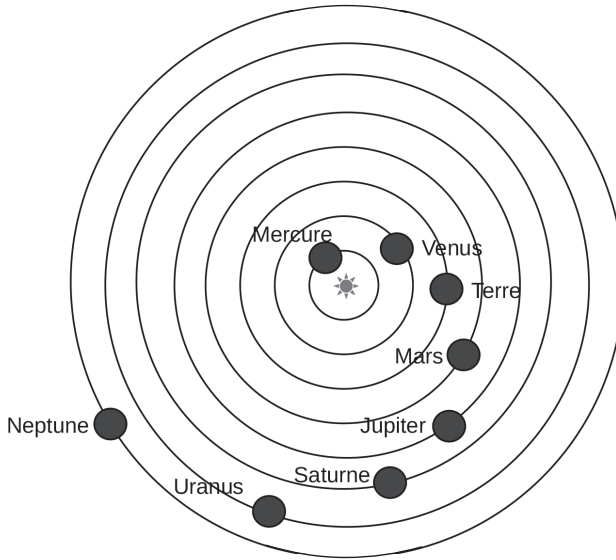


Au Moyen Âge

Durant toute cette période, les visions du système astrologique s'apparentent souvent à celui d'Aristote, et parfois à celui d'Hipparque (improprement appelé système de Ptolémée). Bien sûr, les travaux continuent et quelques scientifiques se posent des questions, ce qui amènera petit à petit à la vision du système héliocentrique. Mais cela ne va pas aller de soi : d'une façon générale, on n'accepte pas trop que la Terre soit mobile. L'adoption de la nouvelle théorie va devenir un sujet d'opposition dans de nombreux domaines : la religion, bien sûr, mais également l'Université et la politique.

À la Renaissance

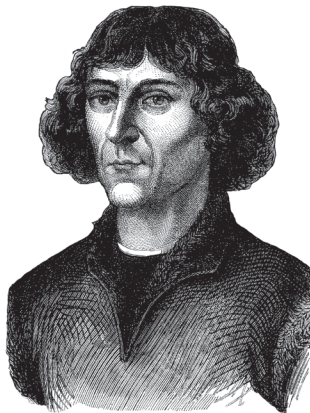
Copernic place le Soleil au centre de l'univers. La Terre, elle, tourne sur elle-même d'une part, et tourne autour du soleil d'autre part. La lune tourne autour de la terre, toutes les autres planètes tournant autour du Soleil. La sphère des étoiles fixes est toujours présente, immobile. Beaucoup de phénomènes s'expliquent facilement avec son modèle, la rétrogradation par exemple. Mais son système n'a aucun argument basé sur de nouvelles observations astronomiques.



Et malgré l'idée reçue que le système copernicien est plus simple que celui de Ptolémée, il n'en est rien.

Malgré tout, le système de Copernic permet des calculs qu'il était impossible de faire avec le système géocentrique : il y a un rapport logique entre la distance des planètes au centre du système et leur période de révolution.

Nicolas Copernic (1473-1543)



C'est un humaniste, né le 19 février 1473. Il étudie l'Art, la musique et les belles lettres, ainsi que les mathématiques et l'astronomie, la médecine et le droit. Se destinant à une carrière ecclésiastique, il part, en 1496, pour

l'université de Bologne, en Italie. Il y étudie le droit canonique et civil, la médecine et la philosophie. Il y apprend également le Grec, ce qui lui permettra de lire les textes anciens. C'est probablement à cette époque qu'il serait tombé sur les textes d'Aristarque de Samos, de Philolaos le pythagoricien, ou d'Héraclide du Pont...

De retour en Pologne, le jeune chanoine s'occupe de tâches administratives et sera également médecin. En parallèle, il poursuit ses recherches en astronomie. Faisant des observations à partir de la tour de la cathédrale de Frauenburg, il se convainc très rapidement que le modèle de Ptolémée, géocentrique, est faux. Mais durant les 36 ans qui suivront, Copernic ne produira qu'un court texte qu'il ne fait circuler qu'auprès de ses amis. Le système qu'il conçoit ne le satisfait pas : il privilégie des courbes circulaires, ce qui ne correspond pas à ses observations et à ses calculs. D'autre part, des instruments peu précis et un ciel très souvent brumeux ne lui permettent pas d'interpréter correctement ses observations. Il s'embrouille alors en ajoutant dans son système les épicycles de Ptolémée. Vers 1530, le manuscrit *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (*Des révolutions des sphères célestes*) est achevé. Quelques copies circulent déjà certainement, mais l'ouvrage ne paraîtra officiellement qu'en 1543, à la mort de son auteur.

Giordano Bruno (1548-1600)

Giordano Bruno (1548-1600) est un frère dominicain et un philosophe. Mais en 1584, il rejette la doctrine chrétienne et cesse d'être religieux.

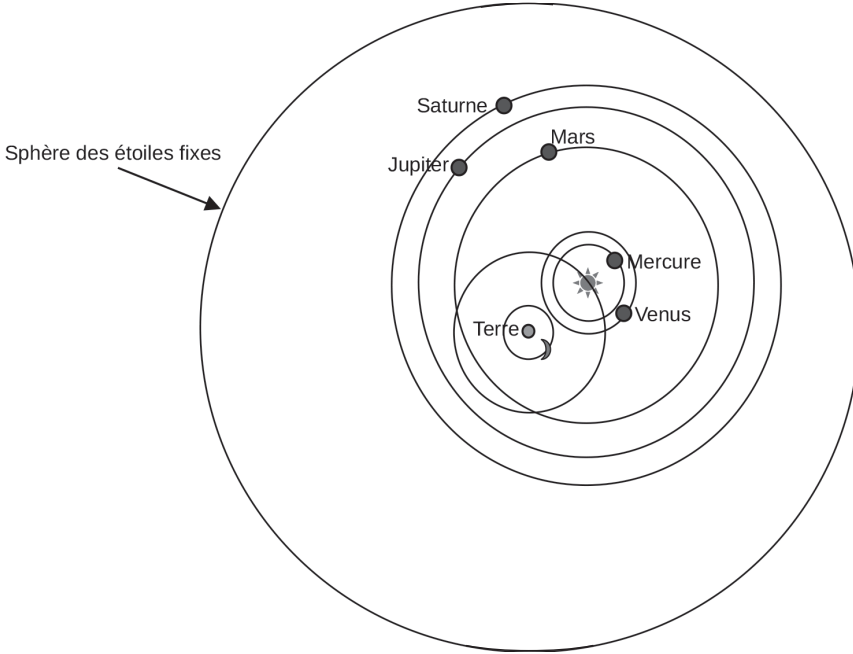
Il développe la théorie de Copernic, et envisage l'existence d'un univers infini, donc sans centre, contenant une « quantité innombrable d'astres et de mondes identiques au nôtre ». En outre, il donne la preuve de la relativité du mouvement : si on est sur un bateau, par exemple, et que l'on jette un caillou du haut du mât, il tombera au pied du mât, quel que soit le mouvement du bateau. On peut appliquer ce même raisonnement au mouvement de la Terre, indécidable pour quiconque sur Terre.

Giordano est accusé d'athéisme et d'hérésie, par l'Inquisition. On lui reproche des écrits blasphématoires et son apostat. Le procès dure huit ans, propositions et rétractations se succédant. Il meurt sur le bûcher, le 17 février 1600, à Rome.

Tycho Brahé (1546-1601)

Tycho Brahé (1546-1601) est un astronome danois. Il marque une évolution dans l'histoire de l'astronomie, en privilégiant les observations pour valider une théorie. En ce sens, il conçoit de nouveaux instruments de mesure. Ses résultats sont très précis, et serviront à Kepler. Malgré tout, Tycho Brahe,

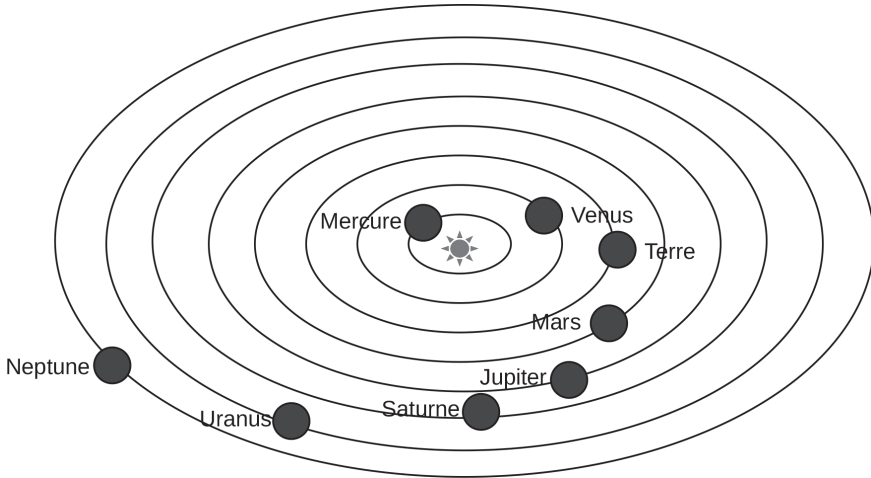
bien qu'informé des travaux de Copernic, ne se résout pas à placer le soleil au centre de l'univers. Il conçoit un système mixte : la Terre est immobile, les autres planètes tournent autour du Soleil, celui-ci tournant lui-même autour de la Terre.



Quoique inexact, le système de Tycho Brahé a été cependant soutenu par les religieux, notamment les jésuites, durant tout le ^{xvii}e siècle. C'était pour eux la seule manière de respecter les Écritures, en gardant l'immobilité de la Terre.

Kepler (1571-1630)

Kepler (1571-1630) est un astronome allemand. Il a découvert que les planètes ne tournent pas autour du Soleil en suivant des trajectoires circulaires, mais des trajectoires elliptiques. Il a de plus établi les relations mathématiques qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Ses travaux seront repris par la suite par Newton pour sa théorie de la gravitation universelle.



En 1632, **Galilée** (voir plus loin) publie *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*. Suite à ses observations astronomiques, le savant suit les théories coperniciennes : ses observations montrent que la Terre n'est pas le centre de tous les mouvements célestes, que les lois de la nature sont identiques sur Terre et dans le reste de l'Univers. Il n'y a donc plus de raison de placer la Terre en son centre.

→ *Pour aller plus loin*

Distances entre les astres

Les distances réelles

Astre	Diamètre (en km)	Distance moyenne au soleil (en km)
Soleil	$1,3927 \times 10^6$	0
Mercure	4 879,4	$5,79 \times 10^7$
Venus	12 104	$1,08 \times 10^8$
Terre	12 756	$1,496 \times 10^8$
Mars	6 794	$2,28 \times 10^8$
Jupiter	142 924	$7,78 \times 10^8$
Saturne	120 536	$1,426 \times 10^9$
Uranus	5 118	$2,871 \times 10^9$
Neptune	49 498	$4,498 \times 10^9$

En se plaçant à une échelle telle que la Terre serait une sphère de diamètre 1cm

Astre	Diamètre (en cm)	Distance moyenne au soleil (en m)
Soleil	109,2	0
Mercure	0,4	45,4
Venus	0,9	84,7
Terre	1	117,3
Mars	0,5	178,7
Jupiter	11,2	609,9
Saturne	9,4	1 117,9
Uranus	4	2 250,7
Neptune	3,9	3 526,2

CHAPITRE 17

Les vitesses

La vitesse est une grandeur composée : elle dépend de la distance du parcours d'un mobile ainsi que de sa durée.

Les calculs de vitesse font partie de la grande famille des problèmes de proportionnalité, mais du fait qu'ils font intervenir deux grandeurs, une attention particulière doit être apportée aux conversions (km/h en m/s par exemple).

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est vue en classe de 4^e.

La vitesse d'un mobile n'est pas toujours constante. Cependant, si ce mobile parcourt par exemple 150 km en 2 h 30 min, on peut dire qu'il parcourt en moyenne $\frac{150}{2,5} = 60$ km en 1 h. Sa vitesse moyenne est de 60 km h^{-1} .

On peut modéliser cette situation avec un tableau de proportionnalité :

Distance (en km)	150	d
Temps (en h)	2,5	1

La vitesse v est le coefficient de proportionnalité du tableau de proportionnalité ci-dessus.

Remarque : il faut faire attention à utiliser les notations en heure décimale :

$$2\text{ h }30\text{ min} = 2\text{ h} + 30\text{ min} = 2\text{ h} + \frac{30}{60}\text{ h} = 2\text{ h} + 0,5\text{ h} = 2,5\text{ h}.$$

ATTENTION!

L'unité de vitesse dépend du choix des unités de distance et de durée.

→ *Pour aller plus loin*

Vitesse du son et vitesse de la lumière

Le son

Le son est un entrechoc de molécules provoquant une onde qui se propage dans un milieu matériel. La vitesse du son est la vitesse à laquelle cette onde se propage, elle dépend de la température, de la pression et de la densité du milieu à travers lequel il évolue. (Dans le vide, il n’y a pas de molécules, donc il n’y a pas de son!)

Depuis l’antiquité, on se doute que le son est une onde qui se déplace à une très grande vitesse (le phénomène de l’écho, par exemple, montre que le son n’est pas instantané, puisqu’il se reflète sur une paroi). On a cherché à déterminer cette valeur, avec plus ou moins de succès :

- En 1635, Marin Mersenne calcule que le son évolue à une vitesse de 248m/s environ.
- Pierre Gassendi, à la même époque, trouve 481m/s environ.
- Durant tout le XVII^e siècle, d’autres scientifiques vont effectuer des mesures (Edmund Halley, Robert Boyle, Giovanni Cassini, Christian Huygens, entre autres) qui ne seront pas concluantes.
- En 1738, l’académie des sciences propose d’organiser de nouvelles expériences. La vitesse du son est alors estimée à 333m/s.
- En 1808, Jean-Baptiste Biot détermine la vitesse du son dans les solides.
- En 1822, le bureau des longitudes décide d’organiser de nouvelles expériences : François Arago et Gaspard de Prony s’en chargent, et trouvent une vitesse de 331m/s.
- En 1828, Jean-Daniel Colladon et Charles Sturm calculent cette vitesse dans l’eau (du lac Léman).

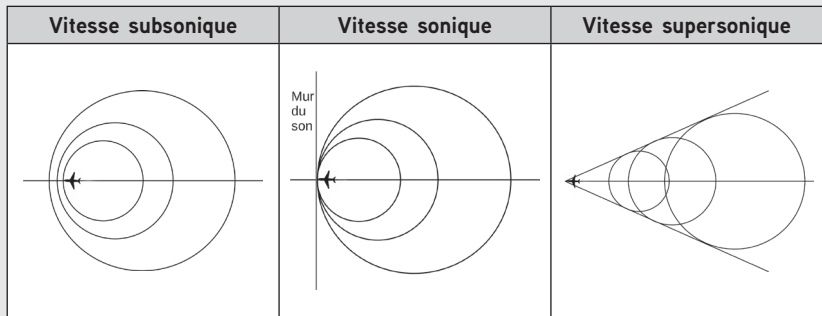
Voici quelques valeurs de la vitesse du son en fonction du milieu dans lequel il se déplace :

	Air	Eau	Béton	Acier
Vitesse du son (en m/s)	340	1480	3100	5600

Le mur du son

Lorsqu’un avion dépasse la vitesse de 340m/s, c’est-à-dire 1224km/h, on entend un grand «bang» : lorsqu’un avion vole moins vite que cette vitesse, les ondes sonores sont évacuées en avant et en arrière de l’appareil. Mais lorsqu’il vole plus vite et atteint les 343m/s, le son qu’il provoque «rattrape» l’appareil, ce qui crée un «mur» d’onde, et cela provoque le «bang» entendu.





Le nombre de Mach :

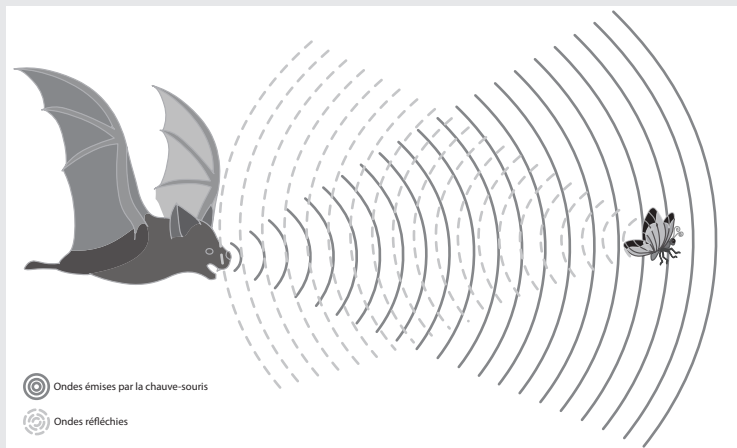
$$M_a = \frac{v}{a} \quad \text{où} \quad \begin{cases} M_a \text{ est le nombre de Mach} \\ v \text{ est la vitesse de l'objet} \\ a \text{ est la vitesse du son} \end{cases}$$

Ainsi : Mach 1 = $1 \times a$, Mach 2 = $2 \times a$, etc.

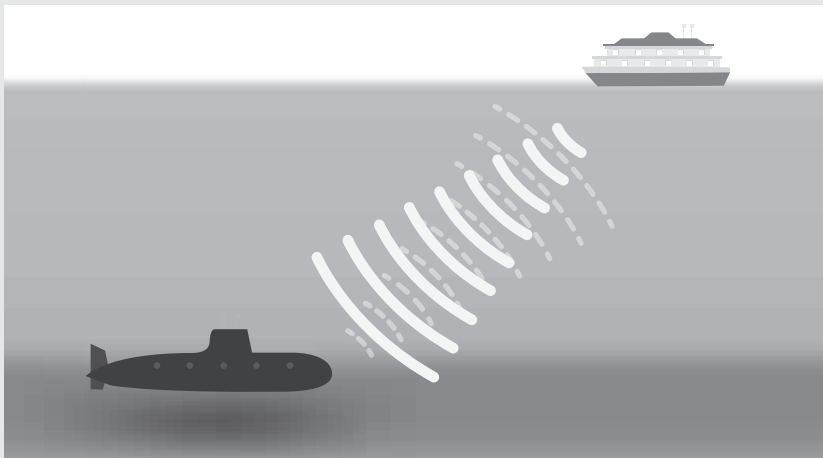
$v < \text{Mach } 0,8$	Subsonique	
$\text{Mach } 0,8 < v < \text{Mach } 1,2$	Transsonique	Airbus, Boeing...
$\text{Mach } 1,2 < v < \text{Mach } 5$	Supersonique	Concorde, Rafale...
$v > \text{Mach } 5$	Hypersonique	Navettes spatiales

Le sonar

Certains animaux, tels la chauve-souris, utilisent les ondes sonores pour se repérer :



Les bateaux s'inspirent de ce procédé et utilisent un SONAR (SOUND Navigation And Ranging, c'est-à-dire navigation et repérage par le son) :



La lumière

À l'époque antique, il y a ceux qui pensent que la lumière est quelque chose en mouvement (Empédocle), d'autres que « *la lumière est due à la présence de quelque chose, mais ce n'est pas un mouvement* » (Aristote). Mais très vite, les scientifiques ont penché pour la vision d'Empédocle (Euclide, Ptolémée). La question qui est passée au premier plan était de savoir si cette vitesse était finie ou infinie.

Au début du XVII^e siècle, Galilée (1564-1642), pense que la lumière se déplace à vitesse finie. Mais l'expérience qu'il a tenté de réaliser pour la mesurer n'était pas concluante.

Römer (1644-1710) explique le décalage entre les éclipses de Io (un satellite de Jupiter) en supposant que la lumière possède une vitesse de propagation. Il étudie l'avance ou le retard apparent dans le mouvement de Io (il étudie plus précisément l'intervalle entre deux occultations du satellite derrière la planète). Il constate que ce décalage par rapport à la théorie dépend de la distance que la lumière doit parcourir pour aller de la Terre à Jupiter.

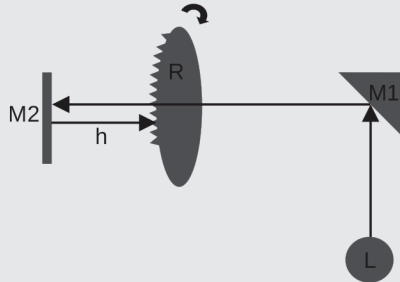
C'est le premier à donner un ordre de grandeur de la vitesse de la lumière, à savoir $c = 220\,000 \text{ km/s}$.

Par la suite, Bradley (1693-1762), à la suite de Römer, propose une estimation de la vitesse de la lumière à environ 10188 fois celle de la rotation de la Terre autour du Soleil. Cependant on connaît mal cette distance.

Il établit ainsi que $c = 301\,000 \text{ km/s}$.



Au XIX^e siècle, Fizeau (1819-1896) met au point un dispositif ingénieux qui lui permet d'évaluer la vitesse de la lumière : la roue dentée R est mise en rotation, la source lumineuse L est réfléchiée par un premier miroir M1, franchit une échancrure de la roue, parcourt la distance h, se réfléchit sur un miroir éloigné M2, parcourt à nouveau la distance h, et arrive à nouveau sur la roue dentée. Celle-ci, entre-temps, a légèrement tourné : la lumière réfléchiée peut tomber sur une dent et donc être bloquée, ou passer par l'échancrure suivante.



En mesurant le temps t qu'il a fallu à la roue pour laisser passer à nouveau la lumière, à partir de sa vitesse de rotation, et de la distance parcourue $2h$, on calcule la vitesse de la lumière $c = \frac{2h}{t}$.

Avec ce dispositif, il établit que $c = 315\,000\text{ km/s}$.

En perfectionnant le dispositif ci-dessus, Cornu (1841-1902) trouve une valeur de $300\,400\text{ km/s}$. Les mesures réalisées par la suite permettent d'obtenir des valeurs de plus en plus précises, afin d'arriver à celle utilisée aujourd'hui : $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$.

→ Pour aller encore plus loin

L'orage

Les orages se déclenchent en été : ils se forment lorsqu'il y a une charge importante de chaleur et d'humidité au niveau de la terre, et de l'air froid et sec en altitude. L'air chaud « monte », et sa température se modifie jusqu'à ce qu'il y ait saturation. Se forme alors un cumulonimbus, à l'origine de l'orage. C'est un énorme nuage qui peut prendre la forme d'une enclume de 5 à 15 km de large et qui peut s'élever jusqu'à 15 km ; pour avoir une idée, un cumulonimbus de 1 km de large sur 10 km de hauteur contient 1 million de litres d'eau.

Lorsqu'un orage éclate, il pleut, évidemment, on voit la foudre et on entend le tonnerre. Mais la vitesse du son est inférieure à la vitesse de la lumière. Donc, si on voit un éclair, le tonnerre retentira bien après. À chaque seconde écoulée, le son parcourt 340 mètres. Donc pour avoir la distance en mètres, il suffit de compter le nombre n de secondes : $d = n \times 340$.

On peut simplifier la procédure : $340 \times 3 = 1020 \text{ m} \approx 1 \text{ km}$

Donc chaque fois que l'on compte 3 secondes, il faut compter 1 km. Et si l'on divise le nombre de secondes n par 3, on obtient directement la distance approximative en kilomètres :

$$\text{distance en km} \approx \frac{n}{3}$$



CHAPITRE 18

Les racines carrées

La racine carrée est l'opération inverse de l'élevation au carré :

$$5^2 = 25 \text{ et } \sqrt{25} = 5.$$

Historiquement, la racine carrée est apparue pour la première fois chez les Pythagoriciens : chez eux, tout est nombre (à savoir nombre entier ou fraction de nombres entiers). Mais le jour où ils ont voulu mesurer la diagonale d'un carré de côté 1, ils sont tombés sur un problème insoluble, puisque cette diagonale mesure $\sqrt{2}$ (**Voir Chapitre 3, Hippase de Métaponte**).

✓ Ce qu'on apprend au collège

Cette notion est abordée en classe de 4^e.

Soit a un nombre **positif**.

La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre qui, élevé au carré, est égal à a .

Exemples $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{49} = 7$

Remarques

- soit $a \geq 0$. Par définition, $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$
- Dans la notation $\sqrt{a}$, le signe $\sqrt{}$ s'appelle le *radical* et a s'appelle le *radicande*.

● Racine carrée d'un produit, d'un quotient

Soient a et b deux nombres **positifs**.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0).$$

Exemples $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Cas particulier : $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

ATTENTION!

Lorsque a et b ne sont pas égaux à zéro, $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$:

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ et } \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

• Carré parfait

Lorsque la racine carrée d'un nombre est un nombre entier, alors on dit que ce nombre est un carré parfait.

Exemple : $\sqrt{16} = 4$ donc 16 est un carré parfait.

Les carrés parfaits à connaître : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

→ Pour aller plus loin

L'extraction d'une racine carrée

Le plus simple est de montrer la technique avec un exemple : cherchons la racine carrée de 24 368.

On groupe les chiffres 2 par 2 de la droite vers la gauche. On prend le premier groupe à gauche, et on cherche le plus grand carré qui soit inférieur à ce nombre.

Ici, le premier groupe est 2, le plus grand carré est 1, soit 1^2 .

On place le 1, on soustrait 1 et on abaisse le groupe suivant, à savoir 43.

$$\begin{array}{r|l}
 24\,368 & \\
 - 1 & \\
 \hline
 143 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Car } 1^2 = 1 < 2 \text{ et } 2^2 = 4 > 2
 \end{array}$$

On multiplie par 2 : $1 \times 2 = 2$ donc on écrit 2

et on cherche un chiffre n tel que $2n \times n \leq 143$.

Ici, $25 \times 5 = 125$. On monte le 5, et on fait la soustraction.

$$\begin{array}{r|l}
 24\,368 & 15 \\
 - 1 & \\
 \hline
 143 & \\
 - 125 & \\
 \hline
 18 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 25 \times 5 = 125
 \end{array}$$

Ensuite, on abaisse 68

et on multiplie de nouveau par 2 : donc on écrit 30

et on cherche un chiffre n tel que $30n \times n \leq 1868$, soit donc 6.

On monte ce 6, et on fait la soustraction.

$$\begin{array}{r|l}
 24\,368 & 156 \\
 - 1 & \\
 \hline
 143 & \\
 - 125 & \\
 \hline
 1868 & \\
 - 1836 & \\
 \hline
 32 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 25 \times 5 = 125 \\
 306 \times 6 = 1836
 \end{array}$$



Comme on obtient 32, l'extraction n'est pas terminée : on abaisse deux 0, on place une virgule après le 156, et on recommence : _____

$156 \times 2 \leq 312$ donc on cherche un chiffre n tel que $312n \times n \leq 3200$.

Soit donc 1. On monte ce 1, on fait la soustraction.

On obtient 79, pour continuer on abaisse encore deux 0.

2 4 3 6 8	1 5 6, 1
- 1	2 5 x 5 = 125
1 4 3	3 0 6 x 6 = 1836
- 1 2 5	3 1 2 1 x 1 = 3121
1 8 6 8	
- 1 8 3 6	
3 2 0 0	
- 3 1 2 1	
7 9 0 0	

$1561 \times 2 = 3122$ et on cherche n tel que $3122n \times n \leq 7900$

soit donc $n = 0$.

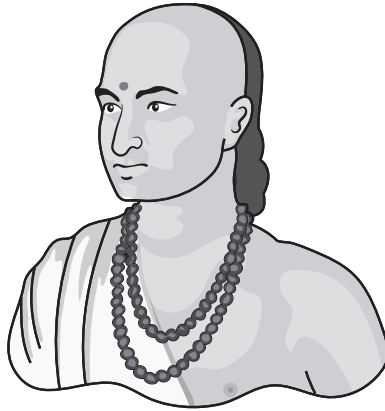
On obtient donc $\sqrt{14\,368} \approx 156,1$

Si on veut plus de décimales, on monte le 0 (de $n = 0$), on abaisse deux 0 et on recommence.

Du côté de l'histoire

Aryabhata

(476/550)



C'est un mathématicien et un astronome très fécond. Il est l'auteur du premier livre indien qui traite d'astronomie.

Avec lui, on a un résumé des principales connaissances indiennes au VI^e siècle :

- règles pour calculer les racines carrées et cubiques
- éléments et formules de géométrie (triangle, cercle, ...)
- problèmes d'intérêts composés
- identités algébriques
- fonctions sinus et cosinus
- approximation de $\pi \approx \frac{62\,832}{20\,000} = 3,1416$

Pour effectuer ses calculs, il utilisait déjà la numération de position et le zéro, c'est-à-dire l'écriture des nombres telle qu'on la connaît aujourd'hui.

CHAPITRE 19

Les fonctions affines

D'une façon générale, les fonctions sont des sortes de «machines» à transformer les nombres. Elles ont un équivalent en géométrie : les transformations du plan, qui déplacent des points (voir **Annexe 4**).

Les fonctions affines sont des fonctions particulières, de la forme $x \mapsto ax + b$, où a et b sont des nombres donnés.

Les représentations graphiques des fonctions affines sont les droites du plan.

✓ Ce qu'on apprend au collège

C'est une notion abordée en classe de 3^e.

• Les fonctions affines et linéaires

Définitions

On appelle fonction affine toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $ax + b$ (c'est-à-dire $x \mapsto ax + b$) où a et b sont deux nombres.

On appelle fonction linéaire de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre ax (c'est-à-dire $x \mapsto ax$) où a est un nombre.

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).

Exemple : Soient les fonctions f , g et h telles que $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = 5x - 2$.

- $f(x) = 2 \times x$ donc la fonction f est linéaire avec $a = 2$.
- La fonction g n'est ni affine ni linéaire car on doit élever x au carré.
- $h(x) = 5x - 2$ donc la fonction h est affine avec $a = 5$ et $b = -2$.

Calcul d'une image

Calculons ensuite l'image de 3 par la fonction f et celle de -7 par la fonction h :

On remplace x par 3 : $f(3) = 2 \times 3$

On calcule : $f(3) = 6$

L'image de 3 par la fonction f est 6

On remplace x par -7 : $h(-7) = 5 \times (-7) - 2$

On calcule : $h(-7) = -37$

L'image de -7 par la fonction h est -37 .

Calcul d'un antécédent

Exemple : On définit les fonctions f et g par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 12$.

Déterminons l'antécédent de 7 par la fonction f et l'antécédent de 13 par la fonction g .

On cherche le nombre x qui a pour image 7 par la fonction f .

L'image de x est $f(x)$,
donc on résout l'équation :

$$f(x) = 7$$

$$2x = 7$$

$$x = 3,5$$

L'antécédent de 7 par f est donc 3,5.

On cherche le nombre x qui a pour image 13 par la fonction g .

L'image de x est $g(x)$,
on résout donc l'équation $g(x) = 13$
c'est-à-dire :

$$5x - 12 = 13$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

L'antécédent de 13 par g est donc 5.

Représentation graphique

Un repère étant défini, dire qu'un point appartient à la représentation graphique de la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$ signifie que ses coordonnées $(x; y)$ vérifient la relation $y = f(x)$ c'est-à-dire $y = ax + b$.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Dans le cas de la fonction linéaire, cette droite passe par l'origine du repère.

Remarque :

a s'appelle le coefficient directeur, il indique la direction de la droite représentative : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente de 1 (c'est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et de x).

b s'appelle l'ordonnée à l'origine : $f(0) = b$, la droite passe par le point $(0; b)$.

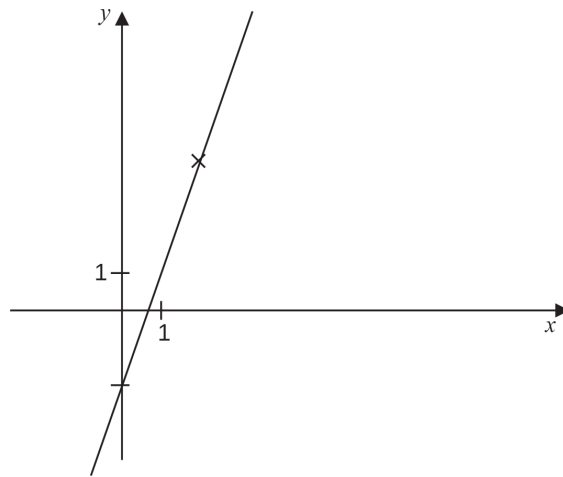
Exemple : Représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$

f est affine donc sa représentation graphique est une droite.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points.

On établit un tableau de valeurs en calculant les images de deux nombres.

Valeurs de x	0	2
Valeurs de $f(x)$	-2	4
Points de la droite	$(0 ; -2)$	$(2 ; 4)$



→ Pour aller plus loin

Les codes secrets

Depuis le début de son histoire, l'humanité a connu de nombreuses guerres. Afin de communiquer entre alliés sans que l'ennemi ne puisse connaître le message, plusieurs techniques ont été utilisées, à commencer par cacher le message dans un objet. Petit à petit, les codes secrets ont fait leur apparition. Pour lire un message codé, on a besoin de connaître la clé du code.

La scytale de Sparte

Il s'agit de deux bâtons de même diamètre. Le premier est gardé à Sparte, le second est emmené par le général de l'armée.

On enroule un ruban de papyrus autour du bâton, et on écrit le message. Lorsqu'on déroule le papier, on y trouve une suite de caractères sans sens. Ce papyrus est envoyé, et le destinataire n'a plus qu'à enrouler celui-ci sur son bâton pour décoder le message.

Le code César

On décale chaque lettre d'un certain nombre de rangs.

Par exemple, pour trois rangs :

A devient D

B devient E

C devient F

etc.

Mais ce code est très facile à déchiffrer, même sans connaître la clé.

Le code César amélioré

On numérote les lettres de 0 à 25.

On choisit deux nombres a et b , et à chaque lettre de rang n , on applique la fonction $f(n) = an + b$.

On prend ensuite le reste du résultat dans la division par 26.



Exemple avec $a = 5$ et $b = 3$:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63
3	8	13	18	23	2	7	12	17	22	1	6	11
D	I	N	S	X	C	H	M	R	W	B	G	L

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	118	123	128
16	21	0	5	10	15	20	25	4	9	14	19	24
Q	V	A	F	K	P	U	Z	E	J	O	T	Y

Si on a à disposition le tableau de départ, on peut décoder le texte en lisant le tableau à l'envers. Mais en l'absence de ce tableau, si on arrive à déterminer, par exemple, que E est codé en X et que S est codé en P, il s'agit alors de retrouver la fonction f , c'est-à-dire de trouver a et b tels que $f(n) = an + b$:

E codé en X donc $f(4) = 23$

S codé en P donc $f(18) = 15$

On trouve alors $a = 5$ et $b = 3$

d'où $f(n) = 5a + 3$

Remarquons qu'on ne peut pas choisir librement a et b .

Par exemple, pour $a = 0$, toutes les lettres seraient codées par la même lettre, le texte ne serait plus déchiffrable. En fait, il faut s'assurer que dans la dernière ligne du tableau, il n'y ait pas de répétition de lettre. Il faut donc que toutes les lettres soient représentées, ce qui revient à dire que l'on doit avoir tous les nombres de zéro à vingt-cinq dans l'avant-dernière ligne.

Et malheureusement, en ce qui concerne ce codage, si le texte est long, il est facile ici aussi de le décoder (voir fréquences, au paragraphe suivant).

Al Kindi (801-873)

Il propose de calculer les fréquences des lettres trouvées dans le texte codé. Et de comparer ensuite avec la fréquence d'apparition des lettres dans la langue du message. Dans un texte en français, la lettre la plus fréquente est le E, suivi du A. Bien sûr, on peut également tabler sur le fait qu'une lettre isolée est certainement un A. Avec ce système de décryptage, il est particulièrement facile de décoder un texte suffisamment long codé avec un système de substitution, comme le code César (amélioré ou non).



Code de Mary Stuart

Le chiffre utilisé était une substitution à laquelle on ajoute une petite difficulté, comme le montre la figure ci-dessous. Il était constitué de 23 symboles qui remplaçaient les lettres de l’alphabet (sauf j, v et w), ainsi que de 36 symboles représentant des mots ou des phrases. Il y avait en outre quatre nules et un symbole qui signifiait que la lettre suivante était une lettre doublée.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m
⊙	‡	Λ	‡‡	⊙	□	⊙	∞	1	⊙	n	//
n	o	p	q	r	s	t	u	x	y	z	
⊙	▽	S	m	f	Δ	ε	C	7	8	9	
Nulles						Dowbleth					
ff. . . . d.						σ					
and	for		with		that		if				
2	3		4		4		4+				
but	where		as		of		the				
3	3		u		m		8				

from	by	so	not	when
✕	oo	ƒ	X	‡‡
there	this	in	wich	is
4p	6	x	6	β
what	say	me	my	wyrt
m	η	m	m	d
send	ire	receave	bearer	i
9	9	‡	T	⊥
pray	you	Mle	Your name	myne
1	1	7R	7	ss

Le code de Vigenere (1523-1596)

C’est un code à clé, c’est-à-dire un mot choisi au hasard.

Par exemple, avec le mot MATH, codons la phrase

A	P	P	R	E	N	O	N	S	A	C	O	D	E	R	U	N	T	E	X	T	E
M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A

On décale chaque lettre de la première ligne du numéro d’ordre de la lettre située en dessous.

Ainsi : A est décalé de 12 (M) : $0 + 12 = 12 \rightarrow M$
P est décalé de 0 (A) : $15 + 0 = 15 \rightarrow P$
P est décalé de 19 (T) : $15 + 19 = 34 \rightarrow 8 \rightarrow I$
et ainsi de suite.

Bien entendu, pour décoder un texte, il faut indiquer le mot-clé.

Les tables de Vigenère rendent effectivement beaucoup plus difficile le déchiffrement. Elles résisteront aux cryptanalystes jusqu’aux travaux de Charles Babbage en 1854 et de Friedrich Wilhelm Kasiski en 1863.

Du côté de l'histoire

François Viète

(1540-1603)



François Viète fait des études de droit à l'université de Poitiers et est diplômé en 1560. En 1589, il est embauché auprès de Henri III comme conseiller du parlement de Tours. En 1594, il entre au service d'Henri IV.

Les hommes du roi interceptent régulièrement des lettres codées que les Espagnols envoient aux catholiques. Impossible de les déchiffrer. Henri IV les soumet à Viète, qui réussit à les décoder, alors même que les Espagnols modifiaient le code. Il avait mis au point un procédé lui permettant de suivre les transformations du code, en repérant notamment les fréquences les plus élevées qui représentent les voyelles : les Espagnols, comme les Italiens, n'usent que de codes de substitution assez simples, dérivés des techniques de substitution qu'on rencontrait déjà dans le code César ou celui de Marie Stuart. Mais lorsque Viète parvint à déchiffrer des lettres avec des codages plus élaborés, l'impact politique fut de grande importance. Henri IV lui confia la responsabilité de déchiffrer toutes les lettres ennemies et de suivre l'évolution de leurs codes.

Convaincues que, sans l'aide de la magie, personne ne pouvait réussir à décrypter leur message, les autorités de Madrid dénoncèrent Viète à l'Inquisition. Il faillit être traduit comme sorcier devant le Saint-Office de Rome. Mais le propre cryptologue du pape avait réussi à décoder des missives du roi espagnol, vingt ans plus tôt...

En Mathématiques, il introduit les lettres qui symbolisent les nombres, soit donc le calcul littéral : les voyelles symbolisent les inconnues et les consonnes les paramètres (c'est-à-dire les quantités connues). Actuellement, ce sont les lettres de la fin de l'alphabet qui représentent les inconnues et les lettres du début de l'alphabet les quantités inconnues.

Mais la notation est encore bien loin de ce que l'on connaît :

$$ax^2 + bx = c \text{ devient chez lui } BA^2 + CA = D$$

et s'écrit *B in A quadratum plus C plano in A aequari D solido.*

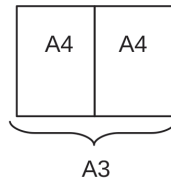
PARTIE 3

Arts et Mathématiques

CHAPITRE 20

Les formats de papier

Nous connaissons tous le format papier A4 (21 cm × 29,7 cm) et nous savons également qu'une feuille A3 correspond à deux feuilles A4 mises côte à côte, le long de leur côté le plus long :



Ce format fut imaginé par **Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799)** en 1786.

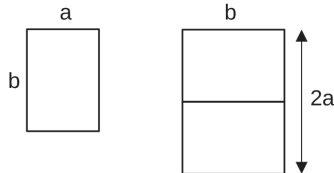
Pour obtenir une feuille dont le rapport longueur sur largeur soit constant à chaque étape, il faut que, en notant a la largeur et b la longueur, on ait :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{2a} \text{ soit donc } 2a^2 = b^2$$

$$\text{ou encore } \frac{b^2}{a^2} = 2$$

$$\text{ce qui nous donne finalement } \frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

(encore lui !)



D'autre part, la feuille A0 a une aire de 1m^2 .

Notons a et b les largeur et longueur respectives de cette feuille au format A0.

$$\text{On a donc } \begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{2} \\ a \times b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Soit donc } b = a \times \sqrt{2} \text{ et } a \times b = a \times a \times \sqrt{2} = a^2 \times \sqrt{2} = 1$$

$$\text{On obtient alors } a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ soit donc } a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,841\text{m}$$

$$\text{Et par suite } b = a \times \sqrt{2} \approx 0,841 \times \sqrt{2} \text{ ce qui nous donne } b \approx 1,189\text{m}$$

Et donc la feuille de format A0 a une dimension de 84,1 cm × 118,9 cm.

Connaissant le grammage du papier, exprimé en grammes par m², on détermine alors facilement le poids d'un bloc de feuilles :

16 feuilles A4 à 80 g/m² pèsent 80 grammes, et une ramette de 250 feuilles A4 à

80 g/m² pèse $\frac{250}{16} \times 80 \text{ g} = 1250 \text{ g}$.

→ Pour aller plus loin

Les autres formats de papier

La série B

La feuille B0 a une largeur de 1 mètre exactement et sa longueur est $\sqrt{2}$ m. C'est un format qui permet d'élargir les marges, de façon à y inscrire un feuillet de la série A de même numéro. Les aires de la série B ont un facteur de $\sqrt{2}$ avec les aires de la série A, c'est ce rapport que l'on retrouve entre longueur et largeur d'une feuille de série B (les arrondis sont quelquefois un peu arrangés) :

Format A			Format B		
A0	841	1 189	B0	1 000	1 414
A1	594	841	B1	707	1 000
A2	420	594	B2	500	707
A3	297	420	B3	353	500
A4	210	297	B4	250	353
A5	148	210	B5	176	250
A6	105	148	B6	125	176
A7	74	105	B7	88	125
A8	52	74	B8	62	88
A9	37	52	B9	44	62
A10	26	37	B10	31	44

La série C

Elle est calculée comme la moyenne géométrique des feuilles des séries A et B de même numéro. Ce format permet de contenir exactement les feuilles de la série A de même numéro ; c'est le format utilisé principalement pour les enveloppes. Par exemple une feuille A4 tient parfaitement dans une enveloppe C4, une feuille A4 pliée en 2 (donc au format A5) tient parfaitement dans une enveloppe C5, et une feuille A4 pliée en 4 (donc au format A6) tient parfaitement dans une enveloppe C6.



Calculons les dimensions d'une feuille C6 (cela correspond à une enveloppe classique) :

A6 : $10,5\text{ cm} \times 14,8\text{ cm}$

B6 : $12,5\text{ cm} \times 17,6\text{ cm}$

$\sqrt{10,5 \times 12,5} \approx 11,5\text{ cm}$ et $\sqrt{14,8 \times 17,6} \approx 16,1\text{ cm}$.

En fait, le format d'une enveloppe C6 est $11,4\text{ cm} \times 16,2\text{ cm}$...

Ces différents formats de papiers sont normalisés : les formats A et B portent le nom de ISO 216 et le format C celui de ISO 269. Il existe bien d'autres formats, notamment aux États-Unis et au Canada (par exemple, le format *US Letter*, $8\frac{1}{2} \times 11$ pouces – $21,6 \times 27,9\text{ cm}$ – est le format le plus proche du format A4). On utilise également des formats qui ne portent pas forcément de nom :

Dimensions (en cm)	Usage
$1,5 \times 2,2$	Timbre
$3,5 \times 4,5$	Photo d'identité
$8,5 \times 5,4$	Carte bancaire
10×15	Carte postale
24×32	Format dit « Européen » (permet le collage des feuilles A4)

Du côté de l'histoire

Le papier est un matériau originaire de Chine. On broyait des fibres végétales (lin, bambou, mûrier...) qui étaient ensuite diluées dans de l'eau. On fabriquait ainsi de la pâte à papier très liquide, que l'on étalait sur une toile, qui laissait s'égoutter l'eau. On obtenait alors une feuille de papier, que l'on pressait pour la rendre plus fine, puis on laissait sécher la feuille dans un grenier.

En 751, les Arabes envahissent Talas (dans le Kirghizistan, à 700 km au Nord-Est de Samarcande). La ville dispose de fabriques de papier et le secret est donc transmis aux Arabes. Ils améliorent le processus de fabrication, qui finira par supplanter totalement le papyrus (et le parchemin).

CHAPITRE 21

Les frises

Une frise est une « bande » obtenue en reproduisant un dessin selon une translation que l'on répète à plusieurs reprises.

Les transformations utilisées sont les symétries axiales, les symétries centrales (ou rotations d'angle 180°) et bien sûr les translations.

On peut classer les frises en sept groupes :

1 : Translation simple



2 : Symétrie axiale horizontale + translation



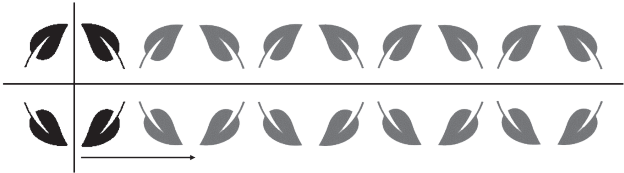
3 : Symétrie axiale verticale + translation



4 : Rotation + Translation



5 : 2 symétries axiales + translation



6 : Translation 1 + symétrie axiale horizontale + translation 2



7 : Rotation + symétrie axiale verticale + translation



Du côté de l'histoire

La maison de la sagesse

Du VIII^e siècle au XV^e siècle, le centre culturel est à Bagdad. Dans le quartier d'Al-Karkh, il y avait le plus grand marché aux livres, qui venaient de partout : Byzance, Pergame, Alexandrie, Syracuse... Bagdad avait sa bibliothèque et sa maison de la sagesse. C'est sous le règne d'Haroun al-Rachid que cette institution vit le jour, mais c'est avec son fils, le calife Al-Mamun, que la maison de la sagesse prend son essor, lorsqu'elle ouvre ses portes aux savants : parmi eux, al-Khwarizmi, al Kindi, Thâbit ibn Qurra...

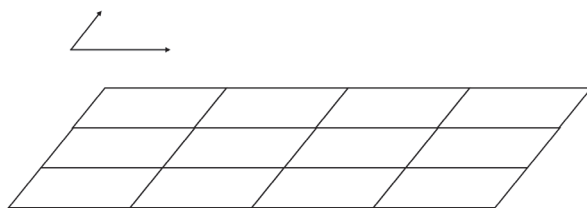
Les livres qui arrivaient à Bagdad n'étaient pas écrits en arabe, il a fallu les traduire : entreprise extraordinaire que la traduction de tous les livres d'Euclide, d'Archimède, de Ptolémée... Al-Mamun fut l'âme de la maison de la Sagesse. Il haïssait les intégristes et les pourchassa tout au long de son règne. Après sa victoire sur les Byzantins, il proposa cet échange : des prisonniers contre des livres. Des prisonniers retournèrent à Constantinople, tandis que des ouvrages rarissimes rejoignaient la bibliothèque de la maison de la Sagesse.

C'est donc grâce aux mathématiciens de la maison de la sagesse que les écrits anciens n'ont pas disparu, et ont été transmis.

CHAPITRE 22

Les pavages

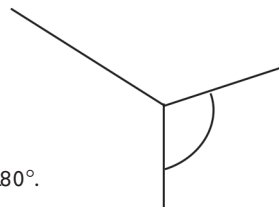
Les pavages sont des dessins qui vérifient cette propriété : il existe deux translations indépendantes qui conserveraient le dessin si celui-ci était prolongé dans le plan. Ces deux translations définissent un parallélogramme.



Pour commencer, on s'intéressera aux pavages de polygones réguliers.

Supposons donc que l'on veuille paver le plan avec des carreaux ayant tous la forme d'un polygone régulier :

- chaque carreau est un polygone régulier à n côtés ;
- il y a un assemblage de p carreaux à chaque coin ;
- l'angle de deux côtés consécutifs vaut $\alpha = \frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ$.



Puisqu'il y a p polygones assemblés en un coin, on doit avoir $\alpha \times p = 360^\circ$.

$$\text{Ainsi } \frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ \times p = 360^\circ,$$

$$\text{ou encore } \frac{(n-2)}{n} = \frac{360^\circ}{180^\circ \times p},$$

$$\text{donc } \frac{n}{n} - \frac{2}{n} = \frac{2}{p}. \text{ Par suite } 1 = \frac{2}{p} + \frac{2}{n} \text{ et finalement } \frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Or n vaut au moins 3, et p également.

Pour $n = 3$, on obtient $p = 6$ et de manière symétrique, pour $p = 3$, on obtient $n = 6$.

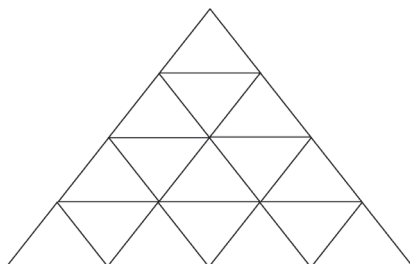
Pour $n = 4$, on obtient $p = 4$.

Au-delà, n et p sont plus grands que 4, donc $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{p} < \frac{1}{4}$.

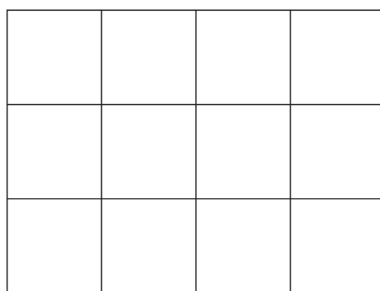
Ainsi $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$. Donc il n'y a plus de solution possible.

Il n'existe donc que trois pavages de polygones réguliers :

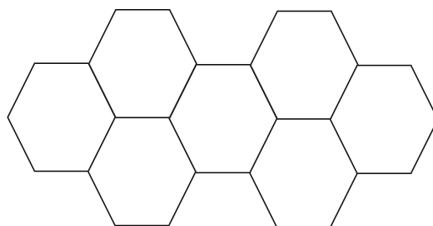
– Les triangles équilatéraux



– Les carrés



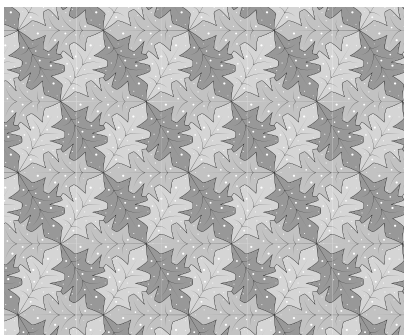
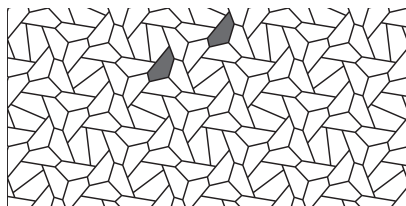
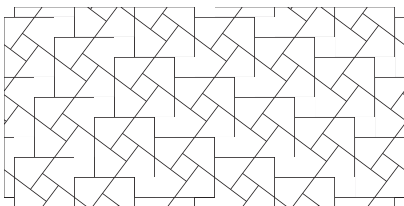
– Les hexagones réguliers



Pour les autres pavages, on peut assembler les polygones précédents, ou encore déformer les parallélogrammes. On peut en fait regrouper tous les pavages en dix-sept catégories différentes, selon leur parallélogramme de base et les isométries qui le transforment.

Afin de comprendre un pavage, il faut :

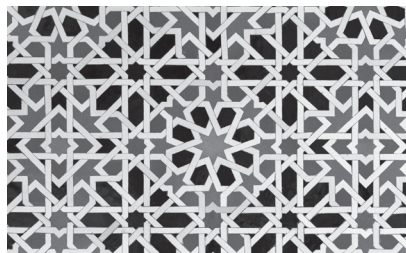
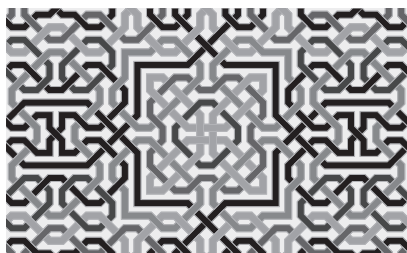
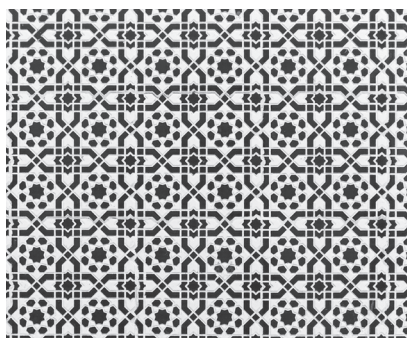
1. Repérer un parallélogramme de base (comme sur la deuxième figure) ;
2. déterminer les axes de symétrie ;
3. repérer les centres de rotations ;
4. isoler un motif minimal du pavage.



Du côté de l'histoire

L'Alhambra

La technique du pavage a des origines très anciennes que l'on retrouve dans l'antiquité grecque. Cependant le style a été développé par les artistes musulmans : leur religion leur interdisait de représenter des êtres vivants. On retrouve un témoignage de cette recherche dans le palais de l'Alhambra, à Grenade, dans le sud de l'Espagne.



CHAPITRE 23

La perspective

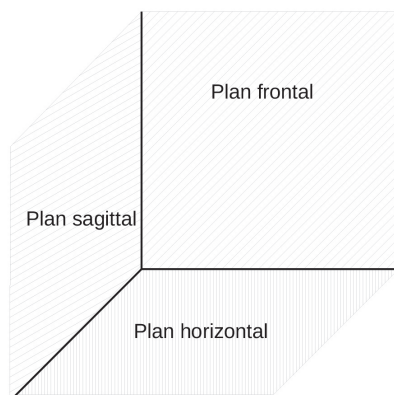
La perspective permet de représenter un dessin en trois dimensions sur un plan, qui, lui, est en deux dimensions. Bien sûr, l'idée est que le dessin doit être réaliste (plus ou moins) par rapport à notre vision. La perspective cavalière est la plus simple, mais elle est moins fidèle à la réalité que la perspective linéaire (avec point de fuite).

✓ La perspective parallèle

C'est une perspective qui consiste à utiliser des lignes obliques et parallèles pour créer la profondeur. Elle peut être cavalière ou axonométrique.

● La perspective cavalière

Elle est utilisée chez les militaires, ce qui lui donne son nom : c'est la perspective utilisée pour repérer des fortifications, vues de face. Et c'est également la perspective utilisée en mathématiques.

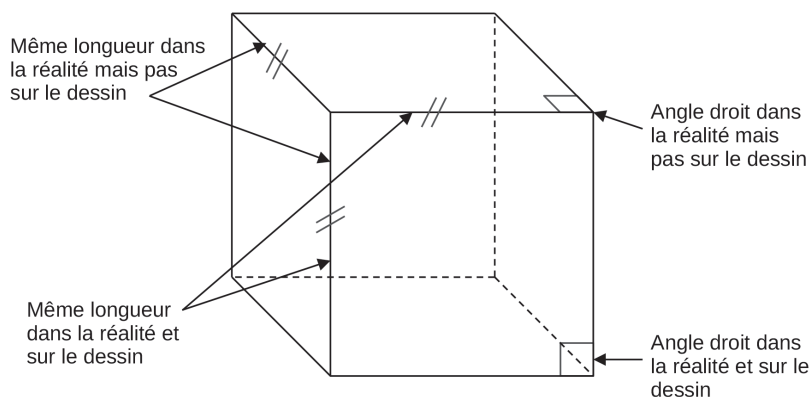


En voici les règles :

1. les arêtes cachées sont représentées en pointillés ; les arêtes visibles sont représentées en traits pleins ;
2. les éléments situés dans un plan frontal sont représentés en vraie grandeur et non déformés : mêmes longueurs, mêmes angles ;

3. deux droites parallèles dans la réalité sont dessinées parallèles sur le dessin ;
4. des points alignés dans la réalité restent alignés sur le dessin ;
5. les milieux sont conservés ;
6. les droites concourantes restent concourantes.

Dessin d'un cube :



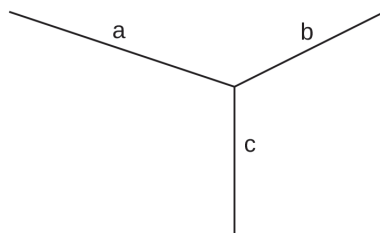
● La perspective axonométrique

Cette perspective donne la même importance visuelle aux trois faces d'un cube projeté. Elle est souvent utilisée dans l'industrie, pour aider à la compréhension ou pour présenter des réalisations.

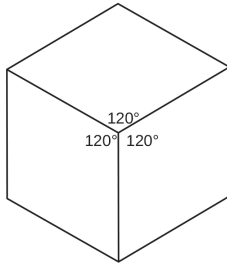
Les règles :

1. Les faces principales ou significatives de l'objet doivent être positionnées de façon à être mises en valeur.
2. Il est préférable de ne pas dessiner les contours et arêtes cachés (les pointillés).

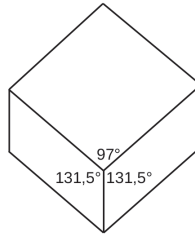
Pour dessiner un cube en perspective axonométrique, on fixe les trois angles qui partent du sommet placé en avant, ainsi que les rapports de longueur, a , b et c .



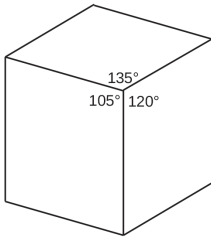
Voici les quatre systèmes usuels :



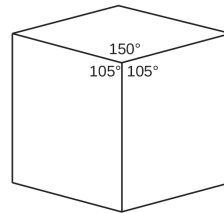
axonométrie isométrique :
 $a = b = c = 0,82$



axonométrie dimétrique :
 $a = b = 0,94$
 $c = 0,47$



axonométrie trimétrique :
 $a = 0,86$
 $b = 0,65$
 $c = 0,92$



axonométrie dimétrique redressée :
 $a = b = 0,73$
 $c = 0,96$

→ Pour aller plus loin

La perspective linéaire

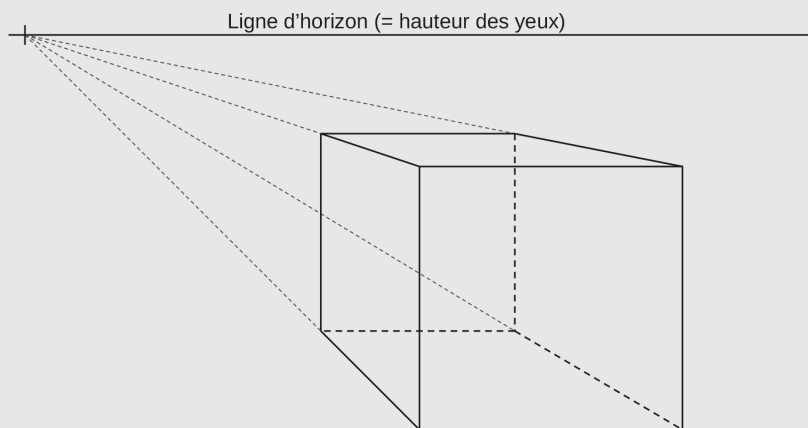
Cette technique est basée sur la convergence des lignes parallèles vers un point de fuite situé sur la ligne d'horizon. Elle utilise des principes mathématiques pour créer une représentation réaliste de la profondeur dans un dessin.

En voici les règles :

1. une ligne d'horizon, qui représente le niveau des yeux et sur laquelle est située le(s) point(s) de fuite ;
2. des lignes orthogonales qui partent du point de fuite ;

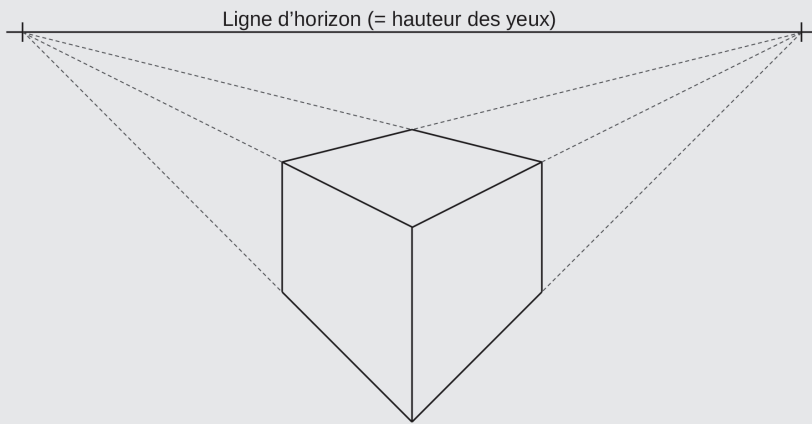
La perspective linéaire peut être classée en une perspective à un, deux ou trois points de fuite.

Avec 1 point de fuite : les verticales sont perpendiculaires à la ligne d'horizon ; les horizontales sont parallèles à la ligne d'horizon. Toutes les lignes qui partent vers le lointain vont vers le point de fuite, ce qui donne un effet de rétrécissement des formes. On les appelle des lignes fuyantes.



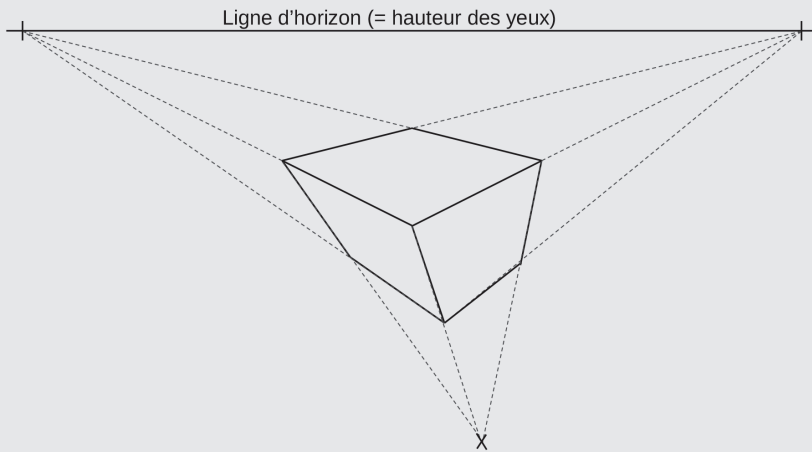
Avec 2 points de fuite : les deux points de fuite sont sur la ligne d'horizon ; les verticales sont perpendiculaires à la ligne d'horizon. On dit que c'est une perspective conique, car les lignes qui se rejoignent forment un cône. C'est une perspective qui paraît déjà plus naturelle.





Plus les deux points de fuite sont éloignés, plus le dessin est déformé.

Avec 3 points de fuite : deux des points de fuite sont sur la ligne d'horizon, le troisième est placé sous le dessin. C'est une technique qui permet de représenter les plongées et contre-plongées. On l'appelle la perspective aérienne.



Plus les trois points de fuite sont proches, plus le dessin est déformé.

Du côté de l'histoire

Histoire de la perspective

Dans l'antiquité égyptienne, les artistes représentent les personnages sur une scène sans profondeur. Les personnages sont de profil, et leur taille dépend de leur importance. On parle ici de peinture symbolique.

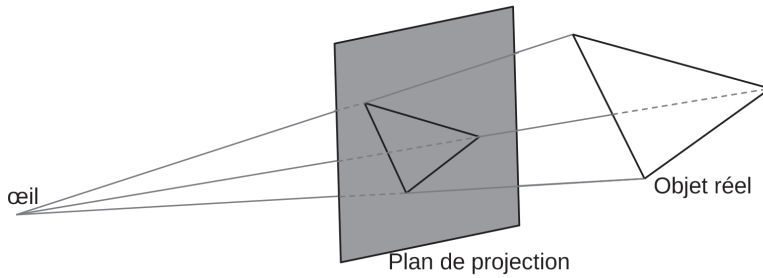


En Grèce, les mathématiciens, philosophes et architectes se posent la question de la profondeur dans un dessin ; la perspective est utilisée empiriquement, l'effet de profondeur étant davantage dû au talent du peintre qu'à une théorisation de la perspective.

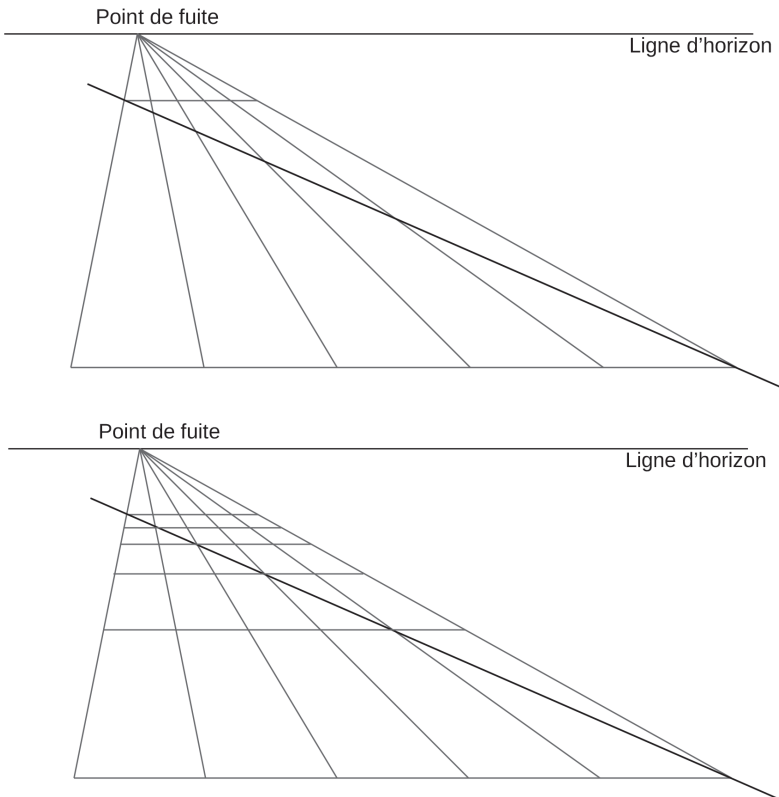


Fresque antique de Pompéi

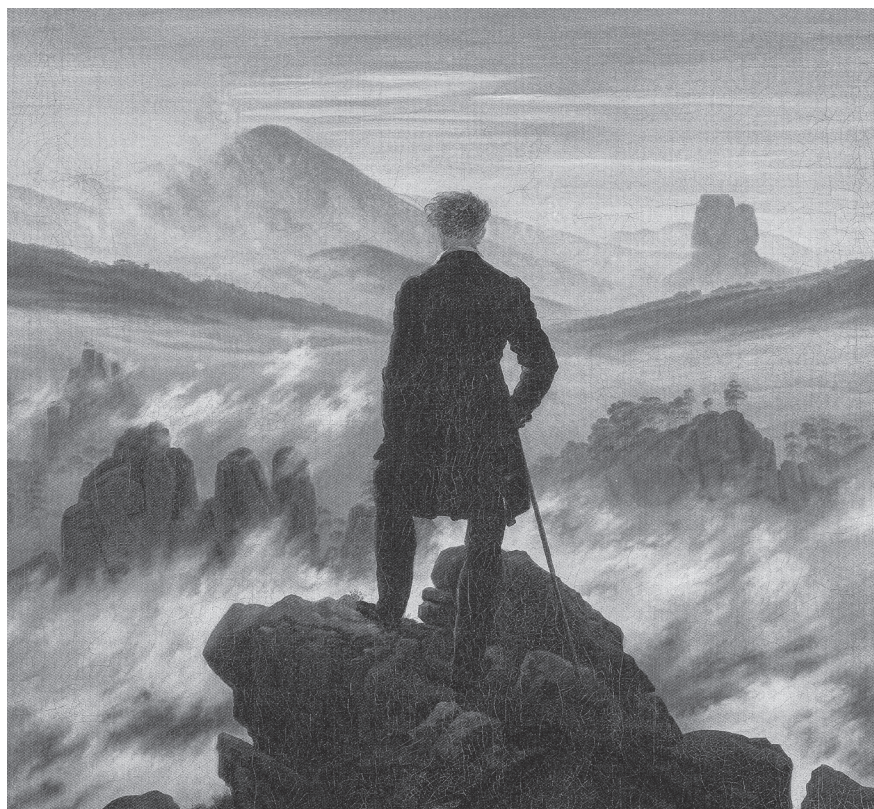
Au Moyen Âge, comme pour beaucoup de choses en sciences, on en revient à la peinture symbolique. Il faudra attendre le xv^e siècle pour voir apparaître la formalisation de la perspective. En 1425, Filippo Brunelleschi aurait réalisé une expérience permettant de constater la validité de la construction géométrique pour représenter un édifice réel (le baptistère de Florence, en l'occurrence). Voici une schématisation de son expérience :



En 1435, Alberti théorise cette construction géométrique dans son traité de peinture, *De pictura*.



Pour rendre l'illusion de la profondeur, la perspective linéaire peut être améliorée. Plus un plan est proche, plus il apparaît sombre et contrasté, alors qu'un plan éloigné apparaîtra plus clair et flou. On peut également dégrader les couleurs, utiliser les couleurs chaudes pour le premier plan et les couleurs froides pour l'arrière-plan. C'est ce qu'on appelle la perspective atmosphérique.



Caspar David Friedrich, Le voyageur contemplant une mer de nuages, 1817, huile sur toile, Hamburger Kunsthalle

CHAPITRE 24

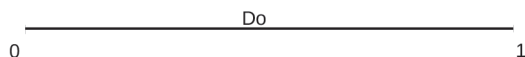
La gamme musicale

Elle a été établie par les pythagoriciens : pour eux, les nombres sont partout. Et tout commença avec la musique : deux sons joués ensemble donnant une impression harmonieuse qui pouvait s'expliquer mathématiquement.

Les pythagoriciens se sont consacrés aux sonorités des instruments à cordes. Ils découvrent qu'il existe une relation entre la longueur d'une corde tendue que l'on fait vibrer et la hauteur du son émis. Plus la corde est petite, plus le son est aigu. Ils créent alors un instrument, le monocorde : une simple corde tendue au-dessus d'une caisse de résonance. Grâce à ce monocorde, ils vont créer la base de ce qui s'appellera plus tard la gamme pythagoricienne.

Un son est une vibration de l'air qui vient exciter notre tympan. Une vibration se définit par son amplitude (le son est-il fort ou faible ?) et sa fréquence, (le nombre de vibrations par seconde), que nous allons approfondir ici. Des fréquences élevées vont produire des sons aigus, et des fréquences faibles, des sons graves. La fréquence se mesure en Hertz (Hz). Sur la corde d'une guitare, d'un luth, d'un violon (ou d'un monocorde), plus la corde est courte, plus la fréquence est élevée (la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur de la corde). Si l'on prend deux sons de fréquence différente, on peut définir les rapports des fréquences entre les deux, et les simplifier : plus la fraction sera simple, plus les deux sons seront harmonieux entre eux.

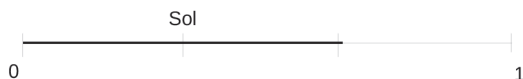
Prenons quatre cordes tendues. Pour l'exemple, on suppose que la première corde est un Do.



La deuxième a une longueur représentant les $\frac{3}{4}$ de la première. La corde est plus courte, on entend donc un son plus aigu : c'est la **quarte** du Do, à savoir le Fa.



La troisième corde a une longueur représentant les $\frac{2}{3}$ de la première. C'est la **quinte** du Do : le Sol.



Enfin, la dernière corde fait la moitié de la première. C'est le Do à l'**octave** supérieur, que l'on nommera Do aigu ici.



À l'époque des pythagoriciens, sept astres étaient connus, à savoir Lune, Soleil, Venus, Mercure, Mars, Jupiter et Saturne. Ils ont donc défini les sept notes que nous connaissons de nos jours, et qui correspondent à ces sept astres. En effet, selon eux, les astres se déplacent en émettant des sons, en fonction de leur distance par rapport à la Terre. Tous ces sons composaient l'*harmonie des sphères*.

Rappelons que deux grandeurs sont dites inversement proportionnelles si leurs mesures évoluent dans des sens contraires, c'est-à-dire si le produit de leurs grandeurs est un nombre constant. Ici, $\text{fréquence} = \frac{1}{\text{longueur de la corde}}$.

Fa est la quarte de Do (voir figure page précédente) donc l'intervalle de fréquence (qui se calcule par division) est de $\frac{\text{Fa}}{\text{Do}} = \frac{4}{3} \div 1 = \frac{4}{3}$.

C'est le même intervalle qui sépare le Sol du Do aigu, c'est-à-dire le Do une octave plus haut : $\frac{\text{Do aigu}}{\text{Sol}} = 2 \div \frac{3}{2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Entre Fa et Sol, l'intervalle est de $\frac{\text{Sol}}{\text{Fa}} = \frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$.

	Do	Fa	Sol	Do aigu
Longueur de la corde	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
Fréquence	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2

$\times \frac{4}{3}$ $\times \frac{9}{8}$ $\times \frac{4}{3}$

Entre Do et Fa, on ajoute les deux notes Ré et Mi, de telle sorte que l'intervalle soit à chaque fois de $\frac{9}{8}$ et, de la même manière, on ajoute les notes La et Si entre Sol et Do aigu. On obtient alors les sept notes :

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do aigu
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

$\times \frac{9}{8}$ $\times \frac{9}{8}$? $\times \frac{9}{8}$ $\times \frac{9}{8}$ $\times \frac{9}{8}$?

Le problème, c'est que l'intervalle de $\frac{9}{8}$ « mange » un petit peu trop les intervalles de Do à Mi et de Sol à Si, ce qui fait qu'il ne reste plus que $\frac{\text{Fa}}{\text{Mi}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{81}{64}} = \frac{4}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{256}{243} = \frac{\text{Do aïgu}}{\text{Si}}$ pour les intervalles de Mi à Fa et de Si à Do aigu.

On nomme l'intervalle de $\frac{9}{8}$ ($\approx 1,125$) le « ton » et l'intervalle de $\frac{256}{243}$ ($\approx 1,053$) le « demi-ton », qui n'est pas exactement la moitié d'un ton. Il est un tout petit peu plus petit qu'un ton, c'est ce que l'on nomme en musique occidentale le « demi-ton diatonique ». Il sépare deux notes de noms différents, comme « Mi-Fa » et « Si-Do ». « dia », comme dans « division », signifie « séparation ».

Le « reste » est un autre « demi-ton », $\frac{9}{8} \div \frac{256}{243} = \frac{9}{8} \times \frac{243}{256} = \frac{2187}{2048}$ ($\approx 1,068$), c'est le complément de $\frac{256}{243}$ pour arriver au ton. Il sépare des notes de même nom (Fa et Fa#, Si et Sib), Il est nommé « chromatique », de « chroma », en grec, qui signifie « couleur », parce qu'il change la « couleur » de la note.

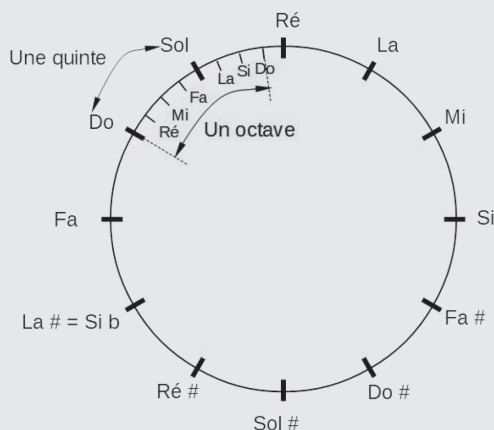
→ Pour aller plus loin

Le cycle des quintes

Le système pythagorien est issu du « cycle des quintes ». Il s'appuie sur deux faits :

- que l'on « assimile » entre elles les notes espacées d'octaves (tous les « Do », tous les « Ré »...)
- que toutes les notes peuvent être définies comme la « quinte d'une quinte d'une quinte... ». Si l'on prend la quinte du Sol, on obtient un Ré. Il en est de même pour chaque note de la gamme.

Voici ce « cycle des quintes » :



On remarque qu'à la douzième quinte, on tombe sur une note très proche de la note prise au départ. On tombe en fait presque sur la même note, mais sept octaves plus haut.

En pratique, quand on monte de sept octaves (c'est-à-dire que l'on coupe sept fois une corde en deux), cela fait : $2^7 = 128$ (la corde est 128 fois plus petite qu'au départ).

On compare ensuite cette valeur à celle que l'on obtient lorsque l'on monte de douze quintes, soit : $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129,75$.

Ce sont deux valeurs très proches, mais pas tout à fait égales. L'écart entre ces deux valeurs est appelé *comma pythagorien*.

Sa valeur exacte est $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$.

Cette douzième quinte, raccourcie pour correspondre aux sept octaves du fait du *comma pythagorien*, porte le nom de quinte du loup, car elle est très dissonante (elle « hurle »).

Du côté de l'histoire

L'école pythagoricienne

Les conditions d'admission à l'école sont très sévères : le candidat est l'interrogé sur ses capacités, son éducation, son caractère et sa famille. S'il passe cette épreuve avec succès, il devient un acousmaticien (auditeur) : il peut écouter les leçons, caché derrière un rideau, mais en silence. Il n'a pas le droit d'intervenir. À l'issue de cette seconde épreuve qui dure cinq ans, il peut alors passer de l'autre côté du rideau et devenir alors un mathématicien (savant). À noter que les femmes et les étrangers sont acceptés dans l'école : c'est particulièrement moderne pour l'époque ! Théanô, notamment, épouse de Pythagore, serait devenue mathématicienne. L'école Pythagoricienne eut 218 membres, dont 17 femmes, en près de 150 ans d'existence.

Les règles qui sont dictées par la confrérie sont drastiques. Il faut jurer de garder le secret absolu et de ne rien révéler aux non-initiés. En se présentant à l'école, chaque postulant doit remettre tous ses biens à la confrérie. Mais si, pour quelque raison que ce soit, il était renvoyé, on lui rendait le double de ce qu'il avait donné : on considérait qu'on lui payait ce qu'il n'avait pas pu saisir en connaissance. On lui creusait également une tombe, signifiant ainsi qu'on le considérait comme mort. Chaque découverte est attribuée à Pythagore, ce qui fait que l'on a du mal à savoir ce que Pythagore a trouvé lui-même.

CHAPITRE 25

Le nombre d'or

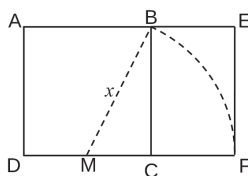
Un segment de longueur $a + b$ est dit divisé en moyenne et extrême raison quand $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

C'est ce rapport que l'on appelle nombre d'or : $\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Le découpage d'un segment en deux longueurs vérifiant cette propriété est appelé par Euclide *découpage en « extrême et moyenne raison »*. Le nombre d'or est désigné par la lettre ϕ (phi), en hommage au sculpteur grec Phidias (V^e siècle avant J.-C.) qui participa à la décoration du Parthénon sur l'Acropole à Athènes.

On peut tracer un rectangle vérifiant les proportions d'or :

- 1) On trace un carré $ABCD$ de côté 1.
- 2) Soit M le milieu de $[DC]$.
- 3) On trace le cercle de centre M , passant par B . Ce cercle coupe (DC) en F .
- 4) On trace la parallèle à (AD) passant par F . Cette droite est sécante à (AB) en E .
- 5) Le rectangle $AEFD$ obtenu est un rectangle d'or : $\frac{DF}{DA} = \frac{EF}{CF} = \varphi$.



Notons x le rayon de cet arc de cercle : $x = MB$.

Dans BMC rectangle en C , d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Or } DF = x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } DF = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{et } \frac{DF}{DA} = \frac{DF}{1} = DF = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{On peut également montrer que } \frac{EF}{CF} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

$$\text{Finalement } \frac{DF}{DA} = \frac{EF}{CF} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi.$$

→ Pour aller plus loin

Pentagone régulier et pentagramme

La proportion d'extrême et de moyenne raison permet de dessiner un pentagone régulier facilement.

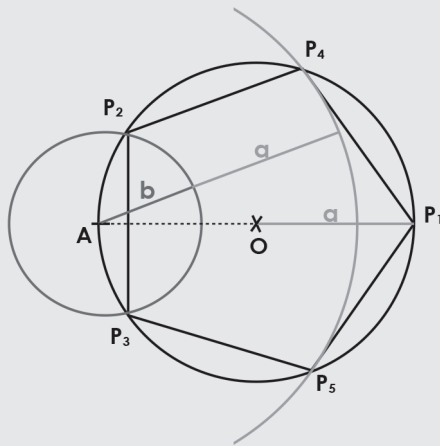
Soit un cercle de diamètre AP_1 et de rayon a .

Soit b le nombre plus petit que a tel que a et b soient en proportion d'or.

Soient P_2 et P_3 les intersections du cercle de diamètre AP_1 avec le cercle de centre A et de rayon b .

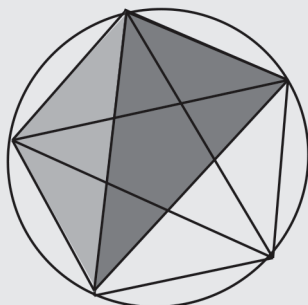
Soient P_4 et P_5 les intersections du cercle de diamètre AP_1 avec le cercle de centre A et de rayon $a + b$.

$P_1P_2P_3P_4P_5$ est un pentagone régulier.



Le pentagramme associé, c'est-à-dire la figure composée des cinq diagonales du pentagone, contient aussi de multiples proportions d'extrêmes et moyennes raisons. Elles s'expriment simplement à l'aide de triangles isocèles dont les longueurs des côtés sont en proportion d'or. De tels triangles sont appelés « triangles d'or ».





Il en existe deux types différents :

- les clairs ayant une base proportionnelle à a et deux côtés à b ;
- et les foncés ayant une base proportionnelle à b et deux côtés à a .

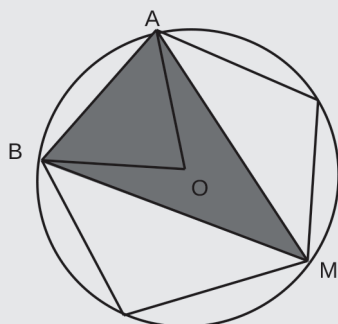
Les triangles foncés possèdent deux angles de 72° et un angle de 36° .

D'après la propriété qui lie angle au centre et angles inscrits : $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$

Or $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ donc $\widehat{AMB} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Le triangle AMB est isocèle en M , donc $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.

Un tel triangle est appelé triangle d'or.



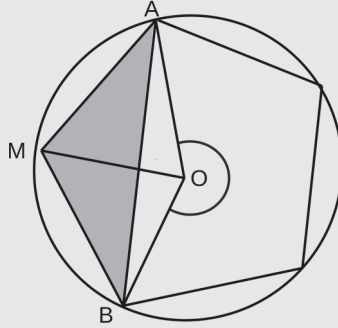
Les triangles clairs possèdent deux angles de 36° et un de 108° .

On peut encore utiliser ici la propriété qui lie angle au centre et angles inscrits :

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$$



Mais ici, il faut considérer l'angle « extérieur » :



$$\text{or } \widehat{AOM} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\text{donc } \widehat{AOB} = 360^\circ - 2 \times 72^\circ = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ.$$

$$\text{Par suite } \widehat{AMB} = \frac{216}{2} = 108^\circ.$$

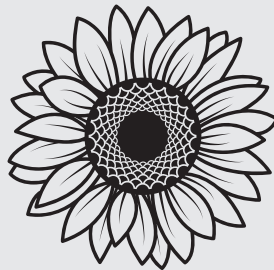
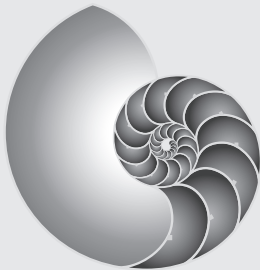
AMB étant isocèle en M ,

$$\text{on en déduit que } \widehat{AMB} = \widehat{BAM} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Un tel triangle est appelé « triangle d'argent ».

Avec des triangles d'or et d'argent dont les côtés sont toujours a et b , il est possible de paver intégralement un plan.

Le nombre φ est très riche : on peut raconter encore beaucoup de choses à son sujet ; il a notamment inspiré les arts plastiques (*l'homme de Vitruve* de Léonard de Vinci, *Le sacrement de la dernière cène* de Dali...) Il est également visible sur des éléments naturels, comme par exemple au cœur d'un tournesol, ou sur le coquillage Nautilus pompilius...



Du côté de l'histoire

Leonardo Fibonacci

(1170-1250)



Son vrai nom est Léonard de Pise. Son père, Bonaccio, est un commerçant Toscan. En 1192, Léonard le rejoint à Bijâya, en Algérie, pour l'aider. Il y rencontre un maître admirable, selon ses propres dires, qui lui enseigne les nombres indiens et l'algèbre. Il choisit de se faire appeler « le fils de Bonaccio » soit *filius Bonacci* donc Fibonacci. Il voyage ensuite beaucoup : Égypte, Sicile, Grèce, Syrie, pour y poursuivre son apprentissage. Puis il revient à Pise, en Italie, vers 1200.

Convaincu de la supériorité de la numération de position, il écrit un livre d'explications, *Liber abaci*, (Le livre de l'abaque). Dans ce livre, il présente la notation, explique comment faire les calculs et fait également des extractions de racines carrées et cubiques. Il résout des équations de degré 1 et 2, ainsi que différents problèmes, dont il donne les solutions.

Dans *Practica geometriacae* (La pratique de la géométrie), il s'occupe des grands problèmes de l'antiquité : il propose une démonstration du théorème de Pythagore, s'attelle à la duplication du cube...

Conclusion

Lorsque l'on veut comprendre et s'expliquer le monde, on est vite confronté à la maîtrise des mathématiques, que ce soit pour écrire des nombres, faire des calculs, quantifier, ou se repérer, mesurer des distances, tracer des cartes... On peut même affirmer que tous les objets techniques que nous utilisons aujourd'hui ont un fondement mathématique, sans lequel ils n'auraient pas été conçus (l'informatique en est l'exemple le plus parlant).

Cet ouvrage ne peut donner qu'un aperçu des domaines d'application du savoir mathématique. Il en existe bien d'autres, démontrant, s'il le fallait, que les mathématiques ne sont pas le monstre d'abstraction pour lequel on veut trop souvent les faire passer. De plus, la matière même a évolué au cours de son histoire : les nombres relatifs et les nombres complexes sont une de ces évolutions. Créées tout d'abord pour résoudre des problèmes mathématiques, elles ont été étendues à d'autres domaines : la physique, par exemple, a puisé dans le vivier mathématique pour trouver des réponses à ses propres problèmes.

Qui nierait que la recherche, tant physique que mathématique, a atteint des sommets inaccessibles à un collégien, lequel, dans ces conditions, peine à comprendre le lien entre les objets qui l'entourent, qu'il utilise quotidiennement, et les mathématiques qu'on lui enseigne ? Qu'il considère ce livre comme une introduction, une invitation à la curiosité mathématique qui lui ouvrira les portes de multiples domaines. À lui de saisir tout l'enjeu de l'assimilation des mathématiques, ne serait-ce que pour se familiariser avec les raisonnements logiques.

Liste des Mathématiciens par ordre chronologique

Thalès	-624/-547	Chapitre 1
Pythagore	-580/-495	Chapitre 2, 15, 2
Hippase	Env.-500	Chapitre 3
Empédocle	v ^e s. av. J.-C.	Chapitre 17
Philolaos	-470/-385	Chapitre 16
Platon	-428/-348	Chapitre 9
Eudoxe	-408/-355	Chapitre 10
Héraclide du Pont	-390/-339	Chapitre 16
Aristote	-384/-322	Chapitre 17
Euclide	-325/-265	Chapitre 5
Ctésibios	III ^e s. av. J.-C.	Chapitre 15
Aristarque	-310/-230	Chapitre 6
Archimède	-287/-212	Chapitre 11
Ératosthène	-276/-194	Chapitre 4
Hipparque	-180/-125	Chapitre 16
Ptolémée	100/168	Chapitre 7, 16
Aryabhata	476/550	Chapitre 18
Al Kindi	801/873	Chapitre 21
Gerber d'Aurillac	945/1003	Chapitre 12
Fibonacci	1170/1250	Chapitre 25
Copernic	1473/1543	Chapitre 16
Vigenere	1523/1596	Chapitre 19
François Viète	1540/1603	Chapitre 19
Mary Stuart	1542/1587	Chapitre 19

Liste des Mathématiciens par ordre chronologique

Tycho Brahe	1546/1601	Chapitre 16
Giordano Bruno	1548/1600	Chapitre 16
Galilée	1564/1642	Chapitre 16, 17
Kepler	1571/1630	Chapitre 16
Mersenne	1588/1648	Chapitre 17
Gassendi	1592/1655	Chapitre 17
Cassini	1625/1712	Chapitre 17
Boyle	1627/1661	Chapitre 17
Huygens	1629/1695	Chapitre 17
Römer	1644/1710	Chapitre 17
Halley	1656/1742	Chapitre 17
Fahrenheit	1686/1736	Chapitre 14
Bradley	1693/1762	Chapitre 17
Celsius	1701/1744	Chapitre 14
Euler	1707/1783	Chapitre 9
Lichtenberg	1742/1799	Chapitre 20
De Prony	1755/1839	Chapitre 17
Biot	1774/1862	Chapitre 17
Gauss	1777/1855	Chapitre 13
Arago	1786/1853	Chapitre 17
Babbage	1791/1871	Chapitre 19
Colladon	1802/1893	Chapitre 17
Sturm	1803/1855	Chapitre 17
Kasiski	1805/1881	Chapitre 19
Fizeau	1819/1896	Chapitre 17
Kelvin	1824/1907	Chapitre 14
Mach	1838/1916	Chapitre 17
Cornu	1841/1902	Chapitre 17

Annexes

Proportionnalité

✓ Reconnaître la proportionnalité

Exemple 1

À l'âge de 60 ans, une personne n'est pas 2 fois plus grande qu'à l'âge de 30 ans, bien qu'elle soit 2 fois plus âgée. On dit que sa taille n'est pas proportionnelle à son âge.

Exemple 2

Au marché, les bananes sont vendues à 1,60 € le kilo.

Pour 1 kg, on paie 1,60 €.

Pour 5 kg, on paie 5 fois plus que pour 1 kg, soit 8 €. (car $1,60 \times 5 = 8$)

Pour 0,5 kg, on paie 2 fois moins que pour 1 kg, soit 0,80 €. (car $1,60 \times 0,5 = 1,60 : 2 = 0,8$)

On dit que le prix d'achat en euros est proportionnel à la masse achetée en kg et que 1,60 est le coefficient de proportionnalité entre la masse et le prix.

● Utiliser la proportionnalité

10 kg de peinture permettent de recouvrir 18 m² de façade.

Comment calculer l'aire que permet de recouvrir un pot de 25 kg ?

Méthode 1

Utiliser le coefficient de proportionnalité.

Masse (en kg)	10	25
Aire (en m ²)	18	a

↘ $\times 1,8$

$$a = 25 \times 1,8 = 45 \text{ m}^2$$

Méthode 2

Utiliser le coefficient de linéarité.

		$\times 2,5$
		
Masse (en kg)	10	25
Aire (en m ²)	18	a

$$a = 18 \times 2,5 = 45 \text{ m}^2$$

Méthode 3

Passer par l'unité.

		$\div 10$	$\times 25$
			
Masse (en kg)	10	1	25
Aire (en m ²)	18	b	a

$$b = 18 \div 10 = 1,8 \text{ m}^2.$$

Avec 1 kg de peinture, on recouvre 10 fois moins de surface qu'avec 10 kg, donc on recouvre 1,8 m².

$$a = 1,8 \times 25 = 45 \text{ m}^2.$$

Avec 25 kg, on recouvre 25 fois plus de surface qu'avec 1 kg, donc on recouvre 45 m².

✓ Le produit en croix

C'est une technique très simple, mais que l'on ne s'autorise à utiliser que lorsque l'on maîtrise parfaitement la proportionnalité. Le produit en croix s'utilise à partir de la classe de 4^e.

Masse (en kg)	10	25
Aire (en m ²)	18	a

$$a = \frac{25 \times 18}{10} = 45.$$

Quotients en écriture fractionnaire

✓ Définition

Soit a et b deux nombres, avec $b \neq 0$.

Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b , donne a .

(Si on note q ce quotient, alors $q \times b = a$.)

On note $q = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), donc $\frac{a}{b} \times b = a$.

Remarque

$\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire du quotient de a par b .

a en est le numérateur et b en est le dénominateur.

✓ Propriétés

Pour $a = 1$ et $b \neq 0$: $\frac{1}{b} \times b = 1$

Exemple : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$

Pour $b \neq 0$:

$\frac{a}{b} \times b = a$ donc $\left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$ et donc $\frac{a}{b} \times \left(b \times \frac{1}{b}\right) = a \times \frac{1}{b}$.

D'où $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Exemple : $\frac{3}{2} = 3 \times \frac{1}{2}$

Propriété fondamentale

Pour $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$

Démonstration

Notons $q = \frac{ka}{kb}$.

Alors $q \times kb = ka$, et donc $k \times qb = k \times a$.

Par suite $qb = a$, et donc $q = \frac{a}{b}$.

Par conséquent $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

• Opérations

Addition

Pour calculer la somme de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, les deux écritures doivent avoir le même dénominateur : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ (pour $b \neq 0$).

Démonstration

Notons $k = \frac{a}{b}$; alors $kb = a$.

Notons $l = \frac{c}{b}$; alors $lb = c$.

Additionnons membre à membre ces 2 égalités.

On obtient alors $kb + lb = a + c$.

Soit donc $b(k + l) = a + c$.

$(k + l)$ est le nombre qui, multiplié par b , donne $a + c$.

Donc $k + l = \frac{a+c}{b}$.

or $k = \frac{a}{b}$ et $l = \frac{c}{b}$, donc $k + l = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$.

Par suite $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

ATTENTION

Si les dénominateurs sont différents, on revient au cas précédent en « réduisant au même dénominateur ».

Exemples

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{14 + 15}{21} = \frac{29}{21}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{1 \times 5}{6 \times 5} + \frac{3 \times 3}{10 \times 3} = \frac{5}{30} + \frac{9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Soustraction

Rappel : soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $a - b = a + (-b)$.

Conséquence : $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{-b}{d} = \frac{a-b}{d}$ (pour $b \neq 0$).

Remarque : $-\frac{b}{d} = \frac{-b}{d} = \frac{b}{-d}$ (pour $d \neq 0$).

Exemple : $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} - \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{21-10}{35} = \frac{11}{35}$.

Produit

Pour tous les nombres a, b, c et d ($b \neq 0$ et $d \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Démonstration

Notons $k = \frac{a}{b}$; alors $a = kb$

et notons $l = \frac{c}{d}$; alors $c = dl$.

Multiplions membre à membre : $a \times c = kb \times dl$

Soit donc $ac = kl \times bd$

kl est donc le nombre qui, multiplié par bd , donne ac .

Donc $kl = \frac{ac}{bd} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

or $kl = k \times l = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, donc on en déduit que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Exemples : $\frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{10}$; $\frac{42}{27} \times \frac{84}{54} = \frac{14}{9}$.

Division

Inverse : L'inverse d'un nombre non nul b est le nombre qui, multiplié par b , donne 1.

or $b \times \frac{1}{b} = 1$, donc l'inverse de b est $\frac{1}{b}$ ($b \neq 0$).

Propriété : Diviser un nombre par b revient à multiplier ce nombre par l'inverse de b :

$\frac{a}{b} = a \div b = a \times \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$).

Remarque

$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{c \times d}{d \times c} = \frac{cd}{dc} = 1$ donc l'inverse de $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$ ($d \neq 0$).

Conséquence : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (pour $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $c \neq 0$).

Équations

✓ Définition

Une équation est une égalité dans laquelle interviennent un ou plusieurs nombres inconnus. Ils sont désignés par des lettres.

Exemple 1

$x + 3 = 2 - x$ est une équation d'inconnue x .

$x + 3$ en est le premier membre et $2 - x$ en est le deuxième membre.

Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'égalité. Chaque valeur trouvée est une solution de l'équation.

Exemple 2

L'égalité $x^2 - 2x = 15$ n'est pas vérifiée pour $x = 4$: $4^2 - 2 \times 4 = 16 - 8 = 8 \neq 15$.

Par contre elle est vérifiée pour $x = 5$: $5^2 - 2 \times 5 = 25 - 10 = 15$.

✓ Propriétés

Équations $a + x = b$

On ne change pas une égalité lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres :

si $a = b$ alors $a + c = b + c$ et $a - c = b - c$ quel que soit le nombre c .

Exemple : Soit l'égalité $-2 + x = -3$.

En ajoutant 2 à chaque membre, on obtient $-2 + x + 2 = -3 + 2$,
c'est-à-dire $x = -1$.

On vient de résoudre l'équation $-2 + x = -3$ qui a donc pour solution $x = -1$.

D'une manière générale, l'équation $a + x = b$ a pour solution $x = b - a$.

ATTENTION

Soit l'équation $5 + x = 4$.

On commence par passer le x de l'autre côté de l'égalité : $5 = x + 4$.

Puis on déplace 4 : $x = 5 - 4$, c'est-à-dire $x = 1$.

Équations $ax = b$

On ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul chacun de ses membres :

Si $a = b$ alors $ac = bc$ et $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ quel que soit le nombre $c \neq 0$.

Exemple

Soit l'égalité $-5x = 6$.

En divisant chaque membre par -5 , on obtient $\frac{-5x}{-5} = \frac{6}{-5}$, c'est-à-dire $x = -\frac{6}{5}$.

D'une manière générale, l'équation $ax = b$ a pour solution $x = \frac{b}{a}$.

ATTENTION

Soit l'équation $\frac{5}{x} \times 4$.

En multipliant chaque membre par x , on obtient $5 = 4x$. Il suffit alors de diviser par 4 pour résoudre l'équation : $x = \frac{5}{4}$.

✓ Équations à une inconnue

Exemple 1

Résoudre l'équation $15x - 3 = -2$

Étape 1 : on place les x d'un côté de l'équation, et les nombres simples de l'autre côté : $15x = -2 + 3$

Étape 2 : on simplifie les écritures : $15x = 1$

Étape 3 : on divise les deux membres de l'équation par le nombre « sous » x : $x = \frac{1}{15}$

Exemple 2

Résoudre l'équation $7x - 3 = 2x + 3$.

Étape 1 : on place les x d'un côté de l'équation, et les nombres simples de l'autre côté : $7x - 2x = 3 + 3$.

Étape 2 : on simplifie les écritures : $5x = 6$

Étape 3 : on divise les deux membres de l'équation par le nombre « avant » x : $x = \frac{6}{5}$.

Les transformations du plan

✓ Symétries axiales

Soit (d) une droite.

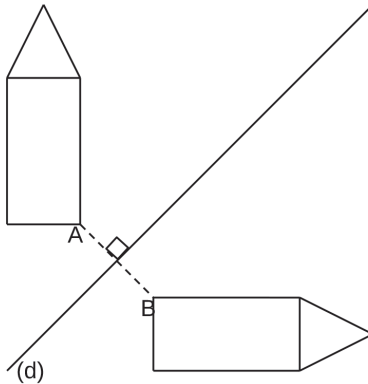
Placer le point B image du point A par la symétrie d'axe (d) , c'est placer le symétrique de A par rapport à (d) .

(d) est alors la médiatrice de $[AB]$.

ATTENTION

Si $A \in d$, alors $B = A$ (la droite (d) est sa propre symétrique)

Exemple



Propriétés

Par une symétrie axiale :

L'image d'un segment est un segment de même longueur.

L'image d'une droite est une droite.

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

Les symétries axiales conservent les longueurs, les aires, les angles et l'alignement des points.

Axe de symétrie

Une droite (d) est un axe de symétrie d'une figure si les deux parties de la figure se superposent par pliage le long de cette droite.

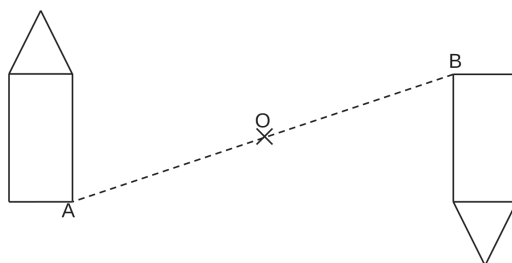
✓ La symétrie centrale

Soit A et O Deux points distincts.

Le symétrique de A par rapport au point O est le point B tel que O milieu de $[AB]$.

Si $A = O$ alors $B = A$. (Le point O est son propre symétrique.)

Exemple



Propriétés

Par une symétrie centrale :

L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.

L'image d'une droite est une droite parallèle.

L'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle, mais de sens contraire.

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon. (Les centres sont symétriques).

Les symétries centrales conservent les longueurs, les aires, les angles et l'alignement des points.

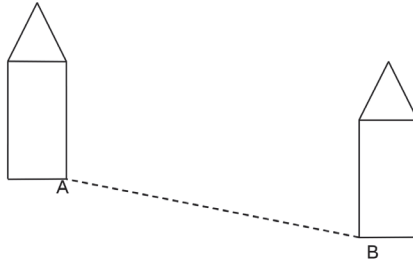
Centre de symétrie

Un point O est le centre de symétrie d'une figure lorsque cette figure est sa propre symétrique par rapport à O .

✓ Les translations

Soit A et B deux points. Appliquer la translation qui envoie A en B consiste à faire glisser la figure selon la direction de la droite (AB) , dans le sens de A vers B et de la longueur AB .

Exemple



Propriétés

Par une translation :

L'image d'un segment est un segment parallèle et de même longueur.

L'image d'une droite est une droite parallèle.

L'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle, mais de même sens.

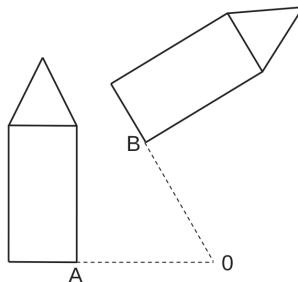
L'image d'un cercle est un cercle de même rayon. (Le centre du second cercle est l'image du centre du premier).

Les translations conservent les longueurs, les aires, les angles et l'alignement des points.

✓ Les rotations

Appliquer une rotation à une figure consiste à la faire tourner autour d'un point, appelé centre de la rotation, avec un angle et un sens donné.

Exemple



B est l'image de A par la rotation de centre O , d'angle 60° , dans le sens horaire.

Propriétés

Par une rotation :

L'image d'un segment est un segment de même longueur.

L'image d'une droite est une droite.

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

Les rotations conservent les longueurs, les aires, les angles et l'alignement des points.

Polygones réguliers

Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

Un polygone régulier à n côtés est inscritible dans un cercle.

Tous les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone ont la même mesure.

Les noms

Triangle équilatéral (3)	Octogone (8)
Carré (4)	Ennéagone ou nonagone (9)
Pentagone (5)	Décagone (10)
Hexagone (6)	Endécagone (11)
Heptagone (7)	Dodécagone (12)
Etc.	

Phrase à décoder

Voici la signification du texte en braille de la p. 103.

U N M A T H E M A T I C I E N
 E S T U N A V E U G L E Q U I ,
 D A N S U N E P I E C E
 S O M B R E , C H E R C H E U N
 C H A T N O I R Q U I N ' Y
 E S T P A S .