MPSI

Thierry Finot
Elsa Choubert
Sébastien Fayolle
David Legrand
Vincent Parmentier
Nicolas Tancrez

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE CHIMIE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique-Chimie MPSI

5e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ouvrage coordonné par

Thierry FINOT
professeur à l'école SPEIT (Shanghai) et au lycée Lavoisier (Paris)

Elsa CHOUBERT
professeure au lycée Stanislas (Cannes)

Vincent PARMENTIER
professeur au lycée Pothier (Orléans)

Sébastien FAYOLLE
professeur au lycée Gustave Eiffel (Bordeaux)

Nicolas TANCREZ
professeur au lycée Saint Louis (Paris)

David LEGRAND
professeur au lycée Sainte Marie (Caen)

avec la contribution de

Camille BONOMELLI
chercheuse à l'université d'Oxford

Vincent FRATICELLI
professeur au lycée Pothier (Orléans)

Laura DAUDIER
professeure au lycée François Rabelais (Paris)

ellipses

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique-chimie comme ceux de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1.	Bases de l'optique géométrique	1
2.	Lentilles minces	33
3.	Lois de l'électrocinétique – Régime continu	73
4.	Circuit linéaire du premier ordre	101
5.	Oscillateur électrique en régime libre	135
6.	Régime sinusoïdal forcé	165
7.	Filtrage linéaire	199
8.	Propagation d'un signal	241
9.	Cinématique du point	269
10.	Principes de la dynamique	299
11.	Énergie mécanique	343
12.	Mouvement dans un champ électrique ou magnétique	381
13.	État et évolution d'un système chimique	411
14.	Cinétique chimique	443
15.	Molécules et ions	483
16.	Moment cinétique – Force centrale	513
17.	Mouvement d'un solide	555
18.	Description d'un système thermodynamique	583
19.	Premier principe de la thermodynamique	613
20.	Deuxième principe de la thermodynamique	639
21.	Machines thermiques	661
22.	Champ magnétique	687
23.	Induction électromagnétique	719
24.	Introduction à la physique quantique	755
25.	Solides cristallins	781
26.	Réactions acido-basiques	811
27.	Réactions de dissolution ou de précipitation	847
28.	Réactions d'oxydo-réduction	889
29.	Diagrammes potentiel-pH	939
	Index	979

Chapitre 1

Bases de l'optique géométrique

UN SCIENTIFIQUE



Willebrord Snell (1580-1626) est un mathématicien et physicien hollandais. Enfant prodige, il acquiert bientôt une immense culture dans le domaine scientifique. Il rencontre les plus grands savants de son époque et se lance dans des recherches dans de nombreux domaines : astronomie, mesure de la Terre, approximation du nombre π. En optique, il s'intéresse aux miroirs concaves et convexes. Il énonce la loi de réfraction attribuée en France à Descartes.

Un peu d'histoire

Qui a découvert la loi de réfraction de la lumière ? En 984, le mathématicien arabe Ibn Sahl explique, schémas à l'appui, le lien entre l'angle d'incidence et celui de réfraction d'un rayon lumineux. Ses travaux restent totalement inconnus en Occident. Thomas Harriot découvre cette loi en 1602 mais il ne fait aucune publication. Elle est à nouveau énoncée en 1621 par le mathématicien hollandais Willebrord Snell qui, lui non plus, n'en fait pas état publiquement. En 1637 René Descartes publie le *Discours de la méthode* dans lequel il énonce les principes de la rationalité scientifique. Il le fait suivre de trois appendices ; le premier est un manuel d'optique dans lequel il énonce la loi de réfraction, sans connaître les travaux de ses prédécesseurs. Quelques années plus tard, Pierre de Fermat justifie cette loi par le principe du temps minimum de parcours.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les définitions concernant la lumière, sa propagation et ses sources
- ▷ Le modèle de l'optique géométrique et ses limites
- ▷ Les lois de Snell–Descartes pour la réflexion et la réfraction
- ▷ Les définitions concernant les systèmes optiques et la formation d'images
- ▷ Les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences
- ▷ Le principe de fonctionnement d'une fibre optique

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Relier la longueur d'onde dans le vide, celle dans un autre milieu et la couleur
- ▷ Utiliser les lois de Snell–Descartes pour déterminer des rayons réfléchis ou réfractés
- ▷ Étudier les cas de réfraction limite et réflexion totale
- ▷ Calculer des angles et des distances avec des formules géométriques
- ▷ Construire l'image d'un objet par un miroir plan et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- ▷ Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

■■ Résumé de cours

■ Propagation de la lumière

❑ Nature de la lumière

– Selon le **modèle ondulatoire** de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique, c'est-à-dire d'une propagation de variations périodiques des champs électrique et magnétique, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Une lumière **monochromatique** est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence f. La lumière visible correspond à l'intervalle $4 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ environ. Les autres fréquences correspondent à d'autres types d'ondes électromagnétiques (voir chapitre **8**).

– Un autre modèle, dit **corpusculaire**, décrit la lumière (et les autres ondes électromagnétiques) comme un flux de particules appelés **photons** (voir chapitre **24**).

❑ Indice et longueur d'onde

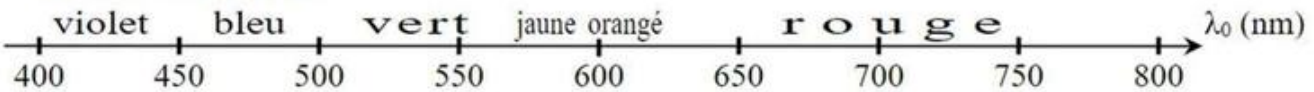
– La **célérité** (vitesse de propagation) de la lumière dans le vide est $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Sa célérité dans un milieu transparent quelconque est $\boxed{v = \frac{c}{n}}$ où n est l'**indice de réfraction** ($n \geq 1$), caractéristique du milieu et dépendant de la fréquence (donc de la longueur d'onde).

n = 1,0003 pour l'air (conditions usuelles), n = 1,33 pour l'eau, n = 1,5 à 1,8 pour les verres.

– Une lumière monochromatique a une fréquence f déterminée par l'émetteur, et une longueur d'onde λ telle que $\lambda = \frac{v}{f}$. La longueur d'onde dans le vide est $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, donc $\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$.

– Échelle des couleurs :



❑ Approximation de l'optique géométrique

L'optique géométrique modélise la lumière comme un ensemble de **rayons lumineux** : chaque rayon est une courbe décrite par la lumière pour aller d'un point à un autre. Les rayons lumineux sont *indépendants* les uns des autres ; ceci suppose qu'il n'y a pas d'interférences (toujours vrai en pratique). Dans un milieu transparent homogène et isotrope (seul cas envisagé ici), ils sont *rectilignes* ; ceci suppose qu'on évite la diffraction, tous les systèmes étant suffisamment larges.

■ Sources de lumière

❑ Types de sources

– Les **sources de lumière blanche** (lampes à incandescence, à LED blanche…) ont un spectre *continu* (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).

– Les **lampes spectrales** (notamment à vapeur métallique : mercure, sodium…) ont un spectre caractéristique de l'élément chimique, qui peut être considéré comme *discret* (constitué seulement de quelques fréquences distinctes).
– Les **lasers** émettent une lumière qui peut être considérée comme monochromatique.

❑ Modèle de la source ponctuelle monochromatique

Une source de lumière est en général étendue (elle présente une certaine surface). Mais elle peut être *modélisée* comme un ensemble de **sources ponctuelles**.
De plus on se limitera, si nécessaire, à des sources ponctuelles monochromatiques.

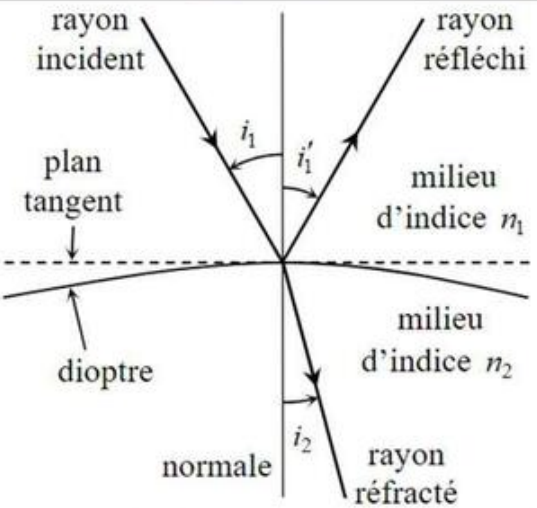
■ Réflexion et réfraction

❑ Description

Lorsqu'un rayon lumineux, dit **incident**, arrive sur un **dioptre** (interface entre deux milieux d'indices différents), il donne naissance en général à un rayon **réfléchi** (dans le milieu initial) et à un rayon **transmis** ou **réfracté** (dans le second milieu).
À partir du point d'intersection entre le rayon incident et le dioptre, on définit la normale, droite orthogonale au dioptre. Cette normale et le rayon incident définissent le **plan d'incidence**.

❑ Lois de Snell–Descartes

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. L'angle i_1' de réflexion est : $i_1' = -i_1$ (ou bien $i_1' = i_1$ avec des angles non orientés).
3. L'angle i_2 de réfraction est lié à l'angle i_1 d'incidence par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



Les expressions avec des angles orientés montrent que le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont de l'autre côté de la normale, par rapport au rayon incident.

Ces lois ont pour conséquence la **loi de retour inverse de la lumière** : le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le même que celui suivi pour aller de B à A.

Remarques

– Lorsque le rayon réfracté est présent, on néglige souvent le rayon réfléchi.
– Si la surface est un miroir, il n'y a pas de rayon réfracté.

❑ Réfraction limite et réflexion totale

– Si $n_2 > n_1$, il y a toujours un rayon réfracté (en plus du rayon réfléchi).

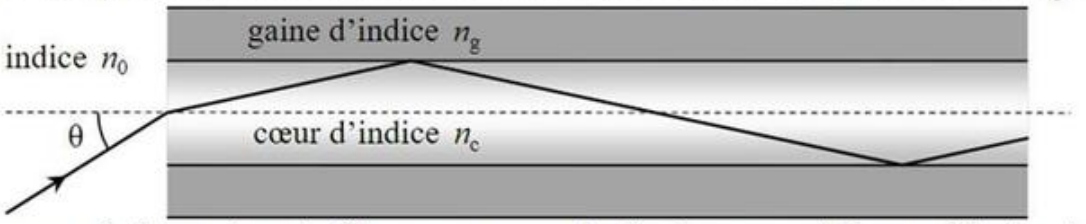
– Si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle i_1 est inférieur à une valeur limite, notée i_{lim} : celle-ci correspond au cas où $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)}$.

Lorsque $i_1 > i_{\text{lim}}$, il n'y a pas de réfraction, il y a donc **réflexion totale**.

⇨ Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite

❑ Application : fibre optique

Une application du phénomène de réflexion totale est la **fibre optique à saut d'indice** : un fil cylindrique transparent constitué d'un cœur d'indice n_c entouré d'une gaine d'indice $n_g < n_c$.



– Tout rayon pénétrant dans la fibre avec un angle $\theta < \theta_a$ sera guidé par réflexion interne : l'angle maximal θ_a caractérise le **cône d'acceptance** de la fibre. Son **ouverture numérique** est $o_n = n_0 \sin\theta_a$ où n_0 est l'indice du milieu extérieur. Le calcul donne $o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

– Lors du guidage d'un faisceau lumineux dans une fibre optique de longueur donnée, tous les rayons n'ont pas la même durée de trajet : on appelle **dispersion intermodale** la différence de temps $\Delta\tau$ entre les rayons les plus lents et les rayons les plus rapides. Pour une bonne transmission de l'information, $\Delta\tau$ ne doit pas être trop élevée.

⇨ Méthode 1.2. Établir l'expression de l'ouverture numérique d'une fibre optique

■ Formation d'images par un système optique

❑ Système optique

Un **système optique** est un ensemble de dioptres et/ou de miroirs, qui modifie la trajectoire des rayons lumineux. Son rôle est de donner une image d'un objet.

❑ Stigmatisme, objets et images

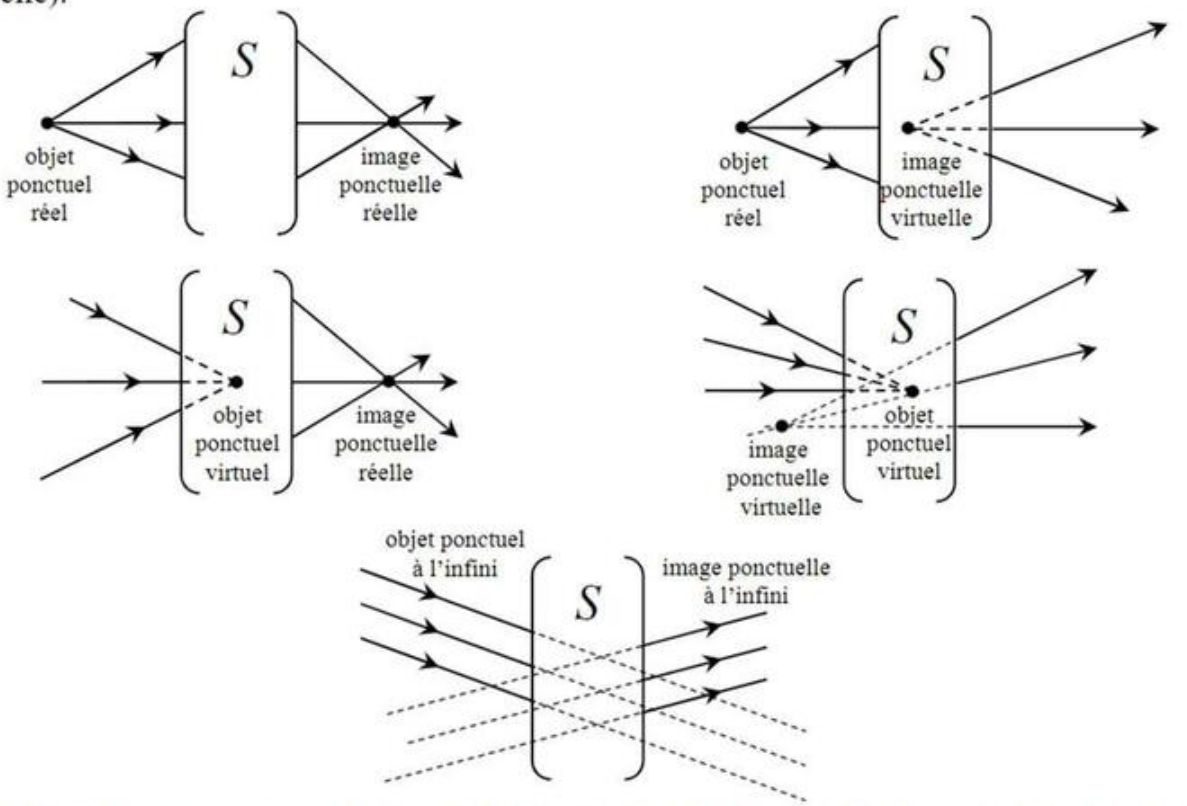
Une intersection d'un grand nombre de rayons incidents, ou de leurs prolongements, est appelée **point objet**. Il est **réel** si les rayons sont vraiment issus de ce point, et **virtuel** si seuls les prolongements des rayons convergent vers ce point. Des rayons incidents parallèles entre eux définissent un objet **à l'infini** (cas limite d'un objet réel ou virtuel).

Après la traversée d'un système optique, on peut envisager deux cas :

– soit les rayons émergents correspondant aux rayons issus de chaque point objet A convergent vers un point A' ou semblent provenir d'un point A', on dit alors que le système est **stigmatique** et A' est appelé **point image** de A ;

– soit ces rayons émergent de façon désordonnée, et le système n'est pas stigmatique.

Pour un système stigmatique, l'image est **réelle** si les rayons convergent vraiment vers A', et **virtuelle** s'ils semblent provenir de A' (leurs prolongements se coupant en A'). Enfin l'image est **à l'infini** si les rayons émergents sont parallèles entre eux (cas limite d'une image réelle ou virtuelle).

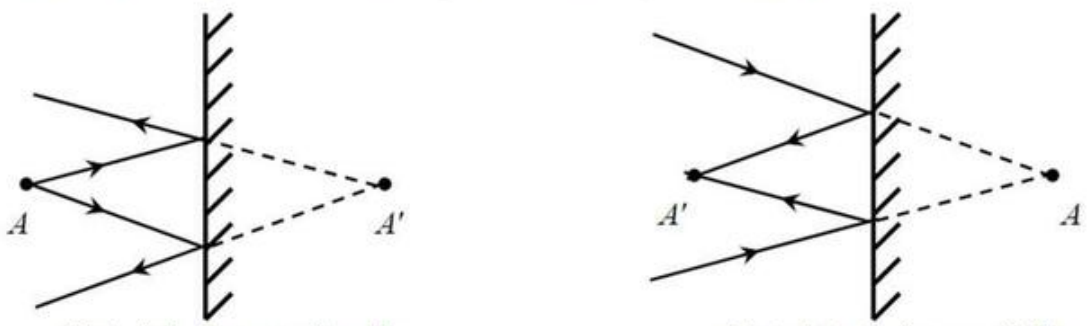


Un objet réel se trouve donc du côté de la lumière incidente, avant la face d'entrée du système, contrairement à un objet virtuel.
Une image réelle se trouve du côté de la lumière émergente, après la face de sortie du système, contrairement à une image virtuelle.

⇨ **Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles**

❑ Exemple du miroir plan

Le miroir plan est un exemple simple de système optique.
L'image d'un point objet A par un miroir plan est un point image A' symétrique de A par rapport au miroir. Si A est réel, A' est virtuelle ; si A est virtuel, A' est réelle.



objet réel, image virtuelle — objet virtuel, image réelle

⇨ **Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan**

❑ Systèmes centrés

Définition

Un système optique est **centré** s'il possède un axe de symétrie de révolution, appelé **axe optique**. Un rayon incident confondu avec cet axe ne sera donc pas dévié par le système.
De plus, d'après la première loi de Snell–Descartes, un rayon incident contenu dans un plan méridien (contenant l'axe) sera ensuite réfracté et/ou réfléchi dans ce plan.

Aplanétisme

Un système centré sera utilisable comme instrument s'il possède la propriété d'**aplanétisme** : l'image d'un objet plan orthogonal à l'axe optique est également plane et orthogonale à l'axe.

Conditions de Gauss

Aucun système optique, excepté le miroir plan, n'est rigoureusement stigmatique ; cependant, les grains d'un détecteur (cellules de la rétine, d'une plaque numérique…) ne sont pas ponctuels mais ont eux-mêmes une certaine largeur, donc un stigmatisme approché est suffisant.
Pour les systèmes optiques centrés, on peut obtenir un stigmatisme approché en ne laissant pénétrer dans le système que les rayons **paraxiaux**, c'est-à-dire rencontrant le système près de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Ce sont les **conditions de Gauss**, qui se réalisent pratiquement à l'aide d'un diaphragme et en observant des objets petits et/ou éloignés.

Foyers et plans focaux

Les systèmes optiques centrés, dans les conditions de Gauss, possèdent deux points particuliers :
- le **foyer principal objet** F dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe ;
- le **foyer principal image** F', image d'un point objet situé sur l'axe et à l'infini.

Si ces deux points sont à l'infini, le système est dit **afocal** (c'est le cas du miroir plan).

Le plan passant par F (resp. F') et orthogonal à l'axe est le **plan focal objet** (resp. **image**).

- D'après la propriété d'aplanétisme, en dehors de F', tout point du plan focal image, appelé **foyer image secondaire**, est l'image d'un point objet situé à l'infini mais hors de l'axe.
- De même, en dehors de F, tout point du plan focal objet, appelé **foyer objet secondaire**, a son image à l'infini mais hors de l'axe.

■■ Méthodes

■ Comment utiliser les lois de Snell–Descartes ?

❑ Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite

– La loi de la réfraction donne $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1$, d'où $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)$.

– Le rayon réfracté n'existe que si on trouve $\sin i_2 < 1$, donc si $\frac{n_1}{n_2}\sin i_1 < 1$ ou encore $\sin i_1 < \frac{n_2}{n_1}$. Cette condition est toujours vérifiée si $n_2 > n_1$; mais si $n_2 < n_1$ alors l'angle incident i_1 ne doit pas dépasser la valeur limite $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ pour que le rayon réfracté existe.

⇨ Exercices 1.4 à 1.6, 1.8 à 1.13, 1.15

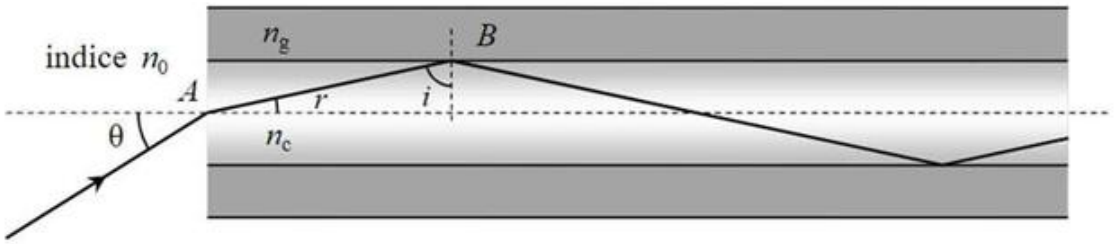
Exemple : un rayon lumineux passe de l'eau ($n_1 = 1{,}3$) vers l'air ($n_2 = 1{,}0$). Le rayon incident forme un angle $i_1 = 30°$ avec la normale au dioptre au point d'intersection avec le dioptre. Le rayon réfracté formera avec cette même normale un angle $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right) = 40{,}6°$.

L'angle limite vaut $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 50{,}3°$. Les rayons ayant un angle incident supérieur à cette valeur ne donnent pas naissance à un rayon réfracté : dans ce cas, il y a seulement un rayon réfléchi et le dioptre se comporte comme un miroir.

❑ Méthode 1.2. Établir l'expression de l'ouverture numérique d'une fibre optique

– Après avoir défini les trois angles qui interviennent dans les calculs, on écrit la condition de réflexion totale sur le dioptre entre le cœur et la gaine, et la loi de la réfraction au point d'entrée dans la fibre (dioptre entre l'extérieur et le cœur).
– On relie géométriquement deux de ces angles, et la combinaison de toutes ces relations fait apparaître l'inégalité cherchée sur l'angle d'entrée.

⇨ Exercice 1.15



Au point B, comme $n_c > n_g$, il existe pour l'angle i d'incidence une valeur limite i_{lim} telle que $\sin i_{lim} = \dfrac{n_g}{n_c}$. La condition de réflexion totale s'écrit : $\sin i > \dfrac{n_g}{n_c}$ (1).

Au point A, la loi de Snell–Descartes s'écrit : $n_0 \sin\theta = n_c \sin r$ (2). Or $r = \dfrac{\pi}{2} - i$ (angles complémentaires dans le triangle rectangle), donc $\sin r = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right) = \cos i$.

On doit donc déterminer, à partir de la relation (1), une inégalité pour $\cos i$: sachant que $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, la relation (1) devient : $\sqrt{1-\cos^2 i} > \dfrac{n_g}{n_c}$ d'où $\cos^2 i < 1 - \dfrac{n_g^2}{n_c^2} = \dfrac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}$.

Finalement : $(2) \Leftrightarrow n_0 \sin\theta = n_c \cos i < n_c \sqrt{\dfrac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = n_0 \sin\theta_a$.

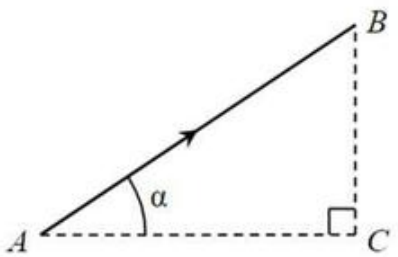
L'ouverture numérique est donc : $\boxed{o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$.

■ Comment obtenir les relations géométriques cherchées ?

❑ Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles

Les lois de Snell–Descartes ne donnent que des relations entre des angles. Pour déterminer des distances ou des mesures algébriques, on combine ces lois avec des relations de trigonométrie, notamment dans des triangles rectangles.

⇨ Exercices 1.11, 1.12, 1.13, 1.15

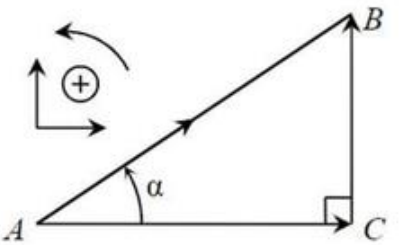


Dans ce triangle rectangle on peut écrire :

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\tan\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

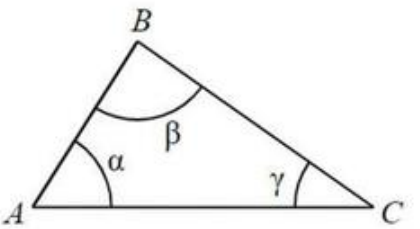
La formule de la tangente peut aussi s'écrire avec un angle orienté et des mesures algébriques :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}.$$



Enfin on peut écrire la formule des sinus pour un triangle quelconque :

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}.$$

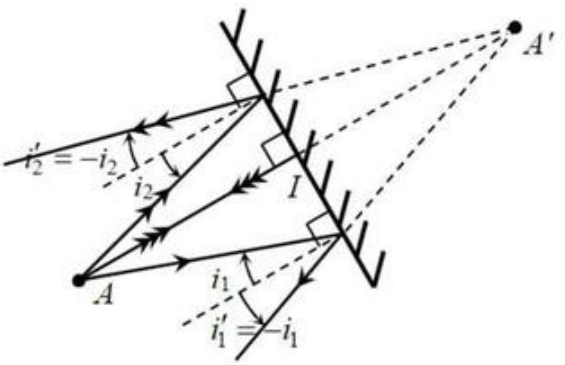


■ Comment déterminer l'image d'un objet ponctuel par un système optique ?

❑ Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan

Tracer au moins trois rayons incidents se coupant en un même point A, réel ou virtuel. Construire les rayons réfléchis selon les lois de Snell–Descartes. On constate que ces rayons, ou leurs prolongements, se coupent en un même point A', qui est donc l'image de A. Et les différents triangles symétriques montrent que A' est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.

⇨ Exercice 1.14



Pour un point objet A réel (faisceau incident divergent), comme ci-dessus, l'image A' est l'intersection des *prolongements* des rayons réfléchis (faisceau réfléchi divergent également), donc A' est un point image *virtuel*. Effectivement, quand on se regarde dans une glace, notre image est virtuelle : si on mettait un écran là où semble se trouver notre image, c'est-à-dire derrière le mur où est fixé le miroir, on ne verrait rien sur l'écran !

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La lumière se propage plus vite dans l'eau ($n_{eau} = 1,3$) que dans l'air ($n_{air} = 1,0$).	☐	☐
2.	L'indice d'un milieu homogène transparent et isotrope dépend de la fréquence de la lumière qui le traverse.	☐	☐
3.	La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
4.	La lumière d'un laser peut être considérée comme monochromatique.	☐	☐
5.	Lors du passage d'un milieu d'indice faible à un milieu d'indice plus élevé, le rayon se rapproche de la normale.	☐	☐
6.	On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent.	☐	☐
7.	Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
8.	Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière.	☐	☐
9.	Un système optique centré ne dévie pas les rayons incidents parallèles à son axe optique.	☐	☐
10.	Le foyer principal image F' d'un système optique centré est l'image par ce système du foyer principal objet F.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Indice et longueur d'onde

❑ Exercice 1.1. Fréquence et longueur d'onde

La lumière visible possède des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 0,40 et 0,80 µm.

1. À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

2. Que deviennent ces longueurs d'onde :

a) dans l'eau, d'indice $n = 1{,}3$? **b)** dans un verre, d'indice $n' = 1{,}5$?

Donnée : $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

❑ Exercice 1.2. Longueur d'onde et couleur

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4{,}73 \cdot 10^{14}$ Hz.

On donne $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de « quasi monochromatique » ?

2. Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

3. On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d'indice 1,66.
Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ?
Quelle est alors la longueur d'onde de la radiation du laser ? Quelle est sa couleur ?

❑ Exercice 1.3. Loi de Cauchy

La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide, est : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$ où A et B sont des constantes.

1. Donner les dimensions de A et B, et leurs unités dans le Système international.

2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :
$n_r = 1{,}618$ pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0r} = 768$ nm ;
$n_v = 1{,}652$ pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide $\lambda_{0v} = 434$ nm.

a) Calculer les valeurs de A et B.

b) En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que $\lambda_{0j} = 589$ nm.

■ Réflexion et réfraction

❑ Exercice 1.4. Réfraction et dispersion

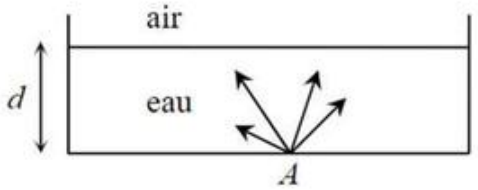
Un rayon lumineux, se propageant dans l'air, arrive avec une incidence $i = 40°$ sur un dioptre air/verre plan. Si ce rayon est constitué de lumière blanche, calculer l'écart angulaire entre les rayons réfractés extrêmes.

Données : l'indice du verre est donné par la formule de Cauchy : $n = A + \dfrac{B}{\lambda_0^2}$, avec $A = 1{,}504$ et $B = 4{,}188 \cdot 10^{-15}$ unité SI ; l'indice de l'air est $n_a = 1{,}000$.

❑ Exercice 1.5. Condition d'émergence

1. Quelle est la condition pour qu'un rayon passant de l'eau (indice $n_{eau} = 1{,}33$) à l'air (indice $n_{air} = 1{,}00$) soit réfracté ?

2. On place une source de lumière (supposée ponctuelle) au fond d'une piscine remplie d'eau, de profondeur $d = 2{,}50$ m. Donner les dimensions de la zone de la surface qui sera traversée par des rayons lumineux.



❑ Exercice 1.6. Capteur de niveau d'eau

On désire connaitre le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure ci-contre. L'émetteur (E) est un faisceau laser et le récepteur (R) une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse.

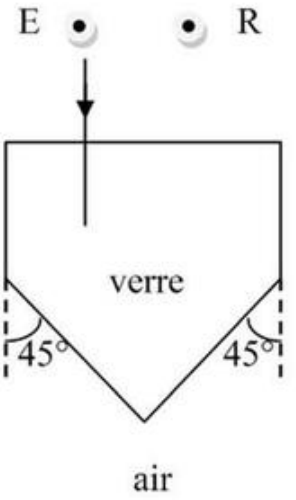
L'indice du verre est $n = 1{,}5$; celui de l'air est 1.

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en (R).

2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice $n' = 1{,}33$. Le récepteur (R) reçoit il toujours de la lumière ?

3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaitre le niveau de remplissage du château d'eau.

D'après G2E



❑ Exercice 1.7 Construction de Descartes*

On considère un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice $n_1 = 1{,}5$ (verre) à un milieu d'indice $n_2 = 1{,}0$ (air).

1. a) Faire un schéma du plan d'incidence, avec le milieu 1 en haut, et tracer le rayon incident. On note I le point d'intersection de ce rayon avec le dioptre.

b) Construire dans le milieu 2 deux demi-cercles de même centre I, l'un (C_1) de rayon proportionnel à n_1 et l'autre (C_2) de rayon proportionnel à n_2 (échelle au choix).

Soit J le point d'intersection du prolongement du rayon incident avec C_1 : à partir de J, on trace une droite Δ parallèle à la normale. On note alors K le point d'intersection de Δ avec C_2 : la droite (IK) obtenue donne la direction du rayon réfracté.

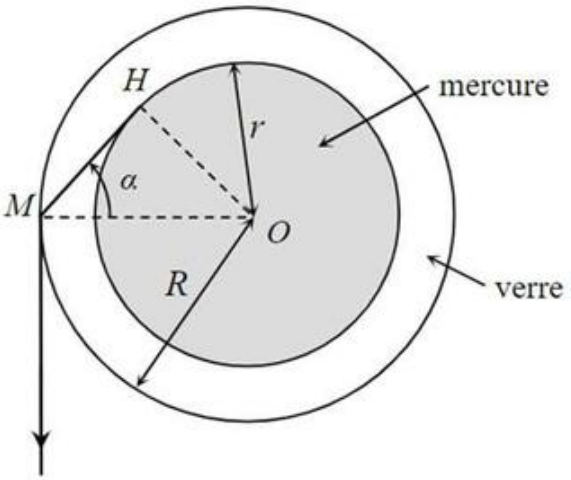
c) Construire le rayon réfracté selon cette méthode.

2. Démontrer, par des considérations géométriques, qu'on retrouve la loi de Snell–Descartes de la réfraction en utilisant cette construction.

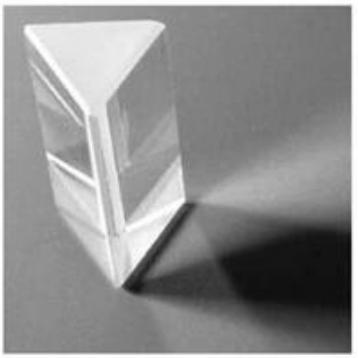
3. Montrer, à partir de cette construction, qu'il existe une valeur limite de i au-delà de laquelle il n'y a plus de rayon réfracté. Faire la construction de Descartes correspondante. Calculer cet angle et vérifier qu'on retrouve le résultat donné par les formules.

❑ Exercice 1.8. Thermomètre*

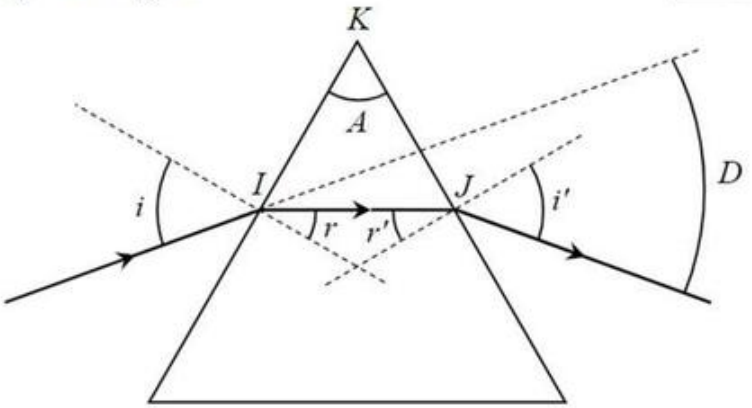
On considère un thermomètre à colonne de mercure, dont l'enveloppe est un cylindre en verre de rayon extérieur R et de rayon intérieur r. Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de $\frac{r}{R}$, un observateur voit le mercure comme s'il remplissait entièrement un cylindre de rayon R, c'est-à-dire que l'épaisseur du verre n'est plus visible. On pourra utiliser les points O, M, H et l'angle α. L'indice du verre est $n = 1{,}5$.



❑ Exercice 1.9. Mesure de l'indice d'un prisme**



On réalise la dispersion de la lumière au moyen d'un prisme en verre, d'angle A entre ses deux faces utiles, et d'indice de réfraction n pour une longueur d'onde donnée. Le milieu extérieur est l'air, d'indice pris égal à 1.
Soit un rayon parvenant au point I sur la face d'entrée avec un angle d'incidence i : il émerge par la face de sortie en un point J avec un angle i'. On note D l'angle mesurant la déviation entre le rayon incident et le rayon émergent.



1. Appliquer la loi de Snell–Descartes en I et J. Établir également les deux relations géométriques : $A = r + r'$ et $D = i + i' - A$. (Ces quatre relations sont les *formules du prisme*.)

2. Montrer que l'existence du rayon émergent en J dépend d'une condition sur r', puis en déduire une condition sur i.

3. Montrer que l'existence d'un rayon émergent impose aussi une condition sur A.

4. Pour un prisme en verre *flint* d'indice $n = 1{,}74$, vérifier que l'angle usuel $A = 60°$ convient. Déterminer alors numériquement l'encadrement de i.

5. On constate expérimentalement que, lorsqu'on fait varier i de 0° à 90° en tournant le prisme, la déviation D passe par un minimum unique D_m.

a) Justifier sans calcul que ce minimum correspond nécessairement à $i = i'$.

b) Exprimer alors D_m en fonction de i et A, puis en déduire l'indice n en fonction de D_m et A.

❑ Exercice 1.10. Arc-en-ciel**

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, chaque goutte d'eau constitue une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i. On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$.

1. Rappeler les lois de Snell–Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n. Exprimer la dérivée $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$ exclusivement en fonction de l'indice n et du sinus de l'angle d'incidence.

2. Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R, est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90°. Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.
Répondre aux questions **a**, **b**, **c** ci-après pour chacun des trois cas suivants :

- lumière directement transmise (figure 1) ;
- lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;
- lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

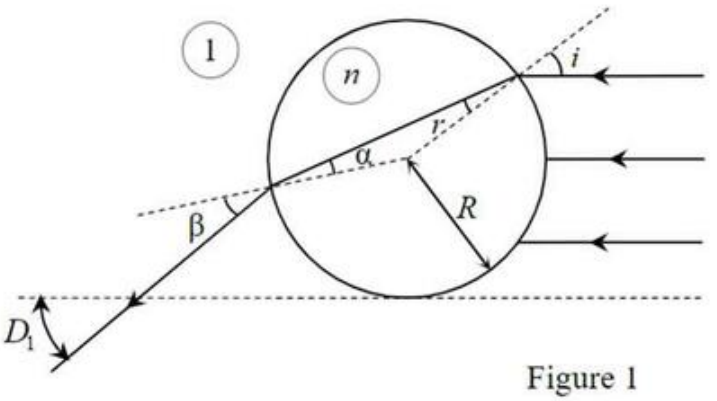


Figure 1

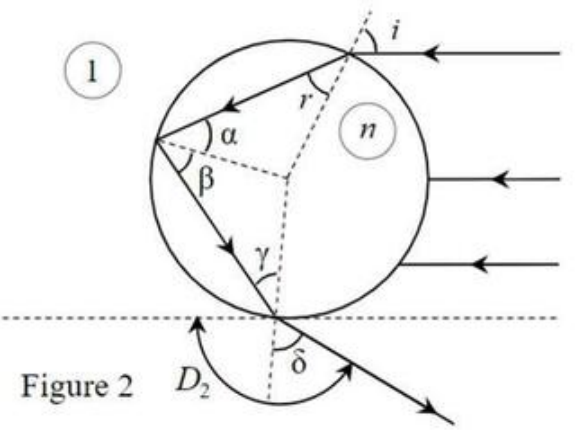


Figure 2

a) Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r, tous les angles marqués de lettres grecques.

b) En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas, en fonction de i et de r.

c) Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

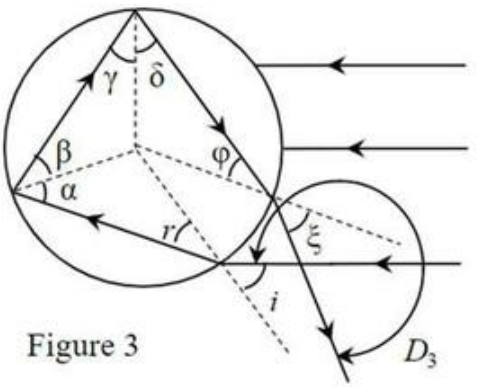


Figure 3

Madame Michu se trouve face à un rideau de pluie, et observe le ciel en tournant le dos au Soleil, qui est assez bas sur l'horizon.

3. Montrer qu'elle ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet θ_2 et θ_3. Exprimer ces deux angles en fonction de D_2 et D_3.

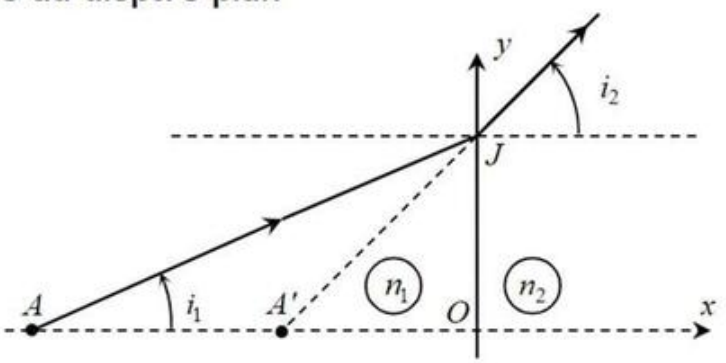
4. Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe une séparation des couleurs due au fait que cet indice varie en fonction de la longueur d'onde. Calculer ces angles pour le rouge (indice 1,3317) et le violet (indice 1,3448).

5. Dessiner les deux arcs-en-ciel qui apparaissent dans le champ de vision de Madame Michu, en notant la position respective des rouges et des violets sur chacun des deux.

■ Formation d'images par un système optique

❑ Exercice 1.11. Stigmatisme du dioptre plan*

Un dioptre plan sépare un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2. On considère rayon issu d'un point A, situé dans le milieu d'indice n_1, et d'angle d'incidence orienté i_1. On note A' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe perpendiculaire au dioptre et passant par A.



1. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$, $\sin i_1$, n_1 et n_2.

2. Le système est-il rigoureusement stigmatique ?

3. En utilisant une approximation, déterminer l'image du point objet A, puis d'un objet AB parallèle au dioptre.

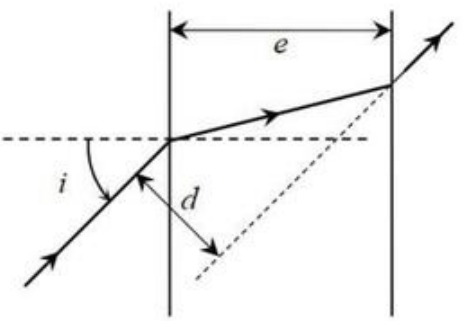
❑ Exercice 1.12. Lame à faces parallèles*

On considère une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e, d'indice n, plongée dans l'air d'indice 1. Un rayon incident arrive avec un angle d'incidence i.

1. Déterminer l'écart d entre le rayon incident et le rayon émergent en fonction de n et $\sin i$.

2. Faire l'application numérique pour $e = 4$ mm, $n = 1{,}5$ et $i = 50°$.

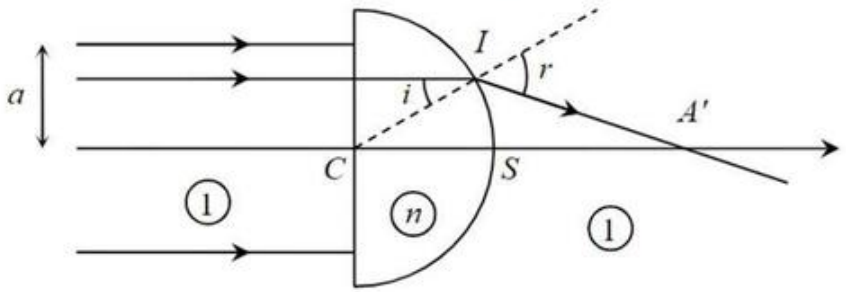
3. Cette lame est-elle stigmatique ? Quel est son effet sur la vision d'un objet ?



❑ Exercice 1.13. Lentille demi-boule*

On considère une lentille en forme de demi-boule de rayon R et d'indice n, plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon a, arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille.

1. Un rayon donné de ce faisceau émerge en coupant l'axe optique en un point A'. Établir la relation donnant CA' en fonction de $R = CS$ et des angles i et r.

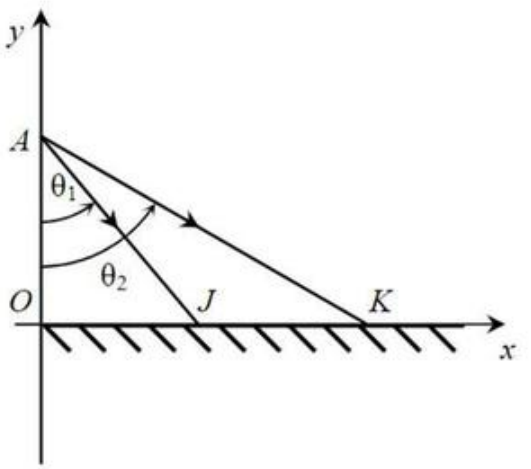


2. En déduire la limite CF' de CA' lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss (à définir). Quelle propriété de la lentille obtient-on ? Que représente le point F' ?

3. Quelle est la valeur limite a_0 du rayon du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons ressortent de la lentille ? Faire l'application numérique pour $n = 1{,}5$ et $R = 5{,}0$ cm.

❑ Exercice 1.14. Jeux avec un ou deux miroirs**

On considère un miroir plan contenu dans le plan xOz et un objet ponctuel A placé sur l'axe Oy ($OA = a$). On cherche à déterminer l'image A' de A par le miroir.



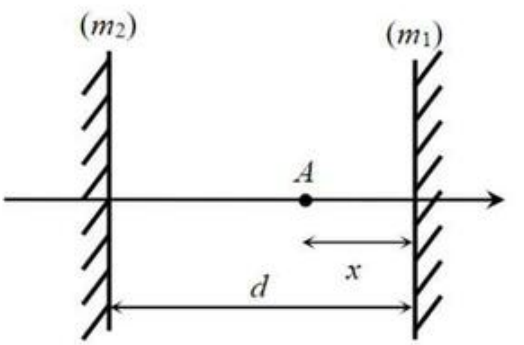
1. Construire les rayons réfléchis correspondant aux rayons incidents AJ et AK.

2. Établir les équations des droites des rayons réfléchis en fonction des tangentes des angles θ_1 et θ_2.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection C de ces deux droites.

4. Quelle est l'image de A par le miroir ? En déduire une propriété caractéristique du miroir plan.

On place maintenant deux miroirs plans identiques, parallèles et distants de d. Un objet ponctuel A est placé entre les deux miroirs à la distance x de (m_1).
On note A_1 l'image de A par (m_1), puis A_2 l'image de A_1 par (m_2), etc.



5. Déterminer, en fonction de x et d, les mesures algébriques $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}$ et $\overline{AA_4}$.

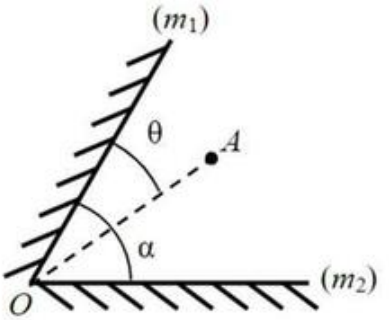
6. En déduire $\overline{AA_n}$. Combien d'images peut-on observer ?

On place à présent les deux miroirs comme indiqué sur le schéma de telle façon qu'ils forment entre eux un angle $\alpha = 60°$.

On place un objet ponctuel A entre eux. On note A_1 l'image de A par (m_1), puis A_2 l'image de A_1 par (m_2), etc.

7. Construire les images A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.

8. Combien d'images peut-on observer ?



D'après CCINP

■ Fibre optique

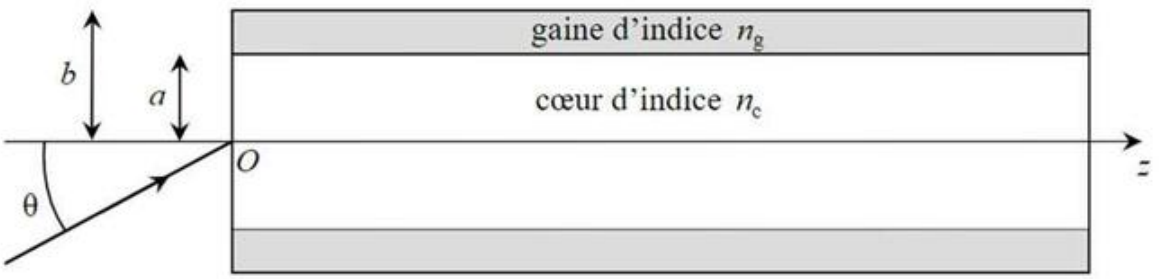
❑ Exercice 1.15. Caractéristiques d'une fibre optique

Les câbles à fibres optiques permettent la transmission à haut débit de tous types de signaux électromagnétiques, sur de longues distances avec très peu d'atténuation ; ceux-ci se propagent comme la lumière. Chaque câble comporte un grand nombre de fibres très fines.



Une fibre optique à saut d'indice est assimilée à un cylindre de révolution d'axe (Oz), de longueur L, constitué d'un cœur en polyméthacrylate de méthyle, de rayon a (de l'ordre de 8 à 50 µm) et d'indice $n_c = 1,49$, entouré d'une couche cylindrique de polymère fluoré, la gaine, d'épaisseur $b - a$ et d'indice $n_g = 1,40$. On supposera que le milieu extérieur a un indice de 1.

Un rayon pénètre dans la fibre en O, en faisant un angle θ avec l'axe (Oz).



1. Déterminer la valeur maximale admissible θ_a de l'angle θ pour que le rayon puisse être guidé dans la fibre, et calculer l'ouverture numérique $o_n = n_0 \sin\theta_a$.

2. On note τ la durée du trajet d'un rayon lumineux dans la fibre. Déterminer l'intervalle de temps $\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min}$ entre les rayons les plus lents et les plus rapides en fonction de n_c, n_g, L et de la célérité c de la lumière dans le vide.

Calculer $\Delta\tau$ pour $L = 1{,}0$ km, sachant que $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m$\cdot$s^{-1}.

3. Lors d'une communication par cette fibre optique, on envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses avec une fréquence f. On souhaite récupérer ces impulsions distinctes en sortie ($L = 1{,}0$ km). Monter que la fréquence f doit être inférieure à une certaine valeur.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.3. Tous les termes d'une somme ont la même dimension, qui est aussi celle de la somme elle-même.
Exercices 1.9 et 1.10. La somme des trois angles d'un triangle vaut π.
Exercices 1.11 et 1.12. Pour savoir si le système est rigoureusement stigmatique, il faut vérifier si tous les rayons issus d'un point A semblent venir d'un même point A' après avoir traversé le système. Penser à utiliser le rayon non dévié.
Exercice 1.13. Faire apparaître le projeté H de I sur l'axe, et calculer séparément CH (facile) et HA' (plus difficile) pour en déduire $CA' = CH + HA'$.
Exercice 1.15. Pour que le rayon demeure dans la fibre, il faut qu'il y ait toujours réflexion totale au niveau du dioptre entre le cœur et la gaine.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux

1. La vitesse de la lumière est $v = \frac{c}{n}$ donc $v_{eau} < v_{air}$.

5. La lumière solaire peut être décomposée (à l'aide d'un prisme, par exemple) en une infinité de radiations de longueurs d'ondes différentes.

8. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour observer une réflexion totale est que l'indice du premier milieu soit supérieur à celui du deuxième.

9. Seul le rayon confondu avec l'axe optique n'est pas dévié ; les autres sont déviés vers le foyer image principal.

❑ Les erreurs classiques

– Faire attention à l'unité d'angle utilisée dans les calculs (degrés ou radians).
– Les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction sont mesurés à partir de la *normale* au dioptre, et non par rapport au dioptre lui-même.
– Bien vérifier l'homogénéité des formules ! Par exemple, une longueur ne peut être égale qu'à une autre longueur, mais en aucun cas à l'inverse d'une longueur, ou à un produit de deux longueurs…

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. On applique la relation $f = \dfrac{c}{\lambda_0}$, ce qui donne pour $\lambda_0 = 0{,}40$ µm, $\boxed{f = 7{,}5 \times 10^{14}\ \text{Hz}}$ et pour $\lambda_0 = 0{,}80$ µm, $\boxed{f = 3{,}8 \times 10^{14}\ \text{Hz}}$.

2. La fréquence ne dépend pas du milieu, c'est une caractéristique intrinsèque d'une lumière donnée. Mais la longueur d'onde est modifiée lorsque la lumière change de milieu.

a) $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n}$. Application numérique : $\boxed{0{,}31\ \text{µm}}$ et $\boxed{0{,}62\ \text{µm}}$.

b) $\lambda' = \dfrac{\lambda_0}{n'}$. Application numérique : $\boxed{0{,}27\ \text{µm}}$ et $\boxed{0{,}54\ \text{µm}}$.

Exercice 1.2

1. Cette lumière n'est pas rigoureusement monochromatique (ce qui n'est qu'un cas idéal), mais elle en est « très proche », c'est-à-dire que l'intervalle de fréquences est extrêmement étroit autour de la valeur f donnée. Et en tous cas, la lumière laser possède une monochromaticité beaucoup plus grande que n'importe quel autre type de lumière.

2. On utilise la formule $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$. AN $\boxed{\lambda_0 = 0{,}63\ \text{µm}}$. La couleur perçue par l'œil humain est rouge (car le rouge couvre l'intervalle approximatif de 0,62 à 0,80 µm dans le vide).

3. La vitesse est $v = \dfrac{c}{n}$. AN $\boxed{v = 1{,}81 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$. La longueur d'onde devient $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{\lambda_0}{n}$.

AN $\boxed{\lambda_0 = 0{,}38\ \text{µm}}$. En revanche, la couleur, qui dépend de la fréquence et qui est donc intrinsèque, reste rouge.

Exercice 1.3

1. A est sans dimension, donc sans unité (comme n) et B a la dimension d'une longueur au carré ; il s'exprime donc en mètres carrés (m^2) dans le SI.

2. a) Il faut donc résoudre le système : $n_\text{r} = A + \dfrac{B}{\lambda_{0\text{r}}^2}$ (1) et $n_\text{v} = A + \dfrac{B}{\lambda_{0\text{v}}^2}$ (2).

On élimine A en effectuant la soustraction (2) − (1), ce qui permet d'obtenir $\boxed{B = \dfrac{n_\text{v} - n_\text{r}}{1/\lambda_{0\text{v}}^2 - 1/\lambda_{0\text{v}}^2}}$.

AN $B = \dfrac{1{,}652 - 1{,}618}{(4{,}34 \times 10^{-7})^{-2} - (7{,}68 \times 10^{-7})^{-2}}$ soit $\boxed{B = 9{,}41 \times 10^{-15}\ \text{m}^2}$. On en déduit $\boxed{A = 1{,}602}$.

b) $n_\text{j} = 1{,}602 + \dfrac{9{,}41 \times 10^{-15}}{(5{,}89 \times 10^{-7})^2}$ soit $\boxed{n_\text{j} = 1{,}629}$.

Exercice 1.4

Le rayon lumineux réfracté dans le verre aura un angle de réfraction r tel que $\sin i = n \sin r$, soit $r = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right)$. Or l'indice n dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière incidente. Pour la lumière blanche, les valeurs extrêmes sont $\lambda_{0\,\mathrm{v}} = 400$ nm (violet) et $\lambda_{0\,\mathrm{r}} = 800$ nm (rouge). On a donc pour les indices correspondants $n_{\mathrm{v}} = 1{,}530$ et $n_{\mathrm{r}} = 1{,}511$.

Les angles de réfraction sont $r_{\mathrm{v}} = \arcsin\left(\dfrac{\sin 40°}{1{,}530}\right) = 24{,}84°$ et $r_{\mathrm{r}} = \arcsin\left(\dfrac{\sin 40°}{1{,}511}\right) = 25{,}17°$, ce qui représente un écart angulaire $\boxed{\Delta r = r_{\mathrm{r}} - r_{\mathrm{v}} = 0{,}33° = 20'}$.

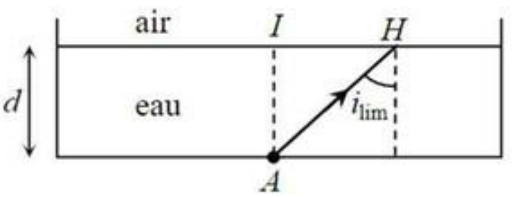
⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.5

1. Il faut que l'angle i d'incidence du rayon soit inférieur à l'angle limite, soit $i \leq i_{\mathrm{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{1}{1{,}33}\right) = 48{,}8°$.

⇨ *Méthode 1.1*

2. Un rayon pourra traverser le dioptre eau-air si son angle d'incidence est inférieur à l'angle limite calculé précédemment.
La zone cherchée sera donc un <u>disque</u> de rayon $\boxed{IH = d \tan i_{\mathrm{lim}} = 2{,}85 \text{ m}}$.



Exercice 1.6

1. Sur les dioptres verre/air, l'angle de réflexion totale est $i_{\mathrm{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 41°\ 50'$. Or l'angle d'incidence du faisceau laser est $i = 45°$, donc $\boxed{i > i_{\mathrm{lim}}}$: <u>il y a réflexion totale</u> sur la face oblique de gauche (avec un angle de réflexion de 45°), puis à nouveau sur la face de droite (avec les mêmes angles), et le rayon revient finalement entièrement vers (R).

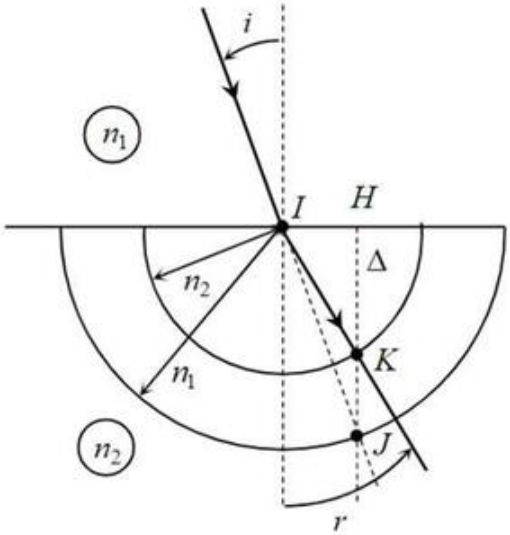
⇨ *Méthode 1.1*

2. La nouvelle valeur de l'angle de réflexion totale est $i'_{\mathrm{lim}} = \arcsin\left(\dfrac{n'}{n}\right) = 62°\ 30'$. Maintenant $i < i'_{\mathrm{lim}}$: il n'y a plus réflexion totale. Cependant il y a toujours une réflexion partielle en même temps que la réfraction, donc <u>le récepteur reçoit encore un peu de lumière, mais avec une intensité beaucoup plus faible que dans le cas précédent</u>.

3. On peut suspendre ce dispositif au-dessus du réservoir et le faire descendre progressivement, tout en observant le signal capté par (R). L'intensité de ce signal reste sensiblement constante tant que le capteur est au-dessus de l'eau, puis diminue brusquement lorsqu'il s'immerge dans l'eau. Ainsi, en repérant la distance dont on a fait descendre le capteur (longueur de fil déroulé…), on peut connaître le niveau de l'eau.

Exercice 1.7

1. a) b) c) Voir schéma.



2. En notant H le projeté orthogonal de J (ou K) sur le dioptre, on peut écrire les relations trigonométriques :

$\sin i = \dfrac{HI}{IJ} = \dfrac{HI}{n_1}$ et $\sin r = \dfrac{HI}{IK} = \dfrac{HI}{n_2}$.

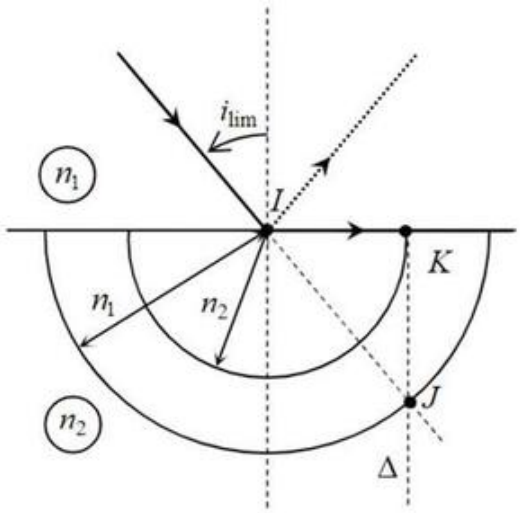
On en déduit donc que $HI = n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

On retrouve bien la loi de la réfraction :

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}.$$

⇨ *Méthode 1.3*

3. L'angle limite d'incidence i_{lim} s'obtient pour $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (ou 90°), on peut donc le déterminer graphiquement. Pour une valeur de i_1 supérieure à i_{lim}, il n'y a plus de point K donc on ne peut plus construire de rayon réfracté.



Dans le cas où un rayon lumineux passe du verre ($n_1 = 1{,}5$) à l'air ($n_2 = 1$), l'angle limite vaut $i_\ell = \arcsin\left(\dfrac{1}{1{,}5}\right) = 41{,}8°$. Pour $i_1 > 41{,}8°$ il y aura réflexion totale.

Exercice 1.8

Pour qu'on obtienne l'effet indiqué, un rayon issu de H (sur le bord du mercure) doit émerger en M à la limite de la réflexion totale, ce qui revient à dire $\sin\alpha \geq \sin\alpha_{\text{lim}} = \dfrac{1}{n}$.

Or $\sin\alpha = \dfrac{r}{R}$ (dans le triangle rectangle OHM), donc la condition s'écrit : $\boxed{\dfrac{r}{R} \geq \dfrac{1}{n} = 0{,}67}$.

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.9

1. Lois de Snell–Descartes : en I, $\boxed{\sin i = n \sin r}$ (équation 1) ; en J, $\boxed{\sin i' = n \sin r'}$ (2).

– Par ailleurs, dans le triangle IJK, la somme des angles vaut π : $A + \left(\dfrac{\pi}{2} - r\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

d'où $\boxed{A = r + r'}$ (3).

– Pour la déviation D, il faut remarquer que le rayon incident est dévié deux fois dans le même sens (vers la droite sur notre schéma). En I, le rayon entre dans le prisme en tournant de $i-r\,(>0)$; puis en J, il tourne de $i'-r'\,(>0)$. La déviation totale est donc $D=i+i'-r-r'$, et en utilisant la relation (3) on obtient $\boxed{D=i+i'-A}$ (4).

2. La réfraction en I (de l'air au verre, d'indice plus grand) existe pour toute valeur de i. En revanche, en J (du verre à l'air) elle est conditionnée à la valeur de r' : il faut que $\boxed{r'<r'_{\text{lim}}=\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$ pour que le rayon émerge en J et ne subisse pas de réflexion totale.

La relation (3) $A=r+r'$ impose donc $r>A-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ et la relation (1) donne alors : $\boxed{i>\arcsin\left[n\sin\left(A-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]=i_{\text{min}}}$. L'angle d'incidence doit être <u>assez grand</u>.

⇨ *Méthode 1.1*

Les fonctions sinus et arcsinus sont croissantes entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc une valeur minimale pour un angle correspond à une valeur minimale pour son sinus.

3. D'après (1), $\sin r=\frac{\sin i}{n}<\frac{1}{n}$ donc $r<\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si on considère la condition sur r' : $r'<\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ ainsi que la relation (3), on en déduit qu'il est impératif d'avoir $\boxed{A<2\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)=A_{\text{max}}}$ pour que la lumière puisse émerger du prisme. Celui-ci doit donc être <u>assez pointu</u>.

4. Pour $n=1{,}74$, $\boxed{A_{\text{max}}=70°\ 10'}$ donc la valeur $A=60°$ convient.
La condition sur i est alors : $\boxed{47°\ 9'<i<90°}$.

5. a) D'après la <u>loi de retour inverse de la lumière</u>, si on obtient une déviation minimale dans un sens pour un angle incident i, la déviation est aussi minimale dans l'autre sens, en inversant les rôles des rayons émergent et incident, donc pour un angle incident i'. Le minimum étant unique, on trouve nécessairement $i'=i$.

b) D'après les relations (1) et (2), si $i'=i$, alors $r'=r$. Les relations (4) et (3) donnent alors :

$D_{\text{m}}=2i-A$ d'où $i=\frac{A+D_{\text{m}}}{2}$; et $r=\frac{A}{2}$. Or $n=\frac{\sin i}{\sin r}$, soit $\boxed{n=\frac{\sin\left(\frac{A+D_{\text{m}}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$.

Exercice 1.10

1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $\sin i=n\sin r$ (1).

Écrivons la différentielle de cette expression : $\cos i\,\mathrm{d}i = n\cos r\,\mathrm{d}r$, soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\cos i}{n\cos r}$.

En utilisant la relation (1) et la relation $\cos i = \sqrt{1-\sin^2 i}$, on obtient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}}$.

2. *Figure 1*

a) $\alpha = r$ et $\beta = i$.

b) $D_1 = 2(i-r)$.

c) $\mathrm{d}D_1 = 2\mathrm{d}i - 2\mathrm{d}r$ et $\dfrac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)$. La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est $\dfrac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 0$, soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$. Or, d'après le résultat de la question 1, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}}$, ce qui impose que $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$, donc que $n = 1$. Cette solution triviale n'a pas d'intérêt (il faudrait que l'indice de l'eau soit le même que celui de l'air !). Il n'est donc pas possible d'observer le faisceau parallèle recherché dans ces conditions.

Figure 2

a) $\alpha = \beta = \gamma = r$ et $\delta = i$.

b) $D_2 = 2(i-r) + \pi - 2r$.

c) $\mathrm{d}D_2 = 2(\mathrm{d}i - \mathrm{d}r) - 2\mathrm{d}r = 2\mathrm{d}i - 4\mathrm{d}r$. La condition d'émergence du faisceau parallèle s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{2}$ et le résultat de la question 1 conduit à $n^2 - \sin^2 i = 4(1-\sin^2 i)$, soit $\boxed{\sin^2 i = \dfrac{4-n^2}{3}}$.

Figure 3

a) $\varphi = \delta = \gamma = \beta = \alpha = r$ et $\xi = i$.

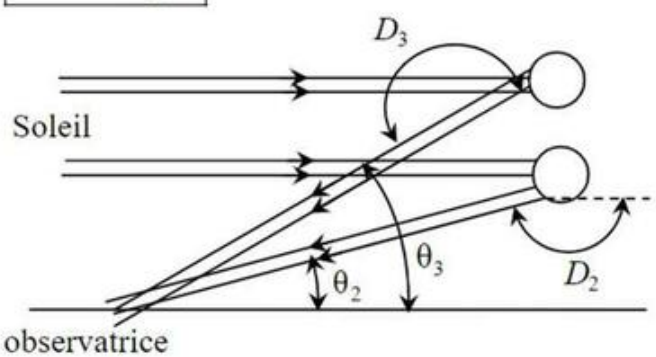
b) $D_3 = 2(i-r) + 2(\pi - 2r)$.

c) $\mathrm{d}D_3 = 2(\mathrm{d}i - \mathrm{d}r) - 4\mathrm{d}r = 2\mathrm{d}i - 6\mathrm{d}r$ donc la condition recherchée s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{3}$, ce qui donne, en utilisant le résultat de la question 1 : $\boxed{\sin^2 i = \dfrac{9-n^2}{8}}$.

3. Madame Michu ne verra la lumière émergente que si la condition d'émergence d'un faisceau parallèle est vérifiée, ce qui correspond au schéma ci-contre.

On constate les relations $\theta_2 = \pi - D_2$ et $\theta_3 = D_3 - \pi$.

Les gouttes devront donc être sur un cône centré sur l'observatrice et d'axe parallèle aux rayons incidents.

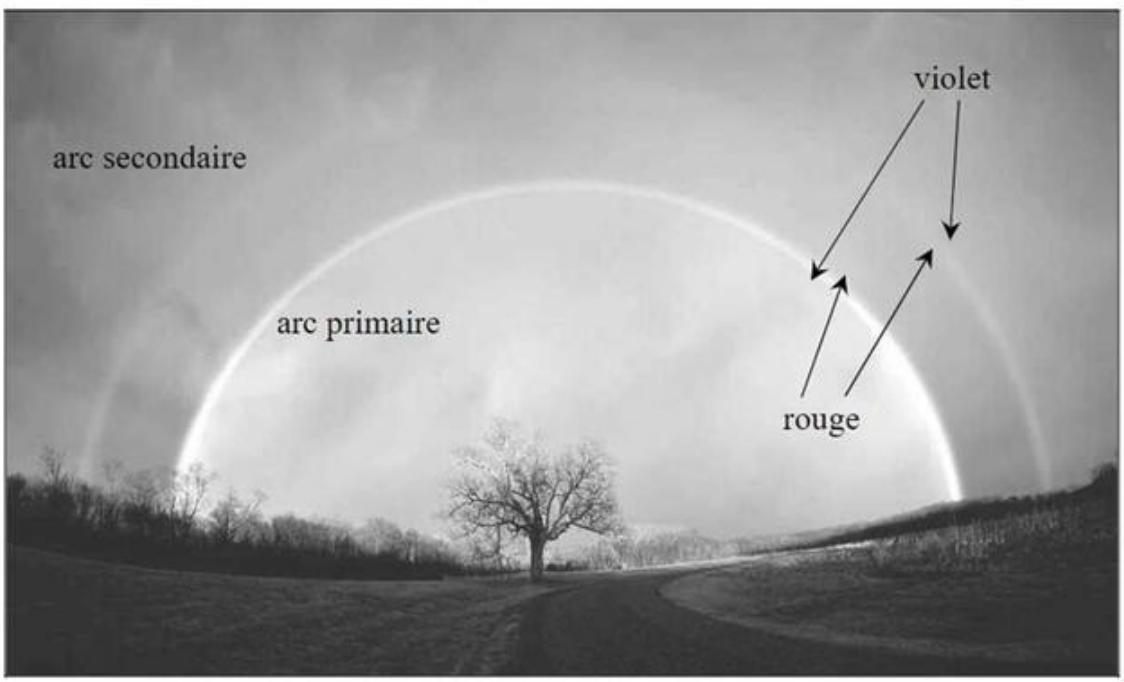


On observera deux arcs : l'un dû à la simple réflexion de la lumière dans une goutte (cas de la figure 2) et l'autre dû à la double réflexion (cas de la figure 3).

4. Pour la simple réflexion : $\theta_2 = \pi - D_2$, avec $D_2 = 2(i-r)+\pi-2r$, et $i = \arcsin\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}$; quant à r, il se calcule par la relation $r = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right)$. Pour la double réflexion : $\theta_3 = D_3 - \pi$, avec $D_3 = 2(i-r)+2(\pi-2r)$, $i = \arcsin\sqrt{\dfrac{9-n^2}{8}}$ et toujours $r = \arcsin\left(\dfrac{\sin i}{n}\right)$.

Angle (en degrés)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet ($n = 1{,}3448$)	58,75	39,48	139,58	**40,41**	71,50	44,85	233,87	**53,87**
Rouge ($n = 1{,}3317$)	59,51	40,33	137,71	**42,29**	71,92	45,56	230,48	**50,48**

5. On constate que l'arc secondaire (obtenu par double réflexion) est au-dessus de l'arc primaire (obtenu par simple réflexion) et que les couleurs des deux arcs sont inversées.



Exercice 1.11

1. $\tan i_1 = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{AO}}$, $\tan i_2 = \dfrac{\overline{OJ}}{\overline{A'O}}$ et la loi de la réfraction en J s'écrit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

⇨ *Méthode 1.3*

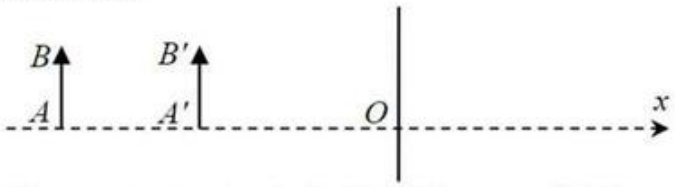
Ici on travaille avec des angles orientés, ce qui permet d'obtenir des mesures algébriques et pas seulement des distances. Mais il faut les orienter correctement !

Ces trois relations entraînent que $\overline{OA'} = \overline{OA}\dfrac{\tan i_1}{\tan i_2} = \overline{OA} \times \dfrac{\sin i_1}{\cos i_1} \times \dfrac{\cos i_2}{\sin i_2}$.

Or $\cos i_1 = \sqrt{1-\sin^2 i_1}$, $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ et $\cos i_2 = \sqrt{1-\sin^2 i_2} = \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1}$, ce qui permet, après simplification, d'obtenir $\boxed{\overline{OA'} = \overline{OA}\,\frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{\sqrt{n_1^2 - n_1^2 \sin^2 i}}}$.

2. La position de A' dépend de l'angle i_1, donc du rayon étudié. On ne peut donc pas dire que tous les rayons issus de A sembleront venir de A' après réflexion : le dioptre n'est pas un système rigoureusement stigmatique et A' n'est pas l'image de A.

3. Si i_1 est faible, c'est-à-dire si on ne considère que les rayons faiblement inclinés par rapport à (Ox), alors $\sin i_1 \ll 1$ d'où $\boxed{\overline{OA'} \approx \frac{n_2}{n_1}\overline{OA}}$. Cette relation ne dépend plus de i_1 donc A' est bien l'image de A dans ces conditions.



Cette relation étant valable pour tout point de l'objet AB, on en déduit que $A'B'$, image de AB par le dioptre, est également parallèle au dioptre et plus proche de ce dernier si $n_2 < n_1$ (mais plus éloignée si $n_2 > n_1$).

Exercice 1.12

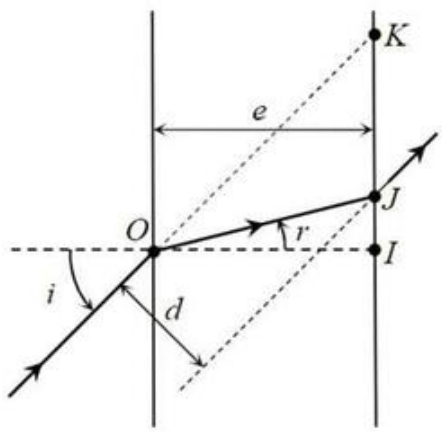
1. Un peu de trigonométrie permet de résoudre ce problème. Il est conseillé de faire un schéma très clair et de nommer les points remarquables : O, I, J et K.

$d = JK\cos i = (IK - IJ)\cos i = e(\tan i - \tan r)\cos i$

$= e\left[\frac{\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 i}} - \frac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}}\right]\sqrt{1-\sin^2 i}$.

On utilise alors la loi de la réfraction : $\sin i = n \sin r$ d'où

$\boxed{d = e\sin i\left[1 - \frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right]}$.



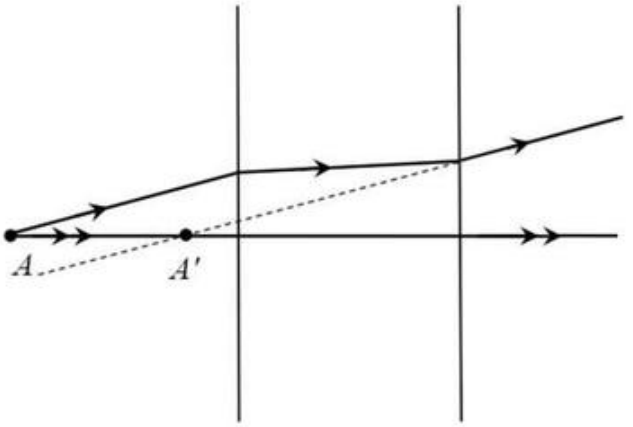
⇨ *Méthode 1.3*

2. AN $\boxed{d = 1{,}54 \text{ mm}}$.

3. Cherchons l'image donnée par la lame d'un point A. Pour cela, on construit le trajet de deux rayons issus de A (on choisit l'un des deux orthogonal à la lame par commodité).
Tout d'abord, il faut vérifier le stigmatisme de la lame, c'est-à-dire vérifier que la position de A' ne dépend pas de l'inclinaison des rayons issus de A.
Ce n'est pas vrai de façon exacte, car la formule précédente dépend de i.

Corrigé

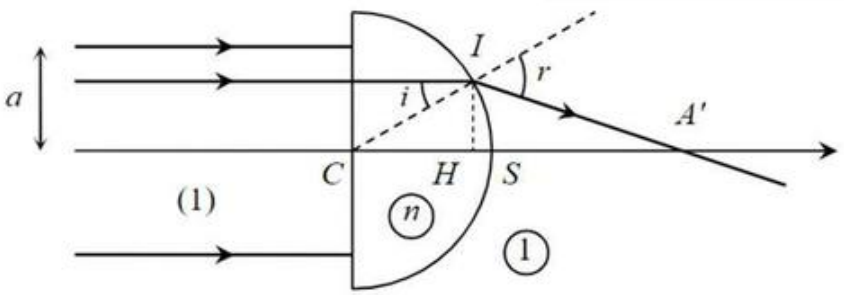
Mais pour i très faible : $\sin i \approx i \ll 1$ donc $d \approx ei\left[1-\frac{1}{n}\right]$. De plus $\sin i = \frac{d}{AA'} \approx i$ donc on trouve $AA' \approx \frac{d}{i} \approx e\left[1-\frac{1}{n}\right]$, qui est indépendant de i : la lame à face parallèle est stigmatique pour les angles faibles.
On constate alors que l'image A' est plus proche de la lame que A. La lame donne donc l'impression de rapprocher les objets.



Exercice 1.13

1. On définit le point I, intersection entre le rayon incident et le dioptre sphérique, et le point H, projeté orthogonal de I sur l'axe, ce qui définit deux triangles rectangles.
Le rayon n'étant pas dévié par la face plane de la lentille (car il arrive selon la normale), on peut se contenter de considérer la réfraction au niveau de la face sphérique : $n\sin i = \sin r$.

$\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'} = \frac{HI}{\tan i} + \frac{HI}{\tan(r-i)}$ et $HI = R\sin i$, donc $\boxed{\overline{CA'} = R\cos i + \frac{R\sin i}{\tan(r-i)}}$.



⇨ *Méthode 1.3*

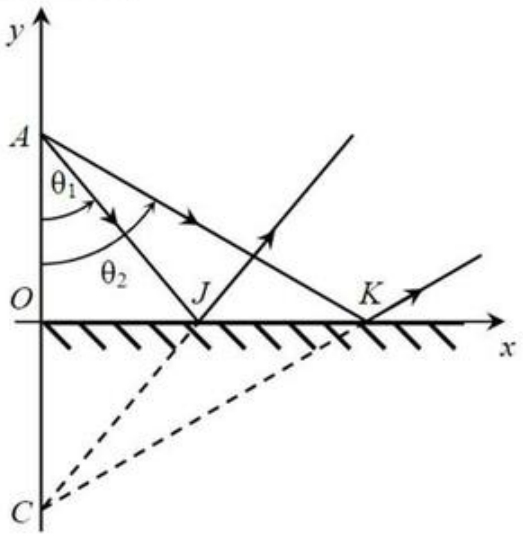
2. L'approximation de Gauss consiste à se limiter à des rayons paraxiaux, ce qui permet d'écrire $\boxed{i \ll 1}$, d'où également $r \ll 1$. Alors $\sin i \approx \tan i \approx i$, donc la loi de Snell–Descartes devient $ni \approx r$; et $\cos i \approx 1$ d'où $\overline{CA'} \approx R + \frac{Ri}{r-i} \approx R + \frac{Ri}{ni-i}$ soit $\overline{CA'} \approx \boxed{\frac{nR}{n-1} = \overline{CF'}}$.

On a, dans ces conditions, une lentille stigmatique dont F' est le foyer principal image.

3. Pour qu'un rayon émergent existe, il faut que la loi de Snell–Descartes donne $\sin r \leq 1$ donc $\sin i \leq \frac{1}{n}$. Or $\sin i = \frac{a_0}{R}$, la condition est donc $\boxed{a_0 \leq \frac{R}{n} = 3{,}3 \text{ cm}}$.

Exercice 1.14

1. Voir schéma.



⇨ *Méthode 1.4*

2. Le rayon (1) a pour pente $\frac{1}{\tan\theta_1}$. L'équation cherchée est donc de la forme $y_1 = \frac{x}{\tan\theta_1} + k$. On détermine la constante k en imposant que le point J appartienne à cette droite, soit $0 = \frac{OJ}{\tan\theta_1} + k$ et donc $k = -\frac{OJ}{\tan\theta_1} = -a$. L'équation de la droite du rayon réfléchi (1) est donc : $\boxed{y_1 = \frac{x}{\tan\theta_1} - a}$.

Pour le rayon (2), on utilise la même méthode en notant que sa pente est $\frac{1}{\tan\theta_2}$ et en utilisant le point K pour déterminer la constante. L'équation recherchée est alors $\boxed{y_2 = \frac{x}{\tan\theta_2} - a}$.

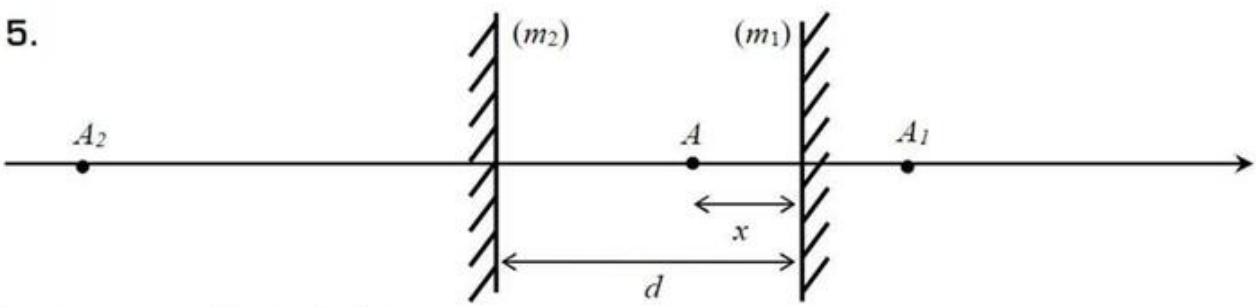
3. Pour déterminer le point d'intersection C, on cherche à résoudre l'équation $y_1 = y_2$.

Donc $\frac{x_C}{\tan\theta_1} - a = \frac{x_C}{\tan\theta_2} - a$ et, vu que $\tan\theta_1 \neq \tan\theta_2$, alors $\boxed{x_C = 0}$ et $\boxed{y_C = -a}$.

4. Les angles θ_1 et θ_2 étant quelconques, on peut en déduire que tous les rayons issus de A semblent venir de C après réflexion. C est donc l'image de A par le miroir.
Ce n'est pas une approximation mais un résultat exact : il y a stigmatisme rigoureux du miroir.

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique.

5.



$\overline{AA_1} = 2x$; $\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = 2x - 2(d+x) = -2d$;

$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} = -2d + 2(2d+x) = 2d + 2x$;

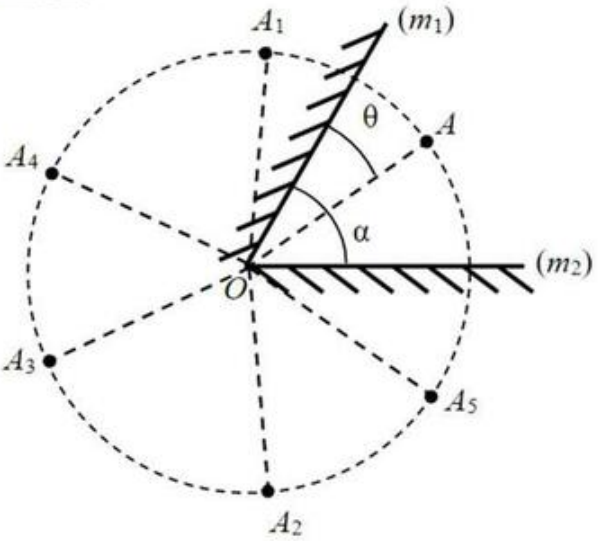
$\overline{AA_4} = \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} = 2d + 2x - 2(3d+x) = -4d$.

6. En continuant la suite, et par extrapolation, on obtient :

– si n est pair, $\overline{AA_n} = -nd$;

– si n est impair, $\overline{AA_n} = (n-1)d + 2x$.

On peut donc (en théorie) observer une infinité d'images.

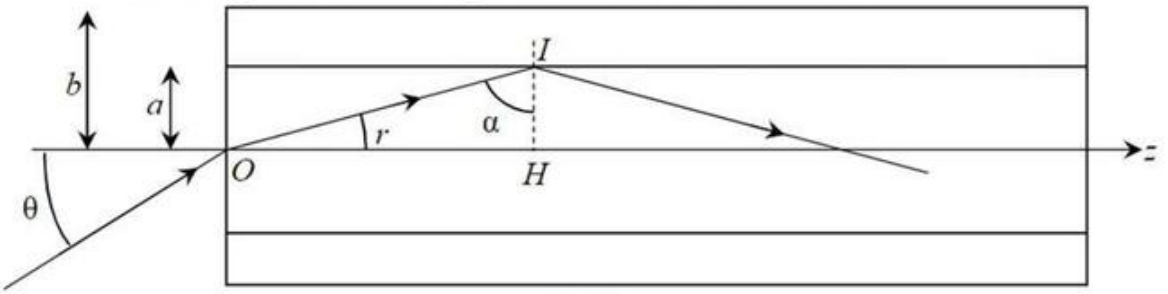


7. Les images sont toutes situées sur un cercle de centre O et de rayon OA.
Voir schéma.

8. On constate que A_6 est confondue avec A.
On pourra donc observer six images distinctes.

Exercice 1.15

1. Cette résolution nécessite de bien identifier ce qui se passe en chaque point utile. Pour que le rayon se propage dans le cœur de la fibre, il doit y avoir tout d'abord une réfraction en O (le rayon entrant dans le cœur) puis une réflexion totale en I et en tous les points analogues successifs : ainsi le rayon suivra une ligne brisée sans sortir du cœur.



Donc $\sin\theta = n_c \sin r$ (1) et $\alpha > \alpha_{lim} = \arcsin\left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)$ ou $\sin\alpha > \dfrac{n_g}{n_c}$ (2). D'autre part, la somme des angles dans le triangle OHI est égale à π : $\alpha + r + \dfrac{\pi}{2} = \pi$ donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - r$ (3).

D'après (3), $\sin\alpha = \cos r$ et (2) peut donc s'écrire $\cos r > \dfrac{n_g}{n_c}$ ou $1 - \sin^2 r > \left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)^2$.

On utilise alors (1) et on obtient $1 - \dfrac{\sin^2\theta}{n_c^2} > \left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)^2$, d'où $\boxed{\theta < \arcsin\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right) = \theta_a}$.

Si l'angle θ vérifie cette condition, le rayon restera dans la fibre et sera guidé par elle.

On a donc trouvé $\boxed{o_n = \sin\theta_a = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}}$. AN $\boxed{o_n = 0{,}51}$.

⇨ *Méthodes 1.1, 1.2*

2. La durée de parcours d'une distance d, à la célérité v, est $\tau = \dfrac{d}{v}$. Or $v = \dfrac{c}{n_c}$, et pour le rayon dessiné, $d = \dfrac{L}{\cos r}$, donc $\tau = \dfrac{L n_c}{c \cos r}$.

⇨ *Méthode 1.3*

Le rayon le plus rapide est celui qui parcourt le trajet le plus court, ce qui correspond à $\theta = 0$ donc $r = 0$ et $\cos r = 1$. Par conséquent $\tau_{min} = \dfrac{L n_c}{c}$.

Le rayon le plus lent correspond à $\theta = \theta_a$ et à l'angle $\alpha = \alpha_{lim}$ correspondant à la réflexion limite en I, sachant que $\sin \alpha_{lim} = \dfrac{n_g}{n_c} = \cos r_{lim}$. Donc $\tau_{min} = \dfrac{L n_c^2}{c n_g}$.

On en déduit : $\boxed{\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} = \dfrac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}}$.

AN pour une longueur de fibre $L = 1{,}0$ km : $\boxed{\Delta\tau = 320 \text{ ns}}$.

3. Pour que les impulsions lumineuses puissent être bien séparées à la sortie de la fibre, il faut que la durée T entre deux impulsions soit supérieure à $\Delta\tau$, soit $\boxed{f < \dfrac{1}{\Delta\tau} = f_{max}}$.

AN $\boxed{f_{max} = 3{,}1 \text{ MHz}}$.

Chapitre 2

Lentilles minces

UN SCIENTIFIQUE



Connu sous le nom d'Alhazen en Occident, le savant arabe Al-Hassan ibn **Al-Haitham** (965-1039) vivait au Caire. Il consacre ses recherches à l'optique et comprend que la lumière vient à l'œil et non l'inverse ; « sinon nous verrions la nuit » ajoute-t-il.
Ceci lui permet de construire des miroirs sphériques et des lentilles grâce à des propriétés géométriques qu'il met en lumière. Il construit une chambre noire qui lui permet d'observer les éclipses.

Un peu d'histoire

Dans l'Antiquité, Euclide, Héron et Ptolémée se sont intéressés à l'optique en introduisant la notion de rayon lumineux. Le dernier a étudié la réflexion et la réfraction. Le savant arabe Ibn Sahl expose dans son ouvrage *Sur les miroirs ardents et les lentilles* diverses propriétés des rayons lumineux. De nombreuses expériences astucieuses permettent à Al-Haitham d'établir une théorie sérieuse sur le sujet.
À la fin du XVI^{e} siècle, apparaissent en Italie, ou peut-être aux Pays-Bas, les premières lentilles. Ceci permet à Galilée de découvrir en 1610 des satellites de Jupiter à l'aide de l'une des premières lunettes astronomiques. Christiaan Huygens, mais surtout Isaac Newton, apportent des éléments théoriques à la compréhension de la lumière. Grâce à des prismes et des lentilles, le savant anglais établit la composition de la lumière blanche et explique la présence d'arcs-en-ciel.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les propriétés des lentilles convergentes et divergentes
- Les définitions de la distance focale et de la vergence d'une lentille
- Les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton
- La distance minimale pour former l'image d'un objet réel sur un capteur
- Le modèle de l'œil et les ordres de grandeur de sa limite de résolution et de sa plage d'accommodation
- Le modèle de l'appareil photographique

Ce qu'il faut savoir faire

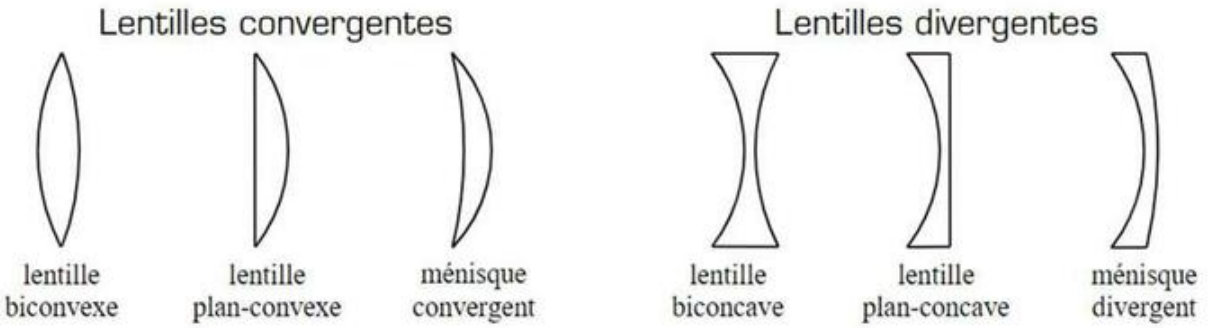
- Construire des rayons lumineux traversant une lentille
- Faire la construction géométrique d'une image, et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton
- Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné de l'appareil photographique

■■ Résumé de cours

■ Propriétés d'une lentille

❑ Définition et classification

Une lentille est système optique centré constitué d'un milieu transparent homogène et isotrope, délimité par deux dioptres sphériques (ou un dioptre plan et un dioptre sphérique).
Les lentilles à bords minces sont **convergentes** ; celles à bords épais sont **divergentes**.
On se limitera aux lentilles minces (dont l'épaisseur est négligeable) utilisées dans les conditions de Gauss.



❑ Caractéristiques d'une lentille mince

Une lentille mince possède :
- un centre optique O et un axe optique passant par O ;
- un foyer objet F sur l'axe optique, et un foyer image F' symétrique de F par rapport à O.

On note $f = \overline{OF}$ la **distance focale objet** et $f' = \overline{OF'}$ la **distance focale image** (appelée aussi simplement focale).

La **vergence** d'une lentille est $\boxed{V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}}$ et s'exprime en m^{-1} ou dioptries (δ).

V et f' sont positives pour une lentille convergente, négatives pour une lentille divergente.

❑ Schématisation



Par convention, la lumière se propage de la gauche vers la droite sur les schémas.

⇨ Méthode 2.1. Construction d'un rayon particulier
⇨ Méthode 2.2. Construction d'un rayon quelconque

■ Image donnée par une lentille

❑ Construction graphique

On représente un objet par un segment AB, orthogonal à l'axe, avec A sur l'axe et B au-dessus. On peut déterminer graphiquement les positions des images B' puis A' en traçant au moins deux rayons issus de B. Inversement, on peut aussi déterminer l'objet AB à partir de l'image $A'B'$.

⇨ **Méthode 2.3. Construction graphique d'une image ou d'un objet**

❑ Formules de conjugaison et de grandissement

L'image peut également être déterminée à partir de l'objet (ou inversement) par le calcul, à l'aide des formules de conjugaison (qui relient les positions de A et de A') et de grandissement (qui relient les tailles de AB et de $A'B'$).

Formules de Descartes

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}.$$

Formules de Newton

$$\boxed{\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\overline{OF'}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}}.$$

Le **grandissement (transversal)** $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est souvent noté γ.

⇨ **Méthode 2.4. Détermination d'une image ou d'un objet avec les formules**

❑ Formation d'une image sur un écran

Pour former une image réelle sur un écran, à partir d'un objet réel :

- seule une lentille convergente peut convenir ;
- la distance D entre l'objet et l'écran doit vérifier $\boxed{D \geq 4f'}$.

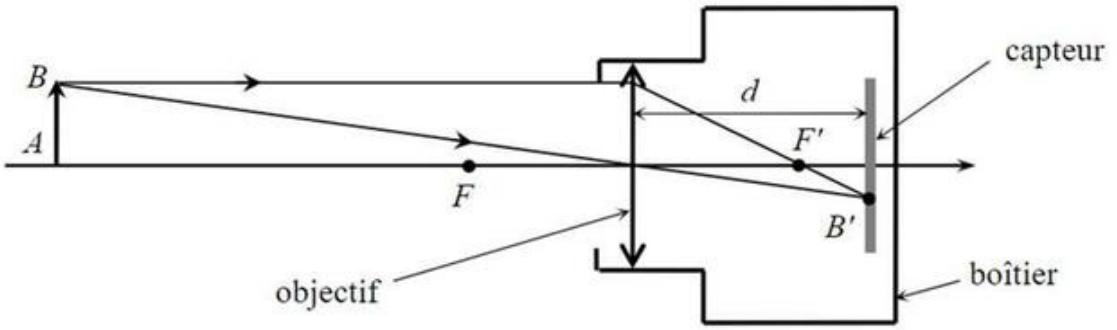
⇨ **Méthode 2.5. Détermination de la distance minimale de projection**

■ L'appareil photographique

❑ Principe

Un appareil photographique comporte principalement :

- un **objectif**, modélisé par une lentille mince convergente de focale f' ;
- un **capteur** situé derrière la lentille, à une distance d réglable (**mise au point**) entre $d_{\min}$ et $d_{\max}$, en fonction de la distance de l'objet à photographier ; la valeur $d_{\min} = f'$ étant utilisée lorsque l'objet à photographier est à l'infini ;
- un **diaphragme** de diamètre réglable, qui permet de contrôler la quantité de lumière qui pénètre dans l'appareil.



❑ Profondeur de champ

Aucune image n'est rigoureusement ponctuelle, mais l'image d'un point est acceptable si sa taille ne dépasse pas la taille d'un pixel du capteur. Si on effectue la mise au point sur un plan à une distance D, les plans situés plus loin ou plus près peuvent donner aussi des images nettes.
La **profondeur de champ** est la distance entre le plan le plus proche et le plan le plus lointain donnant des images nettes. Elle augmente quand la distance de mise au point augmente, quand le diaphragme est moins ouvert, et quand la focale diminue.



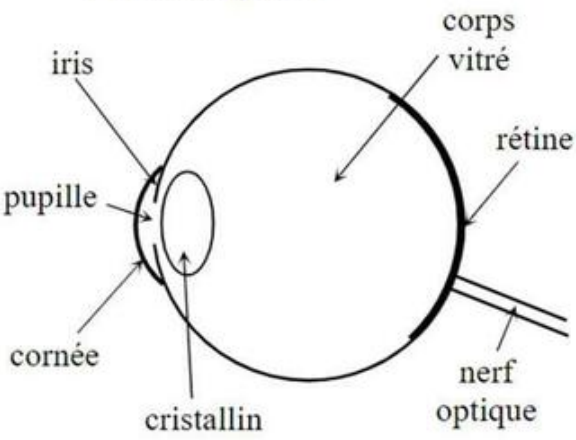
Grande profondeur de champ



Faible profondeur de champ

■ L'œil

❑ Description



L'œil humain, vu en coupe, a la structure ci-contre.
– L'iris (partie colorée), percé de la pupille de diamètre variable, permet de contrôler le flux lumineux pénétrant dans l'œil.
– Le cristallin constitue (avec la cornée) une lentille biconvexe dont la courbure peut être modifiée par un muscle, ce qui fait varier sa focale.
– Le corps vitré est une substance fluide transparente.
– La rétine est tapissée de cellules réceptrices : c'est là que se forme l'image (réelle). Ces cellules communiquent alors les informations au cerveau.

Deux points peuvent être vus distinctement si leur écart angulaire est supérieur à $\alpha_{min} = 3 \cdot 10^{-4}$ rad : leurs images se forment alors sur deux cellules distinctes de la rétine.

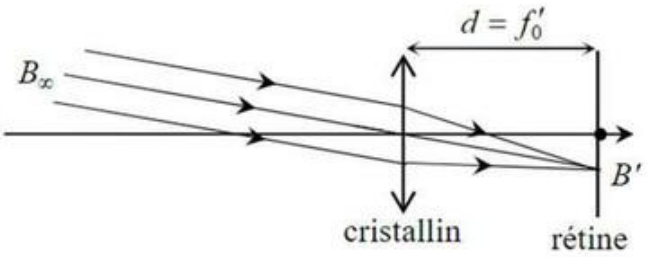
❑ Modélisation

On peut modéliser l'œil par une lentille convergente (cristallin) de distance focale réglable, et un écran (rétine), situés à une distance fixe l'un de l'autre (profondeur de l'œil).

❑ Fonctionnement de l'œil emmétrope

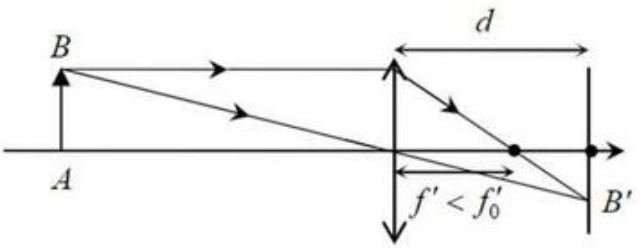
Œil au repos

Un œil **emmétrope** (sans défaut) est réglé, au repos, pour voir des objets à l'infini. L'image se forme sur la rétine et la profondeur de l'œil est alors égale à la focale du cristallin.
Le point que voit un œil au repos est le plus éloigné de l'œil, appelé **punctum remotum** (PR) : il est à l'infini pour un œil emmétrope.



Accommodation

La distance cristallin-rétine est fixe, donc pour voir un objet proche l'œil doit diminuer sa focale, en contractant le muscle associé au cristallin : ce processus est l'**accommodation**.
Lorsque l'œil est en accommodation maximale, le point visible est le plus proche de l'œil, appelé **punctum proximum** (PP).



La distance entre un œil emmétrope et son PP est notée d_m et vaut conventionnellement 0,25 m.
L'intervalle entre le PP et le PR est appelé **plage d'accommodation**.

■ Associations de lentilles

❑ Principe général

Si un système optique est constitué de deux lentilles successives, l'image donnée par la première devient un objet pour la deuxième, qui en donne à son tour une image. Ceci peut être schématisé de la manière suivante :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

Le grandissement global est alors $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$ soit $\boxed{\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2}$.

Ce fonctionnement se généralise à une association de trois lentilles ou plus.

❑ Théorème des vergences pour des lentilles accolées

Dans le cas où on associe deux lentilles de vergences V_1 et V_2 en les accolant, c'est-à-dire sans laisser d'espace entre elles, on obtient un système équivalent à une seule lentille de vergence V telle que $\boxed{V = V_1 + V_2}$.

⇨ **Méthode 4.6. Détermination de l'image donnée par une association**

❑ Constitution et réglage d'un instrument d'optique

Les instruments d'optique dans lesquels l'œil observe directement sont constitués :
– d'un **objectif** (du côté de l'objet), que l'on peut modéliser comme une lentille convergente de grande focale, et dont le rôle est de donner de l'objet une image intermédiaire agrandie ;
– d'un **oculaire** (du côté de l'œil), modélisé comme une lentille de courte focale, et qui permet de donner de l'image intermédiaire une image finale virtuelle et si possible à l'infini ;
– parfois d'un **réticule**, plaque transparente munie d'une croix ou de graduations, sur laquelle se forme l'image intermédiaire.
Pour régler l'oculaire, on cherche à voir le réticule net *sans accommoder*.
Pour régler l'objectif, on cherche à observer l'image *et* le réticule *nets simultanément*.

❑ Exemples d'instruments d'optique

Loupe

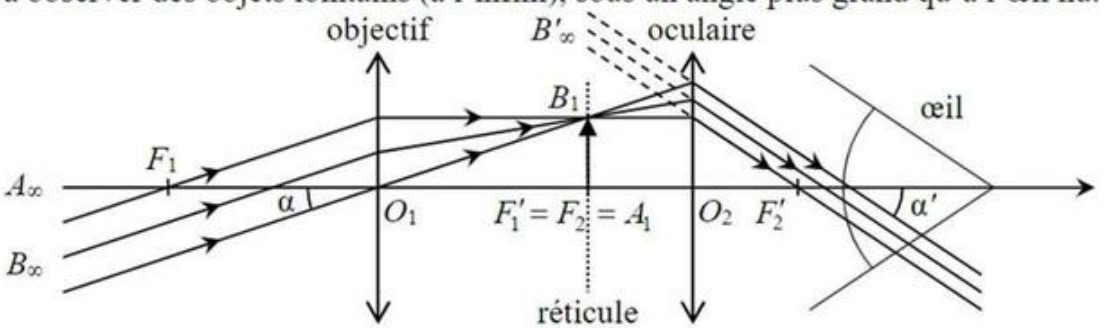
C'est une simple lentille convergente, pour laquelle on place l'objet entre son centre et son foyer objet. Un œil placé de l'autre côté observe donc une image virtuelle, droite et agrandie.
Si l'objet est placé sur le foyer objet de la loupe, l'image finale est à l'infini (cas idéal).

Oculaire

C'est une loupe perfectionnée constituée d'un doublet de lentilles convergentes coaxiales et séparées par une distance d. L'ensemble se comporte comme une unique lentille convergente.
L'intérêt est d'obtenir une loupe plus puissante et une image de meilleure qualité.

Lunette astronomique

Elle sert à observer des objets lointains (à l'infini), sous un angle plus grand qu'à l'œil nu.



L'objectif donne de l'objet AB une image intermédiaire A_1B_1 (renversée), qui doit se former sur le réticule : celui-ci doit donc se trouver en F'_1.
L'oculaire donne ensuite de A_1B_1 une image finale $A'B'$, qui doit être à l'infini : l'image intermédiaire est alors en F_2. Donc F_2 coïncide avec F'_1 et la lunette est **afocale**.

Lunette terrestre (ou lunette de Galilée)

Le principe est le même mais l'oculaire est une lentille divergente. Cela permet d'obtenir une image finale droite, et aussi de diminuer l'encombrement.

Viseur à frontale fixe

C'est une lunette réglée pour observer des objets à courte distance d (notamment des images virtuelles données par un autre instrument), d étant fixée par la distance objectif-réticule.
Sur un banc optique, viser un objet consiste à déplacer le viseur sur le banc jusqu'à observer une image nette sur le réticule. On peut alors en déduire la position de l'objet.

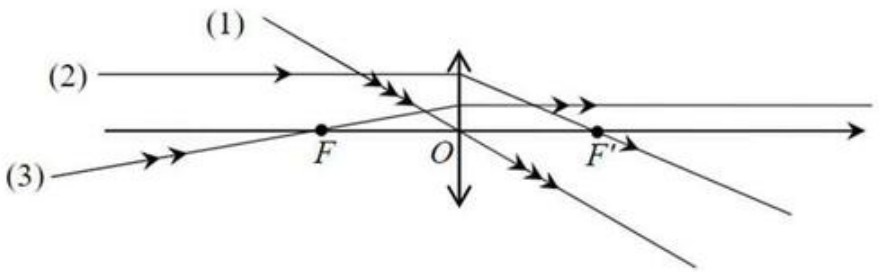
■■ Méthodes

■ Comment construire graphiquement des rayons lumineux ?

❑ Méthode 2.1. Construction d'un rayon particulier

Il existe trois rayons particuliers : les règles suivantes permettent de construire immédiatement le rayon émergent à partir du rayon incident, ou l'inverse.
1) Un rayon incident passant par le centre optique O n'est pas dévié.
2) Si le rayon incident est parallèle à l'axe optique, le support du rayon émergent passe par le foyer image F'.
3) Si le support du rayon incident passe par le foyer objet F, le rayon émergent est parallèle à l'axe.

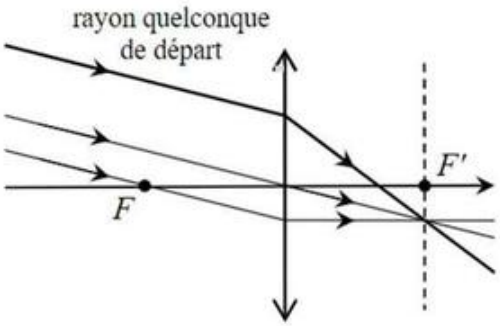
⇨ Exercices 2.1, 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.11

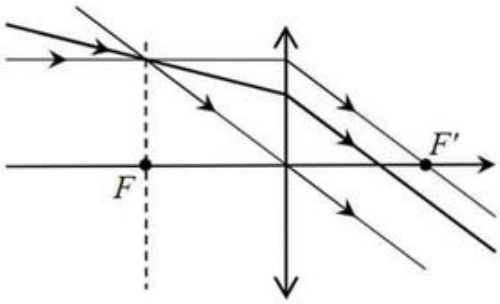


❑ Méthode 2.2. Construction d'un rayon quelconque

Dans le cas d'un rayon quelconque, on peut procéder de deux façons symétriques.
– On choisit l'un des rayons incidents particuliers, parallèle au rayon incident étudié (deux possibilités : celui passant par O ou celui passant par F), et on trace son rayon émergent. Alors ce rayon émergent et celui que l'on cherche se coupent dans le plan focal image.
– On peut aussi choisir l'un des rayons incidents particuliers coupant le rayon incident étudié dans le plan focal objet (deux possibilités également : celui passant par O ou celui parallèle à l'axe), et tracer son rayon émergent. Alors ce rayon émergent et celui que l'on cherche sont parallèles entre eux.

⇨ Exercice 2.1, 2.8, 2.9, 2.18, 2.20





■ Comment déterminer l'image d'un objet par une lentille ?

❑ Méthode 2.3. Construction graphique d'une image ou d'un objet

L'objet AB est orthogonal à l'axe, A étant sur l'axe. On cherche l'image $A'B'$. Celle-ci est également orthogonale à l'axe (par aplanétisme de la lentille) et A' est sur l'axe (puisque celui-ci correspond à un rayon particulier).

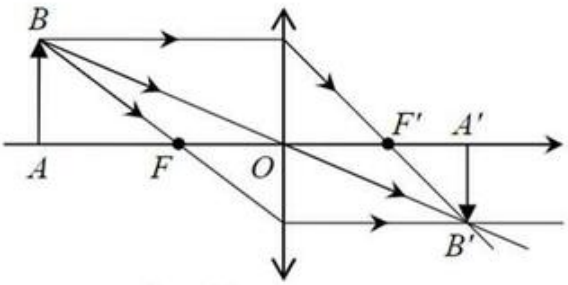
– On choisit au moins deux rayons incidents particuliers dont les supports passent par B, et on trace les rayons émergents correspondants.

– L'intersection des supports de ces rayons émergents donne B'.

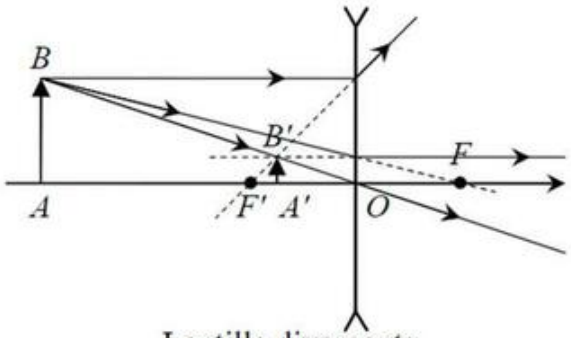
– On projette alors B' orthogonalement sur l'axe pour obtenir A'.

De façon inverse, on peut ainsi obtenir l'objet AB à partir de l'image $A'B'$.

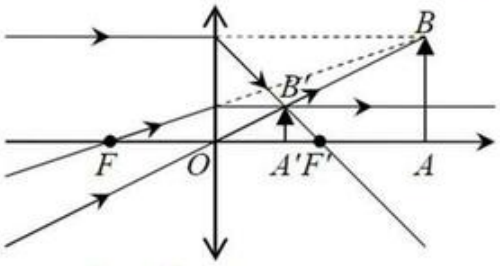
⇨ **Exercices 2.2, 2.3, 2.8, 2.11, 2.13, 4.18, 2.20**



Lentille convergente,
objet réel (avant F), image réelle



Lentille divergente,
objet réel, image virtuelle



Lentille convergente,
objet virtuel, image réelle

❑ Méthode 2.4. Détermination d'une image ou d'un objet avec les formules

On peut déterminer la position et la taille de l'image en utilisant les formules de Newton ou de Descartes :
- une formule de conjugaison donne la position de A' (sur l'axe) ;
- une formule de grandissement donne la taille de $A'B'$ à partir de sa position.

Il faut cependant faire attention :
- à l'origine utilisée pour les positions (centre optique dans les formules de Descartes, foyers dans les formules de Newton) ;
- à bien utiliser des *mesures algébriques* et non des distances.

⇨ Exercices 2.3, 2.4, 2.6, 2.11, 2.14, 2.16, 2.18, 2.20

Exemple : quelle est l'image d'un objet AB haut de 2,0 cm, placé 80 cm avant une lentille mince convergente, de focale $f' = 20$ cm ?

Les données sont, en mesures algébriques : $\overline{OA} = -80$ cm (objet réel), $\overline{OF'} = +20$ cm et $\overline{AB} = +2{,}0$ cm (si toutes les longueurs sont en centimètres, il n'est pas nécessaire de les convertir en mètres).

Formule de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ d'où $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OA} + \overline{OF'}}{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}$ soit $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$. Application numérique : $\boxed{\overline{OA'} = +27 \text{ cm}}$ (image réelle).

La formule de grandissement donne alors la taille de l'image : $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}$.

AN $\boxed{\overline{A'B'} = -0{,}67 \text{ cm}}$ (image renversée et rétrécie).

❑ Méthode 2.5. Détermination de la distance minimale de projection

La distance D entre un objet réel et l'écran où on veut former son image étant fixée, utiliser l'un des formules de conjugaison pour déterminer l'endroit où il faut placer la lentille (convergente). Le calcul montre alors que la condition pour qu'il y ait des solutions est $D \geq 4f'$.

⇨ Exercice 2.6

A et A' sont fixés, tels que $\overline{AA'} = D$, et on cherche où placer la lentille, donc le point O : on peut donc prendre comme inconnue $x = \overline{OA}$.

Formule de Descartes : $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ avec $x' = \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = x + D$, donc $\frac{1}{x+D} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$

d'où l'équation du second degré $x^2 + Dx + Df' = 0$. Discriminant : $\Delta = D^2 - 4Df'$.

Si $\Delta > 0$, soit $\boxed{D > 4f'}$, il y a deux solutions distinctes (soit deux positions possibles de la lentille) : $x = \dfrac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$.

Le cas limite théorique $\Delta = 0$, soit $D = 4f'$, est celui où les deux positions sont confondues.

Si $D < 4f'$, il n'y a aucune solution : il est impossible de former une image réelle d'un objet réel si la distance objet - écran est trop petite (moins de 4 fois la focale).

■ Comment traiter l'association de deux lentilles ?

❑ Méthode 2.6. Détermination de l'image donnée par une association

Considérons l'association coaxiale de deux lentilles L_1 $(O_1,\ f_1')$ et L_2 $(O_2,\ f_2')$.

– Si les lentilles sont séparées, la lentille L_1 donne d'un objet AB une image intermédiaire A_1B_1, qui sert alors d'objet à la lentille L_2 qui en donne une image finale $A'B'$. Le grandissement global est alors $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$ soit $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$.

Le choix d'utiliser les formules de Newton ou celles de Descartes se fera en fonction de la situation particulière et des notations de l'énoncé : si par exemple des positions sont définies par rapport aux foyers, ou encore si F_1' est confondu avec F_2, il faudra plutôt utiliser les formules de Newton.

– Si les lentilles sont *accolées*, alors $O_1 \approx O_2$ et l'association est équivalente à une lentille *unique* de centre $O = O_1 = O_2$ et de focale f' telle que $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f_1'} + \dfrac{1}{f_2'}$. Cela revient à dire que la lentille équivalente a une vergence $V = V_1 + V_2$.

⇨ Exercices 2.8, 2.9, 2.11, 2.16, 2.18, 2.20

– Considérons un système optique *afocal* constitué d'un objectif L_1 convergent, de centre O_1 et de focale $f_1' = 20$ cm, et d'un oculaire divergent L_2 de centre O_2 et de focale f_2', avec $O_1O_2 = 15$ cm. On pointe un objet AB de 2 cm situé à 30 cm devant l'objectif. On cherche à calculer $\overline{O_2A'}$ puis $\overline{A'B'}$, position et taille de son image finale.

Nommons les images successives : $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$

On applique deux fois la formule de Newton : $\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'A_1} = -f_1'^2$ et $\overline{F_2A_1} \cdot \overline{F_2'A'} = -f_2'^2$.

Le système étant afocal, l'image d'un point à l'infini sur l'axe par ce système est à l'infini sur l'axe. Or l'image d'un point à l'infini sur l'axe par L_1 est F_1' et le point dont L_2 donne une image à l'infini sur l'axe est F_2. Il en résulte que $F_1' = F_2$.

On peut alors éliminer $\overline{F_1'A_1} = \overline{F_2A_1}$ entre ces deux formules, d'où $\overline{F_2'A'} = \dfrac{f_2'^2}{f_1'^2}\overline{F_1A}$ et finalement

$\boxed{\overline{O_2A'} = f_2' + \dfrac{f_2'^2}{f_1'^2}\left(f_1' + \overline{O_1A}\right)}$. AN $\boxed{\overline{O_2A'} = -5{,}6 \text{ cm}}$.

Le fait que l'on demande de calculer $\overline{O_2A'}$ pourrait inciter au départ à utiliser plutôt la formule de conjugaison de Descartes, mais le calcul littéral est alors très lourd. Le bon choix est celui de la formule de Newton : les calculs se simplifient immédiatement du fait que $F_1' = F_2$.

On utilise ensuite la formule de grandissement : $\gamma_1 = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{F_1'O}}$ et $\gamma_2 = \dfrac{\overline{F_2O}}{\overline{F_2A_1}}$ donc $\gamma = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{F_1'O}} \cdot \dfrac{\overline{F_2O}}{\overline{F_2A_1}}$

avec $F_1' = F_2$, soit $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{F_2O}}{\overline{F_1'O}} = -\dfrac{f_2'}{f_1'} = 0{,}25}$ (qui se trouve être le même pour toute position de l'objet). On obtient donc $\boxed{\overline{A'B'} = 0{,}5 \text{ cm}}$.

– Supposons maintenant qu'on accole une lentille mince convergente de focale $f_1' = 50$ cm (soit $V_1 = +2{,}0\ \delta$) et une lentille mince divergente de focale $f_2' = -25$ cm (soit $V_2 = -4{,}0\ \delta$).

Gardons les mêmes notations : $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$

On applique deux fois la formule de Descartes : $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{\overline{O_1F_1'}} = V_1$ et $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} = V_2$.

Or $O_1 \approx O_2$, noté O, donc en additionnant membre à membre on obtient : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = V_1 + V_2$.

Cette association est donc équivalente à une lentille unique de vergence $V = V_1 + V_2 = -2{,}0\ \delta$ donc de focale $f' = -50$ cm : elle est divergente.

L'image qu'elle donne d'un objet peut alors être déterminée par une construction ou par le calcul en considérant cette lentille unique, avec les méthodes vues précédemment.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	L'image du foyer principal objet d'une lentille mince est le foyer principal image.	☐	☐
2.	Le foyer principal image F' d'une lentille divergente est situé avant la lentille.	☐	☐
3.	Une lentille divergente a une vergence négative.	☐	☐
4.	L'image d'un objet réel par une lentille divergente est toujours virtuelle.	☐	☐
5.	Un grandissement négatif indique que l'image est plus petite que l'objet.	☐	☐
6.	Deux lentilles minces accolées, de focales f_1' et f_2', sont équivalentes à une seule lentille mince de focale $f' = f_1' + f_2'$.	☐	☐
7.	Le *punctum remotum* d'un œil emmétrope est situé à l'infini.	☐	☐
8.	Une lunette astronomique afocale donne une image à l'infini d'un objet à l'infini.	☐	☐
9.	Un viseur à frontale fixe est équivalent à une lunette afocale.	☐	☐
10.	Pour utiliser une lunette astronomique, on place son œil du côté de l'objectif.	☐	☐

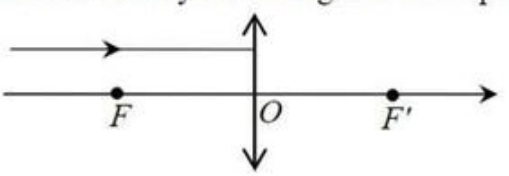
■■ Énoncé des exercices

■ Constructions graphiques élémentaires

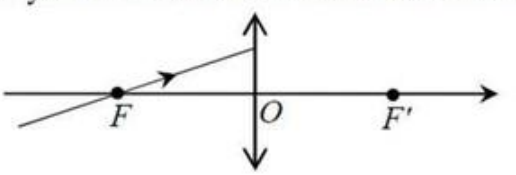
❑ Exercice 2.1. Tracés de rayons

Représenter les rayons émergents correspondants aux rayons incidents dans les six cas suivants.

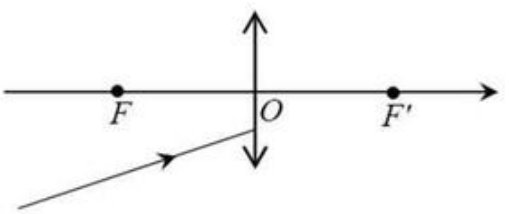
1.



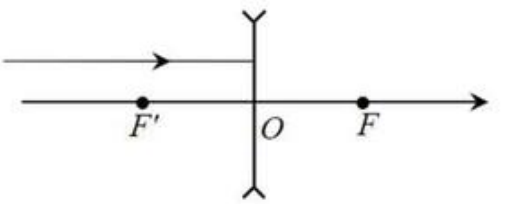
2.



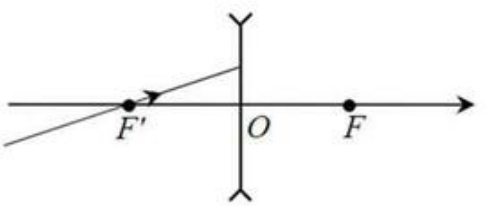
3.



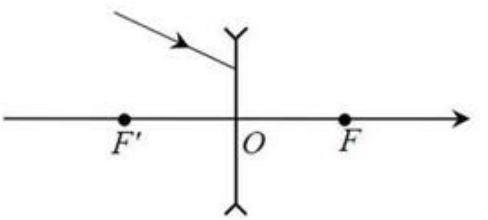
4.



5.



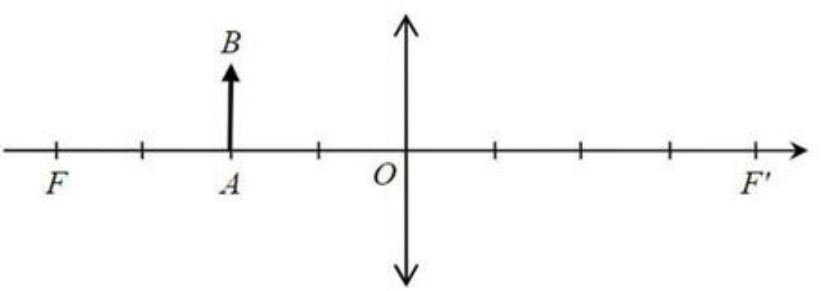
6.



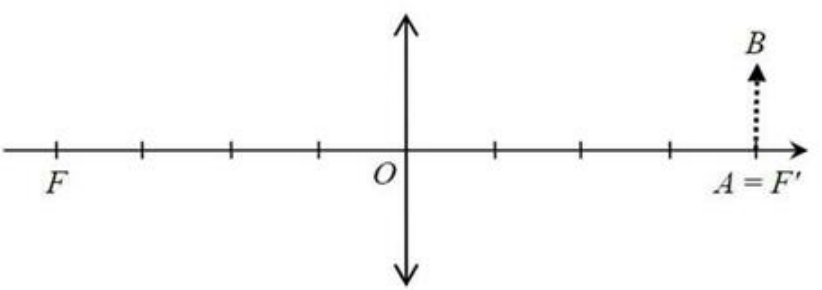
❑ Exercice 2.2. Constructions d'images

Reproduire chacune des deux figures ci-dessous, et construire l'image de l'objet AB. Attention, dans les deux cas la lumière se propage *de gauche à droite*, selon la convention habituelle.

1.



2.



■ Détermination d'une image

❑ Exercice 2.3. Lentille convergente

1. Un objet AB de 0,5 cm est placé à 30 cm devant une lentille convergente de focale $f' = 20$ cm, perpendiculairement à son axe. Déterminer la position, la taille et la nature de l'image en utilisant les formules de Descartes.
2. Retrouver les résultats précédents en utilisant les formules de Newton.
3. Retrouver ces résultats par une construction graphique.
4. Quelle image cette lentille donnerait-elle d'un objet virtuel de même taille placé 30 cm après son centre ? Vérifier graphiquement.

❑ Exercice 2.4. Lentille divergente*

Étudier, à partir des formules de conjugaison et de grandissement de Descartes, les différents types d'images (réelle ou virtuelle, droite ou renversée, agrandie ou rétrécie) que peut donner une lentille divergente en fonction de la position de l'objet (envisager un objet réel ou virtuel).

■ Focométrie

Dans cette partie, on utilise un banc optique gradué sur lequel peuvent coulisser des supports, munis d'un repère permettant de déterminer leur position sur le banc. Ces supports peuvent recevoir les différents éléments utilisés en optique au laboratoire : lampe, objet, lentille, miroir, écran…



❑ Exercice 2.5. Vérification expérimentale des formules

On place un objet à la graduation « 0 » du banc (l'objet est constitué par une lettre imprimée sur un papier calque et éclairé par une lampe blanche). On place alors une lentille convergente sur un deuxième support et un écran sur un troisième. Les trois supports étant sur le banc (la lentille entre l'objet et l'écran), on déplace l'écran de façon à observer une image nette.
On note alors la graduation x_1 de la lentille et celle x_2 de l'écran et on reporte dans un tableau les différentes valeurs obtenues (en cm) :

x_1	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	15,0	20,0	25,0	30,0	40,0	50,0
x_2	79,2	51,1	41,0	37,3	33,0	32,1	33,2	36,9	41,1	50,3	59,8

1. On note A la position de l'objet, O celle de la lentille et A' celle de l'écran. Représenter graphiquement $\frac{1}{\overline{OA'}}$ en fonction de $\frac{1}{\overline{OA}}$ et vérifier la formule de conjugaison.
2. Déterminer la vergence de la lentille utilisée.

3. On peut associer un diaphragme à la lentille sur son support. Quel est son effet ? Est-ce judicieux pour ces mesures expérimentales ?

❑ Exercice 2.6. Méthode de Bessel*

On place l'objet sur la graduation « 0 » et on fixe l'écran à une distance $D = 60{,}0$ cm de lui. On déplace ensuite la lentille entre ces deux positions à la recherche d'une image nette sur l'écran.

1. Montrer qu'il existe deux positions de la lentille donnant une image nette, à condition que D soit supérieure à une certaine valeur (à préciser).

2. On note d la distance entre ces deux positions. Montrer qu'on peut exprimer la focale f' de la lentille en fonction de D et d.

3. On a mesuré $d = 41{,}0$ cm . Calculer la focale de la lentille.

❑ Exercice 2.7. Méthode de Silbermann

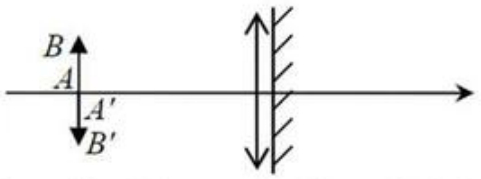
On place l'objet, la lentille et l'écran dans cet ordre sur le banc de façon à observer sur l'écran une image renversée et de même taille que l'objet. On note D la distance entre l'objet et l'écran.

1. Montrer qu'il existe alors une relation simple entre D et la focale f' de la lentille.

2. Vérifier qu'il s'agit d'un cas particulier de la situation de l'exercice précédent.

❑ Exercice 2.8. Méthode d'autocollimation*

On place sur un même support une lentille mince convergente de focale f' et un miroir plan. On déplace alors l'ensemble de façon à former sur le support de l'objet une image renversée et de même taille que l'objet.



1. Montrer que, dans ce cas, la distance entre le système {lentille + miroir} et l'objet correspond à la focale de la lentille.

2. Justifier par une représentation graphique modélisant le trajet des rayons lumineux.

❑ Exercice 2.9. Mesure de la focale d'une lentille divergente*

1. Pourquoi les méthodes de Bessel et de Silbermann (exercices 4.6 et 4.7) ne sont-elles pas utilisables pour des lentilles divergentes ?

2. Pour mesurer la focale d'une lentille divergente, on peut utiliser l'additivité des vergences pour des lentilles accolées. On place par exemple sur un même support une lentille convergente de focale $f_1' = 8{,}0$ cm et une lentille divergente de focale inconnue f_2'. L'association de ces deux lentilles donne d'un objet placé à 70 cm du support une image réelle située 25,5 cm après. Déterminer f_2'.

3. On peut aussi utiliser la méthode de Badal. Pour cela on utilise deux lentilles convergentes $L_1(O_1, f_1')$ et $L_2(O_2, f_2')$ séparées par une distance O_1O_2 supérieure à f_2'. On place alors l'objet dans le plan focal objet de L_1 de façon à obtenir une image réelle dans le plan focal image de L_2. On note la position de l'image. On place ensuite la lentille divergente de focale f' inconnue dans le plan focal objet de L_2. L'image définitive $A'B'$ se forme alors au-delà de F_2' : on note δ le déplacement de cette image provoqué par la lentille divergente. Exprimer f' en fonction de f_2' et δ.

■ L'œil et la loupe

❑ Exercice 2.10. Pouvoir séparateur de l'œil

Le pouvoir séparateur d'un œil emmétrope est $\alpha_{min} = 3{,}0 \cdot 10^{-4}$ rad, c'est-à-dire que deux points peuvent être vus distinctement si leur écart angulaire est supérieur à cette valeur.

1. Jusqu'à quelle distance cet œil peut-il distinguer deux traits parallèles séparés de $d = 2{,}0$ mm ?

2. Quelle doit être la taille d'une lettre d'un panneau autoroutier pour être lue à 250 m ? (Faire l'étude avec la lettre E.)

3. Si on assimile l'œil à une lentille convergente associée à un écran (rétine) placé à une distance fixe $L = 20$ mm derrière, quelle est la taille moyenne d'un récepteur de la rétine ?

❑ Exercice 2.11. Loupe et oculaire*

1. Toto utilise une lentille mince convergente de focale $f' = 3{,}0$ cm comme loupe. Son œil, emmétrope (PP à la distance $d_m = 25$ cm), est au foyer image de la lentille. Dans ces conditions, il observe un objet AB de hauteur 5,0 mm, placé au foyer objet.

Déterminer le *grossissement commercial* de cette loupe, défini comme le rapport entre l'angle α' sous lequel on voit l'image à l'infini de l'objet à travers la loupe, et l'angle α sous lequel on verrait ce même objet à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte d_m.

2. Un oculaire est constitué de deux lentilles L_1 et L_2 identiques à la lentille précédente, et séparées par une distance $\overline{O_1O_2} = 2{,}0$ cm.

a) Déterminer les foyers principaux F et F' de ce système.

b) Toto observe l'objet précédent, placé à 0,75 cm devant O_1, son œil étant placé en F'. Déterminer le grossissement commercial de ce système.

■ Projecteurs et appareils photographiques

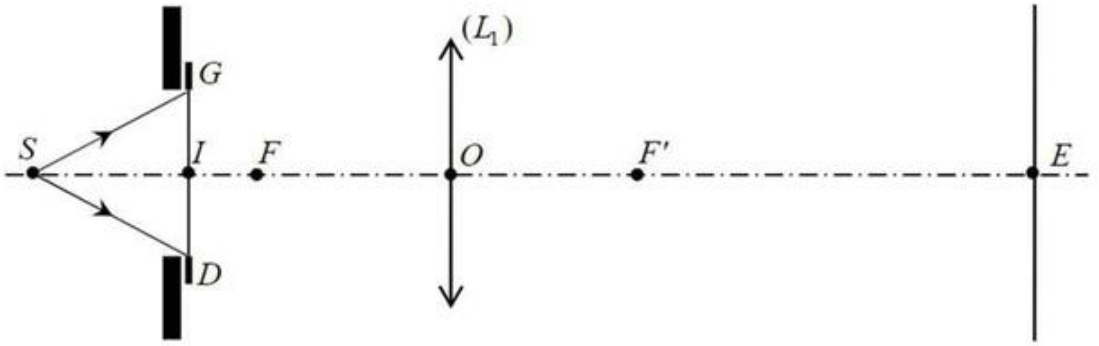
❑ Exercice 2.12. Projection

1. On veut projeter sur un mur l'image d'une diapositive de taille 24 mm × 36 mm à l'aide d'une lentille de focale $f' = 8{,}0$ cm. Le mur étant à 5,0 m derrière la lentille, préciser la position de la diapositive et les dimensions de l'image nette obtenue sur le mur.

2. On souhaite à présent obtenir une image 40 fois plus grande que l'objet. Ce dernier restant fixe, indiquer dans quel sens et de quelle distance il faut déplacer la lentille et l'écran.

❑ Exercice 2.13. Conception d'un projecteur de diapositives**

1. On cherche à concevoir un projecteur de diapositives (24 mm × 36 mm) permettant d'obtenir une image de 1,20 m de large sur un écran situé en E à $L = 3{,}0$ m du centre optique de la lentille (L_1) pour une diapositive horizontale. On note $e = \overline{IF}$ et $m = \overline{F'E}$. On considère la source lumineuse S comme ponctuelle. La diapositive est centrée en I sur l'axe optique.



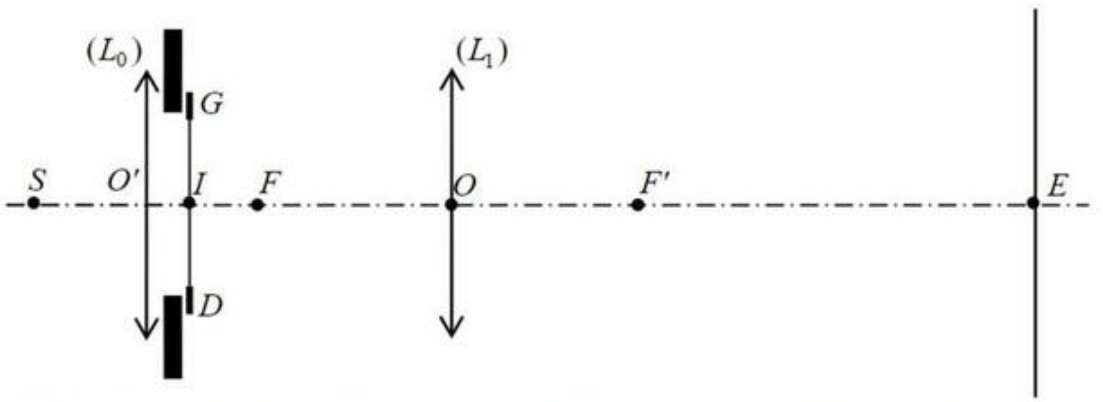
a) Quel est le grandissement γ nécessaire ? Commenter le signe.

b) Déterminer graphiquement les images G' et D' des points G et D représentant respectivement les bords gauche et droit de la diapositive. Dans quel sens faut-il placer la diapositive ?

c) Déterminer les expressions de m, e et f' en fonction du grandissement γ et de L. Faire l'application numérique pour le grandissement souhaité.

d) On souhaite pouvoir obtenir une image nette par déplacement de l'objectif pour des valeurs de L comprises entre 2,0 m et 5,0 m. Déterminer la course $\overline{O_{\min}O_{\max}}$ de l'objectif pour satisfaire à cette condition.

2. Pour réaliser un projecteur de meilleure qualité, on interpose une lentille (L_0) convergente de centre O' entre la source et la diapositive. On la place de sorte que le pinceau lumineux issu de S englobe toute la largeur de la diapositive et se focalise en O, centre optique de la lentille (L_1).



a) Tracer l'enveloppe « utile » du pinceau lumineux entre S et E (définie par les rayons limites) et déterminer graphiquement les foyers de (L_0).

b) La focale de (L_0) est $f'_0 = 1{,}8$ cm et la distance SI est fixée à 5,0 cm. Déterminer la position $O'_{\min}$ de (L_0) correspondant à la position $O_{\min}$ de (L_1).

c) Déterminer la position $O'_{\max}$ de (L_0) correspondant à la position $O_{\max}$ de (L_1). Commenter.

d) Quel est l'intérêt du placement de (L_0) ?

D'après CCINP

❑ Exercice 2.14. Appareil photographique

Madame Michu utilise encore son vieil appareil photographique argentique, avec une pellicule de taille 24 mm × 36 mm .

L'objectif de l'appareil est assimilable à une lentille convergente de focale $f' = 5{,}0$ cm , et la pellicule est située derrière la lentille, à une distance d, réglable, de son centre O. d peut varier entre 50 mm et 55 mm.

1. Madame Michu veut photographier un arbre de 10 m de haut, situé à une distance de 50 m. Quelle sera la hauteur de l'image de l'arbre sur la pellicule ?
2. Jusqu'à quelle distance peut-elle s'approcher pour avoir toujours l'arbre en entier sur la pellicule ?
3. Montrer qu'il existe une distance minimale en deçà de laquelle il n'y aura pas d'image.

❑ Exercice 2.15. Mesure de la profondeur d'un pont*

Résolution de problème

Voici la photographie d'un pont qui, comme l'indique le panneau, est interdit aux véhicules dont la hauteur excède 4,3 m. Cette image a été prise avec un appareil photo numérique équipé d'un capteur de 15 millions de pixels, et dont la taille est de 24 mm × 36 mm. L'objectif de cet appareil photo a une focale de 35 mm.



À partir de cette photo, estimer la profondeur du pont.

❑ Exercice 2.16. Macrophotographie*

Le petit Toto souhaite photographier son grillon Gaspard et obtenir des images de grande taille. Pour cela il doit s'approcher très près de l'insecte, mais le problème est alors d'obtenir une image nette. L'objectif de son appareil photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de focale $f_1' = 75$ mm et de centre O_1. Le capteur numérique (équivalent de la pellicule dans les anciens appareils) est à une distance d de O_1 derrière la lentille : d est une distance réglable entre f_1' et $f_1' + \tau$ (où $\tau = 8{,}0$ mm est le tirage de l'objectif).

1. Le grillon est assimilé à un objet AB de taille 1,5 cm, et Toto approche son objectif jusqu'à 20 cm de l'animal. Peut-il le photographier en ayant une image nette sur le capteur ?

2. Toto fixe devant l'objectif une lentille additionnelle L_2 (appelée *bonnette* en français, *close-up lens* en anglais), convergente, de centre O_2, de vergence $V_2 = +4{,}0\ \delta$; la distance $D = O_2O_1$ est constante et égale à 2,0 cm.



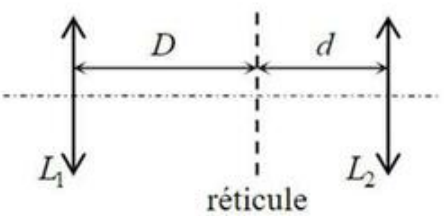
a) Le tirage étant inchangé, déterminer l'ensemble des points A de l'axe qui peuvent, après mise au point, être photographiés (c'est-à-dire donnant une image nette sur le capteur) ; on indiquera leurs positions par rapport à la bonnette (c'est-à-dire $\overline{O_2A}$).

b) Toto photographie son grillon en s'approchant toujours à 20 cm (soit $\overline{O_2A} = -20$ cm). La mise au point étant faite, calculer la taille de l'image $A'B'$ sur le capteur.

■ Instruments d'observation

❑ Exercice 2.17. Viseur à frontale fixe*

Un viseur à frontale fixe est constitué : d'un objectif, lentille mince L_1 convergente de focale $f_1' = 7{,}0$ cm et de centre O_1 ; d'un réticule distant de $D = 14$ cm de l'objectif ; et d'un oculaire, lentille mince L_2 convergente de centre O_2 et de focale $f_2' = 3{,}0$ cm, placé à la distance d du réticule.



1. Un œil « normal » voit sans accommodation à l'infini. En déduire la distance d pour que l'œil puisse voir le réticule sans accommoder.

2. On cherche à voir simultanément l'objet visé et le réticule.

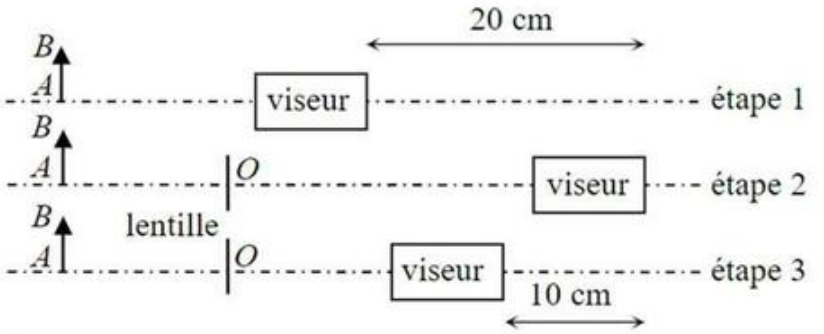
a) Où doit-on placer un objet pour pouvoir le voir à travers le viseur ? On demande l'expression littérale de $\overline{O_1A}$ et l'application numérique.

b) Cette position dépend-elle de la nature de l'œil (« normal » ou myope) ?

c) Justifier le nom de « viseur à frontale fixe».

3. Le viseur est utilisé pour mesurer la distance focale f' d'une lentille inconnue. Tout d'abord, on vise l'objet AB et on note la position du viseur (étape 1).

Ensuite, on place la lentille après l'objet et on vise son centre O à l'aide d'une marque faite sur le verre de la lentille (étape 2) ; pour cela, on doit reculer le viseur de $x_1 = 20$ cm. Enfin, pour la visée de $A'B'$ à travers la lentille, on doit avancer le viseur de $x_2 = 10$ cm (étape 3).



a) Préciser les valeurs de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$.

b) En déduire la valeur de f'.

❑ Exercice 2.18. Lunette astronomique**

On considère une lunette astronomique, comportant un objectif constitué d'une lentille mince convergente de centre O_1 et de focale $f_1' = \overline{O_1F_1'} > 0$ et un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de centre O_2 et de focale $f_2' = \overline{O_2F_2'} > 0$. Ces deux lentilles ont même axe.

1. On souhaite observer la planète Mars à travers la lunette, en formant un système afocal.

a) Quelle est la conséquence sur la position des lentilles ?

b) Faire un schéma en prenant $f_1' = 5f_2'$ et représenter l'image intermédiaire notée $A'B'$.

c) On veut photographier la planète. Où faut-il placer la pellicule ?

2. On note α' le diamètre angulaire de la planète vue à travers la lunette (c'est-à-dire l'angle entre les rayons extrêmes de l'image) et α le diamètre angulaire de la planète vue à l'œil nu.

a) L'image finale est-elle droite ou renversée ?

b) Exprimer le grossissement de la lunette, rapport entre α' et α.

3. On veut augmenter le grossissement et redresser l'image. Pour cela, on intercale entre l'objectif et l'oculaire une lentille mince convergente L_3 de centre O_3 et de focale $f_3' = \overline{O_3F_3'} > 0$, qu'on place de telle sorte que l'image finale à travers l'ensemble soit à l'infini.

a) Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?

b) Faire un schéma. On notera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$ la deuxième.

c) On appelle γ_3 le grandissement de la lentille L_3. Exprimer $\overline{O_3F_1'}$ en fonction de γ_3 et f_3'.

d) Déterminer le nouveau grossissement G' de l'ensemble en fonction de G et γ_3.

❑ Exercice 2.19. Lunette de Galilée**

Une lunette de Galilée comprend un objectif, assimilable à une lentille mince L_1 de centre O_1 et de vergence $V_1 = +5{,}0\ \delta$, et un oculaire, assimilable à une lentille mince L_2 de centre O_2 et de vergence $V_2 = -20\ \delta$.

1. Déterminer la nature des deux lentilles et les valeurs de leurs distances focales images.

2. La lunette est du type « afocal ».

a) Que signifie ce mot ? Quelle est alors nécessairement la distance $d = \overline{O_1O_2}$?

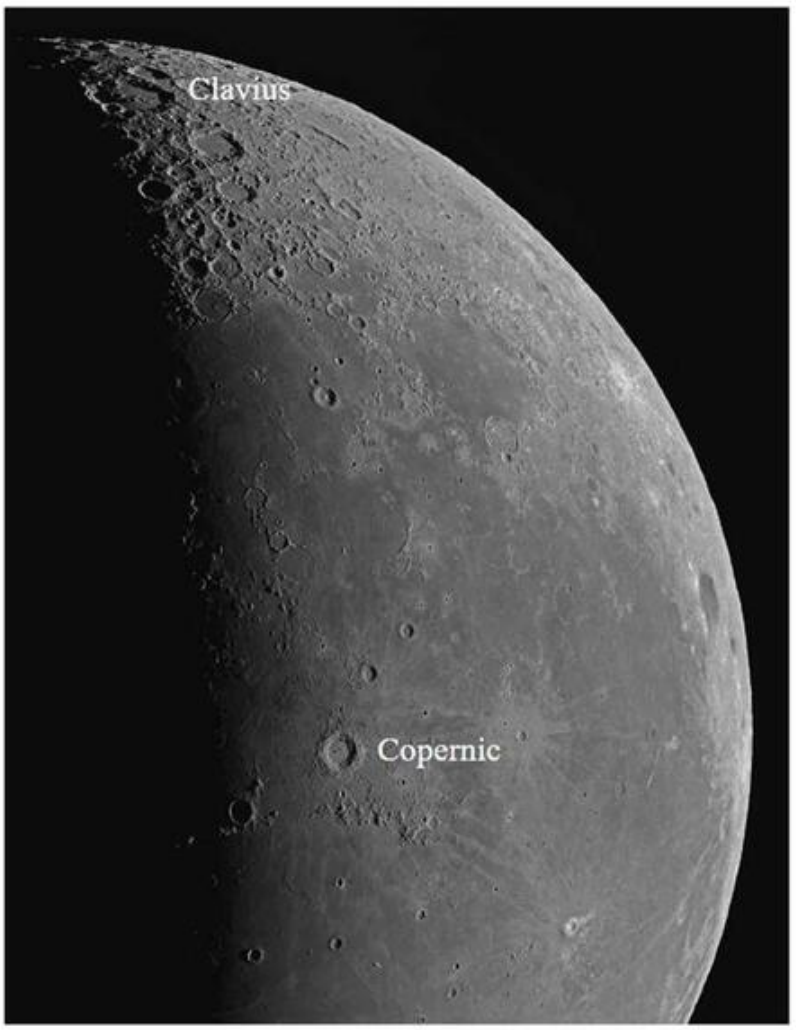
b) Faire un schéma de deux rayons issus d'un objet à l'infini, dans une direction faisant un angle α avec l'axe optique ; on notera α' l'angle entre les rayons finaux et l'axe.

c) Calculer le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ en fonction des distances focales f_1' et f_2'.

3. Un astronome amateur utilise cette lunette, normalement adaptée à la vision d'objets terrestres, pour observer deux cratères lunaires : Copernic (de diamètre 96 km) et Clavius (de diamètre 240 km).

a) L'astronome voit-il ces cratères à l'œil nu ? à l'aide de la lunette ?

Données numériques : distance Terre-Lune $d_{TL} = 3{,}8 \cdot 10^5$ km ; limite de résolution de l'œil $\alpha_{min} = 3 \cdot 10^{-4}$ rad.



b) La planète Vénus occultera Jupiter le 22 novembre 2065. Notre astronome amateur (qui sera certainement confirmé) pourra-t-il observer à l'œil nu ou à l'aide de sa lunette le disque jovien occulté par Vénus ?

Données supplémentaires : diamètre de Vénus $D_V = 12150$ km ; distance Terre-Vénus dans cette configuration $d_{TV} = 4{,}5 \cdot 10^7$ km ; diamètre de Jupiter $D_J = 145800$ km ; distance Terre-Jupiter $d_{TJ} = 6{,}3 \cdot 10^8$ km.

D'après CCINP

❑ Exercice 2.20. Microscope optique**

Un microscope optique porte les indications suivantes : ×40 sur son objectif ; ×10 sur l'oculaire. La notice constructeur précise : intervalle optique $\Delta = 16$ cm. *La signification de ces indications sera précisée dans la suite.* Le microscope sera modélisé par deux lentilles minces convergentes, l'objectif L_1 (de diamètre d = 7,0 mm) et l'oculaire L_2. Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel AB, perpendiculaire à l'axe optique, A étant placé sur l'axe,

légèrement en avant du foyer objet de l'objectif. Cette image est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image F_2' de l'oculaire. L'œil nu voit nettement des objets situés entre la distance $\delta = 25$ cm et l'infini.

1. Faire un schéma du dispositif (sans respecter l'échelle), et tracer soigneusement la marche de deux rayons lumineux issus du point B de l'objet AB, l'un émis parallèlement à l'axe optique, l'autre passant par F_1 (foyer objet de L_1, de centre optique O_1).
2. L'indication sur l'oculaire (×10) est le *grossissement commercial*, c'est-à-dire le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini d'un objet à travers l'oculaire *seul* et de l'angle sous lequel on voit ce même objet à l'œil nu lorsqu'il est à la distance minimale de vision distincte ; on note ce grossissement $G_2 = 10$. Déterminer la focale image f_2' de l'oculaire.
3. L'intervalle optique est la distance $F_1'F_2$. La valeur absolue du *grandissement* de l'objet AB par l'objectif est : $|\gamma_1| = 40$ (c'est l'indication ×40). Calculer f_1', distance focale image de la lentille équivalente à l'objectif. Calculer la distance O_1A permettant de positionner l'objet.
4. Calculer le grossissement commercial G du microscope.
5. On appelle cercle oculaire l'image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire. Déterminer sa position par rapport à F_2' et son diamètre. Quel est l'intérêt de placer l'œil dans le plan du cercle oculaire ? Commenter la valeur trouvée pour son diamètre.

D'après Centrale-Supélec

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 4.4. Pour déterminer si l'image est réelle ou virtuelle, chercher le signe de $\overline{OA'}$ à partir de la formule de conjugaison. Pour l'objet virtuel, il faudra encore distinguer deux cas (position avant ou après F).

Exercice 4.5. Attention à bien utiliser des mesures *algébriques*.

Exercice 4.6. Noter x la distance entre l'objet et la lentille et appliquer la formule de conjugaison en utilisant x.

Exercice 4.10. Faire un schéma pour chaque cas et appliquer une relation trigonométrique.

Exercice 4.11. Pour la question 2.a, repartir de la définition de chaque foyer pour un système optique centré quelconque.

Exercice 4.12. Question 2 : calculer séparément $\overline{OA'}$ et $\overline{OA}$ à partir des deux équations disponibles (formules de grandissement et de conjugaison), en faisant bien attention au signe du grandissement.

Exercice 4.17. Question 3 : la distance entre le viseur et l'objet visé est toujours la même (une fois le réglage effectué).

Exercice 4.20. À la question 5, partir de la définition du cercle oculaire pour lui appliquer les formules de conjugaison et de grandissement ; pour son utilité, réfléchir aux rayons qui le traversent.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	faux

1. L'image du foyer principal objet est un point à l'infini sur l'axe optique.

4. On peut le montrer avec la formule de conjugaison : $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}}$. Or $\overline{OF'} < 0$ puisque la lentille est divergente, et $\overline{OA} < 0$ car l'objet est réel, donc $\overline{OA'} < 0$ et l'image est virtuelle.

5. Un grandissement négatif indique que l'image est *renversée* par rapport à l'objet.

6. Ce sont les *vergences* qui s'ajoutent.

9. Le viseur à frontale fixe est réglé pour observer des objets à *distance finie* (généralement quelques dizaines de centimètres) : il a donc un foyer objet, où on place l'objet à observer.

10. On regarde dans l'*oculaire*… comme son nom l'indique !

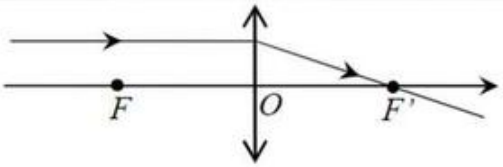
❑ Les erreurs classiques

– Il faut bien connaître les définitions pour éviter des confusions (par exemple, le foyer image F' d'une lentille n'est pas l'image de son foyer objet F).
– Pour les constructions, commencer toujours par placer les points caractéristiques de chaque lentille, en veillant à ne pas confondre les lentilles convergentes et divergentes.
– Il faut toujours construire les rayons en respectant scrupuleusement les méthodes, sans chercher à se fier à une « intuition »…
– La difficulté la plus fréquente concerne l'objet virtuel (c'est-à-dire à droite de la lentille). Ne pas oublier qu'il est l'intersection de supports de rayons *incidents* : ces rayons se trouvent donc *à gauche* de la lentille, mais leurs supports (prolongements) se coupent à droite. Ne pas tracer des rayons allant dans l'autre sens !
– Pour les calculs, ne pas confondre distances et mesures algébriques, et bien faire attention à tous les signes.
– Dans les formules de Newton, le point image A' est repéré par rapport au foyer image F' : mesure algébrique $\overline{F'A'}$ et non $\overline{FA'}$.

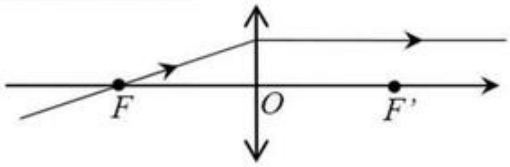
■■ Corrigé des exercices

Exercice 2.1

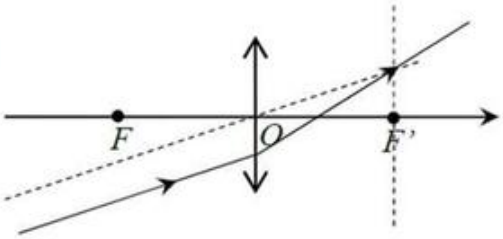
1.



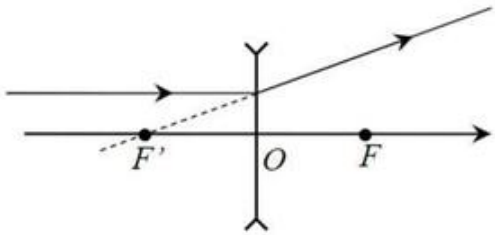
2.



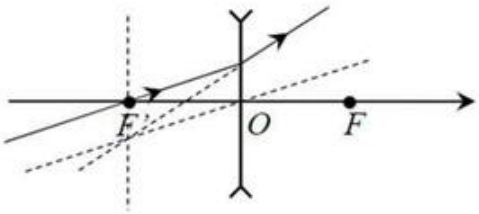
3.



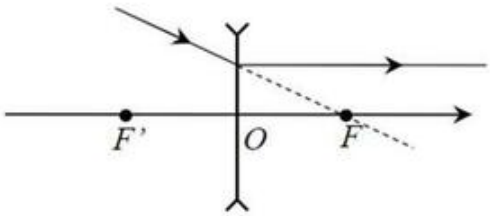
4.



5.



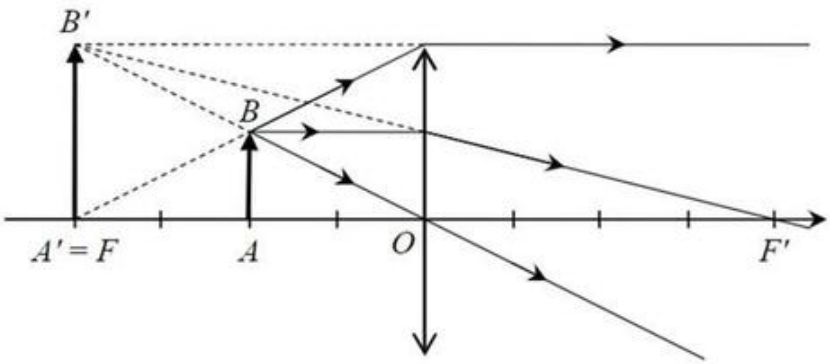
6.



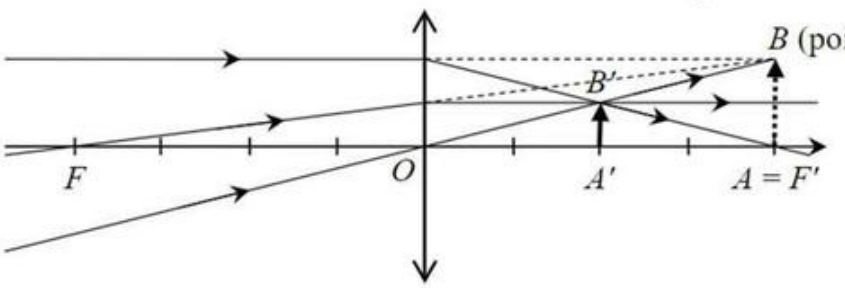
⇨ *Méthodes 2.1 et 2.2*

Exercice 2.2

1.



2.



⇨ *Méthodes 2.1 et 2.3*

Exercice 2.3

1. Les données sont : $\overline{AB} = +0{,}5$ cm, $\overline{OF'} = +20$ cm et $\overline{OA} = -30$ cm. Formule de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ d'où $\boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}}$. AN $\boxed{\overline{OA'} = +60 \text{ cm}}$: l'image est donc réelle.

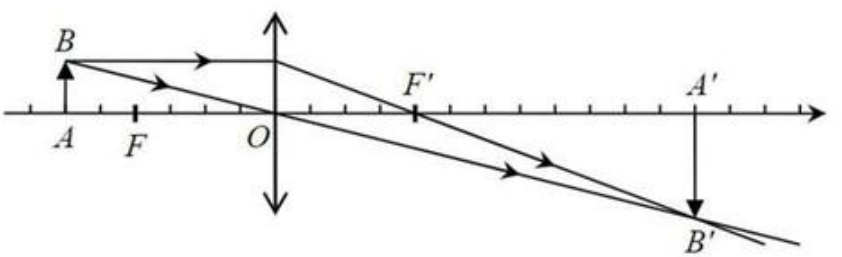
La formule de grandissement donne $\boxed{\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}}$. AN $\boxed{\overline{A'B'} = -1{,}0 \text{ cm}}$.

⇨ *Méthode 2.4*

2. On utilise $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = -10$ cm, et la formule de conjugaison conduit à $\boxed{\overline{F'A'} = -\frac{\overline{OF'}^2}{\overline{FA}}}$.

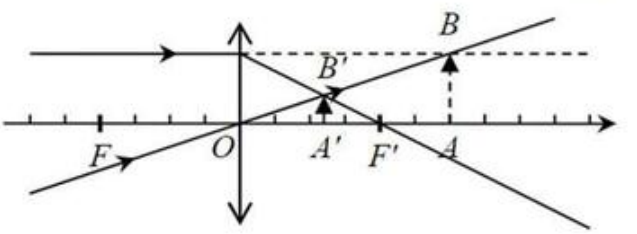
AN $\boxed{\overline{F'A'} = +40 \text{ cm}}$, ce qui est cohérent avec le résultat précédent, puisque $\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = +60$ cm. Ensuite on applique la formule de grandissement : $\boxed{\overline{A'B'} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \cdot \overline{AB}}$. AN $\boxed{\overline{A'B'} = -1{,}0 \text{ cm}}$.

3.



⇨ *Méthode 2.3*

4. $\overline{OA} = +30$ cm donc, avec les formules littérales précédentes, on trouve cette fois $\boxed{\overline{OA'} = +12 \text{ cm}}$ et $\boxed{\overline{A'B'} = +0{,}2 \text{ cm}}$.
L'image est donc réelle, droite et plus petite que l'objet.



Exercice 2.4

Pour une lentille divergente, $\overline{OF'} < 0$.

– Si l'objet est réel, $\overline{OA} < 0$ et d'après la formule de Descartes, $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}}$ donc $\overline{OA'} < 0$ également : l'image est donc virtuelle.

De plus, la formule de grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{OF'} + \overline{OA}}$ montre que celui-ci est positif et inférieur à 1. L'image sera donc virtuelle, droite et plus petite que l'objet.

> *Ne pas oublier que pour une lentille divergente, F' est avant la lentille et F après.*

– Si l'objet est virtuel ($\overline{OA} > 0$), il faut distinguer deux cas.

Si A est entre O et F, alors $0 < \overline{OA} < \overline{OF}$ donc d'après la formule de conjugaison, $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OF}} > 0$ d'où $\overline{OA'} > 0$: l'image est réelle. D'autre part, la formule de grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{OF'} + \overline{OA}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OF} - \overline{OA}}$ montre qu'il est positif et supérieur à 1. L'image est donc réelle, droite et plus grande que l'objet.

Si A est après F, alors $0 < \overline{OF} < \overline{OA}$ donc d'après la formule de conjugaison, $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OF}} < 0$ d'où $\overline{OA'} < 0$: l'image est virtuelle. D'autre part, la formule de grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{OF'} + \overline{OA}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OF} - \overline{OA}}$ montre qu'il est maintenant négatif (image renversée). On peut alors envisager deux cas : si $\overline{OF} < \overline{OA} < 2\overline{OF}$ l'image est plus grande que l'objet, et si $\overline{OA} > 2\overline{OF}$ l'image est plus petite.

On peut rassembler ces résultats dans un tableau :

Position de l'objet AB	Caractéristiques de l'image $A'B'$
$\overline{OA} < 0$	virtuelle, droite et plus petite
$0 < \overline{OA} < \overline{OF}$	réelle, droite et plus grande
$\overline{OF} < \overline{OA} < 2\overline{OF}$	virtuelle, renversée et plus grande
$\overline{OA} > 2\overline{OF}$	virtuelle, renversée et plus petite

Il reste bien sûr le cas particulier (théorique) $\overline{OA} = \overline{OF}$, c'est-à-dire l'objet au foyer principal objet, qui donne une image à l'infini (donc de taille infinie).

Exercice 2.5

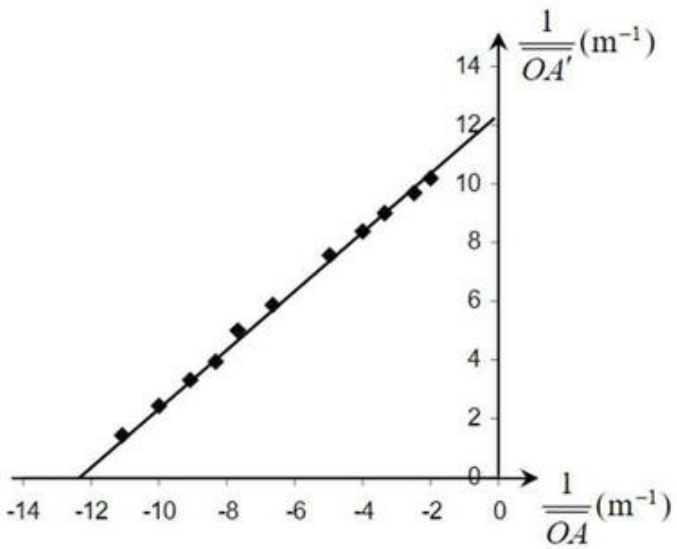
1. $\frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{1}{x_1}$ et $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{x_2 - x_1}$.

On trace le graphe demandé et en utilisant les fonctions du grapheur, on obtient une équation :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = 0{,}97 \cdot \frac{1}{\overline{OA}} + 12{,}26 .$$

Si on admet que $0{,}97 \approx 1$, on retrouve la formule de conjugaison :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \text{constante}}.$$



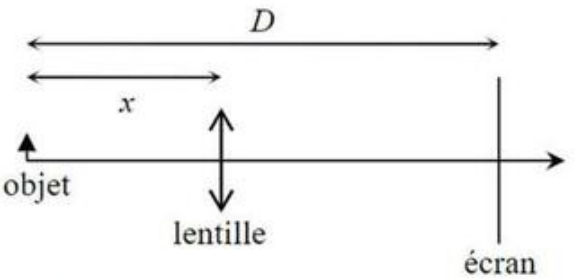
Corrigé

2. La constante correspond à la vergence de la lentille exprimée en dioptries : $V = +12{,}26\,\delta$, soit une focale $\boxed{f' = +8{,}1 \text{ cm}}$.

3. Le diaphragme permet de se placer dans les conditions de Gauss et donc d'améliorer la netteté de l'image, mais dans ce cas précis, cela risque d'étendre la zone des positions de l'écran donnant une image à peu près nette. Ce n'est donc pas conseillé si on veut déterminer précisément la position de l'écran.

Exercice 2.6

1. Si on note x la *distance* entre l'objet et la lentille pour laquelle on a une image nette sur l'écran, la formule de conjugaison s'écrit $\dfrac{1}{D-x} - \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{f'}$ d'où $x^2 - Dx + Df' = 0$. Le discriminant $\Delta = D^2 - 4Df'$ est positif si $\boxed{D > 4f'}$.



Cette condition étant remplie, l'équation admet deux solutions :

$\boxed{x_1 = \dfrac{D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}}$.

2. $d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$ et on en tire $\boxed{f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}}$.

3. AN $\boxed{f' = 8{,}0 \text{ cm}}$.

> *Ne pas oublier de mettre le chiffre 0 après la virgule. Si vous écriviez* 8 cm, *cela voudrait dire que la focale n'est calculée qu'avec un seul chiffre significatif, donc sans les millimètres, ce qui serait d'une précision très médiocre.*

Exercice 2.7

1. L'objet et l'image ayant la même taille, $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1$ et donc $\overline{OA'} = -\overline{OA}$. Objet et image sont donc symétriques par rapport à la lentille. Alors la formule de conjugaison entraîne que $\dfrac{1}{\overline{OA'}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$, soit $\overline{OA'} = -\overline{OA} = 2\overline{OF'}$. On en déduit donc $\boxed{D = \overline{AA'} = 4f'}$.

2. On reconnaît un cas particulier des calculs précédents, pour lequel $\boxed{d = 0}$ (c'est-à-dire que l'équation du second degré $x^2 - Dx + Df' = 0$ a une racine double).

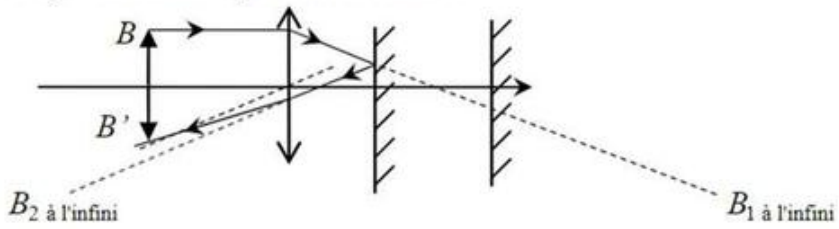
Exercice 2.8

1. On peut résumer le problème de la façon suivante : $AB \xrightarrow{L} A_1B_1 \xrightarrow{M} A_2B_2 \xrightarrow{L} A'B'$.

La lentille donne de AB une image A_1B_1, servant d'objet pour le miroir qui en donne une image A_2B_2 ; enfin, la lentille donne de A_2B_2 l'image finale $A'B'$.

Si la distance entre l'objet et le système est égale à f', alors A_1B_1 et A_2B_2 sont à l'infini et symétriques par rapport au plan du miroir, et $A'B'$ est alors dans le plan focal de la lentille.

2. On construit le trajet de deux rayons issus de B :



⇨ *Méthodes 2.2 et 2.3*

La position du miroir n'a pas d'influence sur le résultat.

Exercice 2.9

1. Les méthodes précédentes utilisent toutes un objet virtuel et son image réelle sur un écran. Or une lentille divergente donne d'un objet réel une image virtuelle non observable sur un écran.

2. On applique la formule de conjugaison au système des deux lentilles, pour trouver sa focale : $\frac{1}{f'}=\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}$, d'où $f'=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OA'}}{\overline{OA}-\overline{OA'}}$. AN $f'=40{,}1$ cm. Ensuite, on utilise l'additivité des vergences : $\frac{1}{f'}=\frac{1}{f_1'}+\frac{1}{f_2'}$ d'où $\boxed{f_2'=\frac{f_1'f'}{f_1'-f'}}$. AN $\boxed{f_2'=-10{,}0\text{ cm}}$.

⇨ *Méthode 2.5*

3. Avant de placer la lentille divergente, on a la situation suivante :

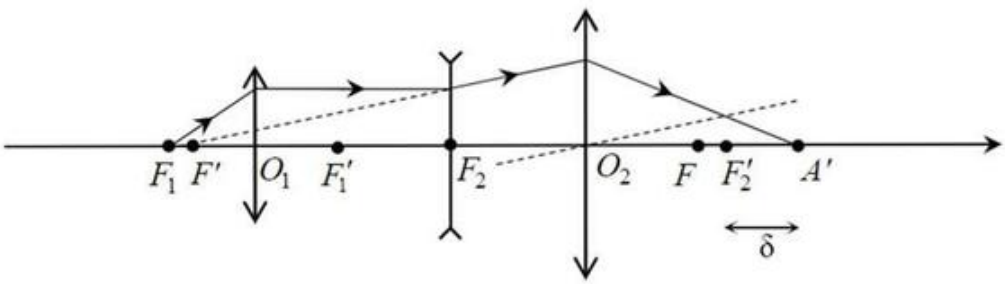
$$A=F_1 \xrightarrow{L_1} \text{image intermédiaire à l'infini} \xrightarrow{L_2} A'=F_2'.$$

Avec la lentille divergente, la situation devient :

$$A=F_1 \xrightarrow{L_1} \text{image intermédiaire à l'infini} \xrightarrow{L} F' \xrightarrow{L_2} A'.$$

A' est donc l'image du foyer image F' de la lentille divergente par L_2.

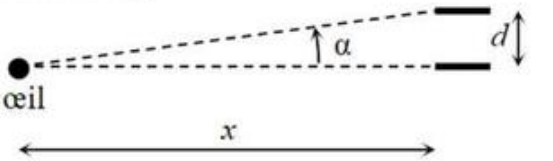
On peut donc appliquer la formule de Newton à ce couple de points : $\overline{F_2'A'}\cdot\overline{F_2F'}=-f_2'^2$, soit $\delta\cdot f'=-f_2'^2$. On en déduit donc facilement $\boxed{f'=-\frac{f_2'^2}{\delta}}$.



⇨ *Méthodes 2.1, 2.2*

Exercice 2.10

1. L'œil pourra distinguer ces lignes s'il les voit sous un angle α supérieur à α_{min}. L'œil doit donc être placé à une distance x telle que :

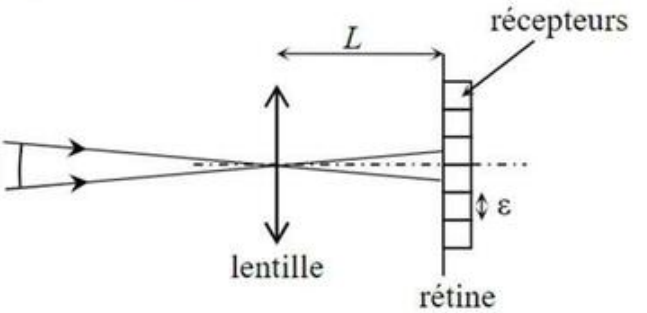


$\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{d}{x} \geq \alpha_{min}$, soit $\boxed{x \leq \dfrac{d}{\alpha_{min}}}$. AN $\boxed{x \leq 6{,}7 \text{ m}}$.

2. On retrouve le même problème que pour la question précédente.
Soit D la distance entre l'œil et le panneau, et $5d$ la hauteur d'une lettre. Celle-ci sera distinguée s'il n'y a pas confusion entre les images des « branches » du E. Il faut donc que $\dfrac{d}{D} \geq \alpha_{min}$, soit $d \geq D \cdot \alpha_{min}$. La taille d'une lettre devra donc être de $\boxed{5d \geq 5D \cdot \alpha_{min}}$. AN $\boxed{5d \geq 45 \text{ cm}}$.



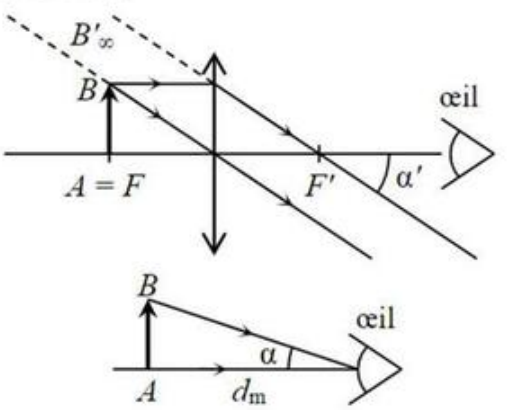
3. Deux points seront vus distinctement si leurs images se forment sur deux récepteurs différents. L'angle α_{min} est donc déterminé par la profondeur L de l'œil et la taille ε d'un récepteur : $\alpha_{min} \approx \tan\alpha_{min} = \dfrac{\varepsilon}{L}$, d'où $\boxed{\varepsilon = L \cdot \alpha_{min}}$. AN $\boxed{\varepsilon = 6\ \mu\text{m}}$.



Exercice 2.11

1. L'objet étant placé au foyer objet de la lentille, l'image finale est à l'infini : elle est alors vue sous un angle $\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{AB}{f'}$.

L'objet serait vu à l'œil nu, au PP, sous l'angle $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{AB}{d_m}$. Donc $\boxed{G = \dfrac{d_m}{f'}}$. AN $\boxed{G = 8{,}3}$.



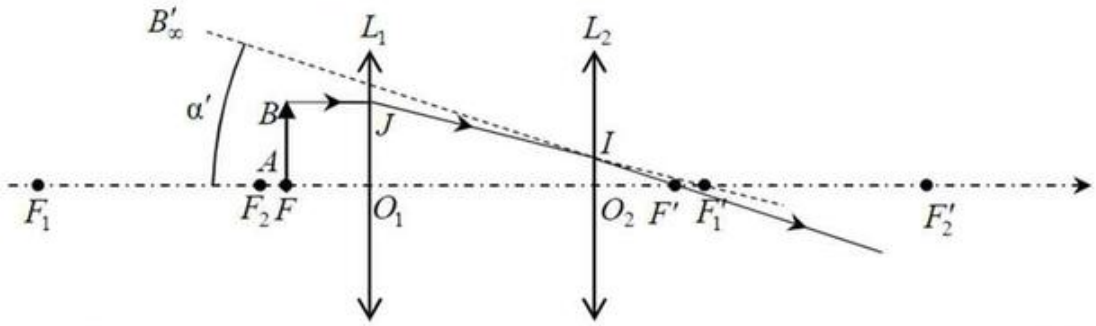
La donnée de la taille de l'objet n'est pas nécessaire pour déterminer le grossissement, qui est le même pour tout objet assez petit.

2. a) Le foyer image du système est l'image par le système d'un objet à l'infini et sur l'axe : $A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} F'$ donc $A_1 = F_1'$ et F' est l'image de F_1' par L_2.

Alors $\dfrac{1}{\overline{O_2F'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \dfrac{1}{f_2'}$ d'où $\overline{O_2F'} = \dfrac{\overline{O_2F_1'} \times f_2'}{\overline{O_2F_1'} + f_2'}$. AN $\boxed{\overline{O_2F'} = 0{,}75 \text{ cm}}$.

Le foyer image du système est donc situé 0,75 cm derrière O_2 et pour des raisons de symétrie, le foyer objet est situé 0,75 cm devant O_1.

b) Schéma de fonctionnement (proportions non respectées) :



$\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{O_2I}{O_2F'}$. Or les triangles $IO_2F'_1$ et $JO_1F'_1$ sont semblables donc $\dfrac{O_2I}{O_2F'_1} = \dfrac{O_1J}{O_1F'_1} = \dfrac{AB}{O_1F'_1}$

d'où $\alpha' \approx \dfrac{AB \cdot O_2F'_1}{O_2F' \cdot O_1F'_1}$. Pour un œil emmétrope, $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{AB}{d_m}$ avec $d_m = 25$ cm donc $\boxed{G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{d_m \cdot O_2F'_1}{O_2F' \cdot O_1F'_1}}$. AN $\boxed{G = 11}$. L'oculaire a donc un meilleur grossissement que la loupe.

Exercice 2.12

1. La formule de conjugaison de Descartes fournit la position de l'objet : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$

d'où $\boxed{\overline{OA} = \dfrac{\overline{OA'} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OF'} - \overline{OA'}}}$. AN $\boxed{\overline{OA} = -8{,}1 \text{ cm}}$: la diapositive doit être positionnée 8,1 cm avant la lentille, c'est-à-dire juste avant le foyer objet (l'image étant pratiquement à l'infini).

Le grandissement est alors $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 1 - \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}}$. AN $\gamma = -61$. Les dimensions de l'image seront donc celles de la diapositive multipliées par 61 : $\boxed{1{,}5 \text{ m} \times 2{,}2 \text{ m}}$.

⇨ *Méthode 2.4*

2. La condition est $\gamma = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -40$ (forcément négatif).

Cela donne d'une part $\overline{F'A'} = -\gamma f'$ d'où $\overline{OA'} = (1-\gamma)f'$. AN $\overline{OA'} = 3{,}28$ m : il faut rapprocher l'écran de la lentille de 1,72 m.

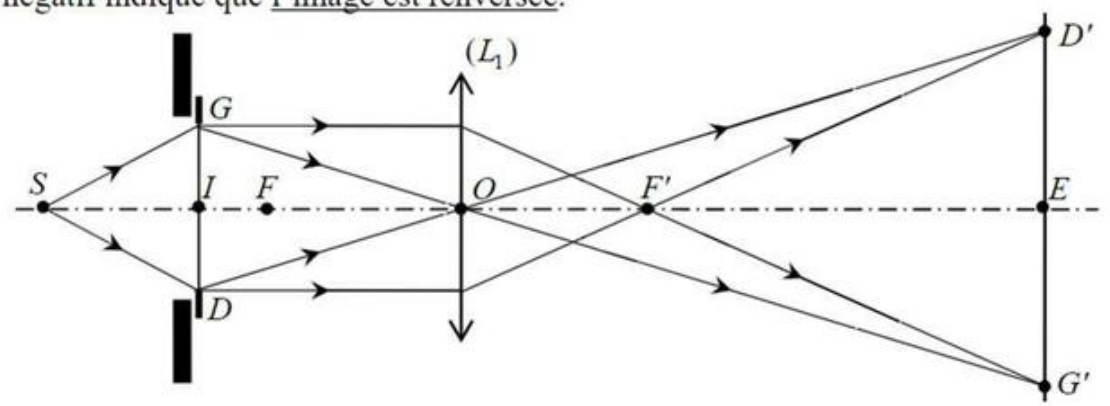
D'autre part, $\overline{FA} = \dfrac{f'}{\gamma}$ d'où $\overline{OA} = f'\left(\dfrac{1}{\gamma} - 1\right)$. AN $\overline{OA} = -8{,}2$ cm : la position de la lentille reste pratiquement la même par rapport à l'objet (le calcul donne un éloignement de moins de 1 mm, qu'on obtient en pratique en recherchant la netteté de l'image sur l'écran déjà positionné).

Exercice 2.13

1. a) En valeur absolue, $|\gamma| = \dfrac{1{,}20}{24 \cdot 10^{-3}} = 50$ si on interprète la « largeur » comme étant la plus petite dimension (24 mm sur la diapositive) ; si on l'interprète plutôt comme la dimension horizontale (36 mm) on obtient $|\gamma| = 33$. De plus $\gamma = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OI}} < 0$ donc $\boxed{\gamma = -50}$ (ou $\gamma = -33$).

Le signe négatif indique que l'image est renversée.

b)



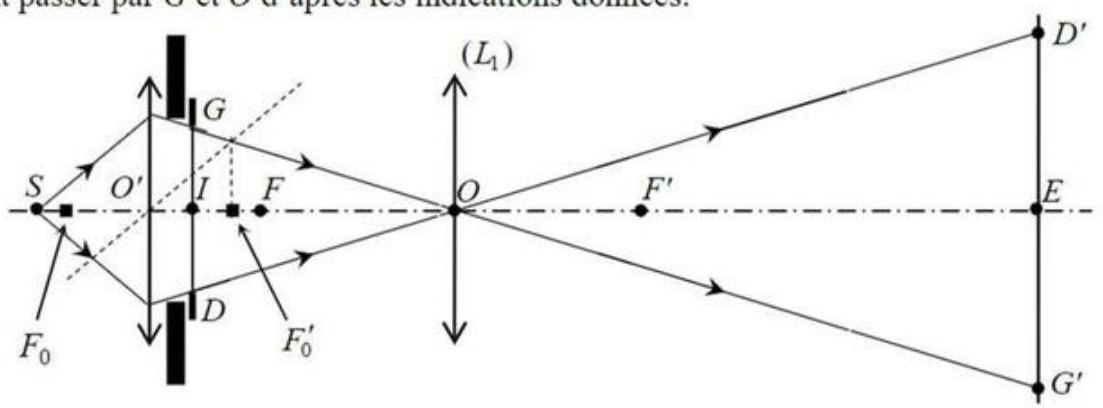
La construction confirme la question précédente : la diapositive doit être montée à l'envers pour obtenir une image à l'endroit.

c) $\gamma = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OI}} = \dfrac{L}{\overline{OI}}$ et $\dfrac{1}{\overline{OE}} - \dfrac{1}{\overline{OI}} = \dfrac{1}{f'}$ d'où $\boxed{f' = \dfrac{L}{1-\gamma}}$. $m = L - f'$ soit $\boxed{m = \dfrac{\gamma L}{\gamma - 1}}$. Enfin $\overline{OI} = -f' - e = \dfrac{L}{\gamma}$ d'où $\boxed{e = \dfrac{L}{\gamma(\gamma-1)}}$. AN $f' = 5{,}9$ cm ; $m = 2{,}9$ m ; $e = 1{,}2$ mm pour $\gamma = -50$.

d) $f' = \dfrac{L}{1-\gamma}$ donc $\gamma = 1 - \dfrac{L}{f'}$. Alors $\overline{OI} = \dfrac{L}{\gamma} = \dfrac{L}{1 - L/f'} = \dfrac{1}{1/L - 1/f'}$ soit $\overline{OI} = \dfrac{f'L}{f' - L}$.

Finalement, $\boxed{\overline{O_{\min}O_{\max}} = \dfrac{f'L_{\max}}{f' - L_{\max}} - \dfrac{f'L_{\min}}{f' - L_{\min}}}$. AN $\boxed{\overline{O_{\min}O_{\max}} = 1{,}1 \text{ mm}}$.

2. a) La taille de l'objet étant inchangée ainsi que les positions de l'écran et de l'objet par rapport à la lentille, G' et D' n'ont pas changé de position. D'autre part, les rayons issus de (L_0) doivent passer par G et O d'après les indications données.



Pour déterminer la position des foyers de (L_0), on trace une droite parallèle au rayon incident et passant par O' ; l'intersection de cette droite avec la droite (GO) est un foyer secondaire image de (L_0) : sa projection sur l'axe donne donc le foyer principale image F_0'. Enfin le foyer objet est symétrique par rapport à O'.

b) $O_{\min}$ est l'image de S par (L_0) donc $\dfrac{1}{\overline{O'_{\min}O_{\min}}} - \dfrac{1}{\overline{O'_{\min}S}} = \dfrac{1}{f'_0}$.

D'autre part, $\overline{SO'_{\min}} + \overline{O'_{\min}O_{\min}} = \overline{SO_{\min}} = SI + \dfrac{f' L_{\min}}{L_{\min} - f'}$, que nous noterons $k = 11{,}06$ cm.

La formule de conjugaison s'écrit donc $\dfrac{k}{\left(k - \overline{SO'_{\min}}\right) \cdot \overline{SO'_{\min}}} = \dfrac{1}{f'_0}$, soit, en posant $x = \overline{SO'_{\min}}$,

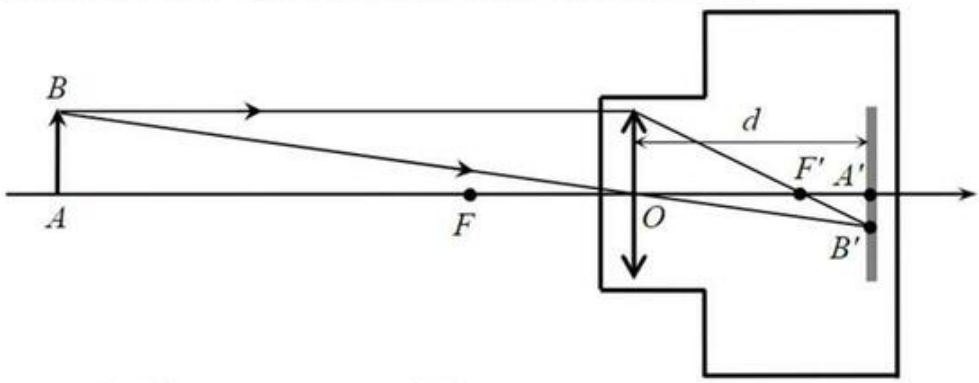
$x^2 - k\,x + k\,f'_0 = 0$. La seule solution acceptable est $\boxed{x = \overline{SO'_{\min}} = 2{,}26 \text{ cm}}$.

c) L'équation est la même ; seule la valeur de k change : $k = 10{,}95$ cm. On obtient donc de la même façon la solution $\boxed{x = \overline{SO'_{\max}} = 2{,}27 \text{ cm}}$.

Ces deux valeurs sont pratiquement identiques : la lentille (L_0) peut être placée à 2,3 cm de S.

d) La lentille (L_0) concentre les rayons provenant de la source au voisinage du centre optique de la lentille (L_1) : les conditions de Gauss sont alors mieux respectées, ce qui permet d'avoir des images plus nettes sur l'écran (meilleur stigmatisme).

Exercice 2.14



1. $\overline{OA} = -50$ m, $\overline{OF'} = +0{,}050$ m et $\overline{AB} = +10$ m. Déterminons d'abord la position de l'image. La formule de Descartes donne $\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}} \approx \overline{OF'} = 5{,}0$ cm car $\left|\overline{OA}\right| \gg \left|\overline{OF'}\right|$.

L'objet est assez éloigné pour pouvoir être considéré à l'infini, d'où le fait que son image soit au foyer image.

Un calcul « exact » semble donner $\overline{OA'} = +5{,}005$ cm, mais il serait absurde d'écrire ce résultat car la précision des données n'est que de deux chiffres significatifs.

Alors d'après la formule de grandissement : $\overline{A'B'} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}$. AN $\boxed{\overline{A'B'} = -1{,}0 \text{ cm}}$: l'image de l'arbre sur la pellicule est renversée et mesure 10 mm (elle tient donc sur la pellicule).

2. Il faut que la taille de l'image de l'arbre sur la pellicule soit inférieure à $L = 36$ mm.

Cela se traduit par $\overline{A'B'} > -L$ ou encore $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} > -\dfrac{L}{\overline{AB}}$, soit $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} < -\dfrac{\overline{AB}}{L}$.

Or, d'après la formule de conjugaison, $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} - 1 = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF'}}$.

La condition devient donc $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF'}} < -\dfrac{\overline{AB}}{L} - 1$ soit $\boxed{\overline{OA} < -\overline{OF'}\left(\dfrac{\overline{AB}}{L} + 1\right)}$. AN $\boxed{\overline{OA} < -14 \text{ m}}$.

Il faut donc que l'arbre soit au moins à 14 m de l'appareil pour être entièrement sur la photo.

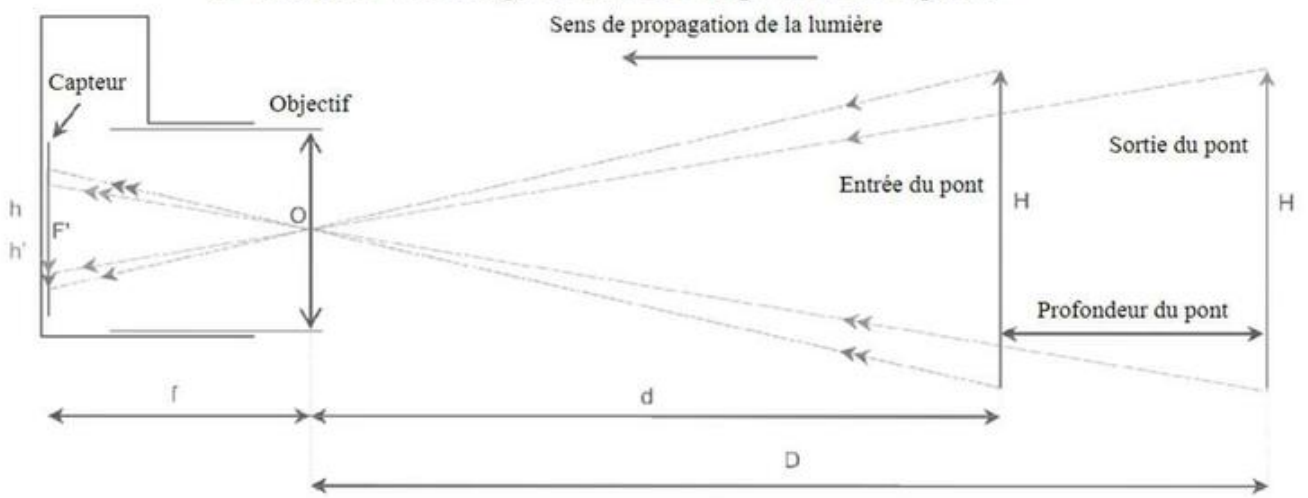
Attention aux signes des mesures algébriques dans la résolution des inégalités !

3. L'image ne peut pas, d'après les caractéristiques de l'appareil, se situer à plus de 55 mm de la lentille, ce qui se traduit par $\overline{OA'} < d_{max} = 55$ mm. On en tire $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OF'}} > \dfrac{1}{d_{max}} - \dfrac{1}{\overline{OF'}}$. Or $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OF'}} = \dfrac{1}{\overline{OA}}$, la condition devient donc $\boxed{\overline{OA} < \dfrac{f' \cdot d_{max}}{f' - d_{max}}}$. AN $\boxed{\overline{OA} < -0{,}55 \text{ m}}$. Il ne sera donc pas possible de photographier un objet situé à moins de 55 cm de l'appareil.

⇨ *Méthode 2.4*

Exercice 2.15

On note :
- H la hauteur du pont (entrée et sortie ont la même hauteur) ;
- d la distance qui sépare l'entrée du pont de l'objectif ;
- D la distance qui sépare la sortie du pont de l'objectif (la profondeur du pont est donc $D - d$) ;
- h la hauteur de l'image de l'entrée du pont sur le capteur ;
- h' la hauteur de l'image de la sortie du pont sur le capteur.



Le grandissement est donné par la relation : $|\gamma| = \dfrac{\text{hauteur de l'image}}{\text{hauteur de l'objet}} = \dfrac{\text{distance lentille-image}}{\text{distance lentille-objet}}$.

La hauteur de l'objet (pont) est connue (H = 4,3 m). La distance lentille–image est connue :

c'est la distance focale f de la lentille pour un objet à grande distance. Il faut donc déterminer les hauteurs h et h' à partir du document.
Pour calculer ces deux hauteurs sur le capteur, il faut multiplier les hauteurs vues sur la photo par le rapport entre la taille du capteur et celle de la photo : on trouve $h = 6{,}0$ mm et $h' = 3{,}3$ mm.

L'application de la formule du grandissement donne : $d = \dfrac{f \times H}{h} = 25$ m et $D = \dfrac{f \times H}{h'} = 46$ m.

On en déduit finalement la profondeur du pont : $\boxed{D - d = 21 \text{ m}}$.

Exercice 2.16

1. On détermine la position de l'image : $\overline{F_1'A'} = -\dfrac{f_1'^2}{\overline{F_1A}} = -\dfrac{f_1'^2}{f_1' + \overline{O_1A}}$. AN $\overline{F_1'A'} = +45$ mm.

Or, pour être sur la pellicule, l'image doit être telle que $0 \leq \overline{F_1'A'} \leq \tau = 8{,}0$ mm, ce qui n'est pas le cas ici. On ne peut donc pas photographier le grillon à cette distance (il est trop proche).

2. a) La lentille L_2 donne de AB une image intermédiaire A_iB_i dont la lentille L_1 donne une image finale $A'B'$: $AB \xrightarrow{L_2} A_iB_i \xrightarrow{L_1} A'B'$. Pour qu'un point A puisse être photographié, il faut que son image A' par le système vérifie $0 \leq \overline{F_1'A'} \leq \tau$.
Les formules de conjugaison donnent : $\overline{F_2'A_i} \cdot \overline{F_2A} = -f_2'^2$ et $\overline{F_1'A'} \cdot \overline{F_1A_i} = -f_1'^2$.

– Soit A_0 le point dont l'image finale A_0' est en F_1' (soit $\overline{F_1'A_0'} = 0$). L'image intermédiaire est donc à l'infini et A_0 coïncide alors avec F_2, soit $\boxed{\overline{O_2A_0} = -f_2' = -\dfrac{1}{V_2} = -25{,}0 \text{ cm}}$.

– Soit A_1 le point dont l'image finale A_1' est telle que $\overline{F_1'A_0'} = \tau$. Alors $\overline{F_1A_i} = -\dfrac{f_1'^2}{\tau}$ et

$\overline{F_2'A_i} = \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A_i} = -f_2' + D - f_1' - \dfrac{f_1'^2}{\tau}$, d'où $\overline{F_2A_i} = -\dfrac{f_2'^2}{D - f_1' - f_2' - \dfrac{f_1'^2}{\tau}}$ et

finalement $\overline{O_2A_i} = -f_2' - \dfrac{f_2'^2}{D - f_1' - f_2' - \dfrac{f_1'^2}{\tau}}$. AN $\boxed{\overline{O_2A_i} = -18{,}8 \text{ cm}}$.

Les points photographiables sont donc situés entre 18,8 cm et 25,0 cm devant la bonnette (donc entre 20,8 cm et 27,0 cm devant l'objectif initial).

⇨ *Méthode 2.6*

> ☛ *Attention à ne pas confondre les origines dans les formules, puis prendre bien garde aux signes et aux unités dans les applications numériques. L'utilisation d'un brouillon et une double vérification des calculs sont recommandées.*

b) Le grillon est donc bien photographiable à la distance de 20 cm devant la bonnette.
Les formules précédentes donnent maintenant pour l'image intermédiaire :

$\overline{F_2'A_i} = \dfrac{-f_2'^2}{\overline{F_2A}} = \dfrac{-f_2'^2}{f_2' + \overline{O_2A}}$. AN $\overline{F_2'A_i} = -125$ cm. Ensuite pour l'image finale :

$\overline{F_1'A'} = -\dfrac{f_1'^2}{\overline{F_1A_i}} = -\dfrac{f_1'^2}{f_1' - D + f_2' + \overline{F_2'A_i}}$. AN $\overline{F_1'A'} = 6{,}0$ mm (qui est bien compris entre 0 et τ).

On utilise alors les formules de grandissement : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_iB_i}} \cdot \dfrac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{F_1'A'}}{\overline{F_1'O_1}} \cdot \dfrac{\overline{F_2'A_i}}{\overline{F_2'O_2}}$ donc

$\overline{A'B'} = \overline{AB}\dfrac{\overline{F_1'A'} \cdot \overline{F_2'A_i}}{f_1' \cdot f_2'}$. AN $\boxed{\overline{A'B'} = -6{,}0 \text{ mm}}$, ce qui est assez important.

En effet la taille d'une pellicule argentique était de 24 mm × 36 mm, mais celle d'un capteur numérique est de l'ordre de 6 mm × 8 mm : le grillon occupe donc une grande partie de l'image sur une photographie numérique.

Exercice 2.17

1. L'œil observe l'image du réticule à l'infini à travers l'oculaire, donc le réticule est dans le plan focal objet de l'oculaire : $\boxed{d = f_2' = 3{,}0 \text{ cm}}$.

2. a) L'objet doit être dans le plan conjugué du réticule par rapport à L_1 :

$\dfrac{1}{D} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'}$ d'où $\boxed{\overline{O_1A} = \dfrac{f_1' \times D}{f_1' - D}}$. AN $\boxed{\overline{O_1A} = -14 \text{ cm}}$.

b) Cette position est indépendante de l'œil qui observe, dont les propriétés ne sont pas intervenues dans le calcul précédent. En revanche, la modification de la position de l'*oculaire* par rapport au réticule permettrait de s'adapter à un œil myope.

c) L'expression « viseur à frontale fixe » signifie que cette lunette vise des objets situés à une distance fixe (14 cm) devant l'objectif.

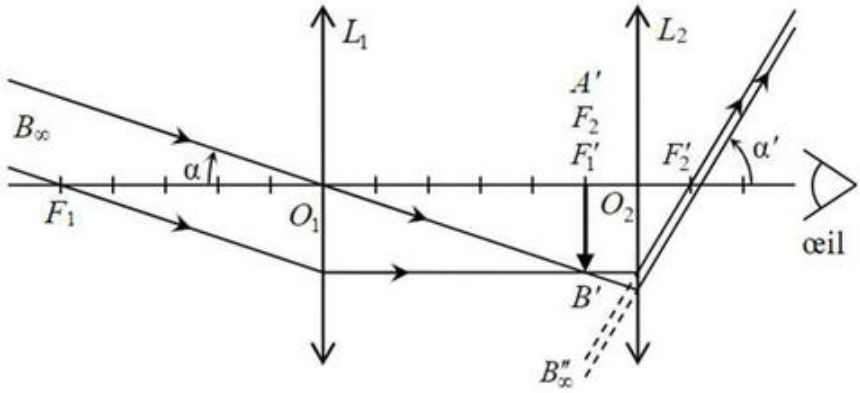
3. a) A est à une distance x_1 devant la lentille, soit $\boxed{\overline{OA} = -x_1 = -20 \text{ cm}}$. A' est à une distance x_2 et également devant la lentille, soit $\boxed{\overline{OA'} = -x_2 = -10 \text{ cm}}$.

b) Formule de Descartes : $\dfrac{1}{-x_2} - \dfrac{1}{-x_1} = \dfrac{1}{f'}$ d'où $\boxed{f' = \dfrac{x_1 x_2}{x_2 - x_1}}$. AN $\boxed{f' = -20 \text{ cm}}$. La lentille est donc divergente.

Exercice 2.18

1. a) Un système afocal n'a pas de foyer : il donne d'un objet à l'infini une image à l'infini. Pour cela, le foyer image F_1' de l'objectif doit être confondu avec le foyer objet F_2 de l'oculaire, selon le schéma : $A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty''$. La distance entre les lentilles est donc $\boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'}$.

b)



⇨ *Méthode 2.3*

Les angles ont été orientés, car on parle du signe du grossissement par la suite.

c) L'image réelle de l'objet (à l'infini) doit se former sur la pellicule, donc on doit placer celle-ci dans le plan focal image d'une lentille convergente : soit l'objectif, soit une autre lentille placée après l'oculaire (si on veut une image agrandie).

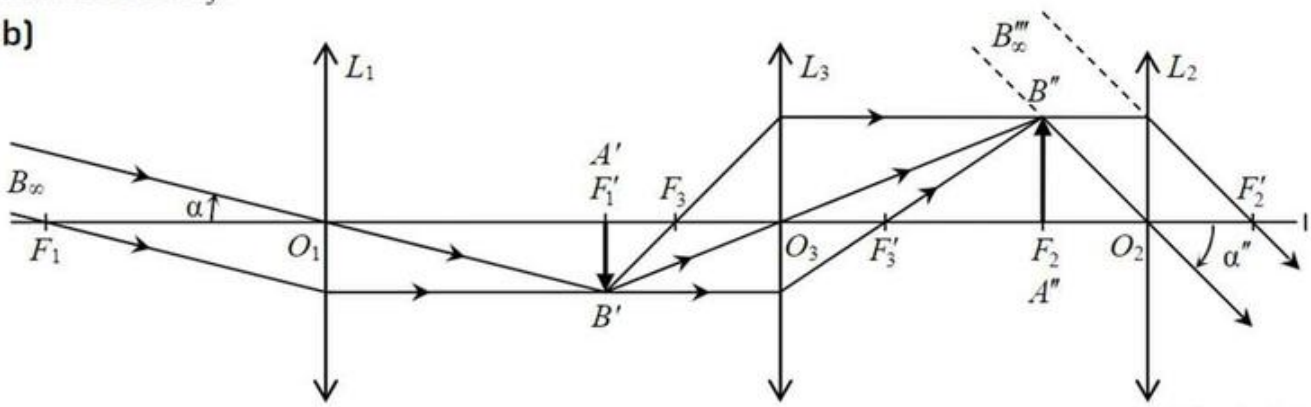
2. a) L'image est renversée, car un rayon venant initialement du haut (depuis B_∞) vient ensuite du bas lorsqu'il arrive à l'œil (et les angles α et α' sont de signes contraires).

b) $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{f_1'}$ et $\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{F_2'O_2}} = -\dfrac{\overline{A'B'}}{f_2'}$ donc $\boxed{G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$.

⇨ *Méthode 2.6*

3. a) On doit avoir cette fois : $A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' \xrightarrow{L_3} A'' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty'''$. Le foyer objet F_2 de l'oculaire doit être le conjugué du foyer image F_1' de l'objectif par la lentille intermédiaire L_3.

b)



⇨ *Méthode 2.3*

c) $\dfrac{1}{\overline{O_3F_2}} - \dfrac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \dfrac{1}{f_3'}$ d'où $\overline{O_3F_2} = \dfrac{\overline{O_3F_1'}\cdot f_3'}{\overline{O_3F_1'} + f_3'}$.

De plus $\gamma_3 = \dfrac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}} = \dfrac{f_3'}{\overline{O_3F_1'} + f_3'}$ donc $\boxed{\overline{O_3F_1'} = f_3'\left(\dfrac{1}{\gamma_3} - 1\right)}$.

d) $\alpha'' \approx \tan\alpha'' = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{O_2F_2}} = -\dfrac{\overline{A''B''}}{f_2'}$ et toujours $\alpha \approx \dfrac{\overline{A'B'}}{f_1'}$, donc $\dfrac{\alpha''}{\alpha} = -\dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}\dfrac{f_1'}{f_2'}$ soit $\boxed{G' = \gamma_3 G}$.

Corrigé

$\gamma_3 < 0$ (objet réel et image réelle) donc cette fois $\boxed{G' > 0}$: l'image finale est droite. De plus, si L_3 est bien placée (assez près de $A'B'$) on obtient $|\gamma_3| > 1$ (image intermédiaire agrandie) donc $\boxed{|G'| > |G|}$: on a donc bien aussi augmenté le grossissement.

Exercice 2.19

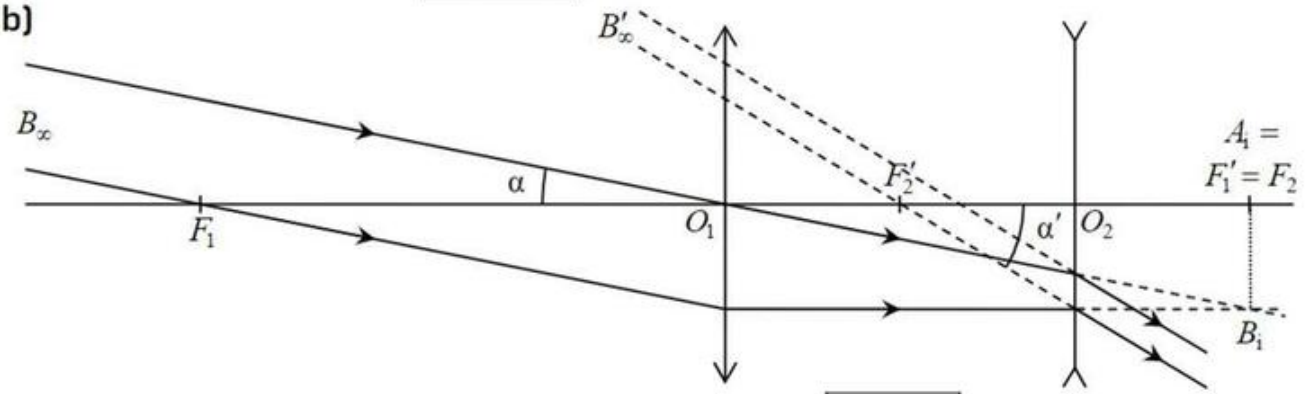
1. $\boxed{f_1' = \dfrac{1}{V_1} = +20 \text{ cm}}$: lentille convergente ; $\boxed{f_2' = \dfrac{1}{V_2} = -5{,}0 \text{ cm}}$: lentille divergente.

2. a) Une lunette afocale donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

On note donc : $A_\infty \xrightarrow{L_1} A_i = F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty''$.

Alors $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2}$ soit $\boxed{d = f_1' + f_2'}$. AN $\boxed{d = 15 \text{ cm}}$.

b)



c) $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ avec $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{A_iB_i}{f_1'}$ et $\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{A_iB_i}{-f_2'}$ donc $\boxed{G = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$. AN $\boxed{G = 4}$.

3. a) Le diamètre apparent de Copernic à l'œil nu est de $\dfrac{96}{3{,}8 \cdot 10^5} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ rad, ce qui est inférieur à $3 \cdot 10^{-4}$ rad : Copernic n'est donc pas discernable à l'œil nu. En revanche, vu à travers la lunette, son diamètre apparent est 4 fois plus grand, soit $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ rad : il est donc visible à la lunette.

Pour Clavius, son diamètre apparent à l'œil nu est de $\dfrac{240}{3{,}8 \cdot 10^5} = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ rad et il est donc discernable à l'œil nu. C'est, bien entendu, également le cas à travers la lunette.

b) Diamètres apparents des deux planètes vues de la Terre :

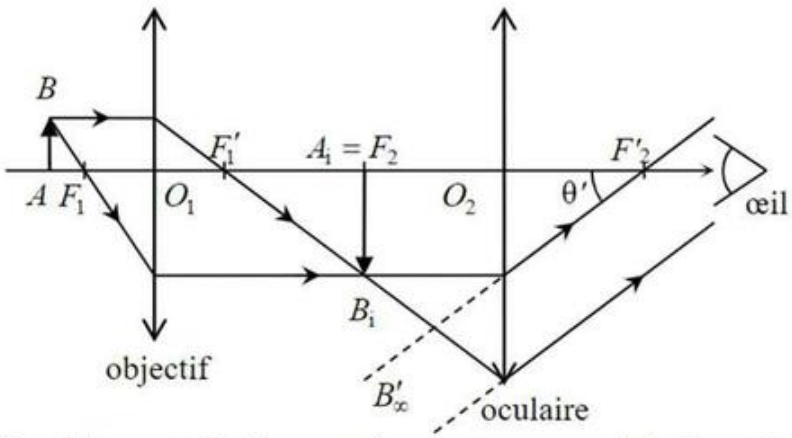
	à l'œil nu	à travers la lunette
Vénus	$\dfrac{12150}{4{,}5 \cdot 10^7} = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ rad	$4 \times 2{,}7 \cdot 10^{-4} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ rad
Jupiter	$\dfrac{145800}{6{,}3 \cdot 10^8} = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ rad	$4 \times 2{,}3 \cdot 10^{-4} = 9{,}3 \cdot 10^{-4}$ rad

À l'œil nu, Vénus et Jupiter sont vues comme des points et l'occultation ne sera pas discernable.

À travers la lunette, elles sont vues comme des disques, mais celui de Vénus apparaît plus grand que celui de Jupiter : au moment de la conjonction, l'astronome verra, à travers la lunette, un disque passant devant un autre disque plus petit.

Exercice 2.20

1.



2. L'objet pour l'oculaire est A_iB_i. Le grossissement commercial G_2 est le rapport entre l'angle θ' indiqué sur la figure ci-dessus, et l'angle θ_i sous lequel serait vu A_iB_i à l'œil nu à la distance δ.

$\theta' \approx \tan\theta' = \dfrac{A_iB_i}{f_2'}$ et $\theta_i \approx \tan\theta_i = \dfrac{A_iB_i}{\delta}$ donc $G_2 = \dfrac{\delta}{f_2'}$ d'où $\boxed{f_2' = \dfrac{\delta}{G_2}}$. AN $\boxed{f_2' = 2{,}5\,\text{cm}}$.

3. Formule de grandissement de Newton : $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{F_1'F_2}}{\overline{F_1'O_1}} = \dfrac{\Delta}{-f_1'}$.

Donc $|\gamma_1| = \dfrac{\Delta}{f_1'}$ d'où $\boxed{f_1' = \dfrac{\Delta}{|\gamma_1|}}$. AN $\boxed{f_1' = 0{,}40\,\text{cm}}$.

Attention à bien lire l'énoncé : $|\gamma_1|$ n'est pas un grossissement, donc le calcul n'est pas le même qu'à la question précédente !

$\gamma_1 = \dfrac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A}} = \dfrac{f_1' + \Delta}{\overline{O_1A}}$ d'où $\overline{O_1A} = \dfrac{f_1' + \Delta}{\gamma_1} (< 0)$ et $\boxed{O_1A = \dfrac{f_1' + \Delta}{G_1} = \dfrac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta}}$. AN $\boxed{O_1A = 0{,}41\,\text{cm}}$.

4. Grossissement global : $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$ avec $\theta \approx \tan\theta = \dfrac{AB}{\delta}$ (objet AB vu à l'œil nu au PP), donc

$G = \dfrac{A_iB_i}{f_2'}\dfrac{\delta}{AB}$ soit $\boxed{G = |\gamma_1| G_2}$. AN $\boxed{G = 400}$.

Le grossissement d'un microscope est le produit du *grossissement* de l'oculaire par le *grandissement* (en valeur absolue) de l'objectif.

5. Notons $O_1 \xrightarrow{L_2} C$. Formule de Newton : $\overline{F_2O_1} \cdot \overline{F_2'C} = -f_2'^2$ avec $\overline{F_2O_1} = -\Delta - f_1'$ donc $\overline{F_2'C} = \dfrac{f_2'^2}{\Delta + f_1'}$. AN $\boxed{\overline{F_2'C} = 3{,}8\ \text{mm}}$. Le rapport des diamètres est la valeur absolue du grandissement : $\dfrac{d_{co}}{d} = \dfrac{F_2'C}{f_2'}$ d'où $\boxed{d_{co} = d\dfrac{f_2'}{\Delta + f_1'}}$. AN $\boxed{d_{co} = 1{,}1\,\text{mm}}$.

Corrigé

Tous les rayons ayant traversé l'objectif passent ensuite à l'intérieur du cercle oculaire (son image) : pour voir une image bien lumineuse et complète (pas de perte des bords) on a donc intérêt à placer l'œil à cet endroit. Le diamètre du cercle oculaire est inférieur à celui de la pupille de l'œil, ce qui permet bien de capter toute la lumière issue du microscope.

Chapitre 3

Lois de l'électrocinétique Régime continu

UN SCIENTIFIQUE



Fils d'un serrurier, **Georg Ohm** est repéré par son professeur de mathématiques qui décèle chez lui des aptitudes exceptionnelles. Il tarde à obtenir un poste de recherche à son niveau. La loi qui porte son nom se trouve dans son ouvrage *Le Circuit galvanique* mais on lui doit aussi des résultats sur la polarisation de la lumière, l'acoustique et les piles électriques. Fort justement, son nom a été choisi pour désigner l'unité de résistance dans le Système international.

Un peu d'histoire

L'observation des phénomènes orageux et des décharges électriques qui s'y produisent passionne Benjamin Franklin (1706-1790). Ceci l'amène à concevoir des expériences pour comprendre les propriétés de l'électricité. Luigi Galvani s'aperçoit que les muscles d'une grenouille réagissent à une décharge électrique. Après lui, Henry Cavendish (1731-1810) et Charles Coulomb établissent les premières lois de l'électrostatique. Le premier définit la notion de potentiel et le second met en évidence l'interaction des corps chargés électriquement en fonction de leurs charges électriques et de la distance qui les sépare. Volta étudie ces phénomènes et conçoit vers 1800 les premières piles. En 1827, Georg Ohm établit que l'intensité d'un courant électrique qui traverse un conducteur est proportionnelle à la tension à ses bornes et introduit la notion de résistance.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les définitions relatives aux circuits et aux grandeurs électriques
- Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds, loi des mailles)
- La puissance et sa signification en fonction de la convention utilisée
- La loi d'Ohm et les lois d'associations des résistances
- Le modèle de Thévenin pour un générateur
- Quelques ordres de grandeur d'intensités et de tensions

Ce qu'il faut savoir faire

- Calculer une intensité ou une tension par application des lois de Kirchhoff et des relations entre intensité et tension
- Déterminer une résistance équivalente
- Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant
- Déterminer un schéma de circuit équivalent plus simple, par associations de résistances et de générateurs
- Expliquer les branchements des appareils de mesure, et les réaliser en TP

■■ Résumé de cours

■ Définitions relatives aux circuits

Le **courant électrique** est un déplacement ordonné de porteurs de charges électriques dans un conducteur. Le sens conventionnel du courant est celui du déplacement des charges positives (s'il y en a), les charges négatives (électrons notamment) allant en sens contraire.

Un **circuit électrique** est un ensemble de conducteurs reliés entre eux, dans lequel peuvent circuler des courants.

Un **dipôle** est un élément relié par deux bornes au reste du circuit.

On appelle **nœud** le point commun d'au moins trois dipôles.

Une **branche** est une portion de circuit qui relie deux nœuds consécutifs.

Une **maille** est un parcours fermé, constitué de branches successives.

Des dipôles sont **en série** lorsqu'ils appartiennent à une même branche.

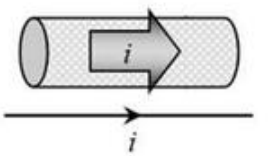
Des dipôles sont **en parallèle** (ou **en dérivation**) s'ils sont reliés aux deux mêmes nœuds.

Le circuit est en **régime continu** si les grandeurs électriques ne varient pas au cours du temps.

■ Intensité du courant électrique

❑ Définition et représentation

L'**intensité** du courant est le débit de charges à travers une section du conducteur. Pour la définir de façon algébrique (ce qui donne l'information sur le sens du courant), on dessine une flèche sur le conducteur (fil), dans un sens choisi *arbitrairement*.



L'intensité du courant électrique est alors par définition : $\boxed{i = \dfrac{\delta q}{\mathrm{d}t}}$ où δq est la quantité de charge traversant la section du conducteur, dans le sens de la flèche, pendant la durée $\mathrm{d}t$. Ainsi, si le courant circule effectivement dans le sens de la flèche, alors l'intensité i est positive ; elle est négative dans l'autre cas.

Dans les unités SI, i s'exprime en ampères (A), δq en coulombs (C) et $\mathrm{d}t$ en secondes (s).

Même si les charges sont discrètes au niveau microscopique, le courant *apparaît comme une fonction continue* à notre échelle, car on considère un très grand nombre de porteurs de charge.

L'intensité reste la même le long d'une branche, donc à travers des dipôles en série.

❑ Ordres de grandeur

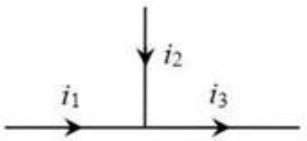
Courant dans un canal synaptique	Valeurs usuelles au laboratoire	Valeurs en électrotechnique	Foudre
1 pA	1 mA à 1 A	10 à 1000 A	1 à 100 kA

❑ Loi des nœuds (première loi de Kirchhoff)

En régime continu, la conservation de la charge implique que la somme des intensités arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités qui en partent :

$$\boxed{\sum_j i_{j,\text{entrante}} = \sum_k i_{k,\text{sortante}}} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\sum_k \varepsilon_k i_k = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si l'intensité i_k est orientée vers le nœud, et -1 sinon.



$i_1 + i_2 = i_3$

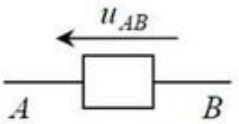
$i_1 + i_2 - i_3 = 0$

■ Tension électrique ou différence de potentiel

❑ Définition et représentation

On montre en électromagnétisme que l'on peut associer à chaque point d'un circuit une grandeur appelée **potentiel électrique** V, qui permet de calculer les échanges d'énergie. L'origine des potentiels est un point du circuit appelé **masse**, qu'on peut choisir arbitrairement.

La **tension** u_{AB}, représentée par une flèche allant de B vers A, est la différence de potentiel entre les points A et B : $\boxed{u_{AB} = V_A - V_B}$.



La tension est donc la même aux bornes de deux ou plusieurs dipôles en parallèle.
Elle est souvent notée simplement u, la flèche indiquant les deux points concernés.
L'unité SI de la tension et du potentiel est le volt (V).

❑ Ordres de grandeur

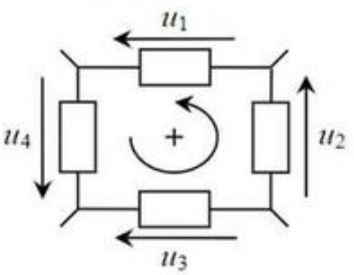
Potentiel d'action dans un neurone	Valeurs usuelles au laboratoire	Ligne à haute tension	Nuages d'orage
0,1 V	0,1 V à 100 V	1 à 100 kV	jusqu'à 100 MV

❑ Loi des mailles (seconde loi de Kirchhoff)

Dans une maille orientée, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k u_k = 0}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ si la tension u_k est orientée dans le sens de parcours de la maille, et -1 sinon.



$u_1 + u_4 - u_3 + u_2 = 0$

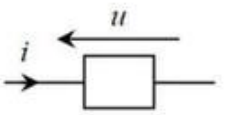
➪ **Méthode 3.1. Application directe des lois de Kirchhoff**

■ Puissance et travail électriques

La **puissance électrique** échangée par un dipôle avec le reste du circuit est : $\boxed{\mathcal{P} = u\,i}$.
L'énergie échangée par le dipôle sous forme de **travail électrique**, pendant une durée Δt, est en régime continu (stationnaire) : $\boxed{W = \mathcal{P} \cdot \Delta t = u \cdot i \cdot \Delta t}$.
L'unité SI de la puissance est le watt (W), celle de l'énergie est le joule (J).

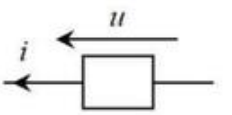
Convention récepteur

Quand les flèches de courant et de tension sont de sens opposés, $\mathcal{P} = u\,i$ est la *puissance reçue* par le dipôle. Si elle est positive, il fonctionne en récepteur (il reçoit effectivement de l'énergie), sinon il se comporte en générateur.



Convention générateur

Quand les flèches de courant et de tension sont de même sens, $\mathcal{P} = u\,i$ est la *puissance fournie* par le dipôle. Si elle est positive, le dipôle fonctionne en générateur (il fournit effectivement de l'énergie), sinon en récepteur.

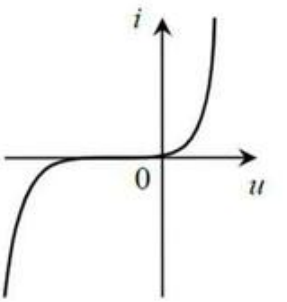


■ Caractérisation d'un dipôle

Un type de dipôle donné est caractérisé par la relation entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse (en convention générateur ou récepteur). Celle-ci est obtenue expérimentalement sous forme de **caractéristiques** : courbes représentant les points de fonctionnement du dipôle, c'est-à-dire les couples (u,i) possibles.

La **caractéristique statique** décrit le régime continu, une **caractéristique dynamique** décrit un régime sinusoïdal de fréquence donnée.

Deux dipôles sont **équivalents** si leurs caractéristiques sont identiques.



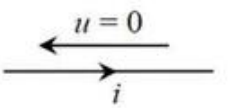
Certains dipôles peuvent être *modélisés* par une relation mathématique simple.

⇨ **Méthode 3.3. Détermination d'un dipôle équivalent**

■ Dipôles élémentaires

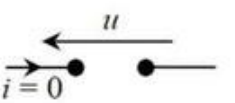
❑ Fil (idéal)

Un fil peut être considéré comme un dipôle, pour lequel : $u = 0, \forall i$.



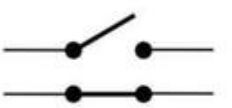
❑ Coupe-circuit (idéal)

Un objet isolant peut être considéré comme un dipôle, pour lequel : $i = 0, \forall u$.



❑ Interrupteur (idéal)

Un interrupteur, lorsqu'il est *ouvert*, est équivalent à un coupe-circuit.
Un interrupteur, lorsqu'il est *fermé*, est équivalent à un fil.



❑ Ampèremètre

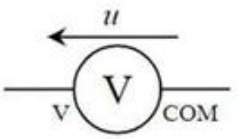
Un ampèremètre indique la valeur de l'intensité i du courant qui le traverse.
En pratique, il s'agira d'un multimètre numérique pour lequel on utilise la borne mA (ou bien A) et une borne notée COM.



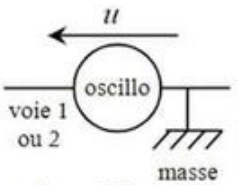
Pour mesurer l'intensité du courant traversant un dipôle, il faut placer l'ampèremètre dans la même branche, donc *en série* avec lui.
Un ampèremètre idéal est équivalent à un fil, donc son ajout ne perturbe pas le circuit.

❑ Voltmètre et oscilloscope

Un voltmètre indique la valeur de la tension u entre ses bornes.
En pratique, il s'agira d'un multimètre numérique pour lequel on utilise la borne V et la borne COM.

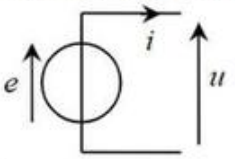


Un oscilloscope visualise l'évolution au cours du temps de la tension à ses bornes. Les deux voies de l'oscilloscope ont une borne commune, reliée à la terre (pour des raisons de sécurité). Les autres appareils branchés sur le secteur (générateur…) étant aussi reliés à la terre, tous ces appareils ont une borne commune, que l'on choisit comme *masse* du circuit.

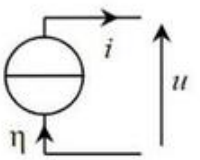


Pour mesurer la tension aux bornes d'un dipôle, il faut placer le voltmètre ou l'oscilloscope entre les deux mêmes points, donc *en parallèle* avec lui.
Un voltmètre idéal est équivalent à un coupe-circuit, donc son ajout ne perturbe pas le circuit.

❑ Source idéale de tension ou de courant



Source de tension idéale : $u = e, \forall i$.
e est la **force électromotrice** (FÉM).

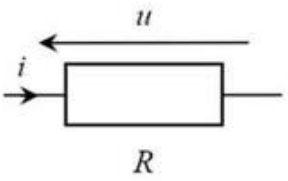


Source de courant idéale : $i = \eta, \forall u$.
η est le **courant électromoteur** (CÉM).

■ Dipôle ohmique et associations

❑ Loi d'Ohm, résistance et conductance







Un dipôle ohmique est un dipôle vérifiant la **loi d'Ohm** :

$\boxed{u = Ri}$ ou $\boxed{i = Gu}$ en convention récepteur ;
$u = -Ri$ ou $i = -Gu$ en convention générateur.

La puissance reçue par une résistance est donc : $\mathcal{P} = Ri^2 = \dfrac{u^2}{R}$. Elle est *dissipée* par effet Joule.

L'unité SI de la **résistance** R est l'ohm (Ω), celle de la **conductance** $G = 1/R$ est le siemens (S).
Valeurs usuelles de résistances utilisées au laboratoire : 100 Ω à 100 kΩ.
Valeurs limites : un fil idéal correspond à la limite $R \to 0$ (soit $G \to \infty$) ;
un coupe-circuit idéal correspond à la limite $R \to \infty$ (soit $G \to 0$).

❑ Nature des dipôles ohmiques

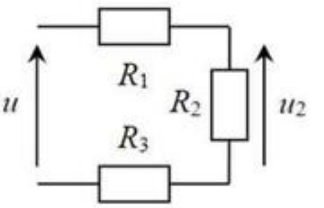
Une portion quelconque de conducteur se comporte généralement comme un dipôle ohmique.
Les bornes d'entrée de certains appareils (voltmètre, ampèremètre, circuit intégré…) se

comportent aussi, du point de vue du reste du circuit, comme des dipôles ohmiques : la résistance correspondante est appelée **résistance d'entrée**.

❑ Association en série

Une association en série de dipôles ohmiques est équivalente à un unique dipôle ohmique de résistance $\boxed{R_{\text{éq}} = \sum_k R_k}$.

La tension aux bornes de l'un d'entre eux s'obtient par la formule du **(pont) diviseur de tension** : $\boxed{u_j = \dfrac{R_j}{\sum_k R_k} u_{\text{ensemble}}}$.

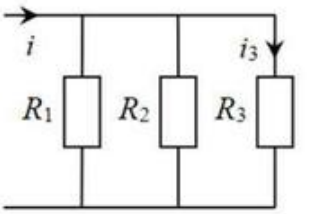


$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} u$$

❑ Association en parallèle

Une association en parallèle de dipôles ohmiques est équivalente à un seul dipôle ohmique de conductance $\boxed{G_{\text{éq}} = \sum_k G_k}$ soit $\boxed{\dfrac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_k \dfrac{1}{R_k}}$.

Le courant traversant l'un d'entre eux s'obtient avec la formule du **(pont) diviseur de courant** : $\boxed{i_j = \dfrac{G_j}{\sum_k G_k} i_{\text{ensemble}}}$.



$$i_3 = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} i$$

Pour deux résistances : $R_{\text{éq}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Pour n résistances identiques : $R_{\text{éq}} = \dfrac{R}{n}$.

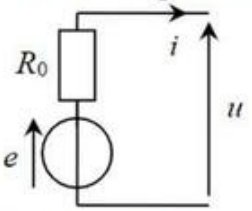
■ Modélisation d'un générateur réel







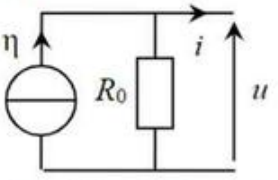
Il existe deux modèles équivalents pour décrire un générateur usuel.



Modèle de Thévenin

$\boxed{u = e - R_0 i}$ (convention générateur).





Modèle de Norton

$i = \eta - \dfrac{u}{R_0}$ (convention générateur).

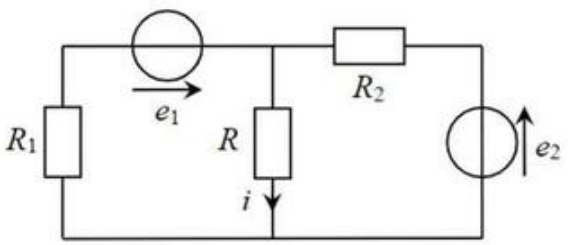
Ces formules sont équivalentes, avec $e = R_0 \eta$.

R_0 est la **résistance interne** ou **résistance de sortie** du générateur.

⇨ **Méthode 3.2. Transformation de schémas**

■ Comment calculer le courant traversant un dipôle ou la tension à ses bornes ?

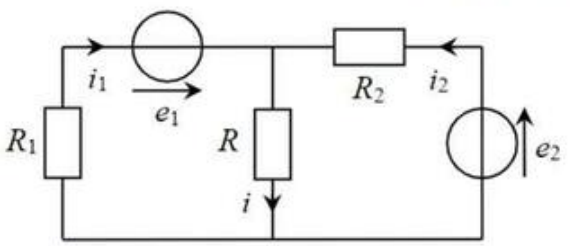
On se propose par exemple de déterminer l'intensité i du courant dans la résistance R du circuit ci-dessous.



❑ Méthode 3.1. Application directe des lois de Kirchhoff

Si le circuit n'est pas trop complexe, on introduit les inconnues supplémentaires nécessaires (intensités dans toutes les branches *ou bien* tensions entre tous les couples de points du circuit). On écrit alors les lois des nœuds et des mailles, ainsi que les relations entre tension et intensité (loi d'Ohm pour un dipôle ohmique), pour les éliminer une à une et obtenir finalement la grandeur demandée.

⇨ Exercices 3.2, 3.3, 3.5, 3.13, 3.14



On introduit deux intensités supplémentaires (dans un sens *arbitraire*), que l'on peut relier à i avec la loi des nœuds : $i_1 + i_2 - i = 0$ d'où $i_1 = i - i_2$ (ce qui permet d'éliminer i_1 dans la suite).

Loi des mailles dans la maille de gauche (dans le sens trigonométrique) : $Ri + R_1(i - i_2) - e_1 = 0$ d'où $i_2 = \dfrac{(R + R_1)i - e_1}{R_1}$ (cela permet maintenant d'éliminer i_2).

Finalement la loi des mailles dans celle de droite (dans le sens trigonométrique) donne : $e_2 - R_2\left(\dfrac{(R + R_1)i - e_1}{R_1}\right) - Ri = 0$ d'où $e_2 + \dfrac{R_2}{R_1}e_1 = Ri + R_2\dfrac{(R + R_1)}{R_1}i$ et finalement

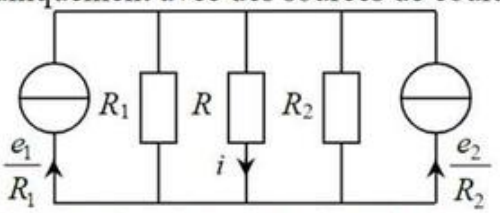
$$\boxed{i = \frac{R_1 e_2 + R_2 e_1}{R_1 R + R_2 R + R_2 R_1}}.$$

❑ Méthode 3.2. Transformation de schémas

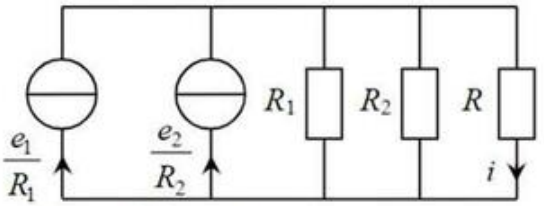
Transformer tous les générateurs du circuit qui sont en série en modèle de Thévenin, et tous ceux qui sont en parallèle en modèle de Norton, *sans modifier la branche dans laquelle se trouve l'intensité ou la tension cherchée*. Puis faire les associations de sources et de résistances, et simplifier le schéma jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule source. On peut alors conclure avec une seule formule (loi des mailles, diviseur de tension ou de courant…).

⇨ **Exercices 3.7, 3.13**

Dans l'exemple étudié, on a trois branches en parallèle, on va donc refaire le schéma uniquement avec des sources de courant :

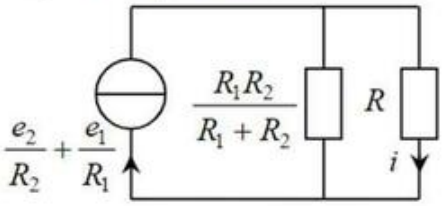


ou encore



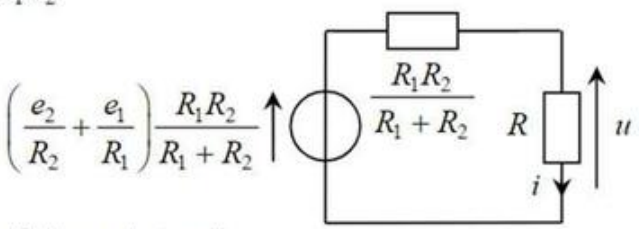
(l'ordre dans lequel on place les branches en parallèle n'ayant pas d'importance).

On associe ensuite les sources de courant en parallèle (dans le même sens), et les résistances R_1 et R_2 en parallèle (mais on laisse la résistance R, qui est celle qui nous intéresse).



On reconnaît un diviseur de courant : $i = \dfrac{\dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}}\left(\dfrac{e_2}{R_2}+\dfrac{e_1}{R_1}\right)$, soit $\boxed{i = \dfrac{R_1e_2+R_2e_1}{R_1R+R_2R+R_2R_1}}$.

– On peut aussi transformer une dernière fois le circuit, en revenant à un modèle de Thévenin.



On obtient alors la tension u avec la formule du diviseur de tension :

$u = \dfrac{R}{R+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}\left(\dfrac{e_2}{R_2}+\dfrac{e_1}{R_1}\right)\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \dfrac{RR_1e_2+RR_2e_1}{R_1R+R_2R+R_2R_1}$. Puis on utilise la loi d'Ohm aux bornes de la résistance R : $i = \dfrac{u}{R}$, ce qui donne $\boxed{i = \dfrac{R_1e_2+R_2e_1}{R_1R+R_2R+R_2R_1}}$.

– Enfin on peut aussi utiliser la loi des mailles sur le dernier schéma :

$\left(\dfrac{e_2}{R_2}+\dfrac{e_1}{R_1}\right)\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}-\left(\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R\right)i = 0$ qui donne le même résultat.

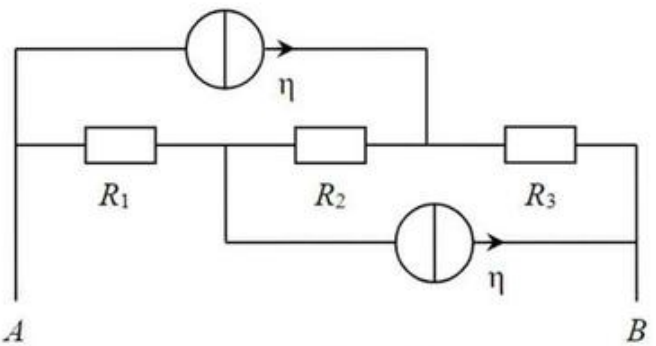
■ Comment déterminer le dipôle équivalent à une association de dipôles ?

❑ Méthode 3.3. Détermination d'un dipôle équivalent

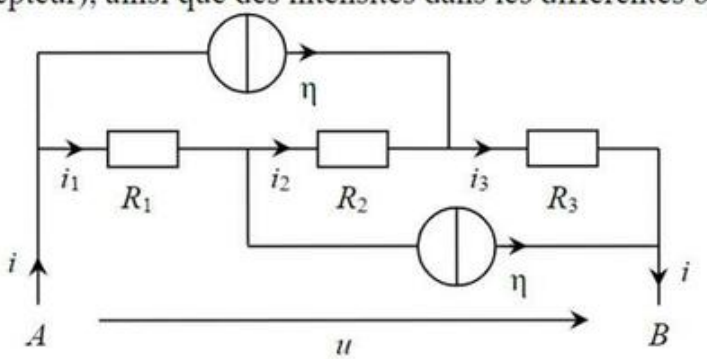
On commence par introduire la tension u aux bornes de l'association et l'intensité i du courant qui la traverse. En appliquant les lois de Kirchhoff ou en transformant le circuit à l'aide d'associations connues (résistances, sources), on établit alors la relation liant u, i et les données du problème. On identifie enfin cette relation à une caractéristique connue pour donner la nature du dipôle équivalent et la ou les grandeurs le caractérisant.

⇨ Exercices 3.5, 3.7

Quel est par exemple le dipôle équivalent à l'association AB ci-contre ?

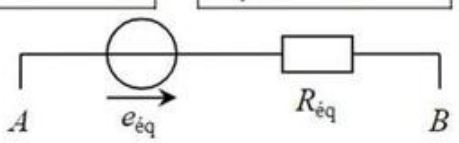


Commençons par introduire la tension u aux bornes de AB, l'intensité i du courant le traversant (ici en convention récepteur), ainsi que des intensités dans les différentes branches du dipôle :



Le dipôle AB ne présente aucune association série ou parallèle de résistances ou de sources. On utilise donc les lois de Kirchhoff. En appliquant plusieurs fois la loi des nœuds, on détermine les intensités des courants traversant respectivement R_1, R_2 et R_3 : $i_1 = i - \eta$, $i_2 = i_1 - \eta = i - 2\eta$ et $i_3 = i - \eta$. Par additivité des tensions, en prenant les résistances en convention générateur, on a donc : $u = -(R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3)$ soit $u = (R_1 + 2R_2 + R_3)\eta - (R_1 + R_2 + R_3)i$.

On reconnaît la relation caractéristique d'un générateur en représentation de Thévenin : $\boxed{u = e_{éq} - R_{éq} i}$ avec $\boxed{e_{éq} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\eta}$ et $\boxed{R_{éq} = R_1 + R_2 + R_3}$.



■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	En convention récepteur, les flèches de courant et de tension sont dans le même sens.	☐	☐
2.	La loi d'Ohm s'écrit $u = -Ri$ en convention générateur.	☐	☐
3.	Idéalement la résistance interne d'un ampèremètre tend vers zéro.	☐	☐
4.	Idéalement la résistance interne d'un voltmètre tend vers zéro.	☐	☐
5.	La résistance équivalente d'une association série est la somme des résistances.	☐	☐
6.	La conductance équivalente d'une association parallèle de résistances est la somme des conductances.	☐	☐
7.	Si la puissance d'un dipôle mesurée en convention récepteur est négative, alors celui-ci est en fonctionnement récepteur.	☐	☐
8.	Lorsque l'on applique la loi des mailles, le sens de parcours choisi modifie le résultat final.	☐	☐
9.	Un dipôle de résistance $R = 10\ \Omega$ et un autre de conductance $G = 100$ mS sont équivalents.	☐	☐
10.	L'intensité du courant dans une source idéale de tension dépend de la nature du circuit auquel elle est connectée.	☐	☐

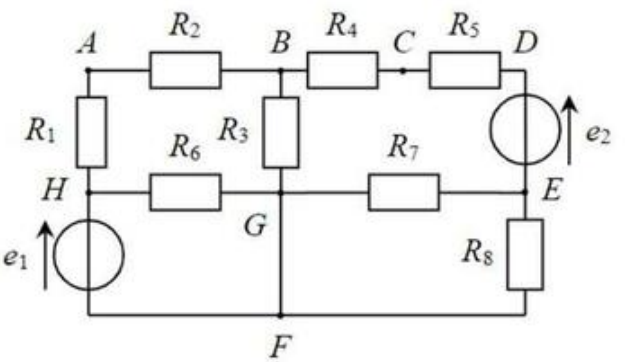
■■ Énoncé des exercices

■ Bases et lois de Kirchhoff

❑ Exercice 3.1. Nœuds, branches, mailles et associations

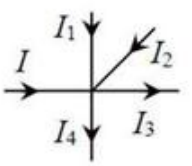
On considère le circuit ci-contre.

1. Quels sont les nœuds de ce schéma ?
2. Nommer toutes les branches de ce circuit.
3. Nommer toutes les mailles passant par le point A.
4. Quelles sont les résistances en série ? Quelles sont les résistances en parallèle ?



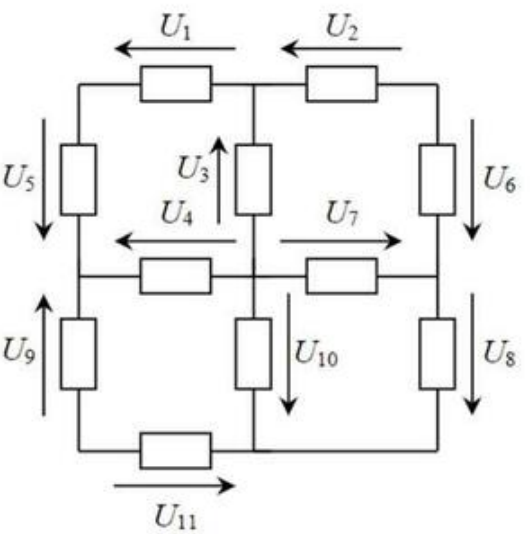
❑ Exercice 3.2. Loi des nœuds

1. Déterminer l'expression de l'intensité du courant I en fonction des autres intensités, puis donner sa valeur numérique.
   On donne $I_1 = I_4 = 1\,\text{A}$; $I_2 = 4\,\text{A}$; $I_3 = 2\,\text{A}$.
2. Que signifie le signe négatif de l'intensité I ?



❑ Exercice 3.3. Loi des mailles

Les rectangles représentés sur le schéma sont des dipôles quelconques dont nous ne préciserons pas la nature.
On donne les tensions suivantes :
$U_1 = 1$ V, $U_2 = 2$ V, $U_3 = 3$ V, $U_5 = 5$ V, $U_6 = 6$ V, $U_8 = 8$ V, $U_9 = 20$ V.
Déterminer les tensions U_4, U_7, U_{10} et U_{11} en utilisant la loi des mailles.

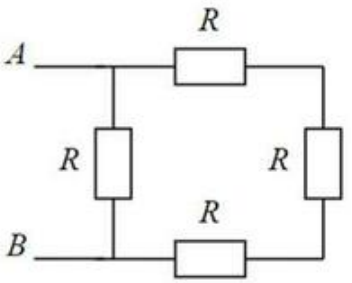


■ Associations de résistances et de générateurs

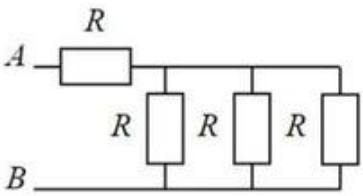
❑ Exercice 3.4. Résistance équivalente

Toutes les résistances sont identiques de valeur R. Déterminer la résistance équivalente vue entre les bornes A et B pour les schémas ci-dessous.

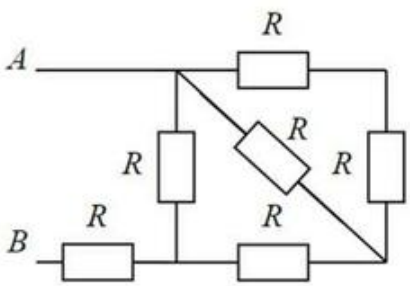
1.



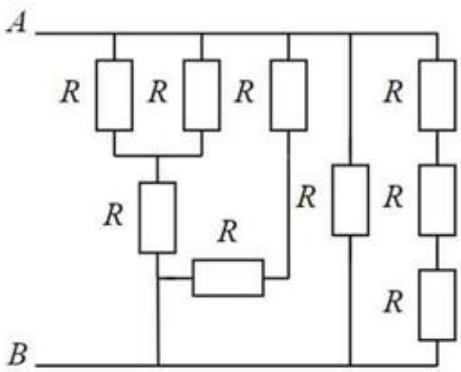
2.



3.

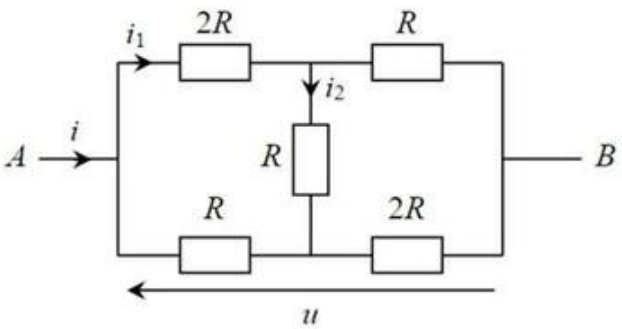


4.



❑ Exercice 3.5. Résistance équivalente, méthode indirecte*

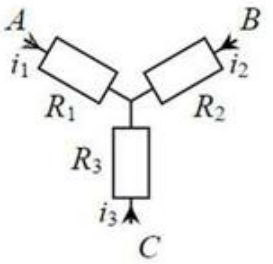
On considère le dipôle AB ci-contre.

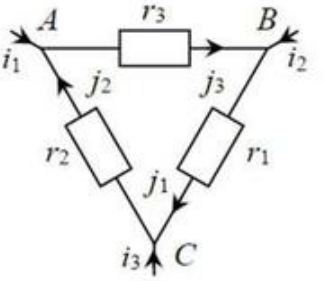


1. Pourquoi n'est-il pas possible de simplifier ce dipôle en utilisant les lois d'associations de résistances ?
2. En utilisant les lois de Kirchhoff, déterminer deux relations indépendantes entre les grandeurs R, i_1, i_2 et i.
3. En déduire que le dipôle AB est équivalent à un unique dipôle ohmique, et exprimer sa résistance $R_{éq}$ en fonction de R.

❑ Exercice 3.6. Équivalence étoile/triangle**

On considère une portion de circuit constituée par trois résistances r_1, r_2, r_3 montées en « triangle » et qui comporte trois pôles A, B et C. On veut déterminer les expressions de R_1, R_2, R_3 (en fonction de r_1, r_2, r_3) qu'il faut placer en « étoile » pour que les deux circuits soient équivalents d'un point de vue électrique.





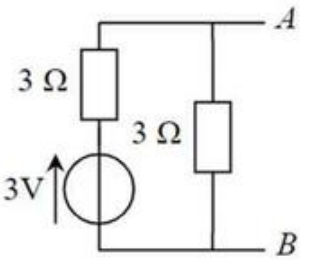
1. Exprimer la différence de potentiel $V_A - V_B$ pour les deux montages, en fonction des courants i_1 et i_2 pour l'un et de j_3 pour l'autre.

2. Exprimer j_3 en fonction des courants i_1 et i_2. Remplacer dans l'expression de la question 1 et en déduire les valeurs de R_1 et R_2. Donner aussi R_3 de façon analogue.

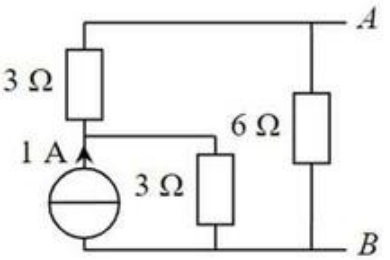
❑ Exercice 3.7. Modèles de Thévenin et de Norton*

Pour chaque dipôle AB, déterminer les générateurs équivalents de Thévenin et de Norton.

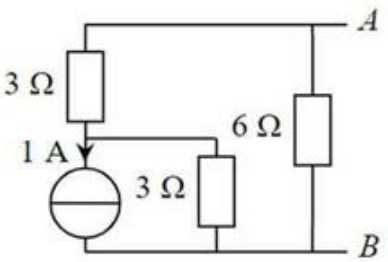
1.



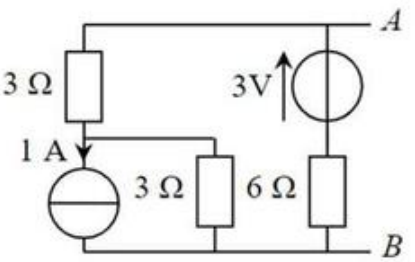
2.



3.



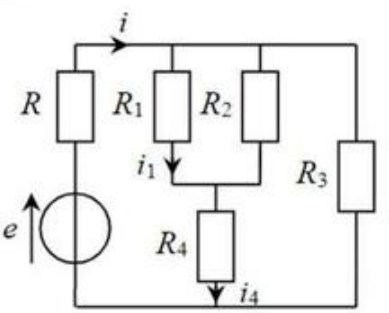
4.



■ Calculs de tensions et d'intensités

❑ Exercice 3.8. Calcul de courant dans une branche*

On a pour le circuit représenté $E = 10$ V, $R = 5\ \Omega$, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 15\ \Omega$, $R_4 = 9\ \Omega$.



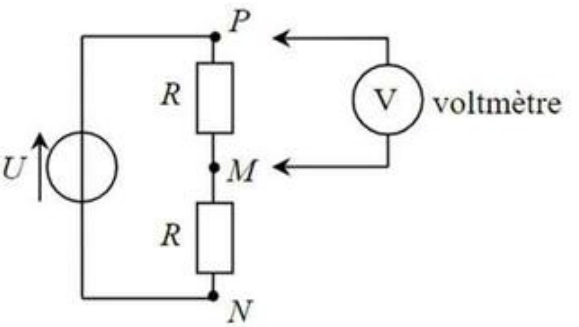
1. Calculer la résistance $R_{éq}$ qui est équivalente à l'association de R_1 à R_4 et est alimentée par la source de Thévenin (e, R). En déduire la valeur numérique de l'intensité i débitée par la source de tension.

2. Calculer l'intensité i_1 traversant le conducteur ohmique de résistance R_1.

❑ Exercice 3.9. Mesure faussée par un voltmètre !

Une source de tension continue $U = 24$ V est branchée aux bornes de deux résistances en série, toutes deux égales à $R = 10$ MΩ.

1. Calculer la valeur des tensions V_{MN} et V_{PM} entre les points nommés, en l'absence de voltmètre.
2. Pour effectuer la mesure de ces tensions, on utilise un voltmètre de résistance interne égale à $r = 10$ MΩ. Indiquer la tension lue sur le voltmètre lorsqu'on le branche successivement entre P et M, entre M et N, puis entre P et N.



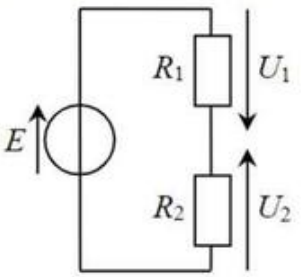
D'après CCINP

❑ Exercice 3.10. Ponts diviseurs

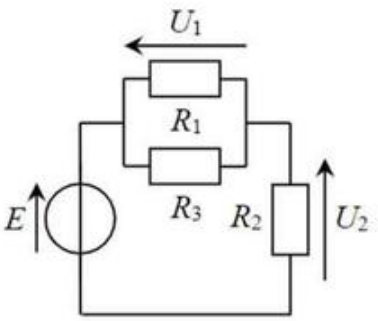
Pour les trois circuits suivants, on donne $E = 10$ V, $I_0 = 10$ mA, $R_1 = R_2 = 1{,}0$ kΩ, $R_3 = 3{,}0$ kΩ, $R_4 = 4{,}0$ kΩ.

Déterminer les expressions littérales puis les valeurs numériques des grandeurs représentées, en utilisant des ponts diviseurs de tension ou de courant.

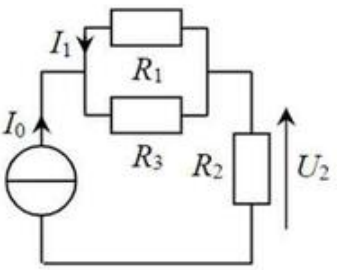
1.



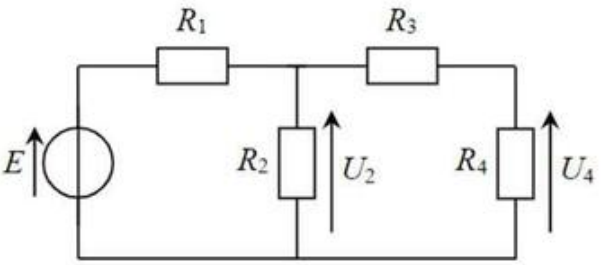
2.



3.

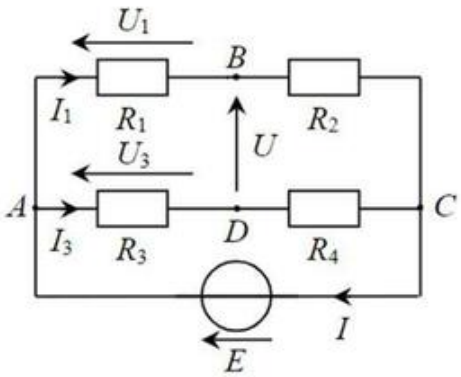


4.



❑ Exercice 3.11. Pont de Wheatstone*

Un pont de Wheatstone est constitué de quatre résistances selon le montage ci-contre.

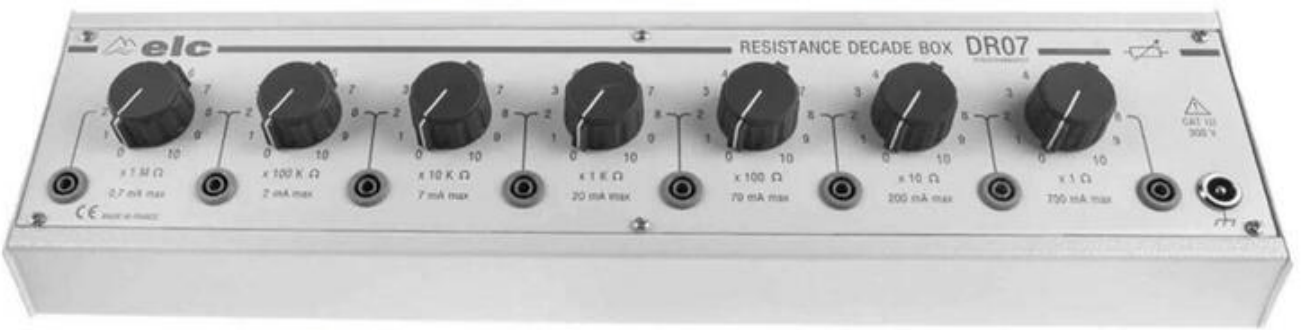


1. Déterminer la valeur des courants I_1, I_3 et I en fonction de E et des résistances du circuit. En déduire les tensions U_1 et U_3.

2. Retrouver la valeur des tensions U_1 et U_3 en utilisant la formule du diviseur de tension. En déduire la valeur de la tension U. Quelle doit être la relation entre les résistances pour que U soit nulle ? (On dit alors que « le pont est équilibré ».)

3. On branche maintenant entre les bornes B et D un ampèremètre de précision, que l'on modélise par un conducteur de résistance r. Justifier le fait que, quand l'ampèremètre indique zéro, les quatre résistances vérifient la relation trouvée à la question 2.

4. Les valeurs des résistances R_2, R_4 peuvent être choisies parmi les valeurs suivantes, connues avec une précision de 1 % : 100 Ω ; 1,00 kΩ ; 10,0 kΩ ; 100 kΩ ; 1,00 MΩ. La résistance R_1 est une boîte à décades (image ci-dessous), de valeur réglable de 1 Ω à 11 MΩ. Expliquer comment on peut utiliser ce montage pour mesurer, le plus précisément possible, une résistance de l'ordre de 0,1 Ω (donc trop petite pour un ohmmètre).



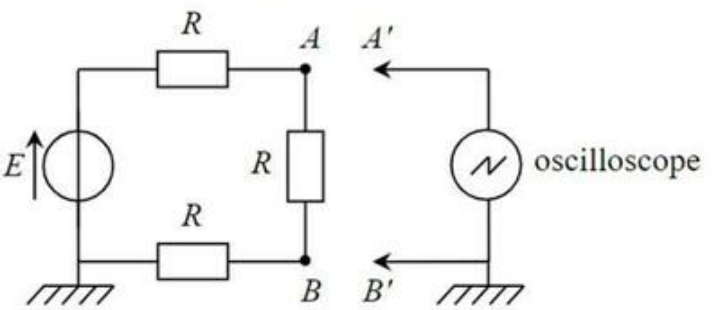
Boîte à décades de résistances usuelle au laboratoire

❑ Exercice 3.12. Un problème de masse...

Une source de tension E = 12 V alimente trois résistances égales R disposées en série.

1. Calculer la tension entre les bornes A et B dessinées sur le schéma.

2. Pour mesurer cette tension on utilise l'oscilloscope dessiné sur la même figure, borne A' reliée à la borne A et borne B' reliée à la borne B. Cet oscilloscope a une résistance interne très supérieure à la résistance R et pourtant la tension qu'il mesure n'est pas celle qui a été calculée. Expliquer pourquoi et donner la valeur de la tension mesurée.



D'après CCINP

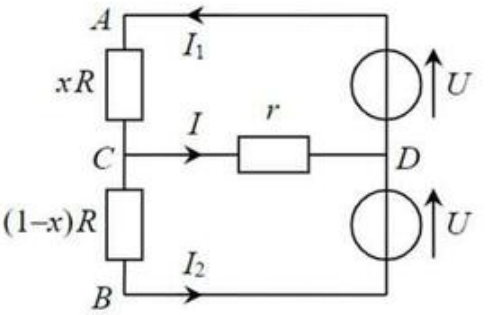
■ Puissance

❑ Exercice 3.13. Intensités et puissances*

On considère le circuit ci-contre, où un curseur mobile permet de fractionner la résistance R ($0 < x < 1$).

1. Déterminer les intensités I, I_1 et I_2.

2. Calculer littéralement le rapport $\eta = \dfrac{\mathcal{P}_{AC}}{\mathcal{P}_{CB}}$ des puissances dissipées dans AC et CB.

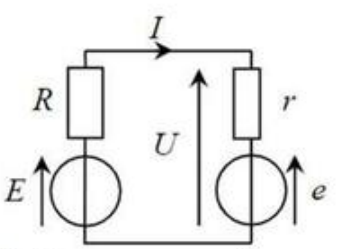


D'après oral Agro-Véto

❑ Exercice 3.14. Charge d'une batterie d'accumulateurs*

La batterie de voiture de Madame Michu est déchargée. Pour recharger cette batterie, modélisée par une FÉM $e = 12$ V en série avec une résistance $r = 0{,}20\ \Omega$, elle la branche sur un chargeur de FÉM $E = 13$ V et de résistance interne $R = 0{,}30\ \Omega$.
On lit sur la batterie qu'elle a une « capacité » de 50 A · h (ampères-heures).





1. Déterminer le courant I circulant dans la batterie et la tension U à ses bornes lors de la charge. Quelle est la convention utilisée ?

2. Calculer la puissance délivrée par la source E, la puissance dissipée par effet Joule et la puissance reçue par la batterie (stockée sous forme chimique). Déterminer le rendement.

3. On suppose qu'au cours de la charge, la tension de la FÉM $e = 12$ V reste constante.

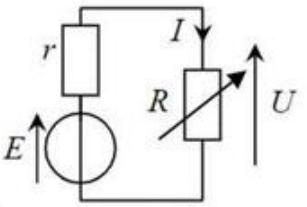
a) À quelle grandeur physique la capacité de 50 A · h est-elle homogène ?

b) Initialement la batterie est déchargée, avec seulement 10 % de sa capacité. Déterminer le temps de charge pour la recharger complètement.

c) Que vaut l'énergie dissipée par effet Joule pendant la charge ?

❑ Exercice 3.15. Adaptation de puissance*

On considère une résistance variable R alimentée par un générateur de tension, caractérisé par sa représentation de Thévenin de force électromotrice E et de résistance interne r. On cherche à rendre maximale la puissance dissipée par effet Joule dans ce conducteur (il s'agit par exemple d'un radiateur électrique).



1. Déterminer l'expression de la puissance P reçue par le conducteur ohmique en fonction de E, R et r.
2. Montrer que P (fonction dépendant de la variable R) est maximale pour une valeur particulière de R. On dit que le montage est alors adapté.
3. On définit le rendement du transfert par $\eta = \dfrac{P}{P_{\text{géné}}}$ où $P_{\text{géné}}$ représente la puissance fournie par la force électromotrice E du dipôle. Représenter graphiquement $\eta(R)$. Que vaut le rendement quand le montage est adapté ?

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 3.5. Commencer par représenter et nommer les courants dans toutes les branches.

Exercice 3.6. Question 2 : dans le montage triangle, appliquer deux fois la loi des nœuds et une fois la loi des mailles (combinée avec la loi d'Ohm) : on peut ainsi éliminer j_1 et j_2 et obtenir j_3 en fonction de i_1, i_2 et des résistances.

Exercice 3.10. Attention, R_1 et R_2 ne sont pas en série dans les schémas 2, 3 et 4.

Exercice 3.11. À la question 4, la résistance inconnue serait bien sûr R_3. Exprimer d'abord cette résistance en fonction des trois autres lorsque le pont est équilibré, puis déterminer comment choisir celles-ci de façon à équilibrer le pont et à avoir l'incertitude la plus faible possible sur R_3.

Exercice 3.12. Que signifie le symbole « masse » sur l'une des bornes de chaque appareil ?

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai

1. En convention récepteur, les flèches de courant et de tension sont de sens opposés.

3. L'ampèremètre idéal se comporte, vis-à-vis du circuit, comme un simple fil.

4. Le voltmètre se branche en dérivation, et pour ne pas modifier le fonctionnement du circuit, il ne doit pas prélever de courant : sa résistance interne doit donc idéalement tendre vers l'infini.

7. En convention récepteur, la puissance $\mathcal{P} = ui$ est la puissance *reçue* par un dipôle ; s'il reçoit une puissance négative, c'est qu'en fait il fournit de l'énergie au reste du circuit et fonctionne donc en générateur.

❑ Les erreurs classiques

– Dans toutes les relations, il faut toujours faire très attention aux *signes* ! Par exemple, lorsqu'une résistance est représentée en convention générateur, il faut mettre un signe moins dans la loi d'Ohm.
– Faire attention comme toujours à l'*homogénéité* des formules. En particulier, une résistance ne peut jamais être égale à l'inverse d'une résistance, donc attention avec les associations en parallèle !
– Lorsqu'on transforme un schéma de circuit, certains points et certaines branches disparaissent, donc les tensions et intensités correspondantes disparaissent aussi : l'erreur fréquente consiste à les « conserver » en les replaçant au mauvais endroit.
– Quelle que soit la convention, la formule de la puissance $\mathcal{P} = ui$ reste la même, mais sa signification qualitative change (puissance *reçue* en convention récepteur, ou *fournie* en convention générateur).
– Attention à l'identification des résistances en série ou en parallèle, en particulier pour utiliser la relation du diviseur de tension ou de courant ! Pour que deux dipôles soient en série, il ne suffit pas qu'ils soient placés « l'un après l'autre » : *il ne doit pas y avoir de nœud* entre eux. De même, pour que deux dipôles soient en parallèle, il ne suffit pas qu'ils soient dans deux branches dessinées parallèlement : ils doivent avoir leurs *deux* bornes communes.

Corrigé des exercices

Exercice 3.1

1. Les points correspondant à des nœuds sont : B, E, $F = G$ (identiques car reliés par un fil), H.

Les points A, C et D ne sont pas des nœuds, car seuls deux fils y concourent.

2. Le circuit comporte sept branches : *BCDE*, *BAH*, *GE*, *GFE*, *GH*, *GFH*, *GB*.

Le segment GF semble être une branche mais n'en est pas vraiment une, puisque G et F représentent le même nœud.

3. Les mailles passant par le point A sont : *ABGHA*, *ABGFHA*, *ABGEFHA*, *ABCDEGHA*, *ABCDEFHA*, *ABCDEFGHA*, *ABCDEGFHA*.

4. Les résistances en série sont : R_1 avec R_2 d'une part ; et R_4 avec R_5 d'autre part.
Les résistances R_7 et R_8 sont en parallèle.

Dans le cas général, deux résistances quelconques d'un circuit ne sont ni en série, ni en parallèle. *C'est le cas de toutes les paires de résistances qui ne sont pas citées ci-dessus.*

Exercice 3.2

1. On applique la loi des nœuds qui donne $I + I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$, d'où l'on tire $\boxed{I = I_3 + I_4 - I_1 - I_2}$. Application numérique : $\boxed{I = -2\ \text{A}}$.

2. Le signe négatif du courant I indique que, physiquement, un courant de 2 A circule dans le sens contraire à celui de la flèche.

Exercice 3.3

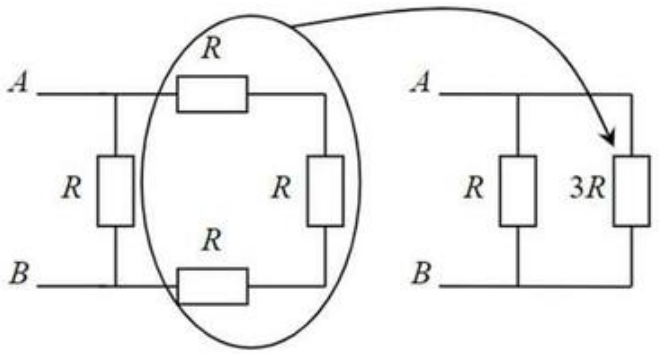
On choisit arbitrairement pour chaque maille un sens de parcours horaire. La loi des mailles appliquée à la maille en haut à gauche du circuit donne $-U_1 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$, d'où l'on tire $\boxed{U_4 = U_1 + U_3 + U_5}$. AN $\boxed{U_4 = 9\ \text{V}}$.
La maille en haut à droite donne $-U_2 + U_6 - U_7 + U_3 = 0$, d'où l'on tire $\boxed{U_7 = 7\ \text{V}}$.
En procédant de même avec d'autres mailles (il y a plusieurs possibilités), on obtient $\boxed{U_{10} = 15\ \text{V}}$ et $\boxed{U_{11} = 26\ \text{V}}$.

Le sens de parcours choisi n'a aucune influence sur le résultat.

Exercice 3.4

Il faut refaire des schémas pour éviter de se tromper, et commencer par les associations évidentes.

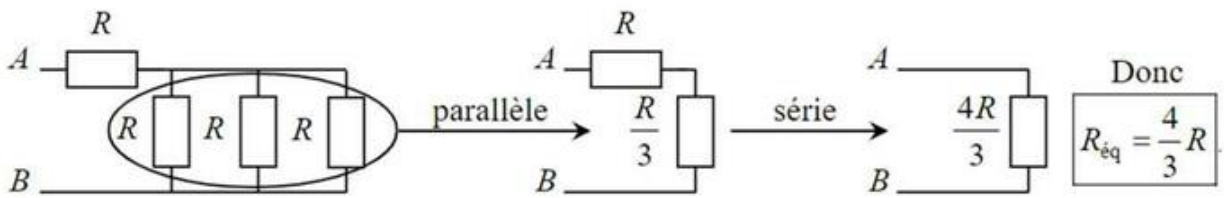
1. On commence par l'association évidente des trois résistances en série.



La résistance équivalente globale est constituée par deux résistances en parallèle, soit $\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R}$ dont on déduit $\boxed{R_{éq} = \frac{3}{4}R}$.

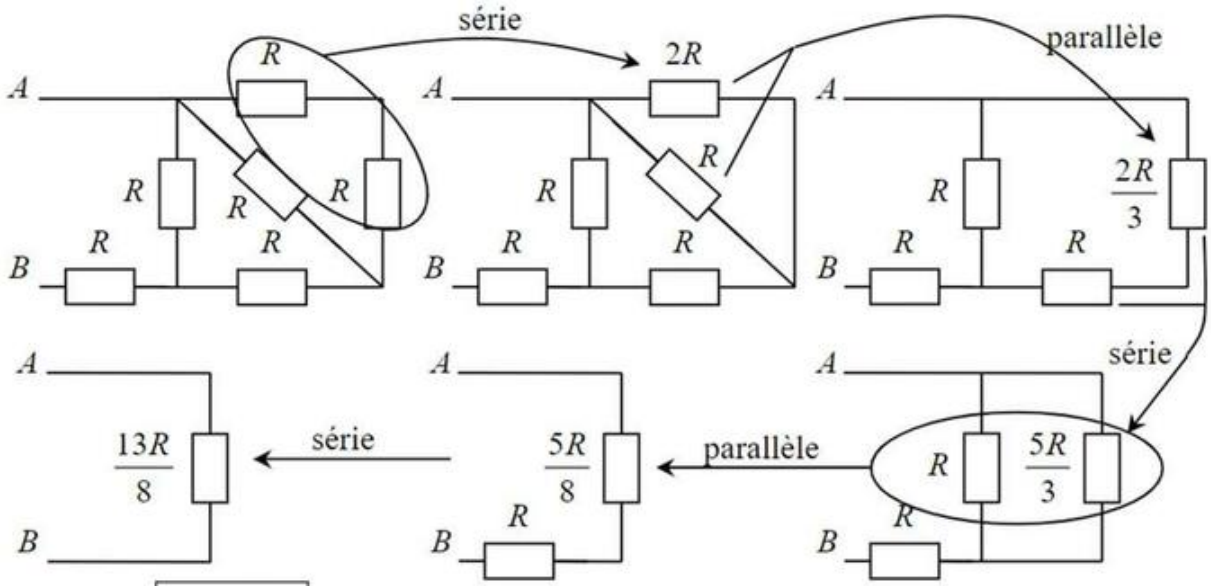
Quand des résistances sont associées en série, la résistance équivalente est toujours plus grande que la plus grande *des résistances initiales : ici* $3R > R$. *Quand des résistances sont associées en parallèle, la résistance équivalente est toujours* plus petite que la plus petite *des résistances initiales : ici* $\frac{3}{4}R < R$.

2.



Donc $\boxed{R_{éq} = \frac{4}{3}R}$.

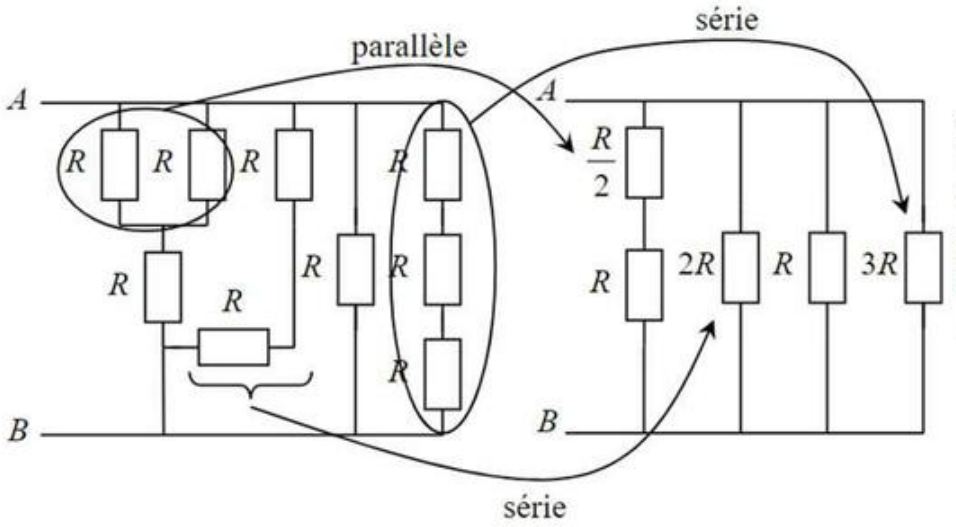
3.



On a trouvé $\boxed{R_{éq} = \frac{13}{8}R}$.

Corrigé

4.



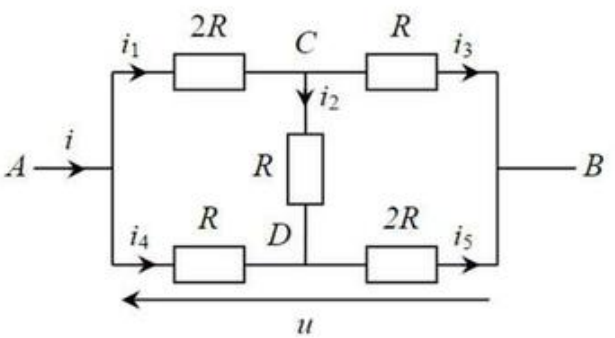
On note que la branche de gauche (association série) peut être remplacée par une résistance $\frac{3R}{2}$.

Donc la résistance équivalente à cette association parallèle de quatre résistances est $\boxed{R_{éq} = \frac{2R}{5}}$.

Exercice 3.5

1. Il n'est pas possible de déterminer la résistance équivalente de ce dipôle par des associations séries ou parallèles, car aucune des cinq résistances n'est en série ou en parallèle avec l'une des autres.

2. On redessine le schéma en fléchant tous les courants.



On applique la loi des nœuds en A : $i_4 = i - i_1$;

en C : $i_3 = i_1 - i_2$; en D : $i_5 = i - i_1 + i_2$.

Puis on applique la loi des mailles dans :

$ACBA$: $u = 2Ri_1 + Ri_3 = 3Ri_1 - Ri_2$ (1)

$ADBA$: $u = Ri_4 + 2Ri_5 = 3Ri - 3Ri_1 + 2Ri_2$ (2)

$ACDBA$: $u = 2Ri_1 + Ri_2 + 2Ri_5 = 2Ri + 3Ri_2$ (3).

On en déduit $\boxed{(1)-(2) : 6Ri_1 - 3Ri_2 = 3Ri\ (4)}$ et $\boxed{(1)-(3) : 2Ri = 3Ri_1 - 4Ri_2\ (5)}$.

⇨ *Méthode 3.1*

3. On cherche une relation ne faisant intervenir que les variables u et i, donc il faut éliminer les autres intensités. Le plus simple est de faire $(4) - 2\times(5) \Leftrightarrow i_2 = -\frac{i}{5}$. En utilisant (3), on obtient alors $\boxed{u = \frac{7}{5}Ri}$. On reconnaît la relation caractéristique $u = R_{éq}i$ d'un conducteur ohmique en convention récepteur avec $\boxed{R_{éq} = \frac{7}{5}R}$.

⇨ *Méthode 3.3*

Exercice 3.6

1. La différence de potentiel entre deux points doit être identique dans les deux montages pour que les circuits soient équivalents.

Pour le montage « étoile », entre les points A et B : $V_A - V_B = R_1 i_1 - R_2 i_2$ (1).

Pour le montage « triangle » : $V_A - V_B = r_3 j_3$ (2).

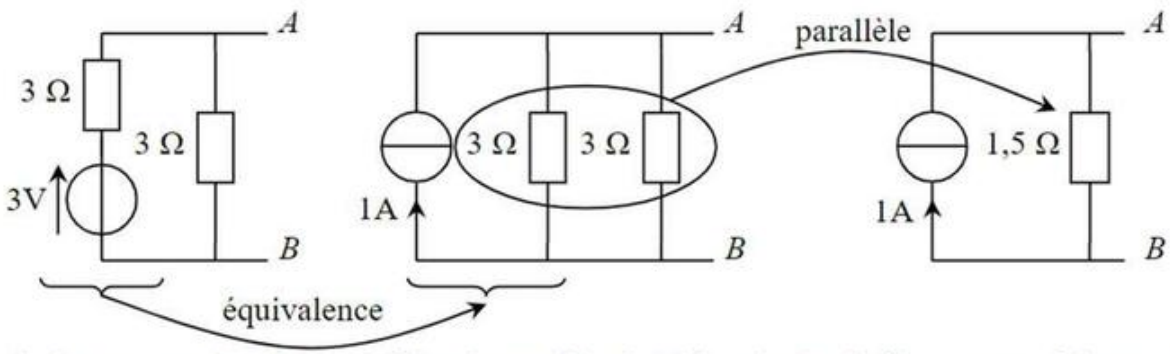
2. Il faut maintenant trouver une relation sur les courants pour lier le courant j_3 au courant i_1 et i_2. On cherche à ne conserver que ces trois inconnues. La loi des nœuds permet d'écrire $j_1 = i_2 + j_3$ et $j_2 = j_3 - i_1$.

On écrit la loi des mailles $r_3 j_3 + r_2 j_2 + r_1 j_1 = 0$, soit $r_3 j_3 + r_2(j_3 - i_1) + r_1(i_2 + j_3) = 0$. On en déduit $j_3 = \dfrac{r_2 i_1 - r_1 i_2}{r_1 + r_2 + r_3}$ que l'on remplace dans l'équation (2), qui doit être équivalente à (1), soit $\dfrac{r_2 r_3 i_1 - r_1 r_3 i_2}{r_1 + r_2 + r_3} = R_1 i_1 - R_2 i_2$. On identifie les facteurs se trouvant devant chaque intensité, et l'on obtient $\boxed{R_1 = \dfrac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}$ et $\boxed{R_2 = \dfrac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}$. On obtiendrait de même $\boxed{R_3 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}}$.

Exercice 3.7

On rappelle que les deux sources sont liées par la relation $e = R\eta$.

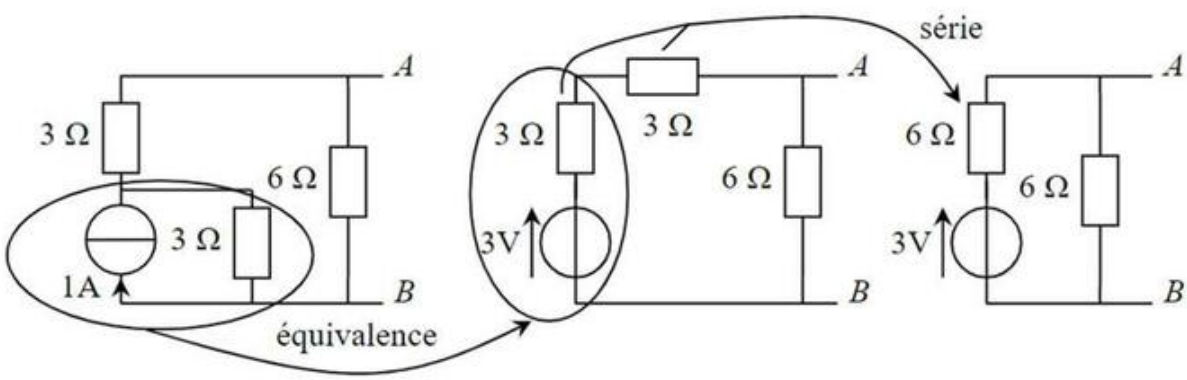
1.



Par équivalence entre les deux modèles, le modèle de Thévenin du dipôle est une résistance de 1,5 Ω en série avec une source de tension (vers le haut) de FÉM $\boxed{e = 1{,}5 \times 1 = 1{,}5\ \text{V}}$.

⇨ *Méthode 3.2*

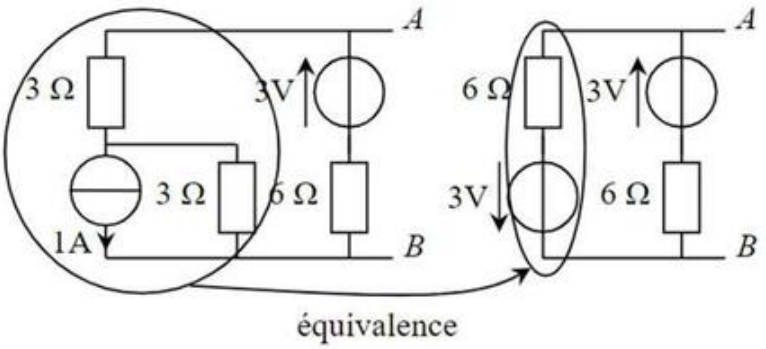
2.



La fin de la résolution est maintenant similaire au cas de la question 1, mais avec des résistances de 6 Ω. La résistance des modèles de Norton et Thévenin vaut 3 Ω, la source de courant délivre un courant de $\boxed{0{,}5\ \text{A}}$ (vers le haut) et la source de tension délivre $\boxed{1{,}5\ \text{V}}$ (vers le haut).

3. Les résultats sont identiques au paragraphe précédent, sauf que toutes les flèches des sources sont dirigées vers le bas.

4.



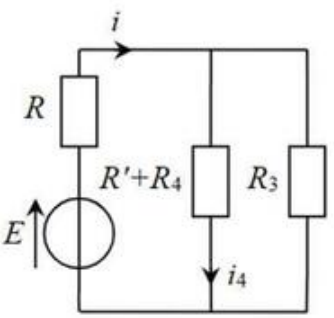
Le passage au modèle de Norton donne deux sources de courant en parallèle, mais l'une vers le haut et l'autre vers le bas. Par conséquent les sources s'annulent et il ne reste plus que deux résistances de 6 Ω en parallèle. Donc le dipôle est équivalent à une résistance de 3 Ω.

Exercice 3.8

1. On note $R' = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6\,\Omega$ la résistance équivalente à l'association parallèle de R_1 et R_2.

La transformation du schéma permet d'obtenir directement la résistance équivalente à l'association parallèle, soit $\dfrac{1}{R_{éq}} = \dfrac{1}{R' + R_4} + \dfrac{1}{R_3}$, d'où $\boxed{R_{éq} = \dfrac{(R' + R_4)R_3}{R' + R_4 + R_3}}$. AN $\boxed{R_{éq} = 7{,}5\,\Omega}$.

On en déduit, en utilisant la loi des mailles, le courant dans les résistances en série R et $R_{éq}$, soit $\boxed{i = \dfrac{E}{R + R_{éq}}}$. AN $\boxed{i = 0{,}8\ \text{A}}$.

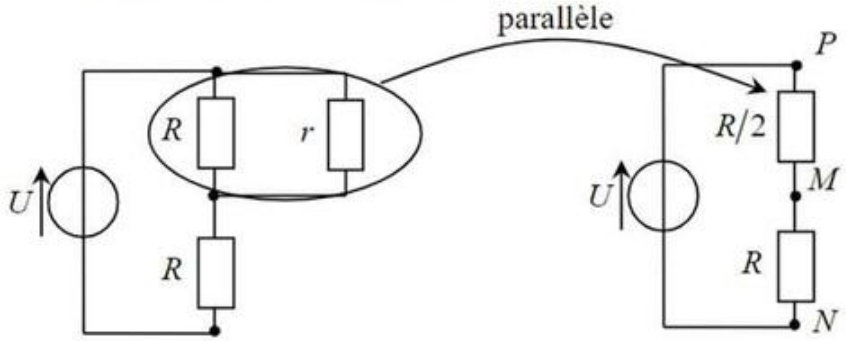


2. D'après le schéma précédent, on utilise la formule du pont diviseur de courant pour trouver d'abord $i_4 = \dfrac{R_3}{R' + R_4 + R_3} i$. Or ce courant est celui qui traverse un autre diviseur de courant, formé par R_1 et R_2. On a donc $i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i_4$ soit $\boxed{i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \times \dfrac{R_3}{R' + R_4 + R_3} i}$. AN $\boxed{i_1 = 0{,}16\ \text{A}}$.

Exercice 3.9

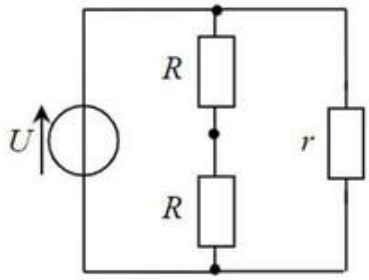
1. Les deux résistances sont en série, on utilise donc la formule du diviseur de tension, ce qui donne $V_{MN} = V_{PM} = \dfrac{R}{R + R} U$ soit $\boxed{V_{MN} = V_{PM} = \dfrac{U}{2} = 12\ \text{V}}$.

2. Le schéma avec le voltmètre branché entre P et M devient :



La résistance équivalente vaut $R/2$ car $r = R$. On en déduit avec la formule du diviseur de tension, la valeur lue : $V_{\text{lue}} = V_{PM} = \dfrac{R/2}{R + R/2} U$ soit $\boxed{V_{\text{lue}} = V_{PM} = \dfrac{U}{3} = 8\ \text{V}}$. Si le voltmètre est entre M et N, on obtient de même : $V_{\text{lue}} = V_{MN} = \dfrac{R/2}{R + R/2} U$ soit $\boxed{V_{\text{lue}} = V_{MN} = \dfrac{U}{3} = 8\ \text{V}}$.

Si le voltmètre est entre P et N, d'après le schéma, la tension aux bornes du voltmètre vaut $\boxed{V_{\text{lue}} = U = 24\ \text{V}}$.



Exercice 3.10

1. On applique directement la formule du pont diviseur de tension pour des résistances en série et l'on obtient : $\boxed{U_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E}$ et $\boxed{U_1 = -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} E}$. AN $\boxed{U_2 = 5{,}0\ \text{V}}$ et $\boxed{U_1 = -5{,}0\ \text{V}}$.

> *La tension aux bornes de R_1 et celle aux bornes de l'ensemble sont de sens opposés, il faut donc un signe négatif dans la seconde formule. Par ailleurs, les données ayant deux chiffres significatifs, on donne deux chiffres aussi dans les résultats, donc ne pas oublier le 0 après la virgule : il donne une information !*

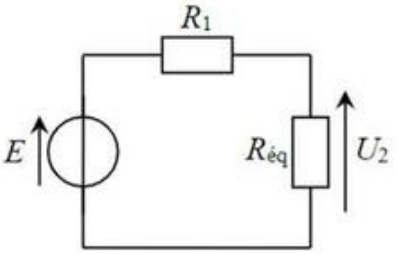
2. Les résistances R_1 et R_3, qui sont en parallèle, peuvent être remplacées par une résistance équivalente $R_{\text{éq}} = \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 750\ \Omega$. On peut ainsi utiliser la formule du diviseur de tension et l'on obtient $\boxed{U_1 = \dfrac{R_{\text{éq}}}{R_{\text{éq}} + R_2} E}$ et $\boxed{U_2 = \dfrac{R_2}{R_{\text{éq}} + R_2} E}$. AN $\boxed{U_1 = 4{,}3\ \text{V}}$ et $\boxed{U_2 = 5{,}7\ \text{V}}$.

3. Avec la formule du diviseur de courant : $\boxed{I_1 = -\dfrac{G_1}{G_1 + G_3} I_0 = -\dfrac{R_3}{R_1 + R_3} I_0}$. AN $\boxed{I_1 = -7{,}5\ \text{mA}}$.

La résistance R_2 est traversée par I_0 (en convention récepteur), donc $\boxed{U_2 = R_2 I_0 = 10\ \text{V}}$.

Corrigé

4. On simplifie le schéma en remplaçant R_2 en parallèle avec l'association $R_3 + R_4$ par $R_{éq} = \dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4} = 875\,\Omega$.



Le pont diviseur de tension donne alors : $\boxed{U_2 = \dfrac{R_{éq}}{R_{éq}+R_1}E}$.

AN $\boxed{U_2 = 4{,}7\text{ V}}$. On retrouve la tension U_2 comme tension totale aux bornes du diviseur de tension formé par R_3 et R_4, donc $\boxed{U_4 = \dfrac{R_4}{R_4+R_3}U_2}$. AN $\boxed{U_4 = 2{,}7\text{ V}}$.

☞ *Les résistances R_1 et R_2 ne sont pas en série, car il y a un nœud entre les deux : elles ne constituent donc pas un diviseur de tension.*

Exercice 3.11

1. On remarque que $U_{AC} = E = (R_1+R_2)I_1$, donc $\boxed{I_1 = \dfrac{E}{R_1+R_2}}$, de même $\boxed{I_3 = \dfrac{E}{R_3+R_4}}$. La loi des nœuds en A donne $\boxed{I = I_1 + I_3 = E\left(\dfrac{1}{R_1+R_2} + \dfrac{1}{R_3+R_4}\right)}$.

Alors $U_1 = R_1 I_1$ (convention récepteur) soit $\boxed{U_1 = \dfrac{R_1 E}{R_1+R_2}}$ et de même $\boxed{U_3 = R_3 I_3 = \dfrac{R_3 E}{R_3+R_4}}$.

2. Les expressions de U_1 et U_3 sont immédiates avec le pont diviseur de tension. Alors d'après l'additivité des tensions : $\boxed{U = U_3 - U_1 = \dfrac{(R_2R_3 - R_1R_4)E}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}}$. U est nulle lorsque $\boxed{R_1R_4 = R_2R_3}$.

3. Quand l'ampèremètre indique zéro, c'est qu'il n'est traversé par aucun courant : les intensités restent donc les mêmes que dans le circuit précédent, donc les expressions des tensions aussi. De plus, l'ampèremètre étant équivalent à une résistance, la tension U à ses bornes est nulle également : c'est la situation étudiée à la question 2, qui donne $\boxed{R_1R_4 = R_2R_3}$.

4. On règle la valeur de la résistance variable R_1 de manière à obtenir $U = 0$ (contrôlé à l'aide d'un voltmètre ou d'un ampèremètre). On en déduit la valeur de la résistance inconnue R_3 : $\boxed{R_3 = \dfrac{R_1R_4}{R_2}}$. Les valeurs de R_2 et R_4 étant connues à 1 % près, et R_1 pouvant être connue beaucoup plus précisément (si on utilise au moins quatre curseurs), on peut au mieux avoir une précision de l'ordre de 2 % pour R_3. En effet, l'incertitude relative sur R_3 s'écrit :

$\dfrac{\Delta R_3}{R_3} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta R_4}{R_4}\right)^2}$. Or $\dfrac{\Delta R_2}{R_2} = \dfrac{\Delta R_4}{R_4} = 0{,}01$ et on peut avoir $\dfrac{\Delta R_1}{R_1} \ll 0{,}01$, donc on obtient $\dfrac{\Delta R_3}{R_3} = 0{,}02$ en arrondissant à un seul chiffre significatif par excès.

Pour pouvoir utiliser quatre curseurs, et avoir ainsi une précision sur R_1 inférieure à 0,1 %, on doit s'arranger pour que R_1 soit de l'ordre du kilohm. Or la résistance à mesurer R_3 est de l'ordre du dixième d'ohm, on a donc un rapport R_1/R_3 de l'ordre de 10^4. Il faut alors choisir R_4/R_2 de l'ordre de 10^{-4} : on prend $\boxed{R_4 = 100\ \Omega}$ et $\boxed{R_2 = 1{,}00\ \text{M}\Omega}$.

Exercice 3.12

1. En utilisant la formule du diviseur de tension on obtient immédiatement :

$U_{AB} = \dfrac{R}{3R}E$ soit $\boxed{U_{AB} = \dfrac{E}{3} = 4\ \text{V}}$.

2. Les bornes de masse de l'oscilloscope et du générateur sont connectées par l'intermédiaire de la prise de terre. Par conséquent, la résistance se trouvant entre ces deux bornes est court-circuitée : on peut considérer qu'elle est en parallèle avec un fil (la connexion via la prise de terre, de résistance négligeable) ; le courant qui traverse cette résistance est donc nul (diviseur de courant), et la tension à ses bornes est alors nulle aussi d'après la loi d'Ohm. Lorsque l'oscilloscope est branché, il n'y a donc que deux résistances R en série, et la formule du pont diviseur donne alors $U_{AB} = \dfrac{R}{2R}E$ soit $\boxed{U_{AB} = \dfrac{E}{2} = 6\ \text{V}}$.

Exercice 3.13

1. Par application directe des lois de Kirchhoff, on obtient : $I - I_1 + I_2 = 0$ (nœud C ou D) ;

$U - xRI_1 - rI = 0$ (maille du haut) ; $U + rI - (1-x)RI_2 = 0$ (maille du bas).

Pour résoudre ce système de trois équations à trois inconnues, on peut d'abord exprimer l'inconnue I_1 avec la deuxième équation : $I_1 = \dfrac{U - rI}{xR}$. On exprime de même l'inconnue I_2 avec la troisième : $I_2 = \dfrac{U + rI}{(1-x)R}$. Puis on reporte le tout dans la première équation, où reste alors seulement l'inconnue I : $I - \dfrac{U - rI}{xR} + \dfrac{U + rI}{(1-x)R} = 0 \Leftrightarrow I + \dfrac{rI}{xR} + \dfrac{rI}{(1-x)R} = \dfrac{U}{xR} - \dfrac{U}{(1-x)R}$

$\Leftrightarrow I\,x(1-x)R + (1-x)r\,I + x\,r\,I = U(1-x) - U\,x$ d'où finalement $\boxed{I = \dfrac{(1-2x)U}{r + x(1-x)R}}$.

On trouve alors les deux autres intensités : $\boxed{I_1 = \dfrac{U}{R} \times \dfrac{(1-x)R + 2r}{r + x(1-x)R}}$; $\boxed{I_2 = \dfrac{U}{R} \times \dfrac{xR + 2r}{r + x(1-x)R}}$.

⇨ *Méthode 3.1*

2. $\mathcal{P}_{AC} = xRI_1^2$ et $\mathcal{P}_{CB} = (1-x)RI_2^2$ donc $\eta = \dfrac{\mathcal{P}_{AC}}{\mathcal{P}_{CB}} = \dfrac{x}{1-x}\left(\dfrac{I_1}{I_2}\right)^2$ soit $\boxed{\eta = \dfrac{x}{1-x}\left(\dfrac{(1-x)R + 2r}{xR + 2r}\right)^2}$.

Exercice 3.14

1. On applique la loi des mailles $E - RI - rI - e = 0$, ce qui donne $\boxed{I = \dfrac{E - e}{R + r} = 2\ \text{A}}$.

On en déduit donc la tension $\boxed{U = e + rI = 12{,}4\ \text{V}}$. L'intensité et la tension sont définies en convention récepteur.

2. La puissance délivrée par la source vaut $\boxed{P_{\text{géné}} = EI = 26\ \text{W}}$, la puissance dissipée par effet Joule $\boxed{P_{\text{Joule}} = (r+R)I^2 = 2\ \text{W}}$ et la puissance « stockée » dans la FÉM de la batterie $\boxed{P_{\text{stock}} = eI = 24\ \text{W}}$. Le rendement est alors : $\eta = \dfrac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}} = \dfrac{P_{\text{stock}}}{P_{\text{géné}}}$ soit $\boxed{\eta = \dfrac{e}{E} = 92\ \%}$.

3. a) La capacité en ampères-heures est homogène à une charge électrique Q car le courant (en ampères) est une charge divisée un temps $\left(i = \dfrac{\delta q}{\mathrm{d}t}\right)$.

b) Au départ la batterie n'est qu'à 10 % de sa capacité, sa charge est donc $Q_0 = 5\ \text{A}\cdot\text{h}$. Il faut donc lui apporter une charge $Q = 45\ \text{A}\cdot\text{h} = I\cdot t$ avec t exprimé en heures, soit $\boxed{t = \dfrac{Q}{i} = 22{,}5\ \text{h}}$.

c) Énergie dissipée par effet Joule : $W_{\text{Joule}} = P_{\text{Joule}} \times t = 2 \times 22{,}5 \times 3600$ soit $\boxed{W_{\text{Joule}} = 160\ \text{kJ}}$.

Exercice 3.15

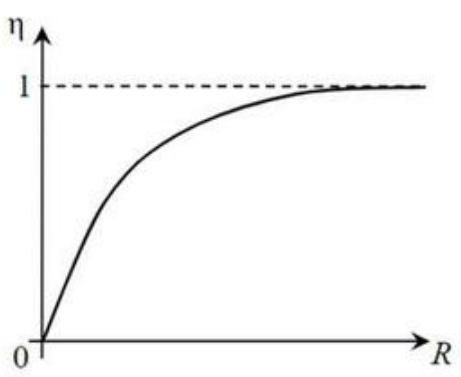
1. La résistance R reçoit la puissance $P = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$. Or d'après la formule du diviseur de tension : $U = \dfrac{R}{R+r}E$. On en déduit $\boxed{P = \dfrac{R}{(R+r)^2}E^2}$.

2. On calcule la dérivée de P en fonction de R, soit $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \dfrac{-E^2(R-r)}{(R+r)^3}$. P est extrémale lorsque sa dérivée s'annule, donc pour $\boxed{R = r}$. On a alors $\boxed{P = \dfrac{E^2}{2R}}$ qui correspond bien à un maximum car pour $R = 0$, $P = 0$.

3. $P_{\text{géné}} = EI$, et d'après la loi des mailles $E = (r+R)I$, d'où l'on tire $I = \dfrac{E}{R+r}$ et finalement $P_{\text{géné}} = \dfrac{E^2}{R+r}$.

Le rendement est donc : $\boxed{\eta = \dfrac{R}{R+r}}$.

Lorsque le montage est adapté, on obtient $\boxed{\eta = 0{,}5}$: la moitié de la puissance fournie par la FÉM est reçue par la résistance R (l'autre moitié étant « perdue » dans la résistance interne r du générateur).



Plus la résistance est grande et plus le rendement de transfert est important, mais si on prend le cas limite $R \to \infty$, le rendement est de 1 mais le courant est nul donc $P_{\text{géné}} = EI = 0$, le générateur ne fournit plus de puissance.

Chapitre 4

Circuit linéaire du premier ordre

UN SCIENTIFIQUE



Joseph Henry (1797-1878) voit le jour dans une famille modeste de la région de New York. Il débute comme apprenti horloger. Poursuivant parallèlement ses études, il obtient un poste d'enseignant en chimie. Il conçoit en 1829 un moteur électrique et trois ans plus tard un électroaimant de grande puissance. Il découvre en 1832, en même temps que Michael Faraday, le phénomène de l'induction et introduit en 1840 la notion d'auto-induction. Son nom est désormais attaché à l'unité d'inductance électrique.

Un peu d'histoire

L'ancêtre du condensateur est la bouteille de Leyde ; cet objet a été conçu indépendamment dans cette ville universitaire par Ewald von Kleist et par Pieter van Musschenbroek en 1745. Il consistait en une bouteille en verre contenant de l'eau et recouverte d'une feuille de métal, le tout relié par une chaîne à une sphère métallique. Daniel Gralath a eu l'idée d'en mettre plusieurs en parallèle pour former la première batterie ; le terme est de Benjamin Franklin qui, par ailleurs, donne une explication du phénomène.

Les bobines ont joué un rôle très important pour mettre en évidence les liens entre électricité et magnétisme. Ampère conçoit un solénoïde, bobine de forme hélicoïdale, et l'appelle ainsi dans un exposé de 1820, en utilisant le mot grec *sôlên* désignant un tuyau et le suffixe *-oïde* signifiant *en forme de*. Son idée est d'avoir une bobine de forme similaire à celle d'un barreau aimanté, pour montrer leur analogie de comportement.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les relations entre intensité et tension pour une bobine et pour un condensateur
- L'énergie stockée dans une bobine ou un condensateur
- Les propriétés de continuité de l'intensité pour une bobine, de la tension et de la charge pour un condensateur
- Les notions de régimes transitoire et permanent et l'ARQS
- L'équation différentielle canonique du premier ordre
- Des exemples de circuits du premier ordre

Ce qu'il faut savoir faire

- Établir une équation différentielle pour un circuit du premier ordre et la mettre sous forme canonique
- Déterminer les conditions initiales dans un circuit
- Résoudre une équation différentielle linéaire en utilisant les conditions initiales
- Exploiter un relevé expérimental pour un système du premier ordre
- Réaliser un bilan énergétique

■■ Résumé de cours

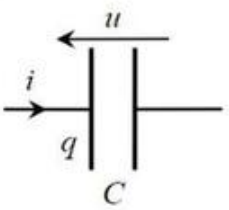
■ Cadre de l'ARQS

Dans l'**approximation des régimes quasi stationnaires** (ARQS), les effets liés à la propagation des signaux sont négligés. Alors l'intensité est la même en tout point d'une même branche, et les lois vues en régime continu (lois de Kirchhoff, loi d'Ohm) restent valables.
Pour un circuit de taille d, dont le régime de fonctionnement a un temps caractéristique τ, la condition d'application de l'ARQS est : $d \ll c\tau$ avec $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

■ Condensateur (idéal)

❑ Définition et propriétés







Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices, séparées par un isolant.

En convention récepteur : $\boxed{i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$. En convention générateur : $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

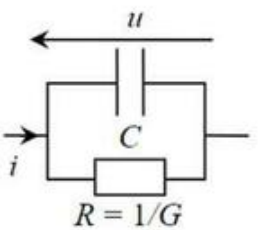
C est la **capacité** du condensateur. Unité SI : le farad (F).
Valeurs usuelles au laboratoire : 1 nF à 1 µF.
La charge portée par l'une des armatures (celle vers laquelle pointe la flèche de tension u), est liée à cette tension par la relation : $\boxed{q = Cu}$. L'autre armature porte la charge $-q$.

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

L'énergie stockée dans un condensateur vaut : $\boxed{\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu^2}$.

❑ Modélisation d'un condensateur réel

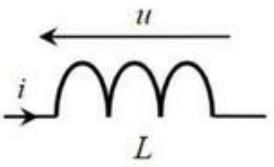
Pour décrire un condensateur réel, il est parfois nécessaire de prendre en compte la *conductance de fuite* (l'isolant n'étant pas parfait). Le condensateur réel est alors modélisé par un condensateur idéal en parallèle avec un dipôle ohmique, d'où la relation : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Gu$.



■ Bobine (idéale)

❑ Définition et propriétés







C'est un enroulement de fil où se produit le phénomène d'auto-induction (voir chapitre **22**).

En convention récepteur : $\boxed{u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$. En convention générateur : $u = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

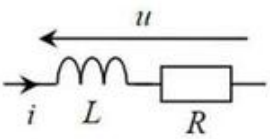
L est l'**inductance** de la bobine. Unité SI : le henry (H).
Valeurs usuelles au laboratoire : 1 mH à 1 H.

L'intensité du courant traversant une bobine ne peut pas subir de discontinuité.

L'énergie stockée dans une bobine vaut : $\boxed{\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2}$.

❑ Modélisation d'une bobine réelle

Il est souvent nécessaire de prendre en compte la résistance des fils qui constituent une bobine. La bobine réelle est alors modélisée par une bobine idéale en série avec un dipôle ohmique : $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$.



■ Régime libre et échelon de tension

– Un circuit en **régime libre** ne comporte aucun générateur. Mais ses grandeurs électriques peuvent évoluer au cours du temps s'il comporte un condensateur initialement chargé (ou plus rarement, une bobine initialement parcourue par un courant).
– Un circuit est soumis à un **échelon de tension** s'il comporte une source dont la FÉM est nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela correspond en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.
– Dans ce chapitre, on étudie l'évolution temporelle des grandeurs électriques d'un circuit linéaire, en régime libre ou en réponse à un échelon de tension : c'est un **régime transitoire** (de durée limitée), aboutissant finalement à un nouveau **régime permanent** (continu).

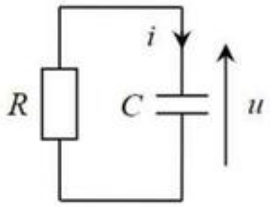
■ Régime transitoire d'un circuit du premier ordre

❑ Équation différentielle

Un système est dit du premier ordre lorsqu'il est régi par une équation différentielle qui lie une de ses variables avec sa dérivée première. Cette équation peut alors se mettre sous la forme canonique : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}x = G}$ où τ est appelé **constante de temps** ou **temps de relaxation**.

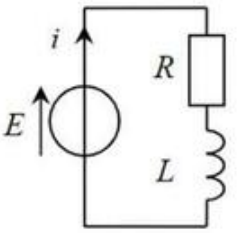
❑ Exemples fondamentaux : circuits *RC* et *RL*

Circuit *RC* en régime libre



$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}u=0 \text{ avec } \tau=RC$$

Circuit *RL* soumis à un échelon



$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}i=\frac{E}{L} \text{ avec } \tau=\frac{L}{R}$$

⇨ **Méthode 4.1. Établissement de l'équation différentielle**
⇨ **Méthode 4.2. Identification des termes de l'équation canonique**

❑ Solution

– Si l'équation différentielle est sans second membre (c'est-à-dire avec 0 au second membre), la solution est de la forme : $\boxed{x(t)=Ae^{-t/\tau}}$.

– Si l'équation comporte un second membre constant non nul, la solution générale de l'équation est la somme de la *solution générale de l'équation sans second membre* et d'une *solution particulière* constante, soit : $\boxed{x(t)=x_{sgs}(t)+x_{sp}=Ae^{-t/\tau}+x_{sp}}$.

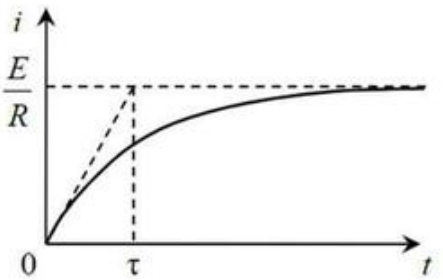
– Dans les deux cas, la constante inconnue A (**constante d'intégration**) se détermine en utilisant la valeur de x à $t=0^+$ (**condition initiale**).

⇨ **Méthode 4.3. Détermination des conditions initiales d'un circuit**
⇨ **Méthode 4.4. Résolution de l'équation différentielle**

❑ Représentation graphique

$x(t)$ tend vers une valeur asymptotique (0 ou x_{sp}) avec une durée de l'ordre de quelques τ. On a représenté ici la solution de l'équation $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}i=\frac{E}{L}$ avec $i(0^+)=0$.

L'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote finale donne la valeur de la constante de temps τ.



⇨ **Méthode 4.5. Principe de la méthode d'Euler**
⇨ **Méthode 4.6. Implémentation de la méthode d'Euler en Python**
⇨ **Méthode 4.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec la bibliothèque Scipy**

❑ Bilan énergétique

– Lors de la *décharge* d'un condensateur dans un circuit *RC*, l'énergie $\mathcal{E}_{C,0}=\frac{1}{2}Cu_0^2$ stockée initialement dans le condensateur est transférée au dipôle ohmique et dissipée par effet Joule.

– Lors de la *charge* d'un condensateur, sous une tension E, à travers une résistance, l'énergie transférée par la source au dipôle ohmique (et dissipée par effet Joule) est égale à l'énergie $\mathcal{E}_{C,\infty}=\frac{1}{2}CE^2$ transférée par la source au condensateur : le rendement est donc de 50 %.

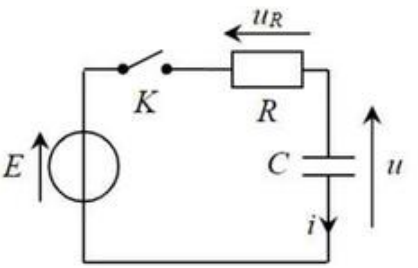
■ Comment déterminer l'équation différentielle d'un circuit sous forme canonique ?

❑ Méthode 4.1. Établissement de l'équation différentielle

Écrire les relations entre intensité et tension relatives à chaque dipôle, puis utiliser la loi des nœuds et/ou la loi des mailles pour éliminer les variables non souhaitées, de manière à ne garder qu'une seule grandeur inconnue (fonction du temps).
Dans le cas où on ne peut pas éliminer une variable car seules les informations sur sa dérivée sont disponibles, il faut dériver toute l'équation.

⇨ Exercices 4.3 à 4.9

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on cherche à déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant traversant le circuit ci-dessous, le condensateur étant initialement déchargé.



Les équations relatives aux différents dipôles du schéma sont : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ pour le condensateur ; $u_R = Ri$ pour la résistance.

Pour $t > 0$, la loi des mailles donne $E = u_R + u$. On utilise les formules de chaque dipôle de manière à éliminer les variables que l'on ne souhaite pas garder, ce qui permet d'obtenir :

$$E = Ri + u\,.$$

Or l'équation du condensateur contient la dérivée de u, nous dérivons donc l'équation qui devient $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (car E est constant). On remplace le terme $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ que l'on ne souhaite pas garder et l'on obtient l'équation différentielle sur i :

$$\boxed{0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C}}.$$

❑ Méthode 4.2. Identification des termes de l'équation canonique

Écrire l'équation différentielle sans coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé (ordre 1 dans ce chapitre). Il suffit ensuite d'égaler le ou les autres coefficients avec celui ou ceux de l'équation canonique : pour une équation du premier ordre, le second coefficient est noté $1/\tau$.

⇨ Exercices 4.3, 4.4, 4.9

Dans l'exemple précédent de circuit du premier ordre, il faut écrire l'équation différentielle sans coefficient devant la dérivée d'ordre 1, soit $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}i=0$. On identifie avec l'équation d'un système du premier ordre $\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}x=0}$: le second coefficient est $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{RC}$ d'où $\boxed{\tau=RC}$.

■ Comment résoudre l'équation différentielle d'un circuit ?

❑ Méthode 4.3. Détermination des conditions initiales d'un circuit

Il faut déterminer la valeur de la grandeur étudiée à $t=0^+$, c'est-à-dire juste après le déclenchement du régime transitoire (fermeture ou ouverture d'un interrupteur…). On utilise pour cela la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou celle de l'intensité du courant traversant une bobine entre $t=0^-$ et $t=0^+$, puis éventuellement la loi des mailles ou la loi des nœuds.

⇨ Exercices 4.1 à 4.9

Dans l'exemple du premier ordre, nous allons déterminer la valeur initiale du courant, puisque l'équation différentielle porte sur *i*.

Le condensateur est initialement déchargé, donc $u(0^-)=0$, et d'après la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on en déduit que $u(0^+)=0$.

La loi des mailles permet d'obtenir à $t=0^+$: $E=Ri(0^+)+u(0^+)$ d'où l'on tire $\boxed{i(0^+)=\frac{E}{R}}$.

Attention, $i(0^+)\neq i(0^-)$ puisque $i(0^-)=0$ (pas de courant quand l'interrupteur était ouvert) : le courant est discontinu, ce qui est fréquent dans un condensateur ou une résistance.

❑ Méthode 4.4. Résolution de l'équation différentielle

La résolution se fait en deux ou trois étapes.
– La première étape consiste à déterminer la forme de la *solution générale de l'équation sans second membre* (toujours la même pour un système du premier ordre), qui comporte une constante multiplicative à déterminer.
– Si l'équation à résoudre comporte un second membre (terme non nul), la seconde étape est la détermination de la *solution particulière* qui a la même forme que le second membre (donc constante dans ce chapitre). La solution générale de l'équation étudiée est alors la somme des deux résultats précédents.
– On détermine finalement la constante inconnue avec une condition initiale.

⇨ Exercices 4.3 à 4.9

– L'équation trouvée précédemment $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}i=0$ était sans second membre, donc on obtient directement $i(t)=Ae^{-t/\tau}$. La condition initiale sur le courant permet de déterminer la valeur de A. En effet $i(0^+)=A$ selon la solution que l'on vient de déterminer, et $i(0^+)=\frac{E}{R}$ d'après les conditions initiales.

On en déduit donc $A=\frac{E}{R}$, soit finalement $\boxed{i(t)=\frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$.

– Pour une équation différentielle avec second membre, par exemple $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u=\frac{E}{RC}$, on obtiendrait de même $u_{\mathrm{sgs}}(t)=Ae^{-t/\tau}$ en posant $\tau=RC$. La solution particulière *constante* est donnée par $\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{sp}}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_{\mathrm{sp}}=\frac{E}{RC}$, soit $u_{\mathrm{sp}}=E$ $\left(\text{puisque } \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{sp}}}{\mathrm{d}t}=0 \text{ pour une constante}\right)$.

La solution complète est donc $u(t)=u_{\mathrm{sgs}}(t)+u_{\mathrm{sp}}=Ae^{-t/\tau}+E$. Si la condition initiale est par exemple $u(0^+)=0$, on trouve $A=-E$ d'où finalement $\boxed{u(t)=E(1-e^{-t/\tau})}$.

■ Comment résoudre une équation différentielle d'ordre 1 par une méthode numérique ?

❑ Méthode 4.5. Principe de la méthode d'Euler

L'équation différentielle d'ordre 1 à résoudre est du type $\dot{y}(t) + a\,y(t) = b$, a et b étant des constantes, $y(t)$ une fonction du temps et $\dot{y}(t)$ sa dérivée temporelle. On suppose que la valeur initiale $y(0) = y_0$ est connue.

La méthode d'Euler consiste à déterminer les valeurs $y(t_i)$ de la fonction pour des dates t_i successives en utilisant l'approximation $\dot{y}(t_i) = \dfrac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$.

À partir de la valeur $y(t_i)$ de la fonction à une date t_i :

- on calcule $\dot{y}(t_i)$ avec l'équation différentielle $\dot{y}(t_i) = b - a\,y(t_i)$;
- on calcule $y(t_{i+1})$ avec l'approximation $y(t_{i+1}) = y(t_i) + p\,\dot{y}(t_i)$, où $p = t_{i+1} - t_i$ est le **pas** de la méthode.

⇨ Exercices 4.11, 4.12

On considère l'équation différentielle : $\dot{y}(t) + 2y(t) = 5$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.
En utilisant la méthode d'Euler avec un pas $p = 0{,}1$ s, les premières valeurs sont :

date t_i (s)	$y(t_i)$	$\dot{y}(t_i)$
$t_0 = 0$	0	$5 - 2\times 0 = 5$
$t_1 = p = 0{,}1$	$0 + 0{,}1\times 5 = 0{,}5$	$5 - 2\times 0{,}5 = 4$
$t_2 = 2p = 0{,}2$	$0{,}5 + 0{,}1\times 4 = 0{,}9$	$5 - 2\times 0{,}9 = 3{,}2$
$t_3 = 3p = 0{,}3$	$0{,}9 + 0{,}1\times 3{,}2 = 1{,}22$	$5 - 2\times 1{,}22 = 2{,}56$

Plus le pas est faible, plus la méthode d'Euler donne un résultat proche de la solution exacte.

❑ Méthode 4.6. Implémentation de la méthode d'Euler en Python

L'équation différentielle d'ordre 1 à résoudre est du type $\dot{y}(t) + ay(t) = b$, comme pour la méthode précédente, avec pour valeur initiale $y(0) = y_0$.

Il faut définir :

- la durée t_{max} sur laquelle on veut tracer la solution ;
- le nombre de points N (nombre de dates t_i) ;
- le pas p de la méthode tel que $t_{max} = (N-1)p$.

Ensuite, on crée une fonction qui renvoie la liste de dates grâce à la bibliothèque `numpy` :

```
import numpy as np
def liste_dates(tmax,N) :
     return np.linspace(0, tmax, N)
```

Il ne reste plus qu'à créer une fonction qui renvoie la liste des valeurs de la fonction $y(t_i)$ pour les dates t_i choisies :

```
def euler_ordre1(T,y0,a,b) :
     N = len(T)
     t_max = T[N-1]
     p = tmax/(N-1)
     Y = np.zeros(N) #un tableau ne contenant que la valeur 0
     Y[0]=y0
     for i in range(1,N):
          Y[i] = p*b+Y[i-1]*(1-a*p)
```

On peut alors tracer la solution en utilisant la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.

⇨ **Exercice 4.12**

Soit à résoudre l'équation différentielle que vérifie la tension $u(t)$ d'un condensateur de capacité C lors de sa décharge à travers une résistance R : $RC\dot{u}(t)+u(t)=0$.
On donne $R=1{,}0\ \text{k}\Omega$, $C=1{,}0\ \mu\text{F}$ et $u(0)=2{,}0\ \text{V}$.

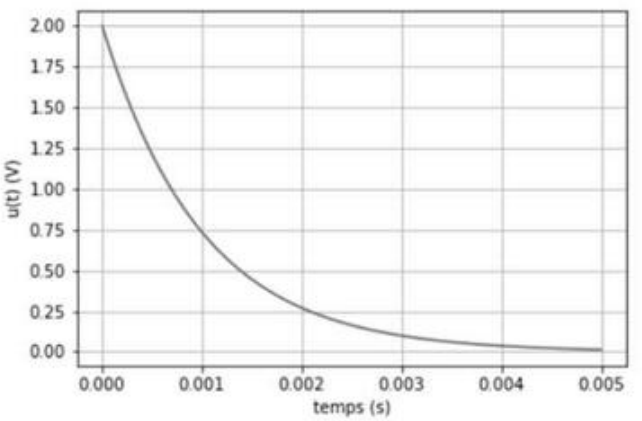
L'équation peut s'écrire $\dot{u}(t)+\dfrac{1}{RC}u(t)=0$, soit $a=\dfrac{1}{RC}=1000\ \text{s}^{-1}$ et $b=0$.

Le programme suivant permet de tracer la solution pour une durée $t_{\max}=5{,}0\ \text{ms}$ avec $N=500$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T = liste_dates(0.005,500)
Y = euler_ordre1(T,2,1000,0)

plt.plot(T,Y)
plt.xlabel('temps (s)')
plt.ylabel('u(t) (V)')
plt.grid()
plt.show()
```



❑ Méthode 4.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec la bibliothèque Scipy

Il faut mettre l'équation différentielle sous la forme $\dot{y}(t) = f\left(y(t), t\right)$.

On utilise alors la méthode `odeint` du module `integrate` de la bibliothèque Scipy qui prend en paramètres :

- la fonction f ;
- la condition initiale $y(0)$;
- la liste `T` des dates pour lesquelles on calcule la fonction $y(t)$.

La méthode renvoie alors la liste `Y` (voir la méthode précédente).

Pour résoudre une équation différentielle du type $\dot{y}(t) + a\,y(t) = b$, on écrira le code suivant.

```
def f(y,t): # on définit la fonction f
    return b - a*y
y0 = 2    # Valeur initiale de la fonction y(t), soit 2 par
exemple
T = np.linspace(0,t_max,N) # liste des dates

Y=sp.odeint(f,y0,T) # application de la méthode odeint qui
fournit la liste Y
```

⇨ Exercice 4.12

On cherche à résoudre l'équation différentielle de la méthode précédente :

$\dot{u}(t) + \dfrac{1}{RC}u(t) = 0$, soit $f\left(u(t), t\right) = -a\,u(t)$ avec $a = \dfrac{1}{RC} = 1000\ \text{s}^{-1}$.

Le code, en utilisant la méthode `odeint`, est le suivant :

```
import scipy.integrate as sp
import numpy as np

def f(y,t):
    return -1000*y

y0 = 5   # Valeur initiale de la fonction y(t)
T = np.linspace(0,0.005,500)

X=sp.odeint(f,y0,T)
```

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La solution de l'équation sans second membre d'un système du premier ordre a toujours la même forme.	☐	☐
2.	La solution particulière d'un système du premier ordre est de la même forme que le second membre.	☐	☐
3.	La solution particulière d'un système du premier ordre est aussi la solution du régime permanent.	☐	☐
4.	L'intensité du courant traversant une inductance ne peut pas subir de discontinuité.	☐	☐
5.	La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité.	☐	☐
6.	La charge d'un condensateur peut subir une discontinuité.	☐	☐
7.	La tension aux bornes d'une bobine peut subir une discontinuité.	☐	☐
8.	L'équation différentielle linéaire $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}u=0$ admet pour solution $u(t)=Ae^{+t/\tau}$.	☐	☐
9.	La durée de la phase transitoire est de l'ordre de 3τ.	☐	☐
10.	Il est possible de charger un condensateur avec une source de tension sans dissipation d'énergie.	☐	☐

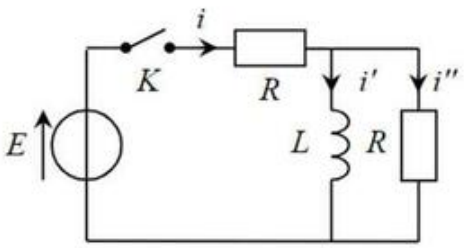
■■ Énoncé des exercices

■ Conditions initiales et régime permanent

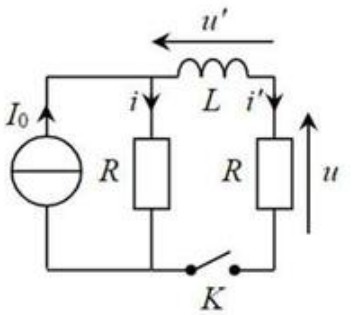
❑ Exercice 4.1. Détermination de conditions initiales

Dans les circuits suivants, avant la fermeture des interrupteurs, tous les courants traversant les bobines sont nuls et tous les condensateurs sont déchargés. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Déterminer la valeur de chaque intensité et de chaque tension représentée, juste après la fermeture de K.

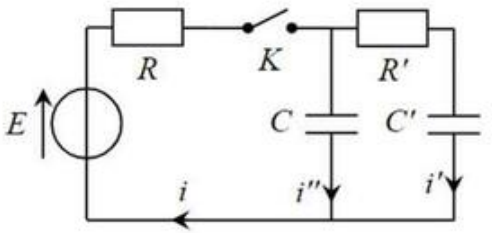
1.



2.



3.



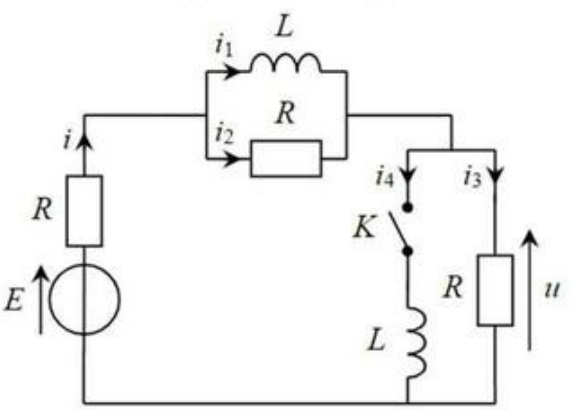
❑ Exercice 4.2. Conditions initiales et finales après un régime établi*

Dans le montage de la figure ci-contre, le générateur de tension continue a une force électromotrice E. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer u et les courants i_1, i_2, i_3, i_4 et i à $t = 0^+$ (juste après la fermeture de K).

2. Déterminer u et les courants i_1, i_2, i_3, i_4 et i quand t tend vers l'infini.

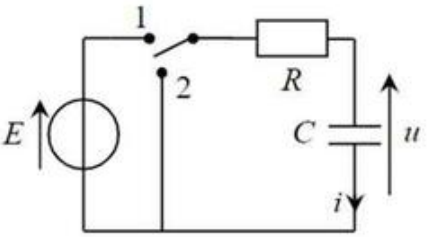
D'après Agro-Véto



■ Étude de régime transitoire

❑ Exercice 4.3. Charge et décharge d'un condensateur*

On considère le circuit RC série représenté sur le schéma.



1. L'évolution de la position de l'interrupteur K est :
pour $t < 0$ en position 2 ; pour $t > 0$ en position 1.
On suppose le condensateur initialement déchargé.

a) Déterminer l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur. Que vaut la constante de temps ?

b) Déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$ et représenter son allure.

c) En déduire l'expression du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit et tracer son allure.

d) Faire un bilan de puissance pour identifier ce que devient la puissance fournie par le générateur.

2. On suppose que le circuit est en régime établi. On considère alors une nouvelle évolution de la position de l'interrupteur K : $\begin{cases} t < 0 \text{ en position 1 ;} \\ t > 0 \text{ en position 2.} \end{cases}$

a) En se servant du résultat précédent, donner l'équation différentielle sous forme canonique vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.

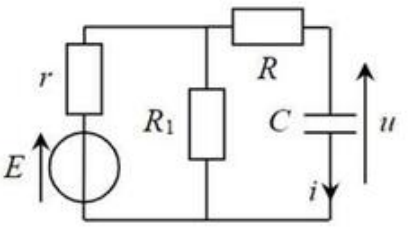
b) Déterminer l'expression de $u(t)$ et représenter son allure.

c) En déduire l'expression du courant $i(t)$ qui parcourt le circuit.

d) Faire un bilan d'énergie et déterminer la valeur de l'énergie dissipée par effet Joule.

❑ Exercice 4.4. Charge d'un condensateur*

À $t = 0$, on met le circuit sous tension par l'intermédiaire du générateur antérieurement éteint.



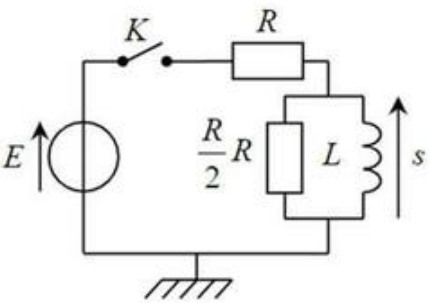
1. Déterminer $i(0^+)$ et $i(\infty)$ par des considérations simples.

2. Déterminer $i(t)$.

3. Calculer la constante de temps τ pour $C = 10\ \mu\text{F}$, $R_1 = 6\ \text{k}\Omega$, $r = 100\ \Omega$ et $R = 4\ \text{k}\Omega$.
La comparer à la valeur qu'elle aurait si R_1 était infinie et r nulle.

❑ Exercice 4.5. Charge d'un circuit *RL**

Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur idéal de tension continue, de force électromotrice E.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.



1. Y a-t-il continuité de la tension $s(t)$ en $t = 0$?
Y a-t-il continuité du courant dans la résistance R en $t = 0$? Commenter physiquement les réponses. En déduire le comportement de $s(t)$ au voisinage de $t = 0^+$.

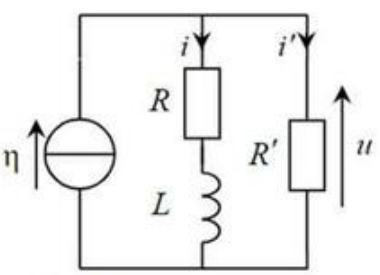
2. Déterminer également le comportement asymptotique de $s(t)$ lorsque $t \to \infty$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.
4. En déduire $s(t)$.
5. Tracer l'allure de $s(t)$.
6. Exprimer en fonction de L et R le temps t_0 au bout duquel $s(t_0) = \dfrac{s(t=0^+)}{10}$.
7. En déduire une méthode expérimentale pour déterminer t_0 à l'oscilloscope. On précisera le montage électrique à réaliser et la mesure à effectuer concrètement.
8. On mesure expérimentalement $t_0 = 3{,}0$ µs. On donne $R = 1000\ \Omega$, en déduire L.
9. On remplace le générateur continu par un générateur délivrant un signal périodique en créneaux. Quel doit être l'ordre de grandeur de la fréquence du générateur pour qu'on puisse effectivement mesurer t_0 à l'oscilloscope, en utilisant la méthode indiquée à la question 7 ?

D'après Agro-Véto

❑ Exercice 4.6. Branches en parallèle*

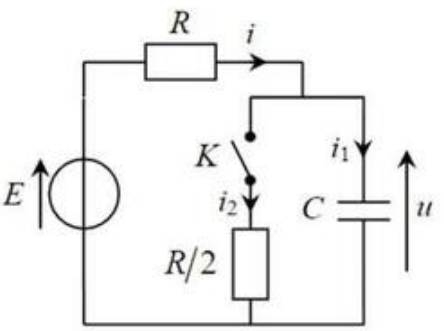
Le circuit que l'on considère est soumis à un échelon de courant délivré par un générateur idéal de courant, tel que :
$\eta = 0$ pour $t < 0$; $\eta = I_0$ pour $t > 0$.



1. Déterminer $i(0^+)$ et $i'(0^+)$.
2. Déterminer l'intensité instantanée $i(t)$ du courant qui traverse la bobine pour $t > 0$.
3. En déduire les expressions de l'intensité $i'(t)$ dans la résistance R' et de la tension $u(t)$.
4. Tracer les courbes de réponses $i(t)$ et $u(t)$.

❑ Exercice 4.7. Fermeture d'interrupteur*

Nous considérons le circuit ci-contre. Nous noterons i l'intensité dans le résistor de résistance R, i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C, i_2 l'intensité dans le résistor de résistance $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.
À l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, nous fermons l'interrupteur K.

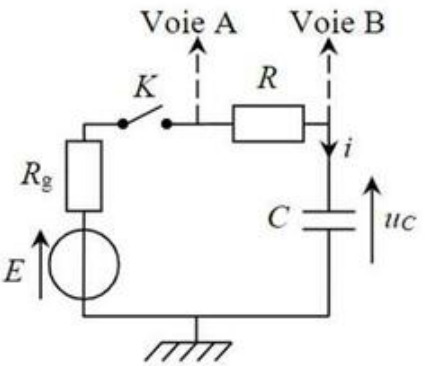


1. Préciser i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur.
2. En déduire i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.
3. Même question quand t tend vers l'infini.
4. Montrer, en transformant le circuit, qu'il est équivalent à un simple circuit RC en charge, dont on précisera les caractéristiques.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$, ainsi que la solution.
6. Tracer l'allure de $u(t)$.

❑ Exercice 4.8. Détermination graphique* *

Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On le relie aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R_g en série avec un interrupteur K.

Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit u_C la tension aux bornes du condensateur.



À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminer $u_C(0^+)$ et $i(0^+)$ en les justifiant.

2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $u_C(t)$.

3. Déterminer la constante de temps τ du circuit, et donner son interprétation physique.

4. Établir l'expression de $u_C(t)$.

5. Déterminer l'expression de t_1 pour que $u_C(t_1) = 0{,}9E$.

Dans l'étude expérimentale du circuit RC, on observe l'oscillogramme ci-dessous, en utilisant un générateur délivrant des signaux en créneaux.

Les sensibilités sont :

1 V/carreau vertical ;

0,1 ms/carreau horizontal.

On néglige les caractéristiques de l'oscilloscope.

6. Identifier les courbes (1) et (2) aux voies A et B en justifiant votre choix.

7. Doit-on être sur le couplage alternatif AC ou le couplage continu DC ?

8. Préciser l'expression de la tension au point P. Sachant que $R = 100\ \Omega$, déterminer R_g.

9. En déduire les valeurs de C et E.

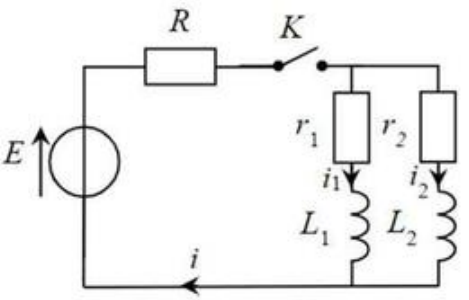
10. Estimer une majoration de la fréquence du signal carré utilisé.

11. Comment pourrait-on observer l'intensité ?

❑ Exercice 4.9. Bobines en parallèle* *

Nous considérons le circuit ci-contre.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On suppose que les deux bobines sont identiques et peuvent être modélisées par une inductance L en série avec une résistance r. Pour se repérer dans l'écriture des équations, on note résistance et inductance avec un indice comme sur le schéma, mais $r_1 = r_2 = r$ et $L_1 = L_2 = L$.



1. Déterminer $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $i(0^+)$ en les justifiant.

2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $i_1(t) - i_2(t)$.

3. Démontrer que $i_1(t) = i_2(t)$.

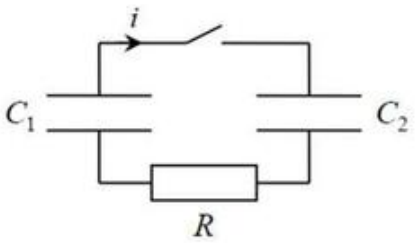
4. Établir l'expression de l'équation différentielle à laquelle obéit $i(t)$.

5. Établir l'expression de $i(t)$.

6. Donner l'expression de l'énergie W_1 stockée dans la bobine L_1, puis l'énergie W stockée dans les deux bobines au bout d'un temps infini (très grand devant la constante de temps).

❑ Exercice 4.10. Décharge d'un condensateur dans un autre * *

On considère le circuit suivant :



Le condensateur de capacité C_1 porte la charge q_0 sur l'armature du haut, et celui de capacité C_2 est déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$.

2. Déterminer la solution de cette équation différentielle.

3. Quelles sont les charges des deux condensateurs au bout d'un temps très long (t tendant vers l'infini) ? Commenter.

4. Que vaut l'énergie du système E_0 avant la fermeture de l'interrupteur ? Quelle est sa valeur E_∞ après fermeture, au bout d'un temps très long ? Commenter le signe de $E_\infty - E_0$.

5. Sous quelle forme l'énergie s'est-elle dissipée ? Faire le calcul direct de cette dissipation et retrouver la variation d'énergie $E_\infty - E_0$.

6. L'expression de la variation d'énergie ne dépend pas de R : elle est donc inchangée même si R est nulle. Mais dans ce cas, où est passée l'énergie perdue ?

■ Résolution numérique : méthode d'Euler

❑ Exercice 4.11. Principe de la méthode d'Euler

Lors de la charge d'un condensateur de capacité $C = 200\ \mu\text{F}$ à travers une résistance $R = 100\ \text{k}\Omega$ par un générateur délivrant une tension constante $E = 30\ \text{V}$, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle : $u_C(t) + RC\dfrac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t} = E$.

On se propose de résoudre numériquement cette équation en utilisant la méthode d'Euler.

1. Établir numériquement la relation entre $\dfrac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}$ et $u_C(t)$.

2. La méthode d'Euler permet de calculer successivement les valeurs de $u_C(t)$ et $\dfrac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}$ à un intervalle de temps Δt régulier appelé le pas. On utilise alors l'approximation : $u_C(t+\Delta t) = u_C(t) + \left(\dfrac{\text{d}u_C(t)}{\text{d}t}\right)_t \Delta t$. On prend un pas $\Delta t = 2\ \text{s}$.

Compléter, dans le tableau suivant, construit avec cette méthode, les colonnes correspondant aux dates $t = 2$ s et $t = 4$ s.

t (s)	0	2	4	6	8	10
$u_C(t)$ (V)	0			8,14	10,03	12,3
$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ ($\mathrm{V \cdot s^{-1}}$)	1,50			1,09	0,99	0,89

3. La solution exacte de cette équation différentielle est $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$. Comparer la valeur donnée par la méthode d'Euler à la valeur exacte pour la date $t = 10$ s. Conclure.

4. Pour améliorer la précision de la solution donnée par la méthode d'Euler, dans quel sens faut-il modifier Δt ?

❑ Exercice 4.12. Résolution d'une équation différentielle avec Python

On cherche à résoudre l'équation différentielle de l'exercice précédent : $u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E$ avec les mêmes valeurs : $C = 200$ µF, $R = 100$ kΩ et $E = 30$ V. Le but est de tracer la courbe $u_C(t)$ pour des abscisses entre $t = 0$ s et $t = 120$ s. On notera `T` la liste des dates et `U` la liste des valeurs de $u_C(t)$ correspondantes. On importe la bibliothèque Numpy avec le surnom `np`.

1. Dans un premier temps on cherche à implanter directement la méthode d'Euler. On utilise l'équation différentielle pour calculer la fonction dérivée à chaque date :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\left(E - u_C(t)\right) = \frac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(t)\right)$$

et l'approximation suivante pour calculer les valeurs de la fonction :

$$u_C(t_{i+1}) = u_C(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\left(\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t_i}.$$

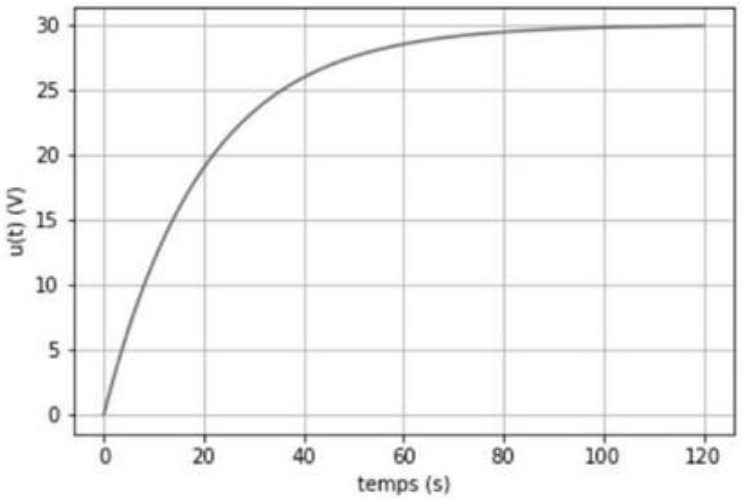
a) Écrire la ligne de code permettant de créer une liste de dates comprises entre $t = 0$ s et $t = 120$ s avec un pas $p = 0{,}1$ s.

b) On crée la liste `U` qui contient la valeur initiale de la fonction, soit $u_C(0)$, avec l'instruction :

```
U = [0]
```

En utilisant une boucle `for`, construire la liste `U` en ajoutant à chaque boucle une nouvelle valeur de $u_C(t)$.

c) Écrire le code permettant d'obtenir la figure suivante, en utilisant les listes `T` et `U`.



2. On peut également utiliser la méthode `odeint`. On écrit donc le code suivant pour générer la liste `U` à partir de la liste `T` avec la méthode `odeint` (les bibliothèques sont supposées importées).

```
y0 = 0
def f(y, t):
    return ???????
U=sp.odeint(f, ??? , T)
```

Compléter les parties de code manquantes (là où il y a des points d'interrogation).

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 4.1. Il faut commencer par écrire les grandeurs que l'on connaît en $t = 0^+$ par continuité (pour chaque condensateur et chaque inductance).
Exercice 4.3. Question 1.d : multiplier l'équation de la loi des mailles (qui comporte toutes les tensions) par l'intensité pour faire apparaître des puissances.
Exercice 4.4. La question 2 est brève, mais il s'agit comme toujours d'établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, puis de la résoudre.
Exercice 4.7. Question 3 : pour $t \to +\infty$, le circuit est en régime établi, on peut alors le redessiner en remplaçant le condensateur par son équivalent.
Exercice 4.10. Pour commencer il faut définir toutes les notations que l'on va utiliser (tensions et charges), et faire ensuite très attention aux conventions choisies pour écrire les différentes relations sans erreur de signe. Pour la question 3, chercher à établir deux équations pour ces deux inconnues, à partir des équations trouvées aux questions 1 et 2.
Exercice 4.12. Calculer le nombre de points nécessaires pour créer la liste `T`, puis utiliser la méthode append pour ajouter chaque valeur à la liste `U`.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux

6. La tension ne peut pas subir de discontinuité aux bornes d'un condensateur, et comme elle est liée à la charge du condensateur par la relation de proportionnalité $q = Cu$, la charge ne peut pas non plus subir de discontinuité.

7. La continuité imposée par la physique concerne l'intensité traversant une bobine, mais pas sa dérivée : il n'y a pas de règle sur la tension aux bornes de l'inductance, qui peut être discontinue.

8. Attention, il y a un signe – dans la solution : $u(t) = Ae^{-t/\tau}$, sinon elle serait divergente (tendrait vers l'infini), ce qui n'est pas possible avec les circuits linéaires étudiés dans ce chapitre.

9. Au bout de 3τ, le système est arrivé à sa valeur finale à 5 % près.

10. Quelle que soit la valeur de la résistance (qui est toujours non nulle), elle dissipe exactement la moitié de l'énergie fournie par la source de tension.

❑ Les erreurs classiques

– Lorsqu'un dipôle est représenté en convention générateur sur un schéma, il ne faut pas oublier d'adapter la formule à cette convention (avec un signe –). Si on a trouvé deux coefficients de signes contraires dans l'équation différentielle, il y a forcément une erreur !

– Un condensateur n'est pas forcément déchargé avant que le régime transitoire ne commence : cela sera soit indiqué explicitement dans l'énoncé, soit à déterminer soi-même d'après la description du circuit avant l'instant $t = 0$.

– Dans le cas d'une équation différentielle avec second membre, pour trouver la constante d'intégration, ne jamais appliquer la condition initiale à la solution de l'équation *sans* second membre. Il faut l'appliquer à la solution *complète*, comportant la solution particulière constante.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 4.1

1. On part de la continuité du courant dans la bobine : $\boxed{i'(0^+)=i'(0^-)=0}$ d'après l'énoncé.
Par conséquent, en appliquant la loi des nœuds, on obtient $i(0^+)=i''(0^+)$. On applique la loi des mailles à la maille extérieure du circuit : $E=Ri(0^+)+Ri''(0^+)$, soit $\boxed{i(0^+)=\frac{E}{2R}=i''(0^+)}$.

⇨ *Méthode 4.3*

2. On part de la continuité du courant dans la bobine $\boxed{i'(0^+)=i'(0^-)=0}$, d'où on en déduit $\boxed{u(0^+)=Ri'(0^+)=0}$. On applique la loi des nœuds : $I_0=i(0^+)+i'(0^+)$ soit $\boxed{i(0^+)=I_0}$.
On applique finalement la loi des mailles à la maille de droite du circuit : $Ri(0^+)=u'(0^+)+u(0^+)$, soit d'après ce qui précède $\boxed{u'(0^+)=RI_0}$.

3. On part de la continuité de la tension aux bornes des condensateurs : $u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$ et $u_{C'}(0^+)=u_{C'}(0^-)=0$ (tension en convention récepteur par rapport à la flèche de courant). Dans la maille de droite, on a $u_C(0^+)=R'i'(0^+)+u_{C'}(0^+)=0$, soit $\boxed{i'(0^+)=0}$. La maille de gauche donne $E=Ri(0^+)+u_C(0^+)$, soit $\boxed{i(0^+)=\frac{E}{R}}$.
En utilisant la loi des nœuds, on trouve enfin : $\boxed{i''(0^+)=i(0^+)=\frac{E}{R}}$.

Exercice 4.2

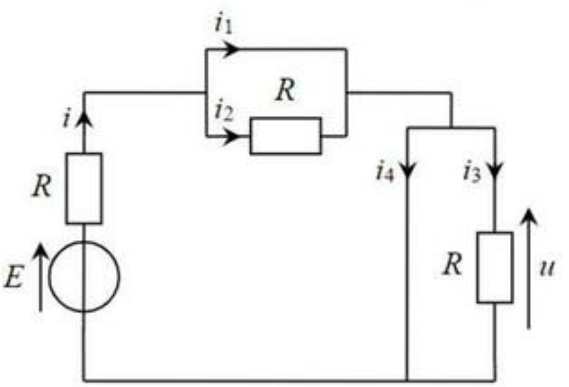
1. Par continuité du courant dans une bobine : $\boxed{i_4(0^+)=i_4(0^-)=0}$ (car l'interrupteur était initialement ouvert).
De plus, pour $t<0$, l'interrupteur étant ouvert depuis longtemps, le circuit est en régime permanent (continu) et la bobine horizontale est équivalente à un fil et court-circuite la résistance R. Par conséquent la loi des mailles permet d'obtenir $i_1(0^-)=i_3(0^-)=\frac{E}{2R}$; par continuité du courant dans une bobine, on en déduit $\boxed{i_1(0^+)=i_1(0^-)=\frac{E}{2R}}$.
Avec des lois des nœuds, on a $i=i_1+i_2=i_3+i_4$ (1), soit $i(0^+)=i_3(0^+)$ (2). La loi des mailles donne $E=Ri+Ri_2+Ri_3$ donc en $t=0^+$, en utilisant (2) et en remplaçant i, $E=R(i_1+i_2)+Ri_2+R(i_1+i_2)=2Ri_1(0^+)+3Ri_2(0^+)$, d'où on déduit $\boxed{i_2(0^+)=0}$.

La loi des nœuds donne $\boxed{i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{2R} = i_3(0^+)}$. La tension vaut $\boxed{u(0^+) = Ri_3(0^+) = \frac{E}{2}}$.

⇨ *Méthode 4.3*

2. Quand t tend vers l'infini, le régime établi est atteint et les bobines sont équivalentes à des fils. Alors deux des résistances sont court-circuitées : $\boxed{i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0}$ et $\boxed{u(\infty) = Ri_3(\infty) = 0}$.

La loi des mailles permet d'obtenir $\boxed{i(\infty) = \frac{E}{R}}$, et la loi des nœuds permet de conclure par $\boxed{i_1(\infty) = i_4(\infty) = i(\infty) = \frac{E}{R}}$.



Exercice 4.3

1. a) Pour $t > 0$, l'interrupteur est en position 1 et les relations élémentaires sur les dipôles sont, en convention récepteur, $u_R = Ri$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

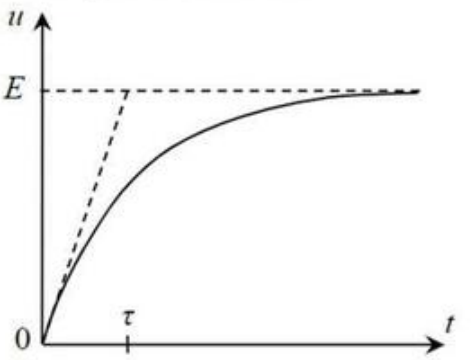
Loi des mailles : $E = u_R + u = Ri + u = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$. Cela donne sous forme canonique : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}}$. On identifie alors la constante de temps : $\boxed{\tau = RC}$.

⇨ *Méthodes 4.1, 4.2*

b) La solution générale de l'équation sans second membre $\frac{\mathrm{d}u_{sgs}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{sgs}}{\tau} = 0$ est de la forme $u_{sgs} = Ke^{-t/\tau}$.

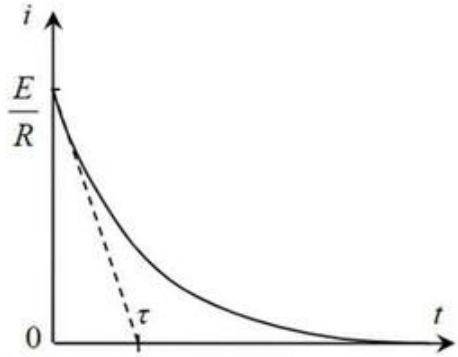
La solution particulière est de la même forme que le second membre, donc constante : $\frac{\mathrm{d}u_{sp}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{sp}}{\tau} = \frac{E}{\tau}$, d'où $u_{sp} = E$, qui correspond au régime établi. Donc $u(t) = Ke^{-t/\tau} + E$.

La condition initiale s'obtient par continuité de la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé : $u(0^-) = u(0^+) = 0$, soit $Ke^0 + E = 0$ d'où $K = -E$. La solution est donc : $\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$.



⇨ *Méthodes 4.3, 4.4*

c) Le courant se déduit de l'équation aux bornes du condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ soit $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}}$.



d) Le bilan de puissance s'obtient en multipliant la loi des mailles par le courant $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

On obtient : $Ei = Ri^2 + Cu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Ri^2 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu^2\right)$ soit $\boxed{\mathcal{P}_{\text{généé}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \dfrac{\mathrm{d}E_{\text{stockée}}}{\mathrm{d}t}}$.

Une partie de la puissance fournie par le générateur sert à faire varier l'énergie stockée dans le condensateur, l'autre partie est dissipée par effet Joule.

2. a) Pour $t > 0$, l'interrupteur est en position 2. La mise en équation est identique au cas précédent, sauf que la tension qui valait E vaut maintenant 0, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0}$.

b) Cette équation est sans second membre donc $\boxed{u(t) = K\,e^{-t/\tau}}$.

Avant la décharge, le circuit était en régime établi donc $u(0^-) = E$ (le condensateur est un interrupteur ouvert). On en déduit par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur $u(0^-) = u(0^+) = E$, ce qui donne $u(0) = E = Ke^0 + 0$, d'où $\boxed{u(t) = E\,e^{-t/\tau}}$.

L'allure de la courbe est identique à celle du cas précédent, la décroissance se faisant de E à 0.

c) On en déduit le courant $\boxed{i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}}$. L'allure de la courbe est une croissance exponentielle de $-\dfrac{E}{R}$ à 0.

d) On reprend le bilan de puissance précédent mais en annulant le terme en E, donc $0 = Ri^2 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu^2\right)$ soit $\mathcal{P}_{\text{Joule}} + \dfrac{\mathrm{d}E_{\text{stockée}}}{\mathrm{d}t} = 0$. En intégrant entre 0 et ∞ on obtient $W_{\text{Joule}} + \Delta E_{\text{stockée}} = 0$. Or $\Delta E_{\text{stockée}} = E_{\text{stockée}}(\infty) - E_{\text{stockée}}(0) = \dfrac{1}{2}Cu(\infty)^2 - \dfrac{1}{2}Cu(0)^2 = 0 - \dfrac{1}{2}CE^2$

d'où $\boxed{W_{\text{Joule}} = -\Delta E_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}CE^2}$. On peut le retrouver en intégrant directement :

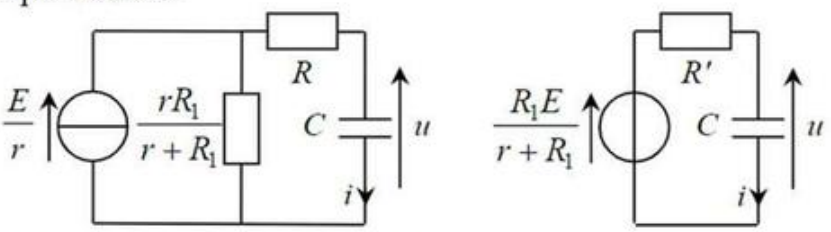
$$W_{\text{Joule}} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{\text{Joule}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2.$$

Corrigé

Exercice 4.4

1. Le cas le plus simple est celui du régime établi, dans ces conditions le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i(\infty)=0}$.

Pour déterminer le courant à l'instant $t=0^+$, nous allons redessiner le circuit en utilisant les équivalences.



Le schéma équivalent est représenté ci-contre avec $R'=\dfrac{rR_1}{r+R_1}+R$.

Or initialement le condensateur est déchargé car le circuit, en régime permanent avant l'instant initial, ne comportait pas de générateur. Donc $u(0^-)=0$ et par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u(0^+)=u(0^-)=0$. La loi des mailles appliquée au circuit équivalent à l'instant $t=0^+$ permet d'obtenir $\dfrac{R_1E}{r+R_1}=R'i(0^+)+u(0^+)$, soit $\boxed{i(0^+)=\dfrac{ER_1}{r(R+R_1)+RR_1}}$.

⇨ *Méthode 4.3*

2. On commence par écrire les relations élémentaires pour les dipôles : $i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $u_R=R'i$.

La loi des mailles donne $\dfrac{R_1E}{r+R_1}=R'i+u$. Or nous voulons conserver une équation sur le courant, et on ne connaît rien sur u mais seulement une relation pour sa dérivée. On dérive donc l'équation précédente et l'on obtient $0=R'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On utilise $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{i}{C}$ et l'on obtient $\boxed{R'C\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=0}$. On pose $\boxed{\tau=R'C}$, la constante de temps du circuit.

⇨ *Méthodes 4.1, 4.2*

Cette équation est sans second membre, donc sa solution est de la forme $\boxed{i(t)=K\,e^{-t/\tau}}$.

Condition initiale : $i(0^+)=\dfrac{ER_1}{r(R+R_1)+RR_1}=K\,e^0=K$ d'où $\boxed{i(t)=\dfrac{ER_1}{r(R+R_1)+RR_1}e^{-t/\tau}}$.

⇨ *Méthode 4.4*

3. Avec les valeurs de l'énoncé, on trouve $\boxed{\tau=41\,\mathrm{ms}}$. Pour R_1 est infinie et r nulle, alors $R'=R$ et l'on a $\boxed{\tau'=RC=40\,\mathrm{ms}}$, valeur très proche de la précédente.

Exercice 4.5

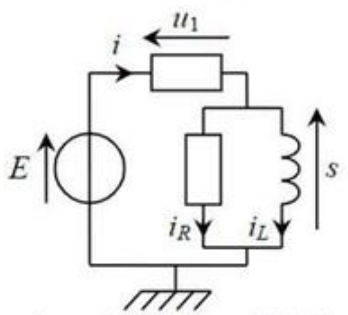
1. Il n'y a pas continuité du courant dans la résistance R car il n'y a pas d'inductance en série avec cette résistance. Il y a pour les mêmes raisons discontinuité du courant qui passe dans $R/2$, ce qui implique que la tension $s(t)$ est discontinue.

Avant la fermeture de l'interrupteur K, aucun courant ne circule dans la bobine car le régime permanent est atteint. À $t = 0^+$, on en déduit par continuité du courant dans l'inductance que le courant dans cette dernière est nul : elle se comporte donc en $t = 0^+$ comme un interrupteur ouvert (avec une tension non nulle à ses bornes). En redessinant le circuit, on reconnaît un diviseur de tension qui permet d'écrire $\boxed{s(0^+) = \frac{E}{3}}$.

⇨ *Méthode 4.3*

2. Lorsque $t \to \infty$, le circuit est en régime permanent (la phase transitoire est terminée). Alors la bobine se comporte comme un fil, on a donc la tension aux bornes d'un fil : $\boxed{s(\infty) = 0}$.

3. Les relations élémentaires sur les dipôles en convention récepteur sont : $s = \frac{R}{2} i_R = L \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ et $u_1 = Ri$.



Loi des mailles : $E = u_1 + s = Ri + s$. On ne veut pas conserver i, on se sert alors de la loi des nœuds : $i = i_R + i_L$. On obtient alors $E = Ri_R + Ri_L + s = Ri_L + 3s$, d'après la première relation élémentaire.

Or on ne connaît rien sur le courant dans la bobine mais nous avons une équation sur sa dérivée. On dérive donc l'équation et on remplace : $0 = R\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s$. Cela donne sous forme canonique $\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$. On pose donc $\boxed{\tau = \frac{3L}{R}}$, le temps de relaxation du circuit.

⇨ *Méthodes 4.1, 4.2*

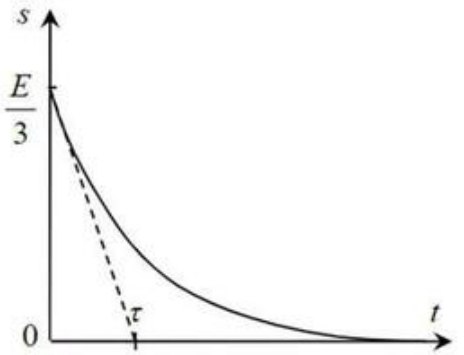
4. L'équation est sans second membre donc la solution est de la forme $\boxed{s(t) = K e^{-t/\tau}}$.

> *Attention, il n'est pas judicieux de poser $\tau' = \frac{L}{R}$, car la solution s'écrirait alors $s(t) = K e^{-t/3\tau'}$, ce qui n'est pas une forme canonique (donc τ' n'aurait pas la signification habituelle de la constante de temps).*

Condition initiale : $s(0) = \frac{E}{3} = Ke^0 + 0$. La solution est donc finalement : $\boxed{s(t) = \frac{E}{3} e^{-t/\tau}}$.

⇨ *Méthode 4.4*

5.



6. On cherche le temps t_0 qui vérifie $s(t_0)=\dfrac{s(0^+)}{10}=\dfrac{E}{30}=\dfrac{E}{3}e^{-t_0/\tau}$, d'où l'on tire après calculs $\boxed{t_0=\tau\ln(10)=\dfrac{3L}{R}\ln(10)}$.

7. On déclenche le début de courbe de l'oscilloscope sur un front montant de la tension s. On mesure avec les curseurs le temps au bout duquel la tension vaut 10 % de sa valeur finale.

La voie 1 de l'oscilloscope est donc branchée entre la masse et le point commun aux deux résistances.

8. En utilisant le résultat de la question 6, on a $\boxed{L=\dfrac{Rt_0}{3\ln(10)}=430\ \mu\text{H}}$.

Les données de l'énoncé ont deux chiffres significatifs, le résultat ne contient par conséquent que deux chiffres significatifs.

9. Il faut pouvoir observer une partie du régime transitoire plus longue que t_0, qui vaut environ $2{,}3\ \tau$: on peut prendre par exemple 3τ comme valeur minimale. Par conséquent, la durée de la demi-période (temps passé avec une tension E) aux bornes du circuit doit au moins être de $3\tau=3\times1{,}3\ \mu\text{s}$: $\dfrac{T}{2}>3\tau$, ce qui implique $\boxed{f<\dfrac{1}{6\tau}=130\ \text{kHz}}$.

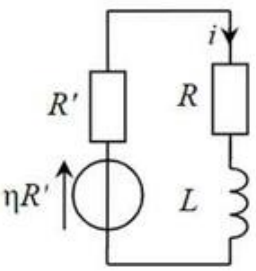
Exercice 4.6

1. Pour $t<0$, le circuit est en régime permanent sans générateur, on a donc $i(0^-)=0$. Par continuité du courant dans une inductance, on en déduit $\boxed{i(0^+)=i(0^-)=0}$.

On utilise ensuite la loi des nœuds en $t=0^+$, ce qui donne $\boxed{I_0=i(0^+)+i'(0^+)=i'(0^+)}$.

⇨ *Méthode 4.3*

2. Par transformation de schéma, sans modifier la branche contenant l'inductance L et la résistance R, pour ne pas perdre le courant i circulant dans cette branche, on obtient le schéma ci-contre.



On obtient immédiatement l'équation différentielle pour $t>0$ en utilisant la loi des mailles et les relations élémentaires sur les dipôles : $R'I_0=(R'+R)i+L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, soit sous forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R'+R}{L}i=\dfrac{R'I_0}{L}$.

Le temps de relaxation du circuit est donc $\tau=\dfrac{L}{R+R'}$.

La solution de l'équation sans second membre est de la forme $i_{sgs}=Ke^{-t/\tau}$.

La solution particulière est constante et vérifie l'équation $\dfrac{R'I_0}{L}=\dfrac{\mathrm{d}i_{sp}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{i_{sp}}{\tau}$, soit $i_{sp}=\dfrac{R'I_0}{R'+R}$.

Donc $i(t) = K e^{-t/\tau} + \dfrac{R'I_0}{R'+R}$. Condition initiale : $i(0^+) = 0 = Ke^0 + \dfrac{R'I_0}{R'+R}$ d'où $K = -\dfrac{R'I_0}{R'+R}$.

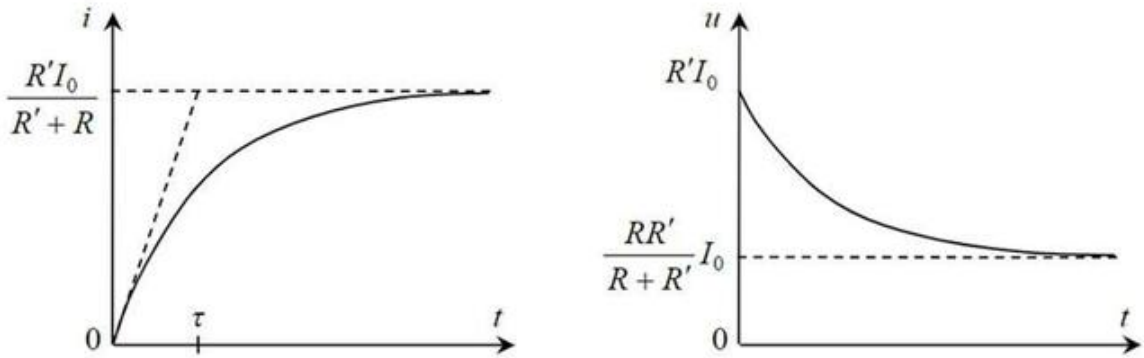
La solution est donc finalement : $\boxed{i(t) = \dfrac{R'I_0}{R'+R}(1 - e^{-t/\tau})}$.

⇨ *Méthodes 4.1, 4.2, 4.4*

3. L'expression du courant i' se déduit de la loi des nœuds : $\boxed{i'(t) = I_0 - i(t) = I_0 \dfrac{R + R'e^{-t/\tau}}{R'+R}}$.

L'expression de la tension est alors : $\boxed{u(t) = R'i' = R'I_0 \dfrac{R + R'e^{-t/\tau}}{R'+R}}$.

4.



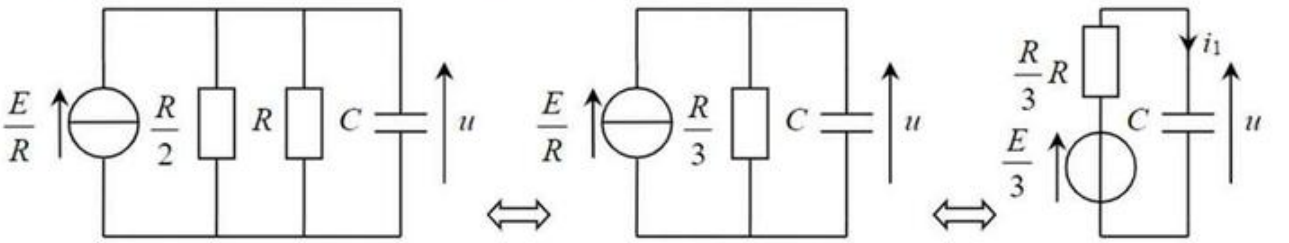
Exercice 4.7

1. Le condensateur est chargé, $\boxed{u(0^-) = E}$. En continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i_1(0^-) = 0}$. On a aussi $\boxed{i_2(0^-) = 0}$ (interrupteur ouvert). Et d'après la loi des nœuds, on obtient $\boxed{i(0^-) = 0}$.

2. Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur donc $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = E}$. Alors en appliquant la loi des mailles sur la maille extérieure $E = Ri(0^+) + u(0^+)$, dont on déduit $\boxed{i(0^+) = 0}$. Et d'après la loi des nœuds : $\boxed{i_2(0^+) = -i_1(0^+) = \dfrac{2u(0^+)}{R} = \dfrac{2E}{R}}$.

3. Lorsque t tend vers l'infini, le circuit atteint un régime permanent (les grandeurs sont constantes), le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert : $\boxed{i_1(\infty) = 0}$. Par conséquent nous reconnaissons un diviseur de tension : $\boxed{u(\infty) = \dfrac{R/2}{R + R/2}E = \dfrac{E}{3}}$. Cela permet alors de calculer $\boxed{i_2(\infty) = \dfrac{2u(\infty)}{R} = i(\infty) = \dfrac{2E}{3R}}$.

4. On utilise les équivalences Thévenin/Norton :



Nous obtenons un simple circuit $R'C'$, avec $C' = C$ et $R' = \dfrac{R}{3}$, soumis à $\dfrac{E}{3}$.

5. On utilise les relations élémentaires des deux dipôles : $u_R = \dfrac{R}{3} i_1$ et $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

La loi des mailles donne $\dfrac{E}{3} = u_R + u$, d'où en utilisant les relations précédentes :

$\dfrac{E}{3} = \dfrac{RC}{3}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$ soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = \dfrac{E}{RC}}$ en posant $\boxed{\tau = \dfrac{RC}{3}}$.

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme $u_{sgs} = K e^{-t/\tau}$.

La solution particulière est constante et vérifie l'équation $\dfrac{E}{3} = \dfrac{RC}{3}\dfrac{\mathrm{d}u_{sp}}{\mathrm{d}t} + u_{sp}$, d'où $u_{sp} = \dfrac{E}{3}$.

Donc la solution s'écrit $u(t) = K e^{-t/\tau} + \dfrac{E}{3}$.

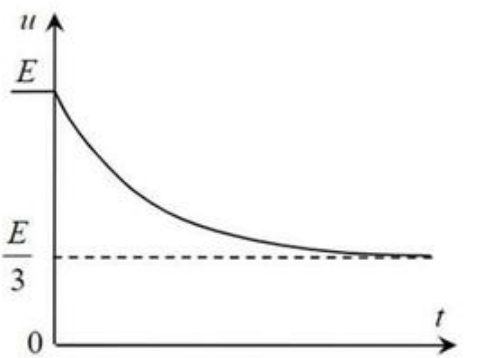
On utilise la condition initiale pour déterminer K :

$u(0) = Ke^0 + \dfrac{E}{3} = E$, donc $K = \dfrac{2E}{3}$.

La solution est donc $\boxed{u(t) = \dfrac{E}{3}\left(1 + 2e^{-t/\tau}\right)}$.

⇨ *Méthodes 4.1, 4.2, 4.4*

6.



Exercice 4.8

1. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, qui est ici initialement déchargé, $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0}$. Alors en appliquant la loi des mailles immédiatement après la fermeture de K, on obtient $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R + R_g}}$.

2. Les relations élémentaires sur les dipôles du schéma donnent $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et deux lois d'Ohm.

La loi des mailles permet alors d'écrire : $\boxed{u_C + (R + R_g)C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E}$.

⇨ *Méthode 4.1*

3. La constante de temps est $\boxed{\tau = (R + R_g)C}$; c'est l'ordre de grandeur du temps d'évolution du circuit (au bout de quelques τ, le régime transitoire est terminé).

⇨ *Méthode 4.2*

4. La solution de l'équation différentielle sans second membre est $u_{Csg} = Ae^{-t/\tau}$. La solution particulière, qui est continue comme le second membre, est $u_{Csp} = E$. Donc $u_C = Ae^{-t/\tau} + E$. Condition initiale : $u_C(0^+) = 0$, d'où $A + E = 0$. Par conséquent : $\boxed{u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$.

⇨ *Méthode 4.4*

5. On cherche $u_C(t_1) = 0{,}9E = E(1 - e^{-t_1/\tau})$, d'où l'on tire $\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}1 = \tau \ln 10}$.

6. La tension u_C (voie B) doit avoir une courbe sans discontinuité, on en déduit donc que (1) représente la voie B qui est continue (au sens mathématique).

7. En couplage AC, le signal affiché n'est pas exactement le signal réel : sa valeur moyenne est ramenée à zéro, ce qui n'a aucun intérêt ici. Il vaut donc mieux mettre les entrées en couplage continu DC, et régler le zéro sur la ligne du bas marquée 0 %.

> *Sur un oscilloscope on utilise toujours le couplage DC, sauf si on a une raison précise d'utiliser AC (supprimer une composante continue trop grande, pour pouvoir étudier la composante alternative beaucoup plus faible).*

8. Le point P de l'oscillogramme correspond au début du régime transitoire, soit $t = 0^+$, la loi des mailles donne $\boxed{u(P) = Ri(0^+) = \frac{RE}{R + R_g} = \frac{2}{3}E}$ (pont diviseur car on a $u_C(0^+) = 0$). On en déduit $\boxed{R = 2R_g}$, soit $\boxed{R_g = 50\,\Omega}$.

9. $E = 6$ carreaux × 1 V/carreau soit $\boxed{E = 6\,\text{V}}$. On mesure le temps de montée (jusqu'à 90 %) : $t_1 = 4{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}45$ ms. Alors $\tau = \frac{t_1}{\ln 10}$, d'où $\boxed{C = \frac{t_1}{(R + R_g)\ln 10} = 1{,}3\,\mu\text{F}}$.

10. On voit que la demi-période est plus grande que 0,8 ms (8 carreaux), donc la fréquence est inférieure à $\frac{1}{1{,}6.10^{-3}}$, soit $\boxed{f < 600\,\text{Hz}}$.

11. Il faut pouvoir observer la tension aux bornes d'une résistance. On peut effectivement observer celle aux bornes de R, en utilisant les touches – CH1 et ADD de l'oscilloscope, ce qui donne $u_A - u_B = Ri$. (Si on veut obtenir directement, sur l'une des voies, la tension aux bornes de R, il faut d'abord permuter R et C pour que R ait une borne reliée à la masse.)

⇨ *Méthode 4.4*

Exercice 4.9

1. Par continuité du courant traversant les bobines, comme avant la fermeture de l'interrupteur aucun courant ne circule, on en déduit que $\boxed{i_1(0^+)=0}$ et $\boxed{i_2(0^+)=0}$. Par application de la loi de nœuds, on obtient $\boxed{i(0^+)=i_1(0^+)+i_2(0^+)=0}$.

⇨ *Méthode 4.3*

2. Les relations élémentaires sur les dipôles du schéma sont $u_{L1}=L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, $u_{L2}=L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ et trois lois d'Ohm. La loi des mailles sur la maille de droite donne $r_1 i_1+L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=r_2 i_2+L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$.

On passe tous les membres du même côté, en posant $r_1=r_2=r$ et $L_1=L_2=L$, soit $\boxed{r(i_1-i_2)+L\dfrac{\mathrm{d}(i_1-i_2)}{\mathrm{d}t}=0}$.

⇨ *Méthode 4.1*

3. L'écriture sous forme canonique donne $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}(i_1-i_2)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{r}{L}(i_1-i_2)=0}$. On identifie la constante de temps $\tau=\dfrac{L}{r}$.

L'équation est sans second membre, la solution est donc de la forme $(i_1-i_2)(t)=K\,e^{-t/\tau}+0$, ou zéro est la valeur de la solution particulière.

Condition initiale $(i_1-i_2)(0)=0-0=K$.

On en déduit donc que $(i_1-i_2)(t)=0$, soit $\boxed{i_1(t)=i_2(t)}$.

⇨ *Méthode 4.2,4.4*

4. La loi des nœuds donne $i=i_1+i_2=2i_1=2i_2$ (d'après le résultat précédent).

La loi des mailles sur la maille de gauche donne $u_{L1}=L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ et deux lois d'Ohm

$E=Ri+r_1 i_1+L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=Ri+r_1\dfrac{i}{2}+L_1\dfrac{\mathrm{d}(i/2)}{\mathrm{d}t}$.

Soit sous forme canonique $\boxed{\dfrac{2E}{L}=\dfrac{(2R+r)}{L}i+L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$.

⇨ *Méthode 4.1*

5. On identifie la constante de temps $\tau'=\dfrac{L}{2R+r}$.

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme $i_{sg}=K\,e^{-t/\tau'}$.

On cherche une solution particulière constante, qui vérifie l'équation $\dfrac{2E}{L}=\dfrac{(2R+r)}{L}i_{sp}+L\dfrac{\mathrm{d}i_{sp}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(2R+r)}{L}i_{sp}+0$ d'où $i_{sp}=\dfrac{2E}{2R+r}$.

Donc la solution s'écrit $i(t)=K\,e^{-t/\tau'}+\dfrac{2E}{2R+r}$.

On détermine K avec la condition initiale : $i(0^+) = 0 = K + \dfrac{2E}{2R+r}$, soit $K = -\dfrac{2E}{2R+r}$.

On obtient finalement : $\boxed{i(t) = \dfrac{2E}{2R+r}(1 - e^{-t/\tau'})}$.

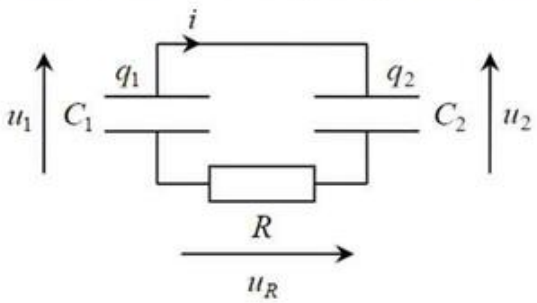
⇨ *Méthodes 4.2,4.4*

6. L'énergie stockée dans la bobine L_1 s'écrit $\boxed{W_1 = \dfrac{1}{2}L_1 i_1^2(\infty) = \dfrac{1}{2}L_1\left(\dfrac{2E}{2R+r}\right)^2}$.

L'énergie totale s'écrit $W = W_1 + W_2 = 2W_1 = L_1\left(\dfrac{2E}{2R+r}\right)^2$ car $i_1 = i_2$ et $L_1 = L_2$.

Exercice 4.10

1. Il faut absolument commencer par *définir des notations supplémentaires* sur le circuit, pour les tensions et les charges des deux condensateurs (lorsque $t > 0$, interrupteur fermé) :



Si vous aviez défini les tensions en sens inverse, cela ne change rien aux résultats qui suivent. Si vous aviez placé la charge de l'un des condensateurs sur l'armature d'en face, cela ne change que le signe de cette charge à la question **3**, *mais tous les autres résultats sont inchangés.*

Avec ces notations, on peut écrire les relations suivantes pour les condensateurs :
$q_1 = C_1 u_1$; $q_2 = C_2 u_2$ (dans les deux cas, la flèche de tension pointe vers l'armature portant la charge nommée) ; $i = -C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur) ; $i = +C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ (convention récepteur) ; $i = -\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$ (l'intensité i s'éloigne de l'armature portant q_1) ; $i = +\dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}$ (l'intensité i arrive sur l'armature portant q_2). Pour la résistance, en convention récepteur : $u_R = +Ri$.

Par ailleurs, la loi des mailles s'écrit, après fermeture de l'interrupteur : $u_1 - u_2 - u_R = 0$ soit $u_1 - u_2 - Ri = 0$. Pour pouvoir faire apparaître l'intensité dans les deux premiers termes, on doit dériver l'équation : $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{i}{C_1} - \dfrac{i}{C_2} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{\tau} = 0}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}}$.

Une erreur de signe dans les calculs précédents vous a peut-être donné $\tau = \dfrac{RC_1C_2}{C_1 - C_2}$, *ou l'opposé. Dans ce cas vous devez voir tout de suite que ce résultat est faux, car il conduirait à un temps de relaxation négatif pour certaines valeurs des capacités, ce qui est impossible.*

2. Il s'agit d'une équation différentielle sans second membre : sa solution générale est de la forme $i(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$. Pour trouver la constante d'intégration A, déterminons la condition initiale $i(0^+)$, puisque $i(0^+) = A$. Pour cela on écrit l'équation de la loi des mailles, à $t = 0^+$: $u_1(0^+) - u_2(0^+) - Ri(0^+) = 0$. Or les tensions aux bornes des condensateurs sont continues en 0 : $u_1(0^+) = u_1(0^-) = \dfrac{q_1(0^-)}{C_1} = \dfrac{q_0}{C_1}$ et $u_2(0^+) = u_2(0^-) = \dfrac{q_2(0^-)}{C_2} = 0$ (condensateur déchargé).

On en déduit $i(0^+) = \dfrac{q_0}{RC_1} = A$ et finalement : $\boxed{i(t) = \dfrac{q_0}{RC_1}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$.

3. Il nous faut deux équations pour trouver ces deux inconnues.
Pour $t \to \infty$, la limite de la solution ci-dessus est $i(\infty) = 0$. La loi des mailles devient alors : $u_1(\infty) - u_2(\infty) - 0 = 0$ d'où $\dfrac{q_1(\infty)}{C_1} = \dfrac{q_2(\infty)}{C_2}$ (première équation).

Par ailleurs, à tout instant : $i(t) = -\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = +\dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}$, ce qui donne en intégrant par rapport au temps : $-q_1(t) = q_2(t) + B$ soit $q_1(t) + q_2(t) = -B$. La constante B s'obtient avec les conditions initiales : $q_1(0^+) + q_2(0^+) = q_0 + 0 = -B$, donc $q_1(t) + q_2(t) = q_0$. Cela est vrai en particulier pour $t \to \infty$: $q_1(\infty) + q_2(\infty) = q_0$ (deuxième équation).

Avec ces deux équations on trouve $\boxed{q_1(\infty) = q_0\dfrac{C_1}{C_1 + C_2}}$ et $\boxed{q_2(\infty) = q_0\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}}$.

La charge totale initiale q_0 s'est répartie entre les deux condensateurs, proportionnellement à leurs capacités.

4. Énergie initiale : $E_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{q_1(0)^2}{C_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{q_2(0)^2}{C_2}$ soit $\boxed{E_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{q_0^2}{C_1}}$.

Énergie finale : $E_\infty = \dfrac{1}{2}\dfrac{q_1(\infty)^2}{C_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{q_2(\infty)^2}{C_2}$ soit $\boxed{E_\infty = \dfrac{1}{2}\dfrac{q_0^2}{C_1 + C_2}}$.

On voit facilement que $\boxed{E_\infty - E_0 < 0}$: le circuit a perdu une partie de son énergie stockée.

5. L'énergie a été dissipée par effet Joule dans la résistance : celle-ci a transformé le travail électrique W reçu en chaleur. On vérifie :

$$W = \int_0^\infty Ri^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{q_0^2}{RC_1^2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\tau}{2}\frac{q_0^2}{RC_1^2}\left[\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}\frac{q_0^2}{C_1 + C_2}.$$

Ainsi on trouve bien pour le bilan énergétique du circuit : $\boxed{E_\infty - E_0 = -W}$.

6. Si R tend vers 0, le temps de relaxation tend vers 0 donc on sort de l'ARQS : les phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques ne sont plus négligeables. L'énergie perdue a donc été émise par le circuit vers l'extérieur sous forme d'onde.

Exercice 4.11

1. $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{RC}\left(E - u_C(t)\right) = \dfrac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(t)\right)$.

2. On utilise l'approximation pour calculer $u_C(2)$: $u_C(2) = u_C(0) + 2\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 3{,}00 \text{ V}$

puis on calcule $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_2$ avec l'équation différentielle :

$\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_2 = \dfrac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(2)\right) = 1{,}35 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$.

On utilise les mêmes méthodes pour la date $t = 4$ s : $u_C(4) = u_C(2) + 2\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_2 = 5{,}70 \text{ V}$

$\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_4 = \dfrac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(4)\right) = 1{,}22 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$.

t (s)	0	2	4	6	8	10
$u_C(t)$ (V)	0	**3,00**	**5,70**	8 ,14	10,03	12,3
$\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ ($\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$)	1,50	**1,35**	**1,22**	1,09	0,99	0,89

3. $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = 30\left(1 - e^{-\frac{10}{20{,}0}}\right) = 11{,}80 \text{ V}$. La valeur donnée par la méthode d'Euler est légèrement supérieure : la méthode d'Euler ne donné qu'une solution approchée.

4. On améliore la méthode d'Euler en diminuant le pas, ce qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de points.

Exercice 4.12

1. a) Le nombre de dates nécessaires (en plus de la date initiale) est $N = \dfrac{t_{\max}}{p} = \dfrac{120}{0{,}1} = 1200$ soit 1201 dates en tout. L'instruction sera donc : `T = np.linspace(0, 120, 1201)`

b) À chaque boucle il faut calculer le terme suivant de la liste et l'ajouter.

On utilise les données : $u_C(t_{i+1}) = u_C(t_i) + \left(t_{i+1} - t_i\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t_i}$

et $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t_i} = \dfrac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(t_i)\right)$, soit $u_C(t_{i+1}) = u_C(t_i)\left(1 - \dfrac{p}{20{,}0}\right) + p\dfrac{30}{20{,}0}$.

On crée donc la liste Y avec l'instruction :

```
for i in range(1,1201):
    Y.append(Y[i-1]*(1-p/20)+1.5*p)
```

ligne de code permettant de créer une liste de dates comprises entre $t = 0$ s et $t = 120$ s avec un pas $p = 0{,}1$ s.

c) On utilise la bibliothèque `matplotlib.pyplot` :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(T,Y)
plt.xlabel('temps (s)')
plt.ylabel('u(t) (V)')
plt.grid()
    plt.show()
```

2. Il faut mettre l'équation différentielle sous la forme $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = f\left(u_C(t),t\right)$.

Sachant que $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(t)\right)$, on a donc $f\left(u_C(t),t\right) = \frac{1}{20{,}0}\left(30 - u_C(t)\right)$.

La fonction `f` se définit alors avec les instructions :

```
def f(y, t):
    return 1.5 - y/20
```

La méthode `odeint` nécessite trois paramètres :

```
U=sp.odeint(f, y0, T)
```

Chapitre 5

Oscillateur électrique en régime libre

UN SCIENTIFIQUE



Le physicien allemand **Heinrich Hertz** (1857-1894) réussit à détecter des ondes électromagnétiques en 1886 en utilisant des circuits ouverts excités par des bobines d'induction. Il montre que leurs propriétés de réflexion, d'interférences et de polarisation sont identiques à celles de la lumière et confirme les hypothèses émises par James Maxwell sur leur nature. On le considère comme le précurseur de la télégraphie sans fil que sa mort précoce ne lui permettra pas de connaître.

Un peu d'histoire

Au IIe siècle avant notre ère, Hipparque a posé les bases de la trigonométrie. L'astronomie était la motivation de sa démarche. À la Renaissance, Regiomontanus en a présenté une théorie détaillée. À la fin du XVIIe siècle, Isaac Newton et Gottfried Leibniz, en introduisant le calcul intégral, ouvraient le champ immense de l'étude des équations différentielles. Les découvertes de l'électricité puis des ondes électromagnétiques ont montré que les fonctions trigonométriques régissaient nombre de ces phénomènes, en tant que solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

À la fin du XIXe siècle, Jules Joubert a donné une théorie générale des courants alternatifs dans un mémoire *Études sur les machines magnéto-électriques* paru en 1884 et a élaboré le premier oscilloscope. De son côté, Heinrich Hertz a réussi à produire et détecter des ondes électromagnétiques.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- L'équation différentielle canonique de l'oscillateur harmonique
- L'équation différentielle canonique d'un système quelconque du deuxième ordre
- Les deux régimes de fonctionnement selon la valeur du facteur de qualité
- Des exemples de circuits du deuxième ordre

Ce qu'il faut savoir faire

- Établir une équation différentielle pour un circuit du deuxième ordre et la mettre sous forme canonique
- Déterminer les conditions initiales dans un circuit
- Résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième ordre
- Exploiter un relevé expérimental pour un système du deuxième ordre
- Réaliser un bilan énergétique

■■ Résumé de cours

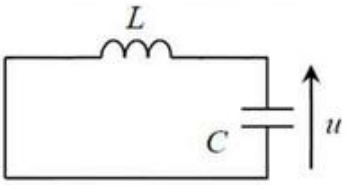
■ Oscillateur harmonique électrique

❑ Définition de l'oscillateur harmonique

On appelle **oscillateur harmonique** tout système dont l'évolution au cours du temps est décrite par une grandeur $x(t)$ solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}$$ avec ω_0 une constante positive appelée **pulsation propre** de l'oscillateur.

❑ Exemple fondamental en électricité : circuit *LC*



On établit l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u}{LC} = 0$ pour laquelle on identifie $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

⇨ Méthode 5.1. Établissement de l'équation différentielle
⇨ Méthode 5.2. Identification des termes de l'équation canonique

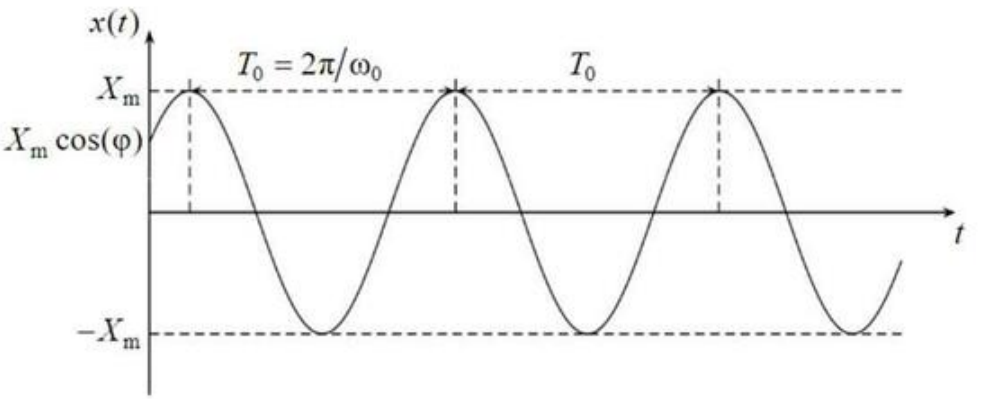
❑ Solution de l'équation différentielle

La solution d'une telle équation différentielle peut être mise sous deux formes équivalentes :

$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ ou bien $\boxed{x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ (avec $X_\mathrm{m} > 0$).

Cette solution comporte toujours deux constantes d'intégration (A et B ou bien X_m et φ), que l'on détermine en utilisant deux conditions initiales.

⇨ Méthode 5.3. Détermination des conditions initiales
⇨ Méthode 5.4. Résolution de l'équation différentielle
⇨ Méthode 5.5. Passage d'une expression des solutions à l'autre



❑ Grandeurs caractéristiques des oscillations

X_m est l'**amplitude** des oscillations ; elle correspond à la valeur maximale de $x(t)$.

$(\omega_0 t + \varphi)$ est la **phase** à un instant t, et φ est la **phase à l'origine**, qui n'a pas d'interprétation physique autre que d'imposer la valeur de $x(t)$ à l'instant initial : $x(0) = X_m \cos(\varphi)$.

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est la **période propre** des oscillations ; elle correspond à la plus petite durée au bout de laquelle la fonction $x(t)$ se répète identiquement à elle-même. Comme la pulsation propre ω_0 et la **fréquence propre** $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$, la période propre T_0 est indépendante des conditions initiales : on parle d'**isochronisme** des oscillations.

ω_0 et f_0 ont la dimension de l'inverse d'un temps ; ω_0 s'exprime en rad/s, f_0 en hertz (Hz).

❑ Bilan énergétique

L'énergie stockée dans le condensateur $\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2} C u^2$ et celle stockée dans la bobine $\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2} L i^2$ oscillent entre 0 et leur valeur maximale $\mathcal{E}_{max} = \dfrac{1}{2} C U_m^2 = \dfrac{1}{2} L I_m^2$, l'énergie totale $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ restant constante à la valeur $\mathcal{E}_{max}$: dans ce modèle, il n'y a pas de dissipation d'énergie.

■ Régime transitoire d'un circuit du deuxième ordre

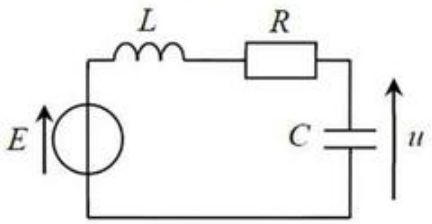
❑ Équation différentielle

L'oscillateur harmonique est un modèle idéal. Pour un système réel du deuxième ordre, l'équation différentielle qui régit une grandeur $x(t)$ comporte également, en général, un terme de dérivée première. Cette équation peut alors se mettre sous la forme canonique d'un **oscillateur amorti** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = G}$$

avec Q le **facteur de qualité** (sans dimension).

❑ Exemple fondamental : circuit *RLC* série



Circuit *RLC* série soumis à un échelon

On a l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$ pour laquelle on identifie $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

⇨ Méthode 5.1. Établissement de l'équation différentielle
⇨ Méthode 5.2. Identification des termes de l'équation canonique

❑ Solution de l'équation différentielle

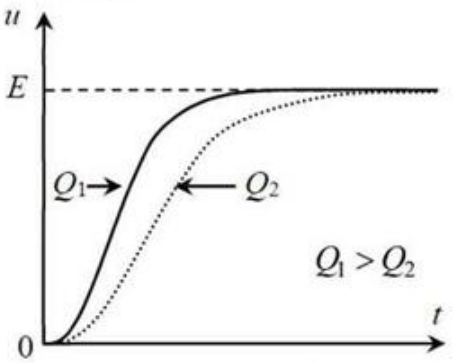
Comme pour un circuit du premier ordre, si le second membre est une constante, la solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière constante : $\boxed{x(t) = x_{sgs} + x_{sp}}$.

Cette solution comporte toujours deux constantes d'intégration, que l'on détermine en utilisant deux conditions initiales.

⇨ Méthode 5.3. Détermination des conditions initiales
⇨ Méthode 5.4. Résolution de l'équation différentielle

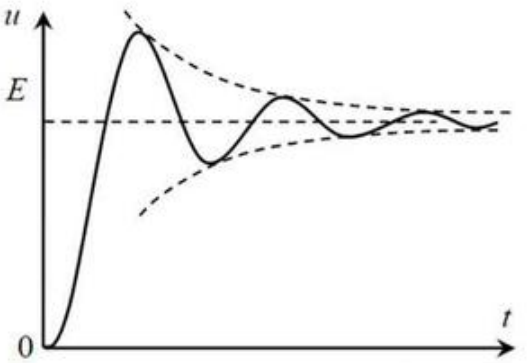
❑ Différents régimes

Réponse à un échelon avec $u(0^+) = 0$ et $\dfrac{du}{dt}(0^+) = 0$



Régime **apériodique** $\left(Q < \dfrac{1}{2}\right)$

$u(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} + E$



Régime **pseudo-périodique** $\left(Q > \dfrac{1}{2}\right)$

$u(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) + E$

Le cas limite théorique $\left(Q = \dfrac{1}{2},\ u(t) = [At + B]e^{-\omega_0 t} + E\right)$ est le régime **critique**. Il correspond à *l'établissement le plus rapide du régime permanent*, car le temps de relaxation $\tau_{critique} = \dfrac{1}{\omega_0}$ est le plus court. L'allure de la courbe est alors analogue à celle du cas apériodique.

⇨ Méthode 5.6. Utilisation de la méthode d'Euler
⇨ Méthode 5.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 avec la bibliothèque Scipy

❑ Bilan énergétique

– À la fin d'un *régime libre*, toutes les tensions et intensités sont nulles, donc il n'y a plus d'énergie stockée dans une bobine ou dans un condensateur. L'énergie stockée initialement dans l'un de ces dipôles a été entièrement transférée au dipôle ohmique et dissipée par effet Joule.

– Dans le cas d'un *échelon* de tension E pour un circuit RLC série, le condensateur initialement déchargé acquiert une énergie finale $\mathcal{E}_{C,\infty} = \dfrac{1}{2}CE^2$; le dipôle ohmique reçoit la même quantité d'énergie et la dissipe ; la bobine stocke temporairement de l'énergie pendant le régime transitoire, mais la restitue ensuite ; l'énergie totale fournie par la source est donc $2\mathcal{E}_{C,\infty} = CE^2$.

Remarque

On rencontre des oscillations analogues (harmoniques ou amorties) dans d'autres domaines de la physique, notamment en mécanique (voir chapitres **10**, **11**, **16**, **17**).

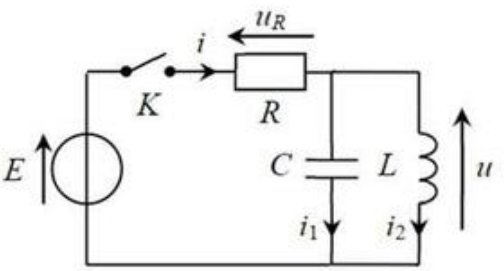
■ Comment déterminer l'équation différentielle sous forme canonique ?

❑ Méthode 5.1. Établissement de l'équation différentielle

Comme pour un circuit d'ordre 1, écrire les relations entre intensité et tension relatives à chaque dipôle, puis utiliser la loi des nœuds et/ou la loi des mailles pour éliminer les variables non souhaitées, de manière à ne garder qu'une seule grandeur inconnue (fonction du temps).
Dans le cas où on ne peut pas éliminer une variable car seules les informations sur sa dérivée sont disponibles, il faut dériver toute l'équation.

⇨ Exercices 5.1, 5.3 à 5.6

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Cherchons l'équation différentielle vérifiée par la tension u.



Les équations relatives aux différents dipôles du schéma sont : $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ pour le condensateur ; $u = L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ pour la bobine; $u_R = Ri$ pour la résistance.

La tension u est la même aux bornes de L et de C, qui sont en parallèle. Il est donc inutile d'employer deux notations différentes du genre u_L et u_C.

Pour $t > 0$, la loi des mailles donne $E = u_R + u$. On utilise les formules de chaque dipôle de manière à éliminer les variables que l'on ne souhaite pas garder. Tout d'abord on peut écrire : $E = Ri + u$. Comme nous n'avons pas d'autres données sur le courant i, on utilise la loi des nœuds $i = i_1 + i_2$ et on remplace l'expression de i_1 en utilisant la relation du condensateur, soit $E = RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Ri_2 + u$. Enfin la seule donnée sur le courant i_2 porte sur sa dérivée, on dérive donc toute l'équation et on remplace par la relation de la bobine. On obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

❑ Méthode 5.2. Identification des termes de l'équation canonique

Écrire l'équation différentielle sans coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé (ordre 2 dans ce chapitre). Il suffit ensuite d'égaler les autres coefficients avec ceux de l'équation canonique : pour une équation du deuxième ordre, on introduit d'abord ω_0 pour faire apparaître le coefficient ω_0^2 devant le terme d'ordre 0, puis on note $\frac{\omega_0}{Q}$ le coefficient du terme d'ordre 1, d'où on déduit l'expression de Q.

⇨ Exercices 5.1, 5.3, 5.4, 5.6

Dans l'exemple du circuit précédent du second ordre, on écrit : $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u=0$.

Par identification avec $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$ on trouve $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=RC\omega_0=R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

■ Comment résoudre une équation différentielle ?

❑ Méthode 5.3. Détermination des conditions initiales d'un circuit

Dans le cas d'un système du deuxième ordre, il faut déterminer non seulement la valeur de la grandeur étudiée, mais aussi celle de sa dérivée première, à $t=0^+$. On utilise pour cela la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et/ou celle de l'intensité du courant traversant une bobine entre $t=0^-$ et $t=0^+$, puis au moins une fois la loi des mailles ou la loi des nœuds.

Attention, la connaissance de la valeur de $x(0^+)$ ne donne aucune information sur celle de la dérivée $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0^+)$! En particulier, il est fréquent que l'une d'elles soit nulle et l'autre non nulle.

⇨ Exercices 5.1, 5.3, 5.5, 5.6

Dans l'exemple du circuit précédent du second ordre, nous allons déterminer la valeur initiale de la tension et de sa dérivée, puisque l'équation différentielle porte sur u.

Le condensateur est initialement déchargé, donc $u(0^-)=0$, et d'après la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on en déduit que $u(0^+)=0$.

Il n'y a initialement aucun courant qui traverse la bobine car l'interrupteur est ouvert depuis longtemps, donc $i_2(0^-)=0$, d'après la continuité du courant dans une bobine, on en déduit $i_2(0^+)=0$.

La loi des mailles permet d'obtenir à $t = 0^+$: $E = Ri(0^+) + u(0^+)$ d'où l'on tire $i(0^+) = \dfrac{E}{R}$.

Attention, $i(0^+) \neq i(0^-)$ puisque $i(0^-) = 0$ (pas de courant quand l'interrupteur était ouvert) : le courant est discontinu, ce qui est fréquent dans un condensateur ou une résistance.

Enfin la loi des nœuds donne $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = i_1(0^+) = \dfrac{E}{R}$. La relation élémentaire sur le condensateur permet d'écrire $i_1(0^+) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{RC}$.

❑ Méthode 5.4. Résolution de l'équation différentielle

La résolution se fait en deux ou trois étapes.

– La première étape consiste à déterminer la forme de la *solution générale de l'équation sans second membre*. Dans le cas idéal de l'oscillateur harmonique, elle est sinusoïdale. Dans le cas général d'un système du deuxième ordre, elle dépend de la valeur du facteur de qualité Q.

– Si l'équation à résoudre comporte un second membre (terme non nul), la seconde étape est la détermination de la *solution particulière* qui a la même forme que le second membre (donc constante dans ce chapitre).

– La solution cherchée est la somme des deux résultats précédents, et on détermine les constantes inconnues avec les conditions initiales sur la fonction et sur sa dérivée première, en écrivant leurs expressions à l'instant initial.

⇨ **Exercices 5.1, 5.3 à 5.6**

Oscillateur harmonique

Dans le cas du circuit LC, dont toute grandeur $x(t)$ obéit à l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, x = 0$ (oscillateur harmonique), la solution peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \text{ (avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes d'intégration)}$$

$$\text{ou } x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ (où on peut toujours choisir } X_\mathrm{m} > 0\text{).}$$

Système quelconque du deuxième ordre

Considérons maintenant le cas général d'un système du deuxième ordre, dont la grandeur $x(t)$ obéit à l'équation générique : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = G$.

– Solution générale de l'équation sans second membre

Aussi appelée solution du régime libre, c'est la solution de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2x_{sgs}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x_{sgs}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x_{sgs} = 0.$$

L'idée générale est de chercher des solutions sous la forme Ae^{rt}, avec r un paramètre à déterminer.

En injectant cette forme de solution dans l'équation différentielle, on fait apparaître l'*équation caractéristique* qui lui est associée : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$.

On cherche les racines, réelles ou complexes, de cette équation du second degré, et on en déduit la forme générale de la solution de l'équation sans second membre, qui dépend donc du discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$.

Il y a deux cas à étudier, $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$, le cas $\Delta = 0$ étant un cas théorique constituant une limite entre les deux autres.

Régime **apériodique**	Régime **critique**	Régime **pseudo-périodique**
$\Delta > 0$ ou $Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0$ ou $Q > \frac{1}{2}$
$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{1}{\tau_{1,2}}$	$r_{1,2} = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$	$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$
$\boxed{x_{sgs}(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}}$	$\boxed{x_{sgs}(t) = [At + B] e^{-\omega_0 t}}$	$\boxed{x_{sgs}(t) = e^{-t/\tau} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]}$ qui peut aussi se mettre sous la forme $\boxed{x_{sgs}(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)}$, avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ **(pseudo-pulsation)**

Il s'agit toujours d'une fonction tendant vers zéro avec un certain temps caractéristique τ.

– Solution particulière

Elle a la même forme que le second membre : dans ce chapitre, c'est toujours une constante. On peut donc écrire : $\frac{d^2 x_{sp}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx_{sp}}{dt} + \omega_0^2 x_{sp} = G$, ce qui donne immédiatement $\boxed{x_{sp} = \frac{G}{\omega_0^2}}$.

On l'appelle aussi solution du régime permanent ou établi, car $x(t) \to x_{sp}$ lorsque $t \to \infty$.

(Si le second membre est nul, ce terme est nul.)

– Solution (complète) de l'équation

La solution de l'équation s'écrit comme la somme de ces deux termes, soit $\boxed{x(t) = x_{sgs}(t) + x_{sp}}$.

Enfin on trouve les deux constantes (A_1 et A_2, A et B, ou X_m et φ) avec les conditions initiales.

❑ Méthode 5.5. Passage d'une expression des solutions à l'autre

– Pour passer de l'expression $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ des solutions de l'oscillateur harmonique à l'expression $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, et réciproquement, on utilise : $\begin{cases} A = X_m \cos\varphi \\ B = -X_m \sin\varphi \end{cases}$ et $\begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan\varphi = -\dfrac{B}{A} \text{ avec } \cos\varphi \text{ de même signe que } A. \end{cases}$

– Cette méthode s'applique aussi à un régime pseudo-périodique, pour passer de $x(t) = X_m e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$ à $x(t) = e^{-t/\tau}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$ et réciproquement.

– En utilisant la relation trigonométrique $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, on peut développer $x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ en $x(t) = X_m\cos\varphi\cos(\omega_0 t) - X_m\sin\varphi\sin(\omega_0 t)$. Par identification, on aboutit à $A = X_m\cos\varphi$ et $B = -X_m\sin\varphi$.

– Inversement, si on élève ces deux formules au carré et qu'on additionne, sachant que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, on trouve $X_m^2 = A^2 + B^2$, donc $X_m = \sqrt{A^2 + B^2}$ puisqu'on peut toujours choisir X_m positive.

Et le rapport des deux formules précédentes donne $\tan\varphi = -\dfrac{B}{A}$. Dans un intervalle de largeur 2π, il y a deux angles ayant cette même tangente. On doit prendre celui tel que $\cos\varphi$ ait le même signe que A, puisque $A = X_m\cos\varphi$ avec $X_m > 0$.

■ Comment résoudre une équation différentielle d'ordre 2 par une méthode numérique ?

❑ Méthode 5.6. Utilisation de la méthode d'Euler

L'équation différentielle d'ordre 2 à résoudre est du type $\ddot{y}(t) = a\dot{y}(t) + by(t) + c(t)$ où a et b sont des constantes, $y(t)$ la fonction à déterminer, $\dot{y}(t)$ sa dérivée première, $\ddot{y}(t)$ sa dérivée seconde et $c(t)$ une fonction du temps connue. On suppose que les valeurs initiales $y(0) = y_0$ et $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ sont connues.

On dispose d'une liste de dates t_i successives, séparées par un pas $p = t_{i+1} - t_i$, pour lesquelles on souhaite connaitre les valeurs de $y(t_i)$ et $\dot{y}(t_i)$.

La méthode d'Euler consiste à déterminer les valeurs du couple $[y(t_{i+1}), \dot{y}(t_{i+1})]$ à partir des valeurs du couple $[y(t_i), \dot{y}(t_i)]$ en utilisant les approximations :

$$\dot{y}(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \text{ et } \ddot{y}(t_i) = \frac{\dot{y}(t_{i+1}) - \dot{y}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

soit $y(t_{i+1}) = y(t_i) + p\dot{y}(t_i)$

et $\dot{y}(t_{i+1}) = \dot{y}(t_i) + p\ddot{y}(t_i) = \dot{y}(t_i) + p\left(a\dot{y}(t_i) + by(t_i) + c(t_i)\right)$.

L'implémentation en Python se fait donc en respectant les étapes suivantes.

– Création d'une liste de dates allant de t_0 à t_n par pas de p (donc $n+1$ dates)

```
import numpy as np
T = np.linspace(0, t_n, n+1)
```

– Création d'une liste de couples $\left[y(t_i), \dot{y}(t_i)\right]$

```
Y = np.zeros((n+1, 2))   #tableau contenant n+1 couples [0,0]
p = t_n/n+1    # le pas de la méthode
Y[0][0] = y0 # valeur de y(0)
Y[0][1] = y0  # valeur de y'(0)
for i in range(1, n+1) :      # calcul des valeurs de y(ti) et
y'(ti)
  Y[i][0] = Y[i-1][0]+p*Y[i-1][1]
  Y[i][1] = Y[i-1][1]-p*(a* Y[i-1][1] + b*Y[i-1][0] + c*(i-1))
```

L'instruction `plt.plot(T,Y)` permet de tracer les deux courbes $y(t)$ et $\dot{y}(t)$.

⇨ Exercices 5.7, 5.8

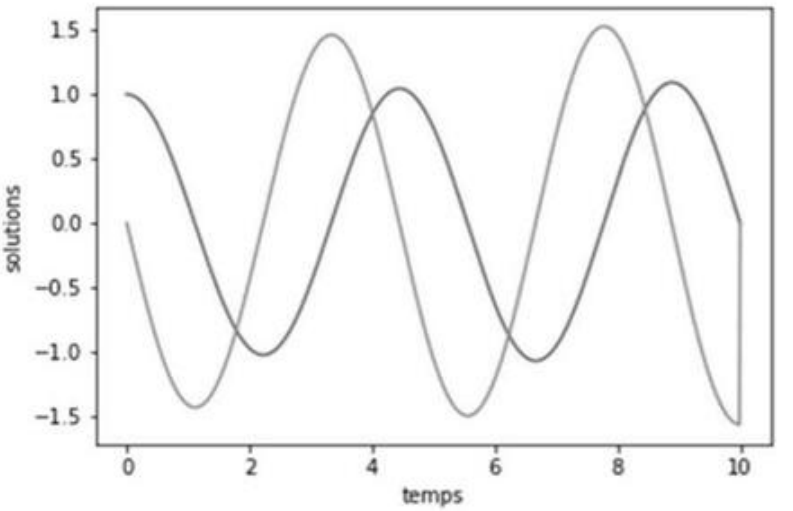
On considère l'équation différentielle : $\ddot{y}(t) + 2y(t) = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $\dot{y}(0) = 0$. On souhaite obtenir une solution approchée sur l'intervalle de temps $[0,10]$ en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $p = 0{,}1$ s.

Le code suivant permet d'obtenir les deux courbes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T = np.linspace(0, 10, 1001)
Y = np.zeros((1001,2))
p = 0.01
Y[0][0]=1
Y[0][1]=0
for i in range(1,1000):
    Y[i][0]=Y[i-1][0]+p*Y[i-1][1]
    Y[i][1]=Y[i-1][1]-p*2*Y[i-1][0]

plt.plot(T,Y)
plt.xlabel('temps')
plt.ylabel('solutions')
plt.grid()
plt.show()
```



On peut constater que la solution « diverge », ce qui est dû à un pas trop élevé mais également à une faiblesse de la méthode d'Euler. Pour obtenir des résultats plus performants, il faut utiliser des méthodes numériques plus complexes (hors programme) comme celle utilisée dans la méthode `odeint` *qui suit.*

❑ Méthode 5.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 avec la bibliothèque Scipy

Si on définit le vecteur $Y = \left[y(t), \dot{y}(t)\right]$ alors on peut mettre l'équation différentielle $\ddot{y}(t) = a\dot{y}(t) + by(t) + c(t)$ sous la forme $\dot{Y} = f\left(Y, t\right)$, f étant la fonction qui à tout vecteur $\left[y_1(t), y_2(t)\right]$ associe le vecteur $\left[y_2(t), ay_2(t) + by_1(t) + c(t)\right]$

On utilise alors la méthode `odeint` du module `integrate` de la bibliothèque Scipy qui prend en paramètres : la fonction f ; la condition initiale $Y(0)$; la liste `T` des dates pour lesquelles on calcule la fonction $y(t)$.

La méthode renvoie alors la liste `Y` (voir la méthode précédente).

L'implémentation en Python se fait donc de la façon suivante.

– Création d'une liste de dates allant de t_0 à t_n par pas de p (donc $n+1$ dates)

```
import numpy as np
T = np.linspace(0, t_n,n+1)
```

– Création d'une liste de couples $\left[y(t_i), \dot{y}(t_i)\right]$

```
import scipy.integrate as sp
def F(X,t):      # on définit la fonction F
    return [X[1],a*X[0]+b*X[1]+c(t)]

Y0 = ????   # Conditions initiales
Y = sp.odeint(F,Y0,T)      # application de la méthode odeint
```

La résolution de l'équation différentielle de la méthode précédente ($\ddot{y}(t)+2y(t)=0$ avec les conditions initiales $y(0)=1$ et $\dot{y}(0)=0$) se fait avec le code suivant (le code correspondant à l'affichage des solutions est le même que celui de la méthode précédente).

```
import scipy.integrate as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1],-omega_0**2*X[0]]

omega_0 = 2
Y0 = [1,0]   # Conditions initiales
T = np.linspace(0,10,1001) #Nombre de points temporels

Y = sp.odeint(F,Y0,T) # application de la méthode odeint
```

Vrai/Faux

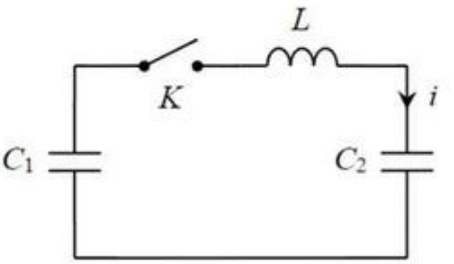
		Vrai	Faux
1.	Un circuit comportant une bobine et un condensateur est toujours un circuit du deuxième ordre.	☐	☐
2.	On recherche les solutions de l'équation sans second membre sous la forme Ae^{rt}, où r est une racine de l'équation caractéristique.	☐	☐
3.	La solution de l'équation sans second membre d'un système du second ordre a toujours la même forme.	☐	☐
4.	La solution particulière d'un système du second ordre est aussi la solution du régime permanent.	☐	☐
5.	Lors d'un régime pseudo-périodique, la pulsation des oscillations est la pulsation propre ω_0 de l'équation canonique.	☐	☐
6.	L'oscillateur harmonique est le cas limite où le facteur de qualité tend vers zéro.	☐	☐
7.	Pour avoir le plus grand facteur de qualité possible, la résistance électrique doit tendre vers zéro.	☐	☐
8.	Dans un système du deuxième ordre, le régime critique est celui qui permet l'établissement le plus rapide du régime permanent.	☐	☐
9.	Si le discriminant de l'équation caractéristique d'un système du second ordre est négatif, alors le régime est apériodique.	☐	☐
10.	Plus le facteur de qualité est grand et plus la décroissance de l'amplitude des oscillations est rapide.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Oscillateur harmonique

❑ Exercice 5.1. Circuit oscillant *LC*

Dans le circuit ci-contre, le condensateur de capacité C_1 porte sur son armature supérieure une charge q_0, le condensateur de capacité C_2 étant déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On cherche alors à déterminer l'évolution temporelle de l'intensité i du courant parcourant le circuit.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$.

2. Déterminer, en les justifiant, les conditions initiales $i(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

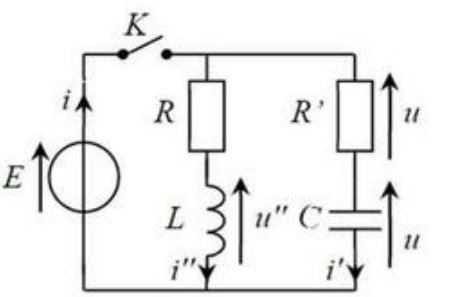
3. Résoudre complètement l'équation différentielle.

4. Tracer la courbe donnant i en fonction de t, en faisant bien apparaître sur le graphe les points particuliers et les valeurs particulières de i et de t.

■ Circuit du deuxième ordre amorti

❑ Exercice 5.2. Détermination de conditions initiales

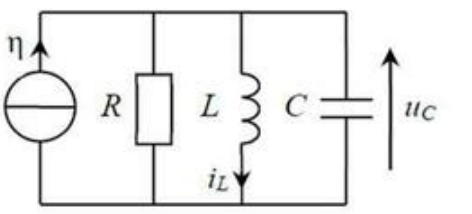
Dans le circuit ci-contre, avant la fermeture de l'interrupteur, le courant traversant la bobine est nul et le condensateur est déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Déterminer la valeur de chaque intensité et de chaque tension représentée, juste après la fermeture de K, et donner également $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i''}{\mathrm{d}t}(0^+)$.



❑ Exercice 5.3. Circuit *RLC* parallèle

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u_C(t)$ dans ce circuit (avec $\eta = \text{cte}$), et mettre cette équation sous forme canonique.

2. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L, C.



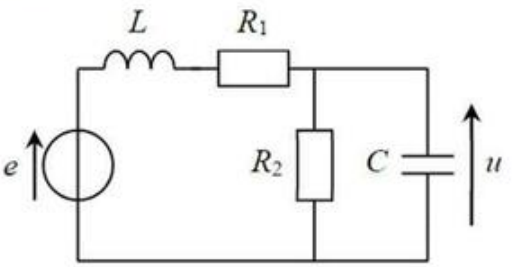
3. À $t = 0$, le générateur de courant passe de 0 (valeur ayant duré longtemps) à $\eta = 0{,}01\ \text{A}$.

On a $R = 50\,\Omega$, $C = 10$ nF et $L = 100$ mH. Quel est le régime d'évolution de $u_C(t)$?

4. À $t = 0$, $i_L = 0$ et $u_C = 0$. Donner l'expression numérique de $u_C(t)$ pour $t > 0$. Représenter l'allure de $u_C(t)$.

❑ Exercice 5.4. Décrément logarithmique*

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ dans le circuit ci-contre.

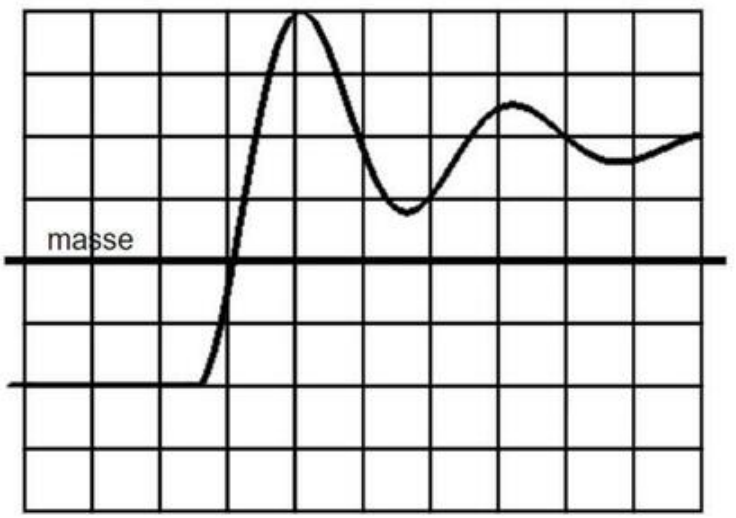


1. Déterminer la valeur $u(\infty)$ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque la valeur de $e(t)$ est E, en dessinant un schéma en régime permanent.

2. Établir l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u(\infty)$ et exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

3. Définir et tracer un échelon de tension. Expliquer comment on le réalise expérimentalement.

4. On observe sur un oscilloscope la courbe $u(t)$ qui suit.



1 div = 200 µs

a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période T.

b) Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique, défini par :

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t+nT) - u(\infty)}\right).$$

5. Exprimer la forme mathématique de $u(t)$ en fonction de λ, ω_0, $u(\infty)$ et t. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.

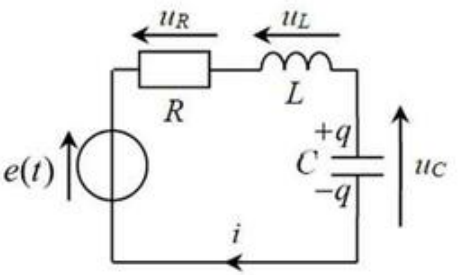
6. Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

7. Sachant que $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 5\,\mathrm{k}\Omega$, $L = 100$ mH, déterminer la valeur numérique de C.

❑ Exercice 5.5. Régime pseudo-périodique*

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance pure L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0, \text{ on a } e(t) = 0\ ; \\ \text{pour } t > 0, \text{ on a } e(t) = E. \end{cases}$$



On pose $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

1. Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$.

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = \left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)\mathrm{e}^{-\gamma t} + D$$

où on déterminera ω, A, B et D en fonction de C, E, ω_0 et γ.

4. Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

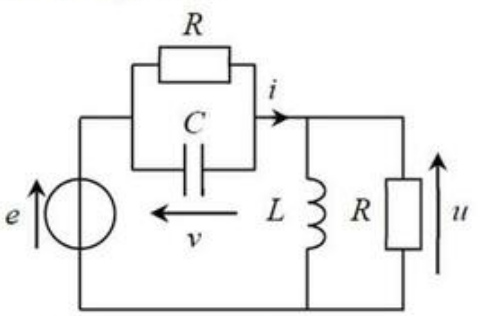
5. Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$.

Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

6. Déterminer l'énergie totale E_G fournie par le générateur ainsi que l'énergie E_{LC} emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \to 0$.

❑ Exercice 5.6. Oscillateur de grand facteur de qualité**

Pour $t < 0$, $e = 0, v = 0, u = 0$. Pour $t > 0$, $e = E$.



1. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(t)$ et $v(t)$ et donner les expressions des grandeurs ω_0 et Q associées au système.

2. Préciser les conditions initiales pour $u(t)$, $v(t)$ et leurs dérivées.

On se place dans le cas où $Q \gg 1$.

3. Déterminer l'expression de la tension $v(t)$ en fonction de ω_0, Q et E. En déduire une valeur approchée de la tension maximale atteinte par $v(t)$.

■ Méthode numérique de résolution d'une équation différentielle

❑ Exercice 5.7. Programmation de fonctions

Si on définit le vecteur $Y = \left[y(t), \dot{y}(t)\right]$, alors toute équation différentielle du type $\ddot{y}(t) = a\dot{y}(t) + by(t) + c(t)$ peut se mettre sous la forme $\dot{Y} = f(Y,t)$.

Programmer la fonction f en Python pour les équations différentielles suivantes.

1. $\ddot{y}(t) + 5y(t) = 0$. **2.** $\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + 4u(t) = 0$. **3.** $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 5x(t) = 2\sin(6t)$.

❑ Exercice 5.8. Résolution d'une équation différentielle avec Python

On cherche à déterminer une solution approchée de la fonction temporelle $r(t)$ qui à l'équation différentielle : $\ddot{r} + 2\lambda\dot{r} + \omega_0^2 r = 0$, λ et ω_0 étant des constantes positives non nulles.

On écrit donc le code suivant :

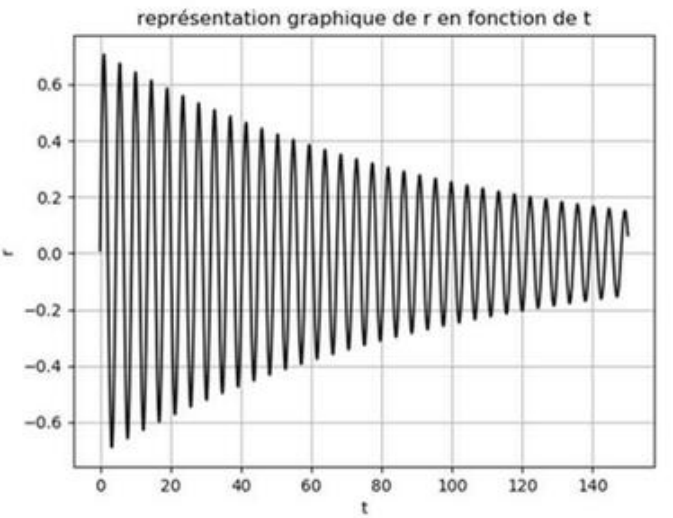
```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
T=150
omega = 1.4
lambda = 0.03

def euler(N,x0,v0):
    x = x0
    v = v0
    h = T/N
    a = -2*lambda*v-omega*omega*x
    tab_1 = np.zeros(N)
    tab_2 = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lambda*v-omega*omega*x)
        tab_1[i] = x
        tab_2[i] = v
    return tab_1

def temps(N):
    h=T/N
    t = np.arange(N)*h
    return t

plt.figure ('graphique')
plt.plot(temps(15000),euler(15000,0,1),'b')
plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("r")
plt.grid()
plt.show()
```

dont l'exécution permet d'obtenir la courbe suivante :



1. Décrire, en détaillant les étapes, comment l'algorithme utilisé permet, connaissant les valeurs $r(t_n)$ et $\dot{r}(t_n)$ de la fonction $r(t)$ et de sa dérivée première à une date t_n, de calculer ces mêmes valeurs à une date t_{n+1}. Quelle approximation est faite ?
2. Que renvoie `euler(3,0,1)` ?
3. La fonction `euler` contient une boucle itérative dans laquelle la commande `for` est utilisée. Modifier ces lignes de façon à utiliser la commande `while` en créant une boucle conditionnelle.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 5.1. Introduire des tensions aux bornes de chaque appareil puis appliquer la loi des mailles. Relier l'intensité i à chacune de ces tensions, en faisant attention aux conventions choisies. Finalement, il faut dériver toute l'équation issue de la loi des mailles, pour pouvoir éliminer les tensions et garder seulement i et ses dérivées.

Exercice 5.2. Pour $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$, déterminer l'intensité $i'(0^+)$ dans le condensateur en utilisant les différentes lois de continuité.

Exercice 5.4. Question 1 : remplacer la bobine et le condensateur par leurs équivalents respectifs en régime continu ; le circuit est alors très simple.

Exercice 5.6. À la question 1, exprimer toutes les relations caractéristiques des dipôles (entre intensité et tension) sans introduire de tension supplémentaire : par exemple la tension v est la même aux bornes de C et de R à gauche, donc il est inutile de lui donner deux noms différents. En revanche on peut nommer les intensités traversant chaque dipôle, puis les relier avec la loi des nœuds. La loi des mailles permet finalement de relier u et v.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai	faux	faux

2. Si on remplace Ae^{rt} dans l'équation sans second membre puis que l'on simplifie, on obtient l'équation caractéristique.

3. Elle dépend de la valeur du discriminant de l'équation caractéristique, donc du facteur de qualité Q.

5. Non, il s'agit de la pseudo-pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

6. On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique si le facteur de qualité tend vers *l'infini*.

7. Cela dépend de la position des dipôles dans le circuit : selon les cas, la résistance R peut apparaître au dénominateur de Q (c'est le cas du circuit *RLC* série) ou au numérateur.

9. Dans le cas d'un discriminant négatif, les racines sont complexes et le régime est alors pseudo-périodique.

10. Plus le facteur de qualité est grand et plus on tend vers un « bon oscillateur » : la décroissance de l'amplitude des oscillations est alors plus lente.

❑ Les erreurs classiques

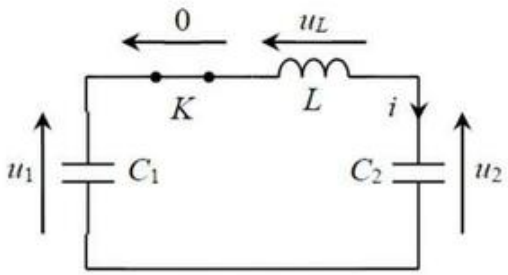
– Lorsqu'un dipôle est représenté en convention générateur sur un schéma, il ne faut pas oublier d'adapter la formule à cette convention (avec un signe –). Si on a trouvé des coefficients de signes contraires dans l'équation différentielle, il y a forcément une erreur !

– La continuité d'une fonction n'implique pas la continuité de sa dérivée ! Donc si $u(0^+) = u(0^-)$ on ne peut pas en déduire $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^-)$. La valeur de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ devra être déduite des valeurs d'autres grandeurs du circuit.

– Dans le cas d'une équation différentielle avec second membre, pour trouver les deux constantes d'intégration, ne jamais appliquer les conditions initiales à la solution de l'équation *sans* second membre. Il faut les appliquer à la solution *complète*, comportant la solution particulière constante.

Exercice 5.1

1. On complète les notations du circuit, pour $t > 0$, sur le schéma ci-contre.



Loi des mailles : $u_2 + u_L - u_1 = 0$.

De plus tous les dipôles sont parcourus par le même courant i, d'où les relations :

$i = C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ (convention récepteur) ; $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (idem) ;

$i = -C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur). On souhaite éliminer toutes les variables sauf i : on peut déjà remplacer u_L par $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ dans l'équation issue de la loi des mailles. Pour éliminer u_1 et u_2 dans cette équation, on commence par la dériver, puis on utilise les relations des condensateurs :

$\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{i}{C_2} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} - \left(-\dfrac{i}{C_1}\right) = 0$ d'où finalement $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) i = 0}$.

⇨ *Méthode 5.1*

2. Continuité du courant dans la bobine : $i(0^+) = i(0^-)$ soit $\boxed{i(0^+) = 0}$. Continuité des tensions des condensateurs : $u_1(0^+) = u_1(0^-) = \dfrac{q_0}{C_1}$ et $u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0$ (initialement déchargé).

> *Si on choisit au départ d'orienter la tension u_1 dans l'autre sens, le condensateur de gauche serait alors lui aussi en convention récepteur $\left(i = C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right)$ mais en revanche on devrait écrire $u_1(0^-) = -\dfrac{q_0}{C_1}$ car q_0 est portée par l'armature supérieure. On retrouve alors les mêmes résultats.*

La loi des mailles à $t = 0^+$ donne alors : $\dfrac{q_0}{C_1} + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + 0 = 0$ d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{q_0}{LC_1}}$.

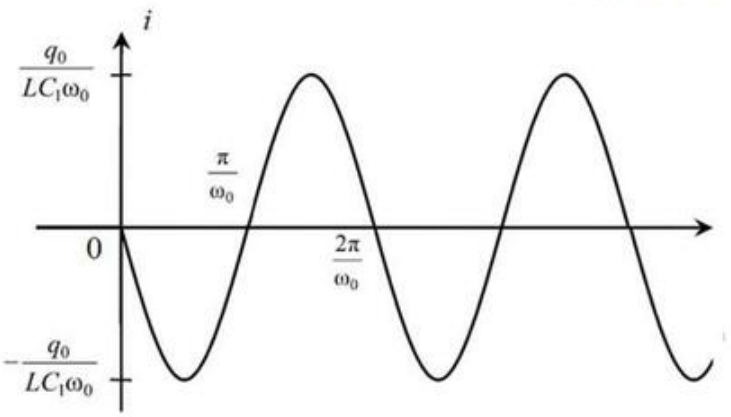
⇨ *Méthode 5.3*

3. Solution : $i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)}}$.

À $t=0^+$: $i(0^+)=A=0$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)=B\omega_0=-\dfrac{q_0}{LC_1}$. Donc $\boxed{i(t)=-\dfrac{q_0}{LC_1\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

⇨ *Méthode 5.4*

4. On doit bien faire apparaître les deux conditions initiales sur la courbe : elle part donc de l'origine, et la pente initiale est négative.
Ensuite l'intensité s'annule à chaque demi-période, et l'amplitude des oscillations est $\dfrac{q_0}{LC_1\omega_0}$.



Exercice 5.2

On part de la continuité du courant dans la bobine $\boxed{i''(0^+)=i''(0^-)=0}$ et de celle de la tension aux bornes du condensateur $\boxed{u(0^+)=u(0^-)=0}$.

La loi des nœuds $i=i'+i''$ permet d'affirmer $i'(0^+)=i(0^+)$. La maille extérieure du circuit donne $\boxed{E=u'(0^+)+u(0^+)=u'(0^+)}$, donc d'après la loi d'Ohm $\boxed{i'(0^+)=\dfrac{u'(0^+)}{R'}=\dfrac{E}{R'}=i(0^+)}$.

La maille de droite du circuit donne $u''(0^+)+Ri''(0^+)=u'(0^+)+u(0^+)$, soit $\boxed{u''(0^+)=E}$.

Enfin $i'(0^+)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=\dfrac{E}{R'C}}$; et $u''(0^+)=L\dfrac{\mathrm{d}i''}{\mathrm{d}t}(0^+)$ donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i''}{\mathrm{d}t}(0^+)=\dfrac{E}{L}}$.

☞ *On a trouvé* $u(0^+)=0$ *mais* $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)\neq 0$, *et de même pour* i''. *Cette situation, ou l'inverse* $\left(u(0^+)\neq 0 \text{ et } \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=0\right)$, *est très fréquente.*

Exercice 5.3

1. La tension est la même aux bornes de tous les dipôles, il est donc *inutile* d'introduire d'autres notations de tension (du genre u_R ou u_L). En revanche on ajoute les courants manquants en convention récepteur, et l'on écrit alors les relations élémentaires pour les trois dipôles :

$u_C=Ri_R$, $u_C=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ et $i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On écrit la loi des nœuds $\eta=i_R+i_L+i_C$ et l'on remplace avec les relations élémentaires précédentes, soit $\eta=\dfrac{u_C}{R}+i_L+C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Pour remplacer le courant dans l'inductance, nous devons

dériver cette équation, ce qui donne $0 = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{L} + C\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$. On met finalement l'équation sous forme canonique : $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = 0}$.

⇨ *Méthode 5.1*

2. On identifie chaque terme avec l'équation générale de la forme $\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0$, en commençant par celui qui a le moins d'inconnues : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ d'où $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$; puis $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$ d'où $\boxed{Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

Il est généralement préférable de ne remplacer ω_0 par sa valeur qu'à la fin du calcul.

⇨ *Méthode 5.2*

3. Le type de régime dépend de la valeur du facteur de qualité, qui vaut ici $Q = 0{,}016 < \frac{1}{2}$: on en déduit donc que le régime est apériodique.

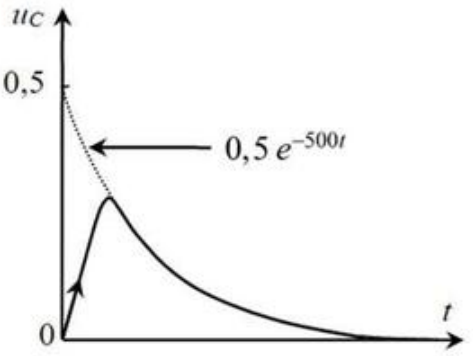
4. On résout l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ avec $Q = 0{,}016$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3{,}2\cdot10^4$ rad/s. On obtient deux racines réelles : $r_1 = -500\ \mathrm{s^{-1}}$ et $r_2 = -2{,}0\cdot10^6\ \mathrm{s^{-1}}$.

L'équation est *sans second membre* donc sa solution s'écrit $u_C = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.

Initialement le condensateur est déchargé, car il était court-circuité par la bobine (équivalente à un fil en régime permanent). On en déduit donc, par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$, soit $u_C(0^+) = 0 = Ae^0 + Be^0$, d'où $A = -B$.

La seconde condition initiale est déterminée à partir de la continuité du courant dans la bobine : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$. Loi des nœuds : $I_0 = \frac{u_C(0^+)}{R} + i_L(0^+) + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+)$ d'où $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{I_0}{C}$. Donc $\frac{I_0}{C} = Ar_1e^0 + Br_2e^0$, d'où $A = -B = \frac{I_0}{C(r_1 - r_2)} = 0{,}5$ V. Finalement la solution numérique est : $\boxed{u_C(t) = 0{,}5(e^{-500t} - e^{-2\cdot10^6 t})}$ avec t en s et u_C en V.

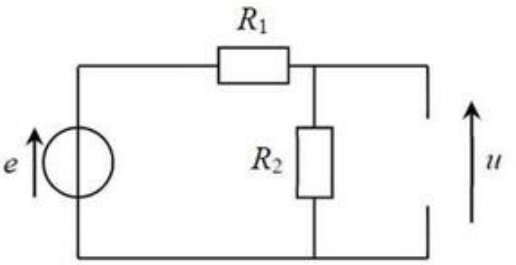
On constate que l'une des exponentielles tend beaucoup plus rapidement vers 0, ce qui permet de dire que rapidement l'équation de la tension devient $u_C(t) \approx 0{,}5e^{-500t}$. On connaît aussi la valeur $u_C(0) = 0$, ainsi que sa pente à l'origine très grande $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 10^6\ \mathrm{V/s}$, ce qui permet d'en déduire l'allure de la courbe.



⇨ *Méthodes 5.3, 5.4*

Exercice 5.4

1. Lorsque $t \to \infty$, le circuit est en régime établi continu, et l'on peut remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert et la bobine par un fil. On reconnaît un pont diviseur de tension : $\boxed{u(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}E}$.



2. Les formules élémentaires des dipôles sont :

$i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $u = R_2 i_2$ (avec i_2 le courant dans R_2 et vers le bas). Si on nomme i le courant sortant du générateur, alors en convention récepteur, on a $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_{R_1} = R_1 i$.

La loi des mailles donne $e = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + u$ et la loi des nœuds $i = i_2 + i_C = \dfrac{u}{R_2} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

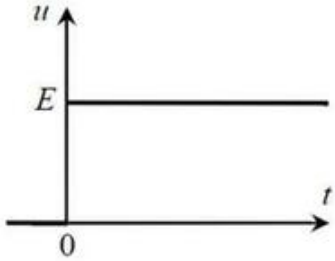
On remplace i par son expression dans la loi des mailles et l'on obtient $LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{L}{R_2} + R_1 C\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{R_1}{R_2} + 1\right)u = e$. On la met finalement sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{R_2LC}u = \frac{R_1 + R_2}{R_2LC}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}e\right)}.$$

On identifie alors les termes $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{R_1 + R_2}{R_2LC}}}$, $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_2C} + \dfrac{R_1}{L}\right)}$ et $u(\infty) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}e$.

⇨ *Méthodes 5.1, 5.2*

3.



Un échelon de tension est une tension $e(t)$ passant, de façon discontinue (à $t = 0$), d'une certaine valeur constante (ici 0) à une autre valeur constante (ici E).
On peut le réaliser avec une source de tension continue en série avec un interrupteur.
On peut aussi réaliser une succession périodique d'échelons avec un signal en créneaux de basse fréquence.

4. a) On mesure sur la courbe la pseudo-période : $T = 3{,}1 \times 200\ \mu s$ soit $\boxed{T = 620\ \mu s}$.

b) En mesurant l'écart à la valeur finale pour deux maxima successifs, on obtient le décrément logarithmique $\delta = \frac{1}{1}\ln\left(\frac{4-2}{2{,}5-2}\right)$ soit $\boxed{\delta = 1{,}4}$.

5. Déterminons la forme de la *solution générale de l'équation sans second membre* $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4\left(\lambda^2 - {\omega_0}^2\right) < 0$ car régime pseudo-périodique (d'après l'oscillogramme). Les racines sont donc $r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$. On en déduit l'allure de la solution de l'équation sans second membre : $u_{sg} = Ke^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}\,t + \varphi\right)$.

La *solution particulière constante* (comme le générateur) est solution de l'équation : $\frac{d^2u_{sp}}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_{sp}}{dt} + {\omega_0}^2 u_{sp} = {\omega_0}^2 u(\infty)$, d'où $\boxed{u_{sp} = u(\infty)}$. On obtient donc finalement la *solution générale complète* : $\boxed{u(t) = Ke^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}\,t + \varphi\right) + u(\infty)}$.

⇨ *Méthode 5.4*

6. On a $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t+nT) - u(\infty)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{Ke^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}\,t + \varphi\right)}{Ke^{-\lambda(t+nT)}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}\,(t+nT) + \varphi\right)}\right)$.

Or $Ke^{-\lambda(t+nT)}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}\,(t+nT) + \varphi\right) = e^{-\lambda nT}Ke^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}\,t + \varphi\right)$

donc $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(e^{\lambda nT}\right)$ soit $\boxed{\delta = \lambda T}$. On en tire $\boxed{\lambda = \frac{\delta}{T}}$. AN $\boxed{\lambda = 2{,}2 \cdot 10^3\,s^{-1}}$.

La précision des mesures à l'oscilloscope ne permet pas d'envisager de donner plus de deux chiffres significatifs.

7. D'après la formule de la question 2 : $\boxed{C = \frac{1}{R_2\left(2\lambda - \frac{R_1}{L}\right)} = 100\ nF}$.

Exercice 5.5

1. À $t = 0^-$, le circuit est depuis longtemps sous la tension $e = 0$; il a donc atteint son régime permanent. Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert, $\boxed{i(0^-) = 0}$, et la bobine comme un interrupteur fermé. Le courant étant nul dans la résistance, la tension aux bornes du condensateur est donc nulle et $\boxed{q(0^-) = Cu(0^-) = 0}$.

2. Les relations élémentaires sur les dipôles sont $u_R = Ri$, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et pour le condensateur $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $q = Cu$. Pour $t > 0$, la loi des mailles donne $E = u_R + u_L + u_C = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{C}$ en remplaçant le courant, on en déduit l'équation différentielle $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \dfrac{E}{L}}$.

La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc sa charge aussi : $\boxed{q(0^+) = q(0^-) = 0}$.

D'après la continuité du courant dans une inductance : $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Cette intensité est la même que pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0}$.

⇨ *Méthodes 5.1, 5.3*

3. L'équation caractéristique de l'équation sans second membre est $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$ et admet un discriminant $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$. D'après la condition de l'énoncé $\omega_0 > \gamma$, le discriminant est négatif, le régime correspondant est le régime pseudo-périodique. Les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique sont alors $r_{1,2} = -\gamma \pm j\omega$ où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Il en découle une solution de l'équation sans second membre du type

$q_{sg}(t) = \big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big)\mathrm{e}^{-\gamma t}$ avec A et B deux constantes d'intégration.

La solution particulière a même forme que le second membre, elle est donc constante : on trouve $q_{sp} = \dfrac{E}{L\omega_0^2}$ soit $\boxed{q_{sp} = CE}$. La solution de l'équation est donc

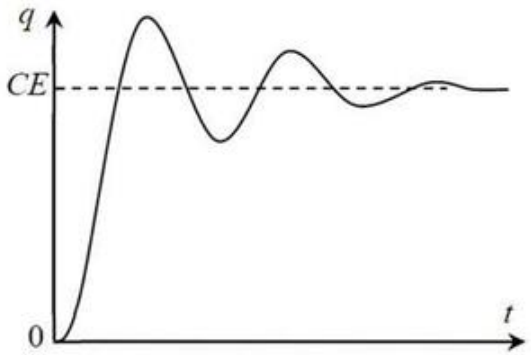
$\boxed{q(t) = \big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big)\mathrm{e}^{-\gamma t} + CE}$.

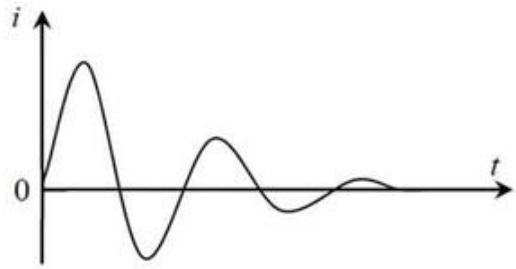
Il ne reste qu'à déterminer A et B à partir des conditions initiales $q(0^+) = 0 = A\cos(0)e^0 + CE$, soit $\boxed{A = -CE}$ et $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\gamma A + B\omega = 0$, d'où $\boxed{B = -CE\dfrac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}}$.

⇨ *Méthode 5.4*

4. Le courant s'obtient en dérivant la charge $q(t)$: $\boxed{i(t) = CE\dfrac{\omega_0^2}{\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t)}$.

5. La charge finale atteinte est CE et le courant final est nul. Ces valeurs se retrouvent facilement en remarquant qu'en régime permanent le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé. Le courant est alors nul ainsi que les tensions aux bornes de L et R. La tension du condensateur devient E et sa charge CE.





6. L'énergie fournie par le générateur s'obtient en intégrant la puissance fournie Ei par le générateur entre $t = 0$ et $t \to \infty$. En se rappelant que $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, cette intégrale se ramène à une simple intégration sur q : $E_G = \displaystyle\int_0^{\infty} Ei\,\mathrm{d}t = \int_0^{CE} E\,\mathrm{d}q$ d'où $\boxed{E_G = CE^2}$.

Pour l'énergie emmagasinée par l'inductance et la capacité, il suffit de faire les différences des énergies stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial. Or initialement aucune énergie n'est stockée, et à la fin rien n'est stocké dans l'inductance, donc $\boxed{E_{LC} = \Delta\left(\dfrac{1}{2}Li^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}\right) = \dfrac{1}{2}CE^2}$. L'énergie dissipée par effet Joule est la différence $\boxed{W_{\text{Joule}} = E_G - E_{LC} = \dfrac{1}{2}CE^2}$.

Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit. L'énergie fournie par le générateur est deux fois plus grande que celle stockée par la bobine et le condensateur, indépendamment de la valeur de la résistance du circuit.

Extrapolé à $R \to 0$, ce résultat semble contredire le principe de conservation de l'énergie, puisque la seconde moitié d'énergie ne peut plus être dissipée par effet Joule. En fait, pour $R \to 0$, le circuit oscille de façon sinusoïdale : on n'atteint jamais de régime permanent continu, et la bobine et le condensateur stockent et restituent alternativement de l'énergie.

Exercice 5.6

1. Les équations élémentaires des dipôles pour lesquels on représente le courant en convention récepteur sont $\begin{cases} v = Ri_R \\ i_C = C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \end{cases}$ pour la partie RC parallèle et $\begin{cases} u = Ri'_R \\ u = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{cases}$ pour la partie RL parallèle.

La loi des nœuds permet d'obtenir $i = i_C + i_R = i_L + i'_R$ et la loi des mailles $e = v + u$.

Utilisons la loi des nœuds et remplaçons avec les expressions des dipôles élémentaires $C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v}{R} = i_L + \dfrac{u}{R}$.

Or nous n'avons de relation que sur la dérivée de i_L, par conséquent, nous dérivons l'équation et on remplace $C\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{u}{L}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Pour avoir une relation que sur u par exemple, on utilise la relation provenant de la loi des mailles pour $t>0$ $v=E-u$ et l'on obtient $-C\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{u}{L}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{2}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u}{LC}=0}$.

En remplaçant $u=E-v$, on obtient $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{2}{RC}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v}{LC}=\dfrac{E}{LC}}$.

On identifie avec les coefficients de la forme canonique d'un système du second ordre en commençant par le terme qui contient le moins d'inconnues :

$\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ d'où $\boxed{\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$, puis $\dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{2}{RC}$ d'où $\boxed{Q=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$.

⇨ *Méthodes 5.1, 5.2*

2. La condition de continuité de la tension aux bornes d'un condensateur donne $\boxed{v(0^+)=v(0^-)=0}$.

De plus d'après la loi des nœuds (la tension v étant nulle donc constante pour $t<0$) : $i(0^-)=i_R(0^-)+i_C(0^-)=\dfrac{v(0^-)}{R}+C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0^-)=0$, d'où on peut déduire par une autre loi des nœuds $i_L(0^-)=i(0^-)-\dfrac{u(0^-)}{R}=0$. Par continuité du courant traversant une inductance, on en déduit $i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$.

La loi des mailles en $t=0^+$ donne $\boxed{E=v(0^+)+u(0^+)=u(0^+)}$, d'où on peut aussi tirer $i(0^+)=\dfrac{u(0^+)}{R}=\dfrac{E}{R}$. Enfin d'après la loi des nœuds en $t=0^+$: $i(0^+)=C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0^+)+\dfrac{v(0^+)}{R}$, d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0^+)=\dfrac{E}{RC}}$ et comme $v+u=E=\text{cte}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0^+)=-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$ donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=-\dfrac{E}{RC}}$.

⇨ *Méthode 5.3*

3. On résout l'équation caractéristique $r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$ de l'équation sans second membre.

Le discriminant de cette équation est $\Delta=\dfrac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=-4\omega_0^2\left(1-\dfrac{1}{4Q^2}\right)<0$, les racines sont donc

$r_{1,2}=-\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}=-\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega$ avec $\omega=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$.

La solution de l'équation sans second membre est donc de la forme $v_{sg}(t)=\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos\omega t+B\sin\omega t]$. Solution particulière constante : $v_{sp}=E$.

La solution s'écrit donc $v(t) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)[A\cos\omega t + B\sin\omega t] + E$.

Première condition initiale : $v(0^+) = 0 = e^0[A\cos 0 + B\sin 0] + E$, d'où $A = -E$. Pour la seconde condition initiale, on commence par calculer l'expression de la dérivée de la tension v :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos\omega t + B\sin\omega t] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t].$$

Alors $\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} = -A\frac{\omega_0}{2Q} + B\omega$, avec $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{2Q}$, d'où $B = 0$.

On peut donc écrire $\boxed{v(t) = E\left(1 - \cos(\omega t)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\right)}$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Or on se place dans le cas $Q \gg 1$, ce qui implique $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$ (par conséquent la pseudo-période des oscillations vaut environ T_0), et la constante de temps contenue dans l'exponentielle $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2Q}{2\pi f_0} = \frac{Q}{\pi}T_0 \gg T_0$: la constante de temps de décroissance exponentielle est beaucoup plus longue que la pseudo-période d'oscillation. On en déduit que les premières périodes ne sont pratiquement pas amorties, d'où $\boxed{v(t) \approx E(1 - \cos\omega_0 t)}$ pour les premières oscillations. Alors $\boxed{v_{max} \approx 2E}$ (obtenu lorsque le cosinus vaut -1).

⇨ *Méthode 5.4*

Exercice 5.7

1.

```
def F(Y,t):
  return [Y[1], -5*Y[1]]
```

2.

```
def F(Y,t): #
    return [Y[1], -2*Y[0] -4*Y[1]]
```

3.

```
import numpy as np
def F(Y,t):
    return [Y[1], -3*Y[0] -5*Y[1] + 2np.sin(6*t)]
```

⇨ *Méthode 5.6*

Exercice 5.8

1. On connaît $r(t_n)$ et $\dot{r}(t_n)$. On calcule donc $\ddot{r}(t_n)$ en utilisant l'équation différentielle : $\ddot{r}(t_n) = -2\lambda\dot{r}(t_n) + \omega_0^2 r(t_n)$.

Ensuite on calcule $\dot{r}(t_{n+1}) = \dot{r}(t_n) + \ddot{r}(t_n) \times (t_{n+1} - t_n)$ et $r(t_{n+1}) = r(t_n) + \dot{r}(t_n) \times (t_{n+1} - t_n)$ en faisant l'approximation : $\dot{r}(t_n) \approx \dfrac{r(t_{n+1}) - r(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$ et $\ddot{r}(t_n) \approx \dfrac{\dot{r}(t_{n+1}) - \dot{r}(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$.

Cette approximation est d'autant plus efficace que t_n et t_{n+1} sont plus proches.

2. `(50,-50,-300)`

3. La boucle peut s'écrire :

```
while i <= N-1:
        (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lambda*v-omega*omega*x)
        tab_1[i] = x
        tab_2[i] = v
        i = i+1
```

Attention à bien initialiser `i`, et à ne pas oublier de l'incrémenter dans boucle !

⇨ *Méthode 5.6*

Chapitre 6

Régime sinusoïdal forcé

UN SCIENTIFIQUE



Le physicien allemand **Gustav Kirchhoff** (1824-1887) est encore étudiant lorsqu'il énonce les deux lois sur les courants électriques dans les circuits qui portent désormais son nom. Il enseigne successivement à Breslau, Heidelberg et Berlin. Ses travaux sur les raies spectrales avec Robert Bunsen lui permettent de découvrir en 1860 le césium et le rubidium. Pour énoncer une loi universelle sur le rayonnement, il introduit en 1862 le concept de corps noir.

Un peu d'histoire

Peu avant 1800, une controverse est apparue entre Luigi Galvani et Alessandro Volta sur l'électricité animale. Ceci a conduit le second à élaborer la première pile. En 1831, Michael Faraday découvre le phénomène d'induction grâce à deux expériences successives, l'une à l'aide de bobines connectées à une pile et l'autre avec un solénoïde. L'année suivante Joseph Henry redécouvre la même propriété.

On connaissait déjà le courant électrostatique. Faraday étudie les effets de ces différents types de courant sur un galvanomètre et sur les décompositions chimiques que cela engendre et montre qu'il s'agit d'un même phénomène. C'est ainsi que le physicien anglais découvre les lois de l'électrolyse. Il introduit les mots électrode, cathode et anode. Le suffixe *ode* vient du grec *odos* qui désigne la route : ainsi, la cathode est « la route vers le bas » et l'anode celle « vers le haut ».

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition de l'amplitude complexe d'une grandeur sinusoïdale
- ▷ La définition de la valeur efficace, et son expression pour une grandeur sinusoïdale
- ▷ Les notions d'impédance et d'admittance
- ▷ Les impédances et admittances des dipôles linéaires simples

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Passer d'une équation différentielle linéaire à une équation complexe, et inversement
- ▷ Utiliser toutes les lois des circuits en notation complexe
- ▷ Calculer une impédance ou une admittance équivalente à une association
- ▷ Déterminer l'amplitude et la phase d'une grandeur réelle à partir de son amplitude complexe
- ▷ Étudier la réponse fréquentielle d'un circuit en intensité ou en tension

■■ Résumé de cours

■ Réponse d'un circuit à une excitation périodique

Si on relie, à un certain instant, un circuit linéaire à un générateur fournissant un signal périodique, chaque grandeur obéit alors à une équation différentielle avec second membre périodique. La solution est alors, comme précédemment, la somme de deux termes :
– la solution de l'équation sans second membre, tendant toujours vers zéro avec un temps caractéristique τ ;
– une solution particulière, de même période que le second membre, et indépendante des conditions initiales.
Au bout de quelques τ, il ne reste que le terme périodique. Dans le cas d'un générateur de signal sinusoïdal, toutes les grandeurs du circuit sont alors sinusoïdales de même période : c'est le **régime sinusoïdal forcé**.

■ Grandeurs en régime sinusoïdal forcé

❑ Forme générale

En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont de la forme : $\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$.
ω est la pulsation imposée par le générateur, liée à sa fréquence f par la relation $\boxed{\omega = 2\pi f}$.
La période T des signaux est $\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$.
Le déphasage d'une grandeur $x_1(t)$ par rapport à $x_2(t)$ est $\boxed{\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2}$.

❑ Valeur efficace

On définit la valeur efficace d'un signal périodique par $\boxed{X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 \, \mathrm{d}t}}$.
Elle correspond (dans le cas d'une tension ou d'un courant) à la valeur continue qui produirait le même effet Joule que la grandeur variable, dans une résistance, pendant le même temps.
Dans le cas d'un signal sinusoïdal on trouve $\boxed{X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}}$.
Les intensités et tensions efficaces se mesurent avec un multimètre en mode AC.

❑ Expression complexe

On associe au signal réel un signal complexe :
$\boxed{\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}}$ tel que $x(t) = \mathrm{Re}[\underline{x}(t)]$.

Le signal complexe peut se décomposer en un facteur variable et une **amplitude complexe** $\underline{X}$:

$$\boxed{\underline{x}(t) = \underline{X}\, e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X} = X_m e^{j\varphi}}.$$

On identifie alors les éléments nécessaires à la détermination complète de la grandeur x :

$$\boxed{X_m = |\underline{X}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \arg(\underline{X})}.$$

Opérations sur les complexes

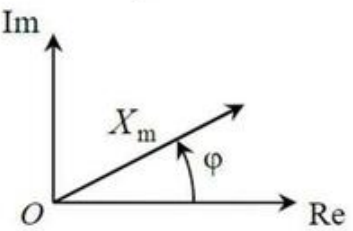
Pour les grandeurs complexes : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{x}(t)}$ et $\boxed{\int \underline{x}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\underline{x}(t)}{j\omega}}$.

Ainsi une équation différentielle pour des grandeurs sinusoïdales peut être transformée en équation algébrique pour les grandeurs complexes correspondantes, puis pour les amplitudes complexes (après simplification par $e^{j\omega t}$ dans tous les termes).

⇨ **Méthode 6.1. Passage d'une équation différentielle à une équation complexe**
⇨ **Méthode 6.2. Passage d'une équation complexe à une équation différentielle**

❑ Représentation dans le plan complexe (vecteur de Fresnel)

Chaque grandeur complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ peut être représentée, dans le plan complexe, par un vecteur de norme X_m, faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe (Ox) : c'est donc un vecteur tournant avec la vitesse angulaire ω. Généralement, on fait un schéma à l'instant $t = 0$: le vecteur représente alors l'amplitude complexe $\underline{X} = X_m e^{j\varphi}$, ce qui fait apparaître l'angle φ.



⇨ **Méthode 6.4. Utilisation des vecteurs de Fresnel**

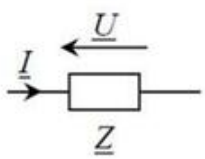
■ Loi d'Ohm et impédance complexe

❑ Loi d'Ohm complexe

Pour tout dipôle passif linéaire, en convention récepteur : $\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$

où $\underline{Z}$ est l'**impédance** complexe du dipôle.

En convention générateur, l'expression devient $\underline{U} = -\underline{Z}\,\underline{I}$.



L'impédance complexe peut se mettre sous la forme $\boxed{\underline{Z} = Z\, e^{j\varphi}}$.

$\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ donc $\boxed{Z = |\underline{Z}| = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}}$ et $\boxed{\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i}$ (déphasage de la tension par rapport au courant).

On définit aussi l'**admittance** complexe : $\boxed{\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{U}}}$.

Unités SI

Le module de l'impédance s'exprime en ohms (Ω), et celui de l'admittance en siemens (S).

❑ Impédances des dipôles simples

	R	L	C
Relation temporelle	$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Relation complexe	$\underline{U} = R\,\underline{I}$	$\underline{U} = jL\omega\,\underline{I}$	$\underline{I} = jC\omega\,\underline{U}$
Impédance et admittance	$\underline{Z}_R = R$, $\underline{Y}_R = \dfrac{1}{R}$	$\underline{Z}_L = jL\omega$, $\underline{Y}_L = \dfrac{1}{jL\omega}$	$\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$, $\underline{Y}_C = jC\omega$

Comportement asymptotique

	L	C
$\omega \to 0$	$\lvert\underline{Z}_L\rvert \to 0 \Leftrightarrow$ fil	$\lvert\underline{Z}_C\rvert \to \infty \Leftrightarrow$ coupe-circuit
$\omega \to \infty$	$\lvert\underline{Z}_L\rvert \to \infty \Leftrightarrow$ coupe-circuit	$\lvert\underline{Z}_C\rvert \to 0 \Leftrightarrow$ fil

■ Lois des circuits

❑ Lois de Kirchhoff

Les lois des nœuds et des mailles s'écrivent de la même façon qu'en régime continu, avec les grandeurs complexes ou avec les amplitudes complexes : $\boxed{\sum \varepsilon_k \underline{I}_k = 0}$ et $\boxed{\sum \varepsilon_k \underline{U}_k = 0}$.

❑ Associations

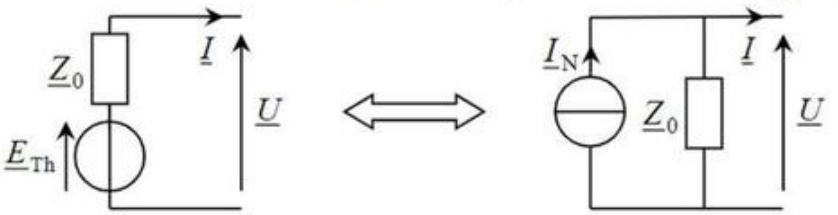
Les lois d'associations des dipôles ohmiques sont valables en remplaçant R par $\underline{Z}$ et G par $\underline{Y}$.

– En série : $\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum \underline{Z}_k$. Pont diviseur de tension : $\underline{U}_j = \dfrac{\underline{Z}_j}{\sum \underline{Z}_k}\underline{U}_{\text{ensemble}}$.

– En parallèle : $\underline{Y}_{\text{éq}} = \sum \underline{Y}_k$. Pont diviseur de courant : $\underline{I}_j = \dfrac{\underline{Y}_j}{\sum \underline{Y}_k}\underline{I}_{\text{ensemble}}$.

❑ Modèles de Thévenin et de Norton

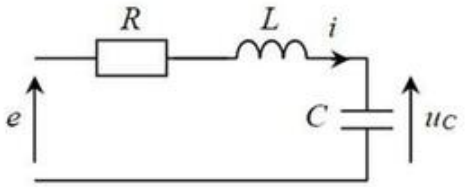
Un dipôle actif peut être modélisé de deux manières équivalentes, avec $\underline{E}_{\text{Th}} = \underline{Z}_0\underline{I}_{\text{N}}$:



Ces modèles correspondent aux relations : $\underline{U} = \underline{E}_{\text{Th}} - \underline{Z}_0\underline{I}$ et $\underline{I} = \underline{I}_{\text{N}} - \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_0}$.

⇨ **Méthode 6.3. Utilisation des lois en complexes puis retour aux réels**

■ Étude du circuit *RLC* série



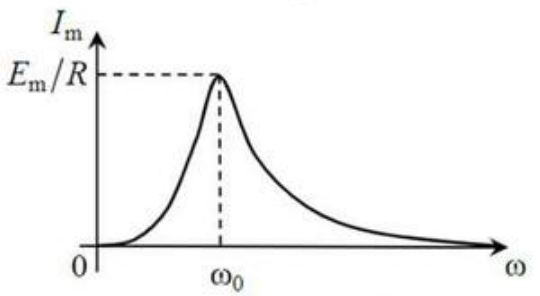
On suppose $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et on se place en régime sinusoïdal forcé.

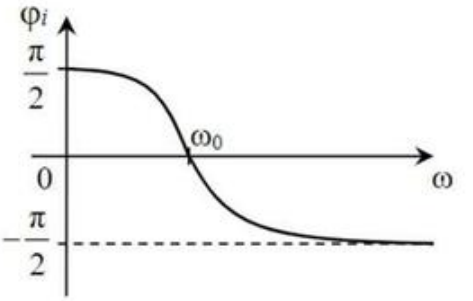
❑ Réponse en intensité

$$\underline{I} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{E_m}{R} \times \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{en posant } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Amplitude : $I_m = \dfrac{E_m}{R} \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

Déphasage : $\varphi_i = -\arctan\left[Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$





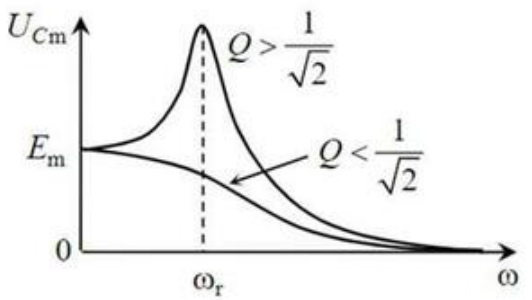
Quel que soit le facteur de qualité, il y a toujours **résonance en intensité**, à la pulsation ω_0.

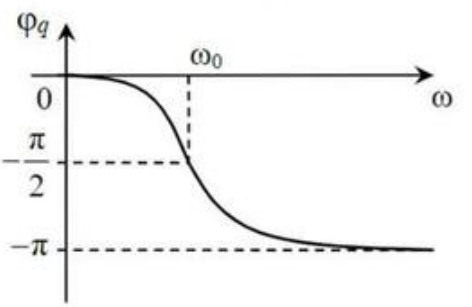
❑ Réponse en charge (ou en tension) du condensateur

$$\underline{U_C} = \frac{E_m}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{E_m}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{et } \underline{Q} = C\underline{U_C}.$$

Amplitude : $U_{Cm} = \dfrac{E_m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

Déphasage : $\varphi_q = -\arctan\left[Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right] - \dfrac{\pi}{2}$





Si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ il y a un phénomène de **résonance en charge**, à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.

⇨ Méthode 6.5. Étude de la réponse fréquentielle et résonance

■ Comment passer d'une équation différentielle à une équation complexe et inversement ?

❑ Méthode 6.1. Passage d'une équation différentielle à une équation complexe

On remplace les grandeurs temporelles par les grandeurs complexes associées. Dans ces conditions, dériver revient à multiplier par $j\omega$ (et intégrer à diviser par $j\omega$) : on obtient alors une simple équation algébrique avec les grandeurs complexes, puis uniquement avec les amplitudes complexes après simplification par $e^{j\omega t}$ dans tous les termes.

⇨ Exercice 6.11, 10.15

Soit l'équation $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u(t)=E_\mathrm{m}\cos(\omega t)$. On passe en écriture complexe, soit :

$$-\omega^2\underline{u}(t)++j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{u}(t)+\omega_0^2\underline{u}(t)=E_\mathrm{m}e^{j\omega t}.$$

On décompose $\underline{u}(t)=\underline{U}e^{j\omega t}$, d'où $-\omega^2\underline{U}e^{j\omega t}+j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{U}e^{j\omega t}+\omega_0^2\underline{U}e^{j\omega t}=E_\mathrm{m}e^{j\omega t}$ et on simplifie tous les termes par $e^{j\omega t}$: $-\omega^2\underline{U}+j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{U}+\omega_0^2\underline{U}=E_\mathrm{m}$.

On en tire immédiatement $\underline{U}$, d'où la fonction $u(t)$ qui est la solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle. Rappelons que cette solution particulière correspond au régime sinusoïdal forcé, obtenu après la fin du régime transitoire initial (celui-ci étant toujours extrêmement court, on ne le considère pratiquement jamais).

❑ Méthode 6.2. Passage d'une équation complexe à une équation différentielle

Lorsque l'on dispose d'une équation complexe liant deux grandeurs, si cette dernière comporte une fraction, il faut effectuer le produit en croix.
Ensuite on remplace toute grandeur complexe multipliée par $j\omega$ par sa dérivée, et toute grandeur divisée par $j\omega$ par son intégrale temporelle.

Supposons par exemple qu'on ait trouvé $\underline{U} = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{E}$.

On effectue le produit en croix pour supprimer les fractions : $(R + jL\omega)\underline{U} = jL\omega\,\underline{E}$.

On repasse alors en écriture temporelle : $Ru + L\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}u = \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$.

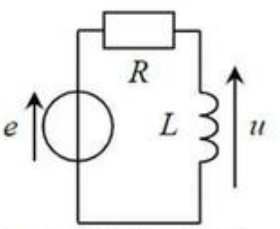
■ Comment déterminer l'expression d'un courant ou d'une tension en régime sinusoïdal ?

❑ Méthode 6.3. Utilisation des lois en complexes puis retour aux réels

On applique les mêmes lois et méthodes qu'en régime continu, mais en écrivant toutes les équations avec les impédances complexes et les amplitudes complexes. Une fois que la grandeur complexe $\underline{X}$ est déterminée, on peut revenir à son expression temporelle $x(t)$ en identifiant son module X_m et son argument φ.

⇨ Exercices 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.14

On cherche à déterminer l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes de l'inductance en régime sinusoïdal forcé, en supposant $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On cherche donc la tension sous la forme $u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$ avec un cosinus comme pour l'expression de $e(t)$.



On reconnaît un pont diviseur de tension formé par les deux dipôles (impédances R et $jL\omega$), ainsi la tension complexe s'écrit : $\underline{u}(t) = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{e}(t) = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}E_0 e^{j\omega t}$.

Pour bien comprendre, passons tous les complexes en notation exponentielle :

$$\underline{u} = \frac{L\omega e^{j\pi/2}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}\,e^{j\arctan(L\omega/R)}}E_0\,e^{j\omega t} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}E_0\,e^{j(\omega t + \pi/2 - \arctan(L\omega/R))} = U_\mathrm{m}\,e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

On déduit la grandeur temporelle (réelle) :

$$u(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{u}(t)\right) = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}E_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right).$$

Avec l'habitude, on pourra travailler directement avec les amplitudes complexes, soit $\underline{U} = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}E_0$ puis déduire $U_\mathrm{m} = |\underline{U}| = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}E_0$ et la phase $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg(\underline{\text{numérateur}}) - \arg(\underline{\text{dénominateur}}) = \arg(jL\omega\,E_0) - \arg(R + jL\omega)$ soit $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$. On a ainsi complètement déterminé $u(t) = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$.

On rappelle que pour un nombre complexe $\underline{X} = a + jb$, son module est $|\underline{X}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son argument $\begin{cases} \arg(\underline{X}) = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0 ; \\ \arg(\underline{X}) = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a < 0. \end{cases}$

On a donc intérêt à avoir un seul terme, de préférence positif, dans la partie réelle.

❑ Méthode 6.4. Utilisation des vecteurs de Fresnel

C'est une manière de visualiser les amplitudes et les phases des différentes grandeurs, en représentant les amplitudes complexes dans le plan complexe.

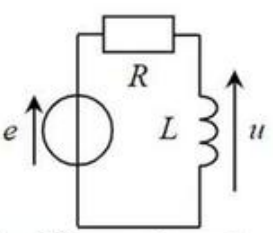
– On écrit, soit une loi des mailles, soit une loi des nœuds, sous forme complexe. On représente les vecteurs associés aux nombres complexes : ces vecteurs de Fresnel s'additionnent comme les grandeurs qu'ils représentent. Dans une loi des mailles, l'intensité sert de référence, elle est donc placée sur l'axe (Ox) ; dans une loi des nœuds, c'est plutôt la tension qui sert de référence.

– Avec les relations dans un triangle rectangle, on obtient l'amplitude et la phase de la grandeur. Si le triangle entre les grandeurs n'est pas rectangle, il faut utiliser les normes des vecteurs (en fait leurs carrés qui correspondent au théorème d'Al-Kashi).

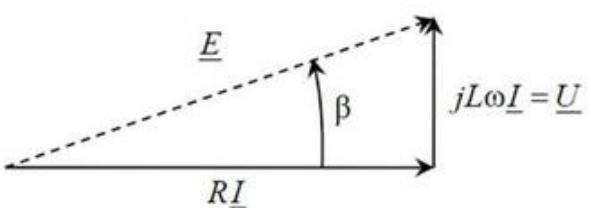
⇨ **Exercices 6.8, 6.9, 6.12, 6.13**

– Cas d'un triangle rectangle

On cherche à déterminer l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes de l'inductance, en régime sinusoïdal forcé, en supposant $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On cherche donc la tension sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec un cosinus comme pour l'expression de $e(t)$.



La loi des mailles donne $\underline{E} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I}$, avec $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$. Le courant sert de référence (axe des abscisses) pour le diagramme de Fresnel : son argument est pris égale à 0. L'argument de j étant $\dfrac{\pi}{2}$, celui de $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$ est $\dfrac{\pi}{2}$ également, donc ce vecteur est dessiné orthogonalement à l'axe des abscisses.

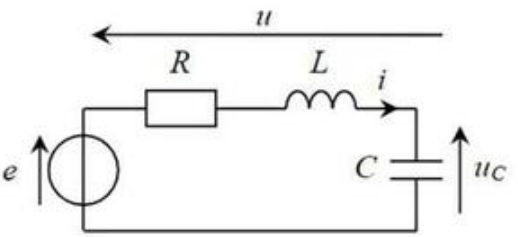


Dans ce triangle rectangle : $\sin\beta = \dfrac{U_m}{E_0} = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ soit $\boxed{U_m = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} E_0}$.

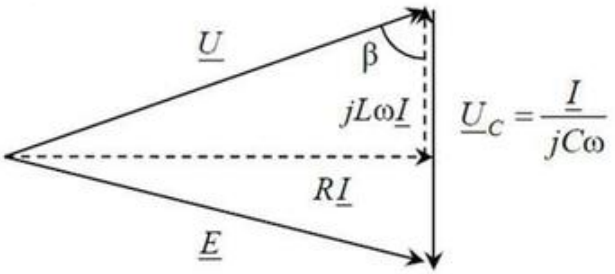
La tension $e(t)$ est en avance de $\beta = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$ sur le courant. On constate aussi que la tension $u(t)$ est en avance de $\dfrac{\pi}{2} - \beta$ sur la tension $e(t)$, soit $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)}$. On a ainsi complètement déterminé $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

– Cas d'un triangle non rectangle

On a relevé les valeurs efficaces des tensions $U = 12$ V, $U_C = 5$ V et un déphasage entre $u_C(t)$ et $u(t)$ de $\beta = 110°$. En s'aidant de la représentation de Fresnel, retrouver la valeur efficace de la tension $e(t)$.



La loi des mailles (association série) donne $\underline{E} = \underline{U} + \underline{U}_C$, avec pour chaque tension $\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I}$ et $\underline{U}_C = \dfrac{\underline{I}}{jC\omega}$. Le courant sert de référence pour le diagramme de Fresnel.



On calcule $E^2 = \overline{E}^2 = \left(\overline{U} + \overline{U_C}\right)^2 = U^2 + U_C^2 + 2\overline{U} \cdot \overline{U}_C = U^2 + U_C^2 + 2UU_C \cos\beta$ (même si la représentation est faite avec les amplitudes, le résultat demeure identique en valeur efficace, il suffit de diviser toute l'équation par 2).

On en déduit $\boxed{E = \sqrt{U^2 + U_C^2 + 2UU_C \cos\beta} = 11{,}3 \text{ V}}$.

❑ Méthode 6.5. Étude de la réponse fréquentielle et résonance

Pour une grandeur donnée $x(t)$ du circuit, la réponse fréquentielle consiste à étudier les variations de son amplitude X_m (et éventuellement de sa phase φ) en fonction de la pulsation ω. Pour cela on calcule le module de l'amplitude complexe $\underline{X}$, puis on cherche ses limites pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ et enfin un éventuel maximum (résonance).

⇨ **Exercice 6.8, 10.15**

– Amplitude de l'intensité du circuit *RLC* série : $I_m = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$.

Pour $\omega \to 0$ et pour $\omega \to \infty$, $I_m \to 0$.

La seule partie variable est la parenthèse au carré au dénominateur. Ce terme est nul, donc minimal, pour $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$: I_m est alors maximale (résonance en intensité).

– Amplitude de la tension aux bornes du condensateur dans le circuit *RLC* série :

$$U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

Pour $\omega \to 0$, $U_m \to E_m$ et pour $\omega \to \infty$, $U_m \to 0$.

Pour trouver les variations, on doit dériver U_m par rapport à ω :

$$\frac{dU_m}{d\omega} = -\frac{1}{2}E_m \frac{2(1-LC\omega^2)(-2LC\omega) + 2(RC\omega)(RC)}{\left[(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2\right]^{3/2}} = E_m \frac{\omega(2LC - 2L^2C^2\omega^2 - R^2C^2)}{\left[(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2\right]^{3/2}}.$$

Cette dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour $2LC - 2L^2C^2\omega_r^2 - R^2C^2 = 0$ soit $\omega_r = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{R^2C}{2L}} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$. Cette seconde valeur n'existe que si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: elle correspond alors à un maximum (résonance en tension) et $\omega = 0$ correspond à un minimum local.

Si $Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, le seul extremum est $\omega = 0$ et c'est un maximum : ensuite la dérivée est toujours négative donc U_m décroît jusqu'à la valeur limite 0.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Dans un circuit ne comportant que des composants linéaires et une source sinusoïdale, toutes les grandeurs mesurables sont sinusoïdales.	☐	☐
2.	Pour effectuer des calculs dans le cas d'un régime sinusoïdal, il faut passer en écriture complexe.	☐	☐
3.	Les lois du continu (lois des nœuds et des mailles, équivalence de Thévenin-Norton...) ne sont plus valables en régime sinusoïdal.	☐	☐
4.	Lorsque la pulsation tend vers zéro (ce qui correspond au régime continu), un condensateur se comporte comme un fil.	☐	☐
5.	Lorsque la pulsation tend vers zéro (ce qui correspond au régime continu), une inductance se comporte comme un fil.	☐	☐
6.	Lorsque la pulsation tend vers l'infini, un condensateur se comporte comme un fil.	☐	☐
7.	Lorsque la pulsation tend vers l'infini, une inductance se comporte comme un fil.	☐	☐
8.	Le courant traversant une inductance est en retard sur la tension à ses bornes.	☐	☐
9.	L'amplitude et la phase d'un régime sinusoïdal forcé dépendent des conditions initiales.	☐	☐
10.	Le facteur de qualité Q permet de distinguer différents cas pour un oscillateur forcé (régime permanent).	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Équivalence entre notation complexe et notation réelle

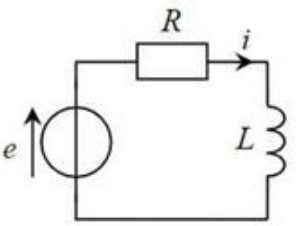
❑ Exercice 6.1. Notation complexe et notation temporelle

Déterminer les amplitudes complexes associées aux grandeurs suivantes (sans dimension), puis préciser leurs modules et arguments.

1. $u(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$. **2.** $s(t) = -2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$. **3.** $i(t) = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$.

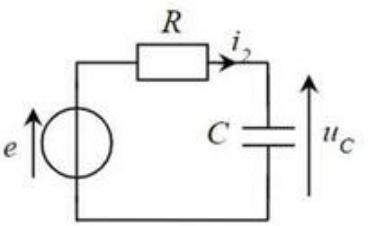
❑ Exercice 6.2. Circuits d'ordre 1 en régime sinusoïdal forcé

On considère un générateur de tension $e(t) = E\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$.



1. Ce générateur alimente un dipôle RL série. Donner l'expression du courant complexe $\underline{i}(t)$ qui traverse le dipôle, puis en déduire $i(t)$.

2. Maintenant le générateur alimente un dipôle RC série. Donner l'expression du courant complexe $\underline{i}_2(t)$ qui traverse le dipôle, puis en déduire $i_2(t)$ réel. Déterminer aussi l'expression de la tension $u_C(t)$ aux bornes de C.

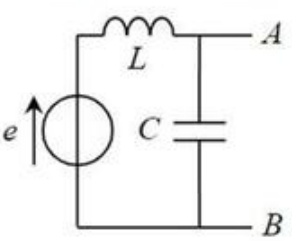


3. Reprendre la question **2** si la FÉM du générateur vaut $e(t) = E\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$.

■ Dipôles en régime sinusoïdal

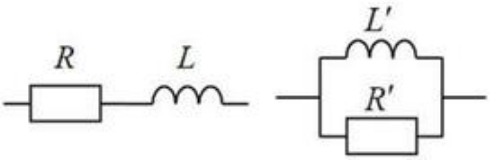
❑ Exercice 6.3. Détermination des modèles de Thévenin et de Norton

Déterminer le modèle de Thévenin et le modèle de Norton du dipôle représenté entre A et B, la tension $e(t)$ étant sinusoïdale.



❑ Exercice 6.4. Équivalence entre deux dipôles

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω et on considère les deux dipôles ci-contre.

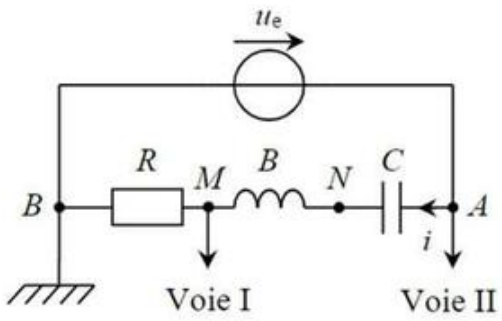


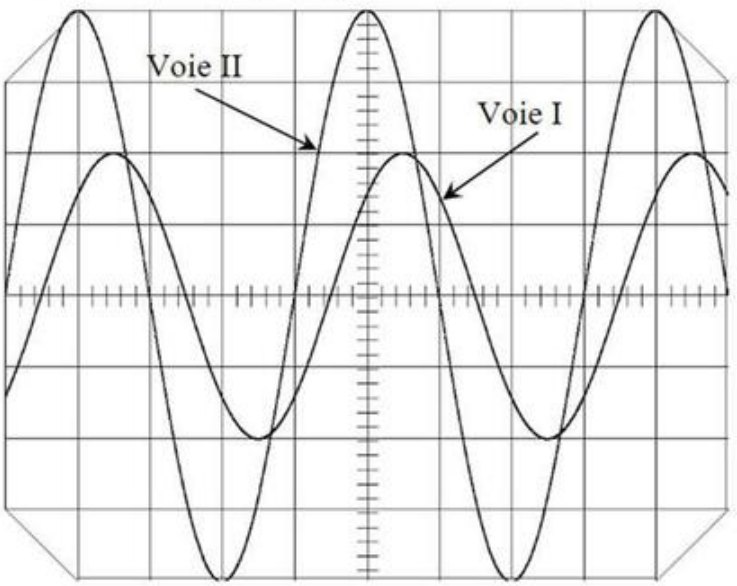
1. Quelles doivent être les expressions de L' et R' (en fonction de L, R et ω) pour que les deux dipôles soient équivalents ?

2. Pour quelle pulsation a-t-on $\dfrac{L}{R}=\dfrac{L'}{R'}$?

❑ Exercice 6.5. Détermination des caractéristiques d'une bobine*

Pour étudier une bobine réelle B, on effectue le montage indiqué sur le schéma. C'est ainsi que l'on obtient l'oscillogramme (ou copie d'écran de l'oscilloscope) reproduit ci-dessous.





Le générateur délivre une tension $u_e(t)=U_m\cos(\omega t)$.

Données : $R=20\ \Omega$, $C=10\ \mu F$.

Les calibres sont identiques pour les deux voies : 2 V/div et 1 ms/div.

1. L'oscillogramme permet de calculer les valeurs de la période T, de la pulsation ω, des amplitudes U_m et I_m, et de l'impédance réelle Z_{AB}. Déterminer ces valeurs numériques et recopier, en le complétant, le tableau qui suit.

Grandeur	T (s)	ω (rad/s)	I_m (A)	U_m (V)	Z_{AB} (Ω)
Valeur numérique					

2. Des deux tensions u_I et u_{II}, laquelle est en avance de phase sur l'autre ?

3. Calculer le déphasage φ entre la tension $u_e(t)=U_m\cos(\omega t)$ et l'intensité du courant $i(t)=I_m\cos(\omega t-\varphi)$.

4. Montrer que, dans l'hypothèse d'une bobine idéale B de résistance r nulle, les valeurs numériques de Z_{AB}, φ et R (donnée de l'énoncé) sont incohérentes.

5. Il est donc nécessaire de prendre en compte la résistance r de la bobine. Calculer r.

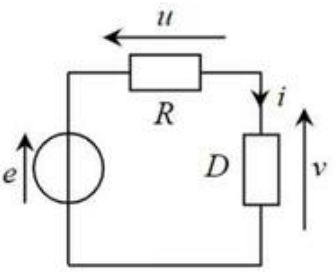
6. En déduire la valeur numérique de l'inductance L.

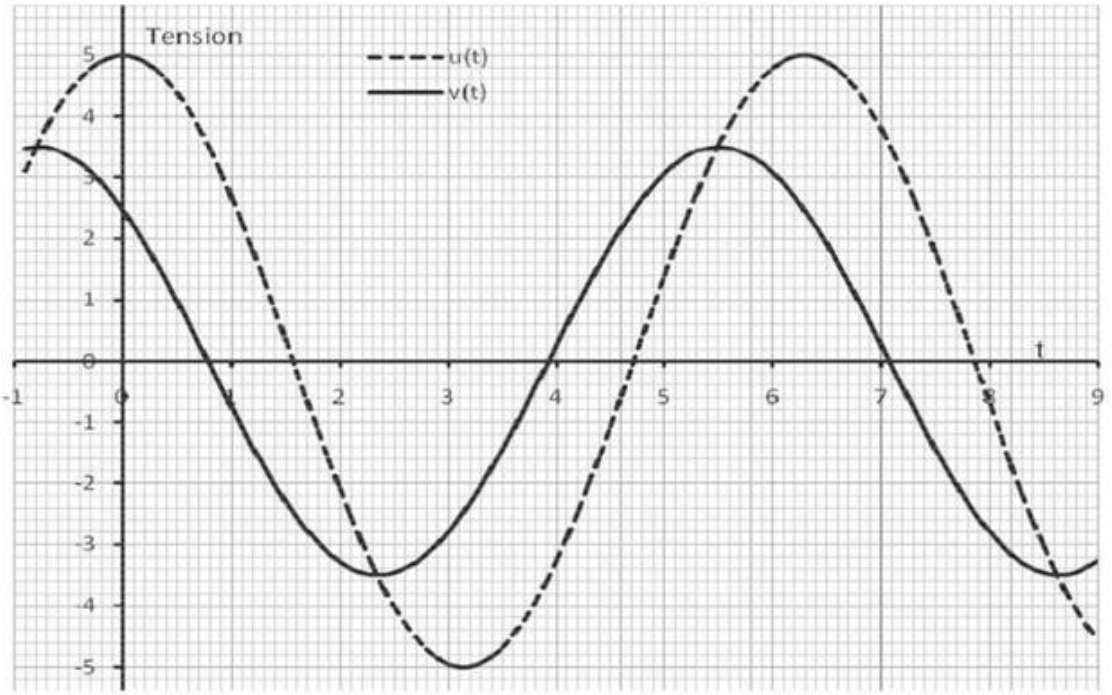
D'après CCINP

❑ Exercice 6.6. Dipôle inconnu*

Dans le montage suivant, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω, R est une résistance et D un dipôle inconnu. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ les tensions aux bornes respectivement de R et D.

On visualise à l'oscilloscope $v(t)$, $u(t)$ et on obtient le graphe suivant.





L'unité de l'axe des temps est 10^{-2} s et celle de l'axe des tensions est 1 V. On utilise ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de D, sachant que $R = 100\ \Omega$.

1. Déterminer V_m, U_m ainsi que la pulsation ω des signaux utilisés.

2. La tension v est-elle en avance ou en retard sur la tension u ? En déduire le signe de φ. Déterminer la valeur de φ à partir du graphe.

3. On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance du dipôle D.

a) Déterminer à partir des résultats précédents les valeurs de X et Y.

b) Par quel dipôle (condensateur, bobine...) peut-on modéliser D ? Donner ses caractéristiques.

❑ Exercice 6.7. Quartz piézoélectrique**

Un quartz piézoélectrique, destiné à servir d'étalon de fréquence dans une horloge, est modélisé par un dipôle AB composé de deux branches en parallèle : dans l'une se trouve une bobine d'inductance L, en série avec un condensateur de capacité C ; dans l'autre, un condensateur de capacité C_0. On posera $\frac{C}{C_0} = a$, et on gardera les variables L, C_0, ω et a.



1. Le dipôle AB étant alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω, calculer son impédance complexe $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}$.
2. Calculer son module $|\underline{Z}| = Z$.
3. Déterminer son argument φ (sans chercher à déterminer son signe).
4. On étudie maintenant en fonction de la pulsation l'impédance Z ; pour cela, on appellera ω_1 et ω_2, les valeurs finies non nulles de la pulsation pour lesquelles Z est respectivement nulle et infinie. Donner $Z = f(C_0, \omega, \omega_1, \omega_2)$.
5. Donner l'allure du graphe $Z(\omega)$. On précisera tout particulièrement les limites de Z quand ω tend vers zéro ou l'infini.
6. Quel est le comportement électrique simple de AB pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$?

D'après CCINP

❑ Exercice 6.8. Antirésonance en tension d'un *RLC* série*

On considère un dipôle RLC série, dont l'impédance est notée $\underline{Z}$, parcouru par le courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et on appelle $u(t)$ la tension aux bornes de l'ensemble en régime sinusoïdal.

1. **a)** Déterminer l'expression de $u(t)$.

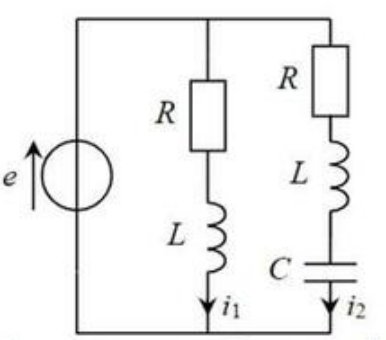
b) Représenter les variations de son amplitude par rapport à celle du courant (U_m/I_m) et de son déphasage par rapport à $i(t)$ en fonction de la pulsation ω.

2. Déterminer la pulsation ω_0 pour laquelle $|\underline{Z}|$ est minimum. Déterminer les pulsations ω_1 et ω_2 telles que $|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega_2)| = \sqrt{2}\,|\underline{Z}(\omega_0)|$. En déduire $Q = \dfrac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|}$.

■ Utilisation des lois des circuits

❑ Exercice 6.9. Branches en parallèle**

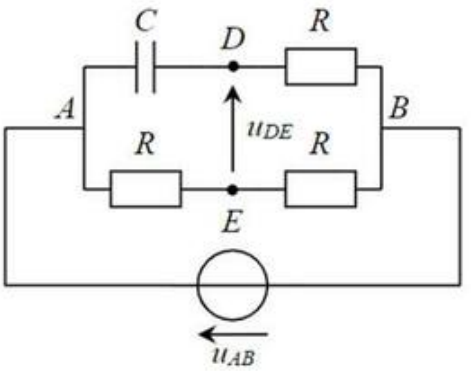
Un générateur de tension idéal de FÉM sinusoïdale $e(t) = E_m \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ alimente un dipôle RL et un dipôle RLC en parallèle.



1. Déterminer les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sous la forme $i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$, $i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$.
2. Quelles conditions doivent satisfaire L, C et ω pour que les déphasages respectifs ψ et ψ' des courants i_1 et i_2 avec la tension e soient opposés ?
3. Quelles conditions doivent satisfaire L, C et ω pour que le déphasage entre i_1 et i_2 soit égal à $\dfrac{\pi}{2}$? On donne : $\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$.
4. Les deux dernières conditions étant respectées, donner l'expression simplifiée des intensités i_1 et i_2 en fonction de R.

❑ Exercice 6.10. Tensions en quadrature

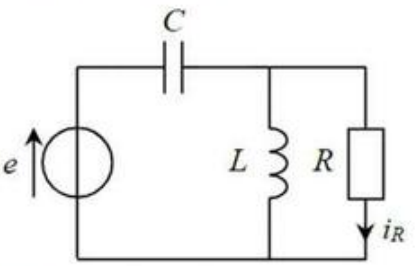
On impose aux bornes du dipôle AB la tension $u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega t)$. En régime permanent, la tension u_{DE} est alors de la forme $u_{DE}(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$.



1. Déterminer l'expression de V_m et de φ en fonction de R, C, ω et U_m.
2. Pour quelle valeur de ω les tensions u_{AB} et u_{DE} sont-elles en quadrature de phase ?

❑ Exercice 6.11. Équation différentielle et régime sinusoïdal forcé*

On considère le circuit ci-contre dans lequel le générateur impose la tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



1. Déterminer directement l'équation différentielle vérifiée par i_R en utilisant loi des mailles et loi des nœuds.
2. Déterminer la solution de cette équation en régime permanent, en utilisant la méthode complexe. Préciser les expressions de l'amplitude I_{Rm} et de la phase φ de i_R.
   Pour quelle valeur de la pulsation i_R est-elle indépendante de R ? Que valent alors I_{Rm} et φ ?
3. Retrouver ce même résultat en utilisant les équivalences Thévenin-Norton en complexes.

❑ Exercice 6.12. Une étourderie de Toto*

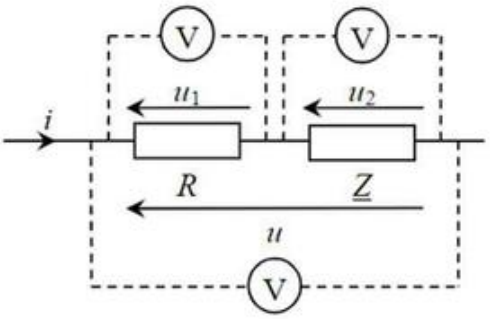
Résolution de problème

Une source de tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ alimente trois dipôles R, L et C montés en parallèle. Toto a relevé pendant le TP les valeurs efficaces $I_R = 25$ mA dans la résistance, $I_C = 33$ mA dans le condensateur, et pour le générateur $I = 64$ mA, mais il a oublié de relever la valeur efficace du courant qui traverse la bobine. Le soir en rédigeant son compte-rendu, il s'aperçoit de sa boulette et téléphone à son ami Lulu. Peut-il l'aider ?

❑ Exercice 6.13. Méthode des trois voltmètres**

On cherche à déterminer les caractéristiques d'un dipôle inconnu, d'impédance notée $\underline{Z} = A + jB = Z e^{j\varphi}$.

Pour cela, on place une résistance R (de valeur connue) en série avec lui et on dispose trois voltmètres de la façon ci-contre.



1. Les voltmètres sont supposés idéaux : que peut-on en déduire ? Quelle est exactement la grandeur mesurée par un voltmètre en mode AC (qui peut être noté aussi ~) ?

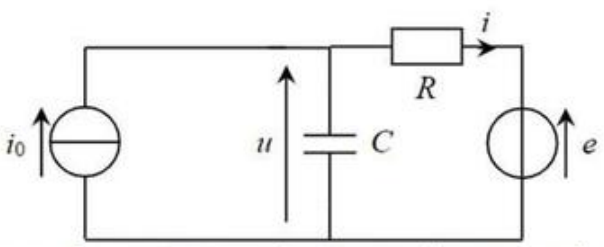
2. Écrire trois relations concernant les grandeurs $\underline{U}$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{I}$ (amplitudes complexes), R et $\underline{Z}$. En déduire U_m^2 en fonction de U_{m1}, U_{m2} (amplitudes réelles) et $\cos\varphi$; écrire la relation analogue avec les grandeurs U, U_1 et U_2 indiquées par les voltmètres.
3. Retrouver la formule précédente à l'aide de la représentation de Fresnel.
4. Déterminer alors, en fonction de R et des indications U, U_1 et U_2 des trois voltmètres, le module Z puis les parties réelle A et imaginaire B de l'impédance du dipôle. Quelle indétermination subsiste, et comment la lever ?

❑ Exercice 6.14. Circuit à deux générateurs**

Toto n'écoute pas les consignes lors d'un TP et réalise le montage suivant avec deux générateurs ! Pour lui apprendre à être plus attentif et lui montrer qu'il s'agit d'un montage plus complexe, l'enseignant lui demande de calculer le courant $i(t)$ qui circule dans la résistance. Bien entendu, le pauvre Toto ne s'en sort pas et travaille toujours dessus… Pouvez-vous lui venir en aide ?

Les données relevées par Toto sont :
$e(t) = E\cos(\omega t)$;

$i_0(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, avec $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Établir l'expression complexe pour la source de courant sachant que l'on associe au générateur de tension la fonction complexe $\underline{e}(t) = E\,e^{j\omega t}$.
2. Exprimer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de $\underline{i}_0$, $\underline{e}$, R, C et ω.
3. En déduire l'intensité réelle $i(t)$.

❑ Pour vous aider à démarrer

Exercice 6.4. Pour que deux dipôles soient équivalents, il faut que leurs impédances (ou leurs admittances) soient identiques.
Exercice 6.6. À la question 3, il faut se servir du module et de l'argument de $\underline{Z}$.
Exercice 6.9. Écrire d'abord les déphasages définis dans l'énoncé, puis les relier pour résoudre les questions.
Exercice 6.10. Il faut décomposer la tension $\underline{U}_{DE}$.
Exercice 6.12. Il faut appliquer la loi des nœuds, puis on peut utiliser un diagramme de Fresnel en prenant la tension comme référence des phases.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai

1. Attention, ceci n'est vrai qu'en régime permanent, c'est-à-dire après la fin du régime transitoire (mais celui-ci, très bref, n'est jamais observé en pratique).

3. Les lois de Kirchhoff sont inchangées ; celles concernant les dipôles linéaires sont valables mais uniquement avec les grandeurs complexes, et non avec les grandeurs réelles.

4. L'impédance du condensateur s'écrit $1/jC\omega$, donc lorsque la pulsation tend vers zéro, son module tend vers l'infini : le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert.

7. L'impédance d'une bobine s'écrit $jL\omega$, donc lorsque la pulsation tend vers l'infini, son module tend aussi vers l'infini : la bobine se comporte alors comme un interrupteur ouvert.

9. Ces deux grandeurs ne dépendent que des paramètres du système et de l'excitation.

❑ Les erreurs classiques

– Lorsque le nombre complexe j passe du numérateur au dénominateur et inversement, il ne faut pas oublier de changer le signe : $j = \frac{1}{-j}$ ou $\frac{1}{j} = -j$.

– Lors de l'écriture de l'argument d'un nombre complexe avec la fonction arctangente, il ne faut pas oublier que si la partie réelle du nombre complexe est négative, il est nécessaire d'ajouter (ou d'enlever) π.

– Ne pas mélanger les réels et les complexes ! Dans une équation complexe, il ne doit plus y avoir de cosinus, il est transformé en exponentielle complexe.

– Avant tout calcul, il faut regarder s'il est plus simple de travailler avec les impédances $\underline{Z}$ ou avec les admittances $\underline{Y}$. Sinon les équations peuvent devenir énormes…

– Dans les calculs, ne pas garder des fractions à étages multiples, mais éliminer les fractions le plus tôt possible, notamment en faisant des produits en croix.

– Ne pas multiplier un dénominateur par la quantité complexe conjuguée si on cherche ensuite le module et l'argument de la fraction. On ne le fera que si on doit séparer les parties réelle et imaginaire de la fraction (ce qui est assez rare).

■■ Corrigé des exercices

Exercice 6.1

1. $u(t)=3\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ est la partie réelle de $\underline{u}(t)=3e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t}$ donc $\boxed{\underline{U}=3e^{j\frac{\pi}{3}}}$. Son module est $\boxed{U_{\mathrm{m}}=3}$, son argument $\boxed{\varphi_u=\dfrac{\pi}{3}}$.

2. $s(t)=-2\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{4}\right)$ est la partie réelle de $\underline{s}(t)=-2e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}=-2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega t}$ donc $\boxed{\underline{S}=-2e^{-j\frac{\pi}{4}}}$. Pour faire apparaître uniquement le module, on doit avoir un facteur positif et non négatif devant l'exponentielle. On utilise le fait que $e^{j\pi}=-1$: ainsi $-e^{-j\frac{\pi}{4}}=e^{j\pi}\times e^{-j\frac{\pi}{4}}=e^{j\frac{3\pi}{4}}$, donc on peut encore écrire $\boxed{\underline{S}=2e^{j\frac{3\pi}{4}}}$, d'où $\boxed{S_{\mathrm{m}}=2}$ et $\boxed{\varphi_s=\dfrac{3\pi}{4}}$.

3. Pour pouvoir considérer $i(t)=4\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{8}\right)$ comme partie réelle d'une fonction de la forme $\underline{i}(t)=I_{\mathrm{m}}e^{j(\omega t+\varphi_i)}$, on commence par le mettre sous la forme d'un cosinus. Sachant que $\sin x=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, on peut écrire $i(t)=4\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(\omega t-\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Alors $\boxed{\underline{I}=4e^{-j\frac{3\pi}{8}}}$, d'où $\boxed{I_{\mathrm{m}}=4}$ et $\boxed{\varphi_i=-\dfrac{3\pi}{8}}$.

Exercice 6.2

1. On utilise la loi des mailles et la loi d'Ohm complexes : $\underline{e}=\underline{u}_R+\underline{u}_L=(R+jL\omega)\underline{i}$.

On en déduit $\underline{i}(t)=\dfrac{\underline{e}(t)}{R+jL\omega}$ soit $\underline{i}(t)=\dfrac{E\,e^{j(\omega t-\pi/3)}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}\,e^{j\arctan(L\omega/R)}}$ en séparant modules et arguments, et finalement $\underline{i}(t)=\dfrac{E}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}e^{j(\omega t-\pi/3-\arctan(L\omega/R))}$.

On obtient en prenant la partie réelle : $\boxed{i(t)=\dfrac{E}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{3}-\arctan\left[\dfrac{L\omega}{R}\right]\right)}$.

⇨ *Méthode 6.3*

2. On utilise encore la loi des mailles et la loi d'Ohm complexes : $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_C = \left(R + \dfrac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}_2$.

On en déduit $\underline{i}_2(t) = \dfrac{\underline{e}(t)}{R - j\dfrac{1}{C\omega}} = \dfrac{E\, e^{j(\omega t - \pi/3)}}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}\, e^{-j \arctan(1/RC\omega)}}$

soit $\underline{i}_2(t) = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} e^{j(\omega t - \pi/3 + \arctan(1/RC\omega))}$.

On obtient finalement : $\boxed{i_2(t) = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3} + \arctan\left[\dfrac{1}{RC\omega} \right] \right)}$.

La formule du diviseur de tension donne :

$$\underline{u}_C(t) = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}\underline{e}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}\, e^{j \arctan(RC\omega)}} E\, e^{j(\omega t - \pi/3)}$$

soit $\underline{u}_C(t) = \dfrac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(\omega t - \pi/3 - \arctan(RC\omega))}$.

Partie réelle : $\boxed{u_C(t) = \dfrac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3} - \arctan(RC\omega) \right)}$.

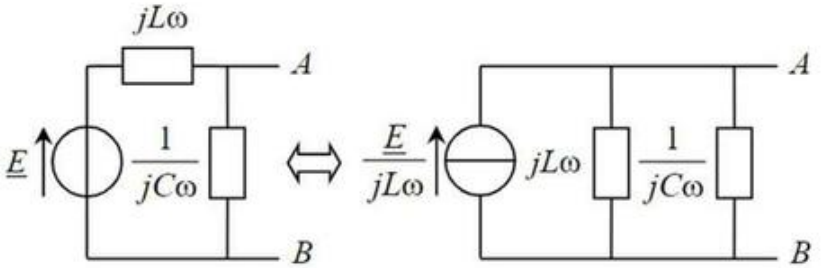
⇨ *Méthode 6.3*

3. Le passage d'un cosinus à un sinus correspond à un simple déphasage de $\dfrac{\pi}{2}$, puisque $\sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2} \right)$. Si $e(t)$ est déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à la question précédente, il en sera de même pour toutes les tensions. Ainsi dans les résultats précédents, il suffit de remplacer les cosinus par des sinus : $\boxed{i_2(t) = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3} + \arctan\left[\dfrac{1}{RC\omega} \right] \right)}$ et $\boxed{u_C(t) = \dfrac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3} - \arctan(RC\omega) \right)}$.

On peut considérer que ces fonctions réelles sont ici les parties imaginaires des fonctions complexes associées, mais il est inhabituel de procéder de cette manière en physique.

Exercice 6.3

Il suffit de passer toutes les grandeurs en écriture complexe (FÉM et impédances) et d'utiliser des équivalences entre Thévenin et Norton.



On calcule l'admittance équivalente aux deux dipôles en parallèle, $\underline{Y}_{éq} = j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)$.

Donc $\boxed{\underline{Z}_{éq} = \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}$.

Le modèle de Thévenin comporte alors une source de tension $\boxed{\dfrac{\underline{E}}{1 - LC\omega^2}}$ en série avec $\underline{Z}_{éq}$.

Exercice 6.4

1. Pour que deux dipôles soient équivalents, il faut que leurs impédances soient identiques (donc leurs admittances aussi). Pour le dipôle série, on a $\underline{Z} = R + jL\omega$ et pour le dipôle avec les éléments en parallèle $\underline{Y'} = \dfrac{1}{R'} + \dfrac{1}{jL'\omega} = \dfrac{1}{R'} - j\dfrac{1}{L'\omega}$.

Comme nous voulons exprimer R' en fonction d'autres données, il apparaît qu'il sera plus rapide de travailler avec les admittances où R' se trouve déjà isolé alors que si on travaille avec les impédances, R' se trouvera « mélangé » avec L' lors de la mise au même dénominateur.

On écrit $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{R + jL\omega} = \dfrac{R - jL\omega}{R^2 + (L\omega)^2}$. La condition $\underline{Y'} = \underline{Y}$ permet de déterminer, en identifiant les parties réelles et imaginaires, $\boxed{R' = \dfrac{R^2 + (L\omega)^2}{R}}$ et $\boxed{L' = \dfrac{R^2 + (L\omega)^2}{L\omega^2}}$.

2. D'après le résultat précédent, on peut écrire $\dfrac{L'\omega}{R'} = \dfrac{R}{L\omega}$ quelle que soit ω, soit encore $\dfrac{L'\omega^2}{R'} = \dfrac{R}{L}$. On veut $\dfrac{L}{R} = \dfrac{L'}{R'}$ que l'on remplace dans le résultat précédent : $\dfrac{L\omega^2}{R} = \dfrac{R}{L}$, ce qui permet d'obtenir $\omega^2 = \left(\dfrac{R}{L}\right)^2$ soit $\boxed{\omega = \dfrac{R}{L}}$.

La pulsation est toujours positive.

Exercice 6.5

1. On complète le tableau à l'aide des grandeurs mesurées sur les courbes.

Grandeur	T (s)	ω (rad/s)	I_m (A)	U_m (V)	Z_{AB} (Ω)
Valeur numérique	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	$\dfrac{2\pi}{T} = 1{,}6 \cdot 10^3$	$\dfrac{u_{I\max}}{R} = 0{,}20$	$u_{II\max} = 8{,}0$	$\dfrac{U_m}{I_m} = 40$

2. La tension II est en avance sur la tension I car elle passe en premier par son maximum.

3. Le déphasage entre la tension et le courant est $\varphi_u - \varphi_i = 0 - (-\varphi) = \varphi$. D'après les données des courbes, on peut en déduire le module du déphasage entre les deux : $\begin{cases} 4\text{ ms} \leftrightarrow 2\pi \\ \dfrac{1}{2}\text{ ms} \leftrightarrow |\varphi| = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

Or d'après la question 2, on sait que la tension est en avance sur le courant, donc on peut préciser le signe : $\varphi_u - \varphi_i = \varphi > 0$. Le déphasage vaut donc $\boxed{\varphi = +\dfrac{\pi}{4}}$.

La tension aux bornes d'une résistance est une image du courant. La voie I est en fait le courant à un facteur R près.

4. Nous allons déterminer une valeur de R avec nos mesures et voir si elle est compatible avec les données de l'énoncé.

On sait que $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$, soit $\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \varphi_u - \varphi_i = \varphi$ et $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = Z_{AB} = Z$. On peut toujours écrire $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. On sait aussi que la résistance du dipôle AB est $R' = \text{Re}(\underline{Z}) = Z\cos\varphi$, donc avec nos mesures on trouve $R' = 28{,}3\ \Omega$.

Avec les données de l'énoncé, si on considère la bobine comme idéale, $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$.

La résistance du dipôle AB devrait être de 20 Ω si la bobine était parfaite. Cette valeur ne correspond pas avec la mesure donc on en déduit que la bobine n'est pas idéale.

5. Si on tient compte de la résistance de la bobine, on a $\underline{Z} = R + r + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$, on en déduit que la résistance du dipôle AB vaut $R' = \text{Re}(\underline{Z}) = R + r$, d'ou on tire $\boxed{r = 8{,}3\ \Omega}$.

6. $\underline{Z} = R + r + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) = Ze^{j\varphi}$ donc $\text{Im}(\underline{Z}) = L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = Z\sin\varphi$.

On en déduit $\boxed{L = \dfrac{Z\sin\varphi}{\omega} + \dfrac{1}{C\omega^2} = 59\text{ mH}}$.

Exercice 6.6

1. On lit graphiquement $\boxed{V_m = 3{,}5\text{ V}}$, $\boxed{U_m = 5\text{ V}}$.

La période des signaux vaut $T = 6{,}3 \cdot 10^{-2}\text{ s}$, d'où la pulsation $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 100\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

2. La tension v est en avance sur la tension u. En effet, à $t = 0$, la tension u est à son maximum, alors que la tension v est déjà passée par son maximum et redescend. Le déphasage de v par rapport à u est donc positif $\varphi_{v/u} > 0$. Or $\varphi_{v/u} = \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{U}) = \varphi - 0$, on en déduit que $\boxed{\varphi = \arg(\underline{V}) > 0}$. On mesure un écart $\Delta t = 0{,}75 \cdot 10^{-2}\text{ s}$ pour le passage par zéro des deux courbes. On en déduit le déphasage par un produit en croix (une période en temps correspond à un angle de 2π) : $\boxed{\varphi = 2\pi\dfrac{\Delta t}{T} = 0{,}75\text{ rad} \approx \dfrac{\pi}{4}}$.

3. a) On se concentre sur l'équation élémentaire pour le dipôle D : $\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$. Pour déterminer l'impédance, il faut trouver son module et son argument.

– Le module est $Z = \left|\frac{\underline{V}}{\underline{I}}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Or $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}$, d'où $Z = \left|\frac{\underline{V}}{\underline{U}/R}\right| = R\left|\frac{\underline{V}}{\underline{U}}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Ceci donne la première équation $R^2 \frac{V_m^2}{U_m^2} = X^2 + Y^2 = 4900\,\Omega^2$.

– L'argument $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{V}) - \arg\left(\frac{\underline{U}}{R}\right) = \varphi - 0 = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$.

La résolution de ce système permet d'obtenir $\boxed{X = 51\,\Omega}$ et $\boxed{Y = 48\,\Omega}$.

b) Comme la partie imaginaire de l'impédance est positive $Y > 0$, on a affaire à un dipôle inductif constitué d'une résistance $\boxed{r = 51\,\Omega}$, en série avec une inductance telle que $L\omega = 48\,\Omega$, soit $\boxed{L = 0{,}48\ \text{H}}$.

> *Il est impossible de donner plus de deux chiffres significatifs sur cet exercice car les données de départ sont lues sur un graphe.*

Exercice 6.7

1. L'impédance de la branche LC série est $j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. Pour l'ensemble, on calcule l'admittance $\underline{Y} = jC_0\omega + \frac{1}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = j\left(C_0\omega - \frac{1}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right) = j\left(\frac{C_0\omega(LC\omega^2 - 1) - C\omega}{LC\omega^2 - 1}\right)$.

On obtient pour l'impédance, en remplaçant $C = aC_0$: $\boxed{\underline{Z} = j\frac{1 - aLC_0\omega^2}{aLC_0^2\omega^3 - C_0\omega(1+a)}}$.

2. C'est un imaginaire pur, de module $\boxed{Z = |\underline{Z}| = \frac{\left|1 - aLC_0\omega^2\right|}{\left|aLC_0^2\omega^3 - C_0\omega(1+a)\right|}}$.

3. L'argument de cet imaginaire pur est $\boxed{\varphi = \arg(\underline{Z}) = \pm\frac{\pi}{2}}$, suivant la valeur de la pulsation ω.

4. D'après les définitions de l'énoncé : $1 - aLC_0\omega_1^2 = 0$ soit $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{aLC_0}}$ (1), et $aLC_0^2\omega_2^3 - C_0\omega_2(1+a) = 0$, soit $\omega_2 = \sqrt{\frac{1+a}{aLC_0}}$ (2).

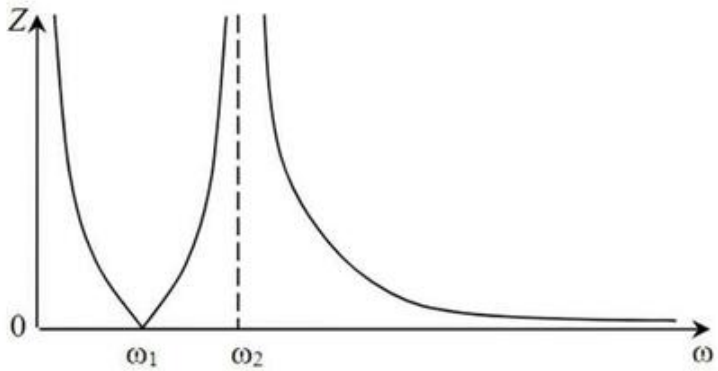
> *On note que $\omega_1 < \omega_2$, car les dénominateurs sont identiques et le numérateur de ω_2 est plus grand que l'unité car a est nécessairement positif.*

On peut réécrire avec ces notations le numérateur $1-aLC_0\omega^2 = 1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}$. Pour le dénominateur on utilise $aLC_0 = \dfrac{1}{\omega_1^2}$ (1) et $1+a = aLC_0\omega_2^2$ (2) soit aussi $1+a = \dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ (2). Ce qui donne

$$aLC_0^2\omega^3 - C_0\omega(1+a) = C_0\frac{\omega^3}{\omega_1^2} - C_0\omega\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = C_0\omega\left(\frac{\omega^2-\omega_2^2}{\omega_1^2}\right).$$

On obtient donc : $\boxed{Z = \dfrac{\left|1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right|}{\left|C_0\omega\left(\dfrac{\omega^2-\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)\right|} = \dfrac{\left|\omega_1^2-\omega^2\right|}{C_0\omega\left|\omega^2-\omega_2^2\right|}}$.

5. On précise les limites demandées dans l'énoncé $\boxed{\lim_{\omega\to 0} Z = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{\omega\to+\infty} Z = 0}$. On peut aussi définir $\boxed{Z(\omega_1) = 0}$ et $\boxed{\lim_{\omega\to\omega_2} Z = +\infty}$. On en déduit la représentation ci-contre.



6. Lorsque $\omega = \omega_1$, le dipôle AB a une impédance nulle, il se comporte comme un fil, et lorsque $\omega = \omega_2$, son impédance est infinie, il se comporte comme un interrupteur ouvert.

Exercice 6.8

1. a) – *Résolution à l'aide de la méthode complexe*

L'impédance du dipôle *RLC* série est donnée par la somme des impédances, soit $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$. La loi d'Ohm complexe permet d'obtenir $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ avec $\underline{I} = I_m$, soit $\underline{U} = \left[R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\right]I_m$.

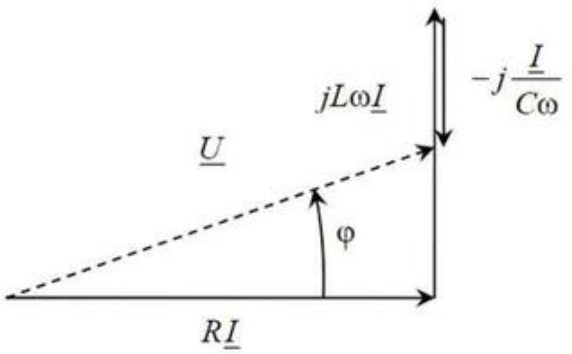
On en déduit l'amplitude $\boxed{U_m = |\underline{U}| = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$ et l'argument $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg\left(R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\right) + 0$ soit $\boxed{\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$.

Finalement : $\boxed{u(t) = \mathrm{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) = U_m\cos(\omega t + \varphi)}$.

⇨ *Méthode 6.3*

– Résolution avec la représentation de Fresnel

Comme dans la méthode précédente, on obtient $\underline{U} = \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\underline{I}$, soit $\underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + -j\frac{1}{C\omega}\underline{I}$. La représentation de Fresnel donne en prenant le courant $\underline{I}$ comme référence de représentation :

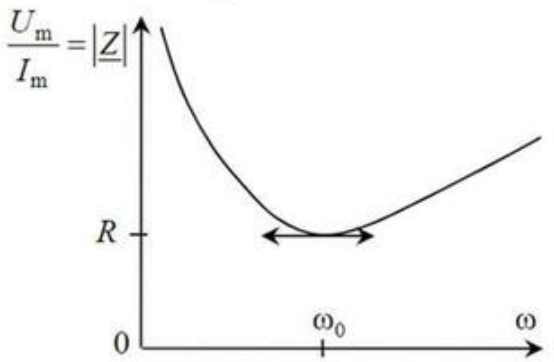


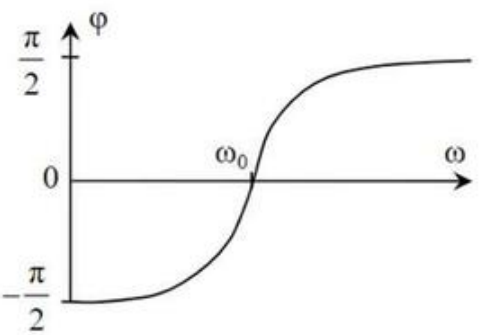
$\underline{U}$ étant l'hypoténuse du triangle rectangle, on en déduit graphiquement $\boxed{U_m = |\underline{U}| = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ et l'avance de phase de la tension $\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$.

Finalement : $\boxed{u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)}$. Comme le courant qui sert de référence est un cosinus, la tension s'exprime alors elle aussi avec un cosinus.

⇨ *Méthode 6.4*

b) $\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$. Pour $\omega = \omega_0$, $|\underline{Z}| = R$. Pour $\omega \to 0$, $\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| \approx \frac{1}{C\omega}$. Et pour $\omega \to +\infty$, $\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| \approx L\omega$.





Pour $\omega \to 0$, $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \approx -j\frac{1}{C\omega}I_m$, d'où $\varphi = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{U}) \approx -\frac{\pi}{2}$. Pour $\omega = \omega_0$, $\varphi = \arg(RI_m) = 0$. Et pour $\omega \to +\infty$, $\underline{U} \approx jL\omega I_m$, d'où $\varphi = \arg(\underline{U}) \approx -\frac{\pi}{2}$.

⇨ *Méthode 6.5*

2. Il est évident que $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ (qui est composé sous la racine carrée de deux termes positifs) est minimum si le terme variable $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ s'annule. Ceci se produit pour une pulsation ω_0 telle que $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$, soit $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$. Dans ces conditions, le module de l'impédance est minimum et l'on a $|\underline{Z}| = R$. L'amplitude de la tension est alors aussi minimum et vaut $U_m = RI_m$: on peut alors parler d'*antirésonance*.

> *On parle de résonance pour une valeur maximale de grandeur. En fait, c'est généralement la tension imposée au circuit qui a une amplitude fixe. Dans ces conditions, si le module de l'impédance est minimum, alors le courant est maximum et l'on parle de résonance en courant.*

On cherche $|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega_2)| = \sqrt{2}|\underline{Z}(\omega_0)|$, soit $\sqrt{R^2 + \left(L\omega_i - \frac{1}{C\omega_i}\right)^2} = \sqrt{2}R = \sqrt{2R^2}$. On élève l'expression au carré, ce qui permet d'écrire $R^2 = \left(L\omega_i - \frac{1}{C\omega_i}\right)^2$ soit $L\omega_i - \frac{1}{C\omega_i} = \pm R$.

> *La résistance est bien sûr positive, mais l'autre membre peut être positif ou négatif. Il est plus pratique de mettre le signe moins devant la résistance.*

On peut réécrire cette double équation sous la forme $LC\omega_i^2 \pm RC\omega_i^2 - 1 = 0$, soit $\omega_i^2 \pm \frac{R}{L}\omega_i^2 - \frac{1}{LC} = 0$. Le discriminant est $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}$, ce qui donne au total quatre solutions possibles : $\omega_i = \pm\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$. Or une pulsation est toujours une grandeur positive, on en déduit comme $\sqrt{\Delta} > \frac{R}{L}$, les deux valeurs physiquement possibles $\boxed{\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $\boxed{\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$. $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} > 0$, d'où on déduit $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

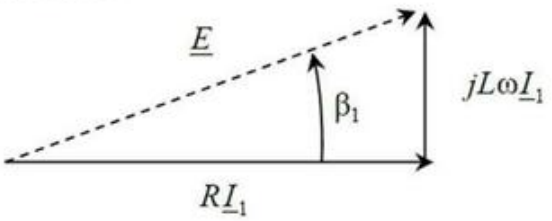
Exercice 6.9

1. L'écriture de la loi des mailles en écriture complexe avec les équations élémentaires des dipôles donne $\underline{e} = (R + jL\omega)\underline{i}_1$, soit avec les amplitudes complexes $\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R + jL\omega}$, avec $\underline{E} = E_m e^{j\pi/4}$. On en déduit $i_1(t) = I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$ avec $\boxed{I_{1m} = |\underline{I}_1| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}}$ et

$\boxed{\varphi_1 = \arg(\underline{I}_1) = \arg(\underline{E}) - \arg(R + jL\omega) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)}$. De la même manière : $\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$, d'où $\boxed{I_{2m} = \left|\underline{I}_2\right| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$ et $\boxed{\varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$ qui s'insèrent dans l'expression $i_2(t) = I_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$.

⇨ *Méthode 6.3*

En utilisant la représentation de Fresnel, on a d'après la loi des mailles $\underline{E} = R\underline{I}_1 + jL\omega\underline{I}_1$. On choisit le courant comme référence.



Dans le triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse donne $E_m = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}\, I_{1m}$, soit $\boxed{I_{1m} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}}$, la tension est en avance de $\boxed{\beta_1 = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) > 0}$ sur le courant. Comme $e(t) = E_m\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, on en déduit $\boxed{i_1(t) = I_{1m}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \beta_1\right)}$.

⇨ *Méthode 6.4*

2. L'énoncé définit deux angles : $\psi = \arg(\underline{I}_1) - \arg(\underline{E}) = \varphi_1 - \frac{\pi}{4} = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ et $\psi' = \arg(\underline{I}_2) - \arg(\underline{E}) = \varphi_2 - \frac{\pi}{4} = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$. On veut $\psi = -\psi'$, ce qui se traduit par $\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}\right)$. Les angles appartenant tous deux à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (parties réelles positives des nombres complexes), on en déduit qu'ils sont égaux, soit $\frac{L\omega}{R} = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}$, donc $2L\omega = \frac{1}{C\omega}$ que l'on peut écrire $\boxed{2LC\omega^2 = 1}$.

3. On veut $\arg(\underline{I}_1) - \arg(\underline{I}_2) = \pm\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

On en déduit $-\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) + \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = \alpha_2 - \alpha_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, avec $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ et $\alpha_2 = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$.

D'après la formule de l'énoncé, $\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\tan\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\pm\infty$.

On en déduit donc $1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2=0$, soit $\tan\alpha_1=\dfrac{-1}{\tan\alpha_2}$, ce qui s'écrit en remplaçant par les valeurs des composants $\dfrac{L\omega}{R}=-\dfrac{R}{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}$, donc $\boxed{R^2+(L\omega)^2-\dfrac{L}{C}=0}$.

4. On a établi $\begin{cases}R^2+(L\omega)^2-\dfrac{L}{C}=0 & (1)\\ 2LC\omega^2=1 & (2).\end{cases}$ L'équation (2) s'écrit aussi $(L\omega)^2=\dfrac{L}{2C}$ que l'on remplace dans l'équation (1) qui devient $R^2+(L\omega)^2-2(L\omega)^2=0$, soit $R=L\omega$.

D'après ce qui a déjà été écrit pour la question 1, $\underline{I}_1=\dfrac{\underline{E}}{R+jL\omega}=\dfrac{\underline{E}}{R(1+j)}$, soit $\boxed{I_{1\mathrm{m}}=|\underline{I}_1|=\dfrac{E_\mathrm{m}}{R\sqrt{2}}}$ et $\boxed{\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}-\arctan(1)=0}$, éléments de la fonction $i_1(t)=I_{1\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_1)$.

On écrit aussi $\underline{I}_2=\dfrac{\underline{E}}{R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}$ avec l'équation (2) qui peut aussi se formuler $2L\omega=\dfrac{1}{C\omega}$.

Ceci donne $\underline{I}_2=\dfrac{\underline{E}}{R-jL\omega}=\dfrac{\underline{E}}{R(1-j)}$, soit $\boxed{I_{2\mathrm{m}}=|\underline{I}_2|=\dfrac{E_\mathrm{m}}{R\sqrt{2}}}$ et $\boxed{\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}-\arctan(-1)=\dfrac{\pi}{2}}$, éléments de la fonction $i_2(t)=I_{2\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_2)$.

Exercice 6.10

1. On décompose la tension $\underline{U}_{DE}=\underline{U}_{DB}+\underline{U}_{BE}$. On exprime ensuite chaque tension en remarquant que chaque branche constitue un diviseur de tension pour la tension $\underline{U}_{AB}$: $\underline{U}_{DB}=\dfrac{R}{R+\dfrac{1}{jC\omega}}\underline{U}_{AB}=\dfrac{jRC\omega}{jRC\omega+1}\underline{U}_{AB}$ et $\underline{U}_{EB}=\dfrac{R}{R+R}\underline{U}_{AB}=\dfrac{1}{2}\underline{U}_{AB}$. On calcule ensuite $\underline{U}_{DE}=\underline{U}_{DB}-\underline{U}_{EB}$, qui donne $\underline{U}_{DE}=\dfrac{jRC\omega-1}{2(jRC\omega+1)}\underline{U}_{AB}=-\dfrac{1-jRC\omega}{2(1+jRC\omega)}\underline{U}_{AB}$. On peut alors calculer $\boxed{V_\mathrm{m}=|\underline{U}_{DE}|=\dfrac{1}{2}|\underline{U}_{AB}|=\dfrac{1}{2}U_\mathrm{m}}$ et $\varphi=\arg(\underline{U}_{DE})=\pi+\arctan(-RC\omega)-\arctan(RC\omega)$ soit $\boxed{\varphi=\pi-2\arctan(RC\omega)}$.

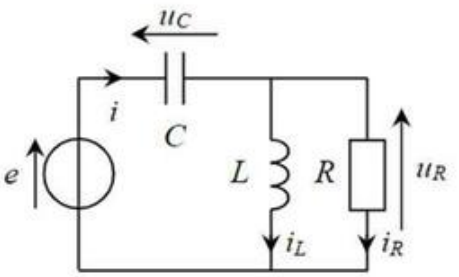
⇨ *Méthode 6.3*

☞ *Pour évaluer l'argument avec la fonction arctangente, les complexes doivent être écrits avec des parties réelles positives, soit* $\underline{U}_{DE}=-\dfrac{1-jRC\omega}{2(1+jRC\omega)}\underline{U}_{AB}$. *Le signe – devant la fraction entraîne l'ajout de* π *dans l'argument.*

2. Pour que les tensions soient en quadrature, comme $\arg(\underline{U}_{AB}) = 0$, il suffit que $\varphi = \pi - 2\arctan(RC\omega) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $\arctan(RC\omega) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $RC\omega = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$. La condition cherchée est donc : $\boxed{\omega = \dfrac{1}{RC}}$.

Exercice 6.11

1. Pour déterminer l'équation différentielle, on commence par écrire les équations élémentaires sur les dipôles : $u_R = Ri_R = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Ensuite on écrit la loi des nœuds $i = i_R + i_L$ et la loi des mailles $e = u_C + u_R = u_C + Ri_R$. Pour éliminer u_C on dérive l'équation :



$\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + R\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$ puis on remplace $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et on utilise la loi des nœuds, ce qui donne $\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_R + i_L}{C} + R\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$. On dérive une nouvelle fois pour pouvoir remplacer i_L et l'on obtient $\dfrac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{1}{C}\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Ri_R}{LC} + R\dfrac{\mathrm{d}^2i_R}{\mathrm{d}t^2}$, soit sous forme canonique $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2i_R}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_R}{LC} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}}$.

2. La solution particulière de l'équation, donnant le régime permanent, a la même forme que le générateur et est donc sinusoïdale : $i_R(t) = I_{R\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}[\underline{I}_R e^{j\omega t}]$. De même $e(t) = \mathrm{Re}[\underline{e}(t)]$ avec $\underline{e}(t) = E_\mathrm{m}e^{j\omega t}$, d'amplitude complexe $\underline{E} = E_\mathrm{m}$. On transforme l'équation différentielle en équation algébrique complexe : $-\omega^2\underline{I}_R + \dfrac{j\omega}{RC}\underline{I}_R + \dfrac{\underline{I}_R}{LC} = \dfrac{-\omega^2}{R}E_\mathrm{m}$, d'où on tire immédiatement $\boxed{\underline{I}_R = \dfrac{\dfrac{-\omega^2}{R}E_\mathrm{m}}{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) + \dfrac{j\omega}{RC}} = \dfrac{\dfrac{j\omega}{R}E_\mathrm{m}}{j\left(-\dfrac{1}{\omega LC} + \omega\right) + \dfrac{1}{RC}}}$.

⇨ *Méthode 6.1*

L'amplitude réelle du courant i_R est le module : $\boxed{I_{R\mathrm{m}} = \dfrac{\dfrac{\omega^2}{R}E_\mathrm{m}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{RC}\right)^2}}}$.

Pour la phase, on peut écrire $\varphi = \arg(\underline{I}_R) = \pi - \arg\left(\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\dfrac{\omega}{RC}\right)$.

La valeur de l'argument d'un nombre réel négatif est π ou $-\pi$, on peut choisir l'une des deux valeurs, cependant pour le reste des calculs il est alors impératif de donner la même valeur choisie précédemment pour tout nombre réel négatif.

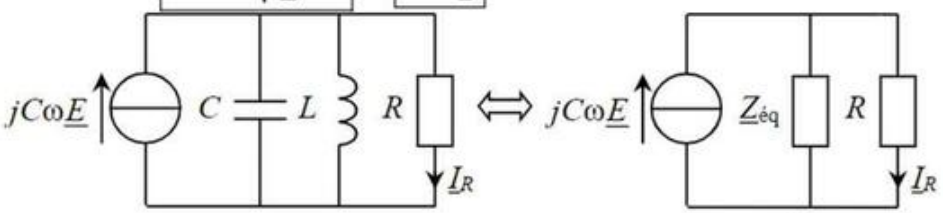
Mais l'expression du second terme, avec une arctangente, dépend du signe de la partie réelle et il faut alors distinguer deux cas. Il est beaucoup plus simple d'utiliser la seconde forme de $\underline{I}_R$ (où on a divisé tous les termes par $j\omega$), qui donne immédiatement :

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}.$$

⇨ *Méthode 6.3*

Pour que le courant soit indépendant de R, I_{Rm} et φ ne doivent plus dépendre de R. Pour cela, simplifions l'équation de l'amplitude complexe, on obtient $\underline{I}_R = \dfrac{-\omega^2 E_m}{R\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right) + \dfrac{j\omega}{C}}$. Il est évident que si le terme réel du dénominateur est nul, alors le courant ne dépend plus de la résistance. Ceci se produit pour $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, soit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$, ce qui donne $\underline{I}_R = jC\omega_0 E_m = j\sqrt{\dfrac{C}{L}}E_m$. On a alors $\boxed{I_{Rm} = \sqrt{\dfrac{C}{L}}E_m}$ et $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2}}$.

3. Les équivalences donnent le schéma ci-contre.



D'après le schéma précédent, on reconnaît un pont diviseur de courant $\underline{I}_R = \dfrac{1/R}{\underline{Y}_{éq} + 1/R} jC\omega\underline{E}$.

Pour que le courant traversant R soit indépendant de la valeur de R, il faut que $\underline{Y}_{éq} = 0 = jC\omega_0 + \dfrac{1}{jL\omega_0}$, ce qui revient à une source de courant parfaite alimentant la résistance R. On en déduit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{\underline{I}_R = jC\omega_0 E_m = j\sqrt{\dfrac{C}{L}}E_m}$.

Exercice 6.12

La loi des nœuds donne (association parallèle) $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L$. Pour les différents dipôles, la loi d'Ohm complexe s'écrit : $\underline{I}_R = \dfrac{\underline{E}}{R}$, $\underline{I}_C = jC\omega\underline{E}$ et $\underline{I}_L = \dfrac{\underline{E}}{jL\omega}$. Donc $\underline{I} = \underline{E}\left(\dfrac{1}{R} + j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)\right)$. Le module au carré, divisé par 2, donne $I^2 = E^2\left(\dfrac{1}{R^2} + \left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2\right)$, soit $I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2$.

On en déduit $(I_C - I_L)^2 = I^2 - I_R^2$, d'où $I_C - I_L = \pm\sqrt{I^2 - I_R^2}$, soit $I_L = I_C \pm \sqrt{I^2 - I_R^2}$. On ne conserve que la valeur positive car une valeur efficace est forcément positive, soit $\boxed{I_L = I_C + \sqrt{I^2 - I_R^2}}$. AN $\boxed{I_L = 92 \text{ mA}}$.

> *La formule $I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2$ peut être obtenue également en représentation de Fresnel (tracé des trois vecteurs puis théorème de Pythagore).*

Exercice 6.13

1. Un voltmètre idéal a une résistance infinie : aucun courant ne le traverse. En mode AC, il donne la valeur efficace de la tension.

2. $\boxed{\underline{U}_1 = R\underline{I}}$; $\boxed{\underline{U}_2 = \underline{Z}\underline{I}}$; $\boxed{\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2}$. On calcule le carré du module :

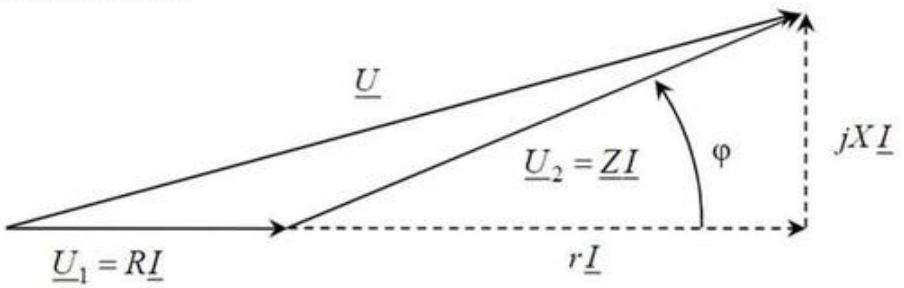
$U_m^2 = \underline{U}\,\underline{U}^* = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)(\underline{U}_1 + \underline{U}_2)^* = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + \underline{U}_2\underline{U}_1^* + \underline{U}_1\underline{U}_2^* = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + \underline{Z}\,R\,I_m^2 + R\,\underline{Z}^*I_m^2$.

On utilise $\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2\text{Re}(\underline{Z}) = 2Z\cos\varphi$: $U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2RZ\cos\varphi\, I^2$

soit $\boxed{U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2}\cos\varphi}$. (Il s'agit en fait du théorème d'Al-Kashi dans le plan complexe.)

Les voltmètres indiquent des valeurs efficaces. On divise tout par 2 pour avoir des valeurs efficaces car $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$, soit $\boxed{U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi}$.

3. Comme il s'agit d'une association série, on écrit la loi des mailles $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$, avec pour chaque dipôle $\underline{U}_1 = R\underline{I}$ et $\underline{U}_2 = \underline{Z}\,\underline{I} = (r + jX)\underline{I}$. On trace le diagramme de Fresnel en prenant le courant comme référence.



Avec la notation vectorielle, on a $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$. La norme du U au carré s'écrit $U^2 = \overrightarrow{U}^2 = \left(\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}\right)^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2\overrightarrow{U_1}\cdot\overrightarrow{U_2}$ soit $\boxed{U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2}\cos\varphi}$.

Les voltmètres indiquent des valeurs efficaces. On divise tout par 2 pour avoir des valeurs efficaces car $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$, soit $\boxed{U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi}$.

⇨ *Méthode 6.4*

4. $\underline{U_1} = R\underline{I}$ et $\underline{U_2} = \underline{Z}\underline{I}$ donc avec les valeurs efficaces et le module Z : $U_1 = RI$ et $U_2 = ZI$.

On en déduit $\boxed{Z = R\dfrac{U_2}{U_1}}$. De plus $\underline{Z} = A + jB = Ze^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ donc $A = Z\cos\varphi$ et $B = Z\sin\varphi$. D'après les calculs précédents : $\cos\varphi = \dfrac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}$ d'où $\boxed{A = R\dfrac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2}}$.

Enfin $A^2 + B^2 = Z^2$ donc $B = \pm\sqrt{Z^2 - A^2}$ soit $\boxed{B = \pm R\sqrt{\dfrac{U_2^2}{U_1^2} - \left(\dfrac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2}\right)^2}}$.

Il reste une incertitude sur le signe de B, donc sur la nature inductive (si $B > 0$) ou capacitive (si $B < 0$) du dipôle.

Pour la lever, il faut observer les signaux u_1 et u_2 à l'oscilloscope, et voir simplement celui qui est en avance par rapport à l'autre : si u_2 est en avance, $\varphi > 0$ donc $\sin\varphi > 0$ et $B > 0$.

Exercice 6.14

1. La difficulté pour l'intensité est qu'elle est exprimée avec un sinus, alors que la partie réelle des grandeurs complexes utilise un cosinus. On doit donc convertir le sinus en cosinus, ce qui correspond à un déphasage de $\dfrac{\pi}{2}$: $i_0(t) = I_0\sin(\omega t + \varphi) = I_0\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

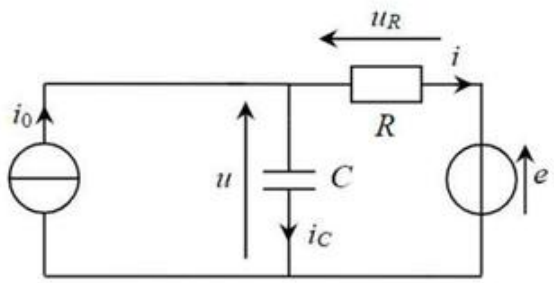
Alors $\underline{i_0}(t) = I_0\, e^{j\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Or $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$ donc l'expression peut se simplifier en $\boxed{\underline{i_0}(t) = -j\, I_0\, e^{j(\omega t + \varphi)}}$.

2. La loi des nœuds donne : $\underline{i_0} = \underline{i_c} + \underline{i}$.

La loi des mailles $\underline{u} = \underline{u_R} + \underline{e}$.

Relations élémentaires sur les dipôles $\underline{u_R} = R\underline{i}$ et $\underline{i_c} = jC\omega\underline{u}$.

En combinant les quatre expressions, on obtient $\underline{i_0} = jC\omega\underline{u} + \underline{i} = jC\omega(R\underline{i} + \underline{e}) + i$.



Soit $\boxed{\underline{i} = \dfrac{\underline{i_0} - jC\omega\underline{e}}{1 + jRC\omega}}$.

Il est possible d'obtenir le résultat par d'autres méthodes comme la transformation de schéma par exemple.

3. On remplace les expressions des générateurs, soit :

$$\underline{i}(t) = \frac{-jI_0e^{j(\omega t+\varphi)} - jC\omega Ee^{j\omega t}}{1 + jRC\omega} = \frac{-jI_0e^{j\varphi} - jC\omega E}{1 + jRC\omega}e^{j\omega t} = \frac{I_0\sin\varphi - j(I_0\cos\varphi + C\omega E)}{1 + jRC\omega}e^{j\omega t}.$$

Il y a un petit problème, car la partie réelle $I_0\sin\varphi$ peut changer de signe alors que la partie imaginaire a toujours le même signe : c'est l'inverse qui nous arrangerait pour déterminer

l'argument avec une arctangente. Nous allons donc permuter les deux et pour cela, nous multiplions par j en haut et en bas : $\underline{i}(t) = \frac{j}{j}\underline{i}(t) = \frac{jI_0 \sin\varphi + (I_0 \cos\varphi + C\omega E)}{j(1 + jRC\omega)} e^{j\omega t}$.

On en déduit alors : $\boxed{i(t) = \sqrt{\frac{(I_0 \sin\varphi)^2 + (I_0 \cos\varphi + C\omega E)^2}{1 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t + \psi)}$ avec

$\boxed{\psi = \arctan\left(\frac{I_0 \sin\varphi}{I_0 \cos\varphi + C\omega E}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)}$.

⇨ *Méthode 6.3*

La fonction $i(t)$ s'exprime avec un cosinus car on travaille, de façon habituelle, avec la partie réelle des équations complexes.

Chapitre 7

Filtrage linéaire

UN SCIENTIFIQUE



Tout au long de sa vie, l'ingénieur américain **Hendrik Wade Bode** (1905-1982) a su concevoir des théories en lien étroit avec les besoins de son pays. Durant la Seconde Guerre mondiale, il a mis au point des systèmes de contrôles antiaériens automatiques qui ont facilité l'avancée des armées alliées en Europe. Par la suite, il a fait partie du comité chargé de coordonner les différents organismes américains compétents pour permettre la conquête spatiale.

Un peu d'histoire

Au début du XIX^{e} siècle, le mathématicien et physicien Joseph Fourier étudie la diffusion de la chaleur dans un milieu continu. Il développe alors une théorie mathématique pour résoudre l'équation différentielle qu'il rencontre. Il affirme que les fonctions périodiques se décomposent comme la somme infinie de fonctions trigonométriques ; cette théorie mathématique sera affinée tout au long de ce siècle. Le caractère périodique de nombreux phénomènes physiques, comme les ondes électromagnétiques, mis en lumière dans les années qui suivent, trouvent ainsi un outil mathématique adéquat pour les étudier.

Franz Breisig, un ingénieur allemand, conçoit les premiers quadripôles dans les années 1920 pour améliorer les communications téléphoniques. Pour représenter graphiquement la fonction de transfert, Hendrik Bode imagine en 1938 les diagrammes qui portent son nom.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- La définition d'une fonction de transfert
- Le principe de l'analyse de Fourier
- La notion de filtrage et les différents types de filtres
- La définition du gain en décibels
- Les notions de pulsation de coupure et de bande passante
- Les courbes constituant un diagramme de Bode

Ce qu'il faut savoir faire

- Déterminer sans calcul le comportement asymptotique d'un quadripôle
- Calculer la fonction de transfert d'un quadripôle et la mettre sous une forme canonique donnée
- Déterminer la pulsation de coupure et la bande passante d'un filtre à partir du diagramme de Bode
- Justifier les asymptotes d'un diagramme de Bode
- Tracer le diagramme de Bode associé à une fonction de transfert d'ordre 1
- Utiliser un diagramme de Bode pour déterminer un signal de sortie
- Indiquer les conditions d'utilisation d'un filtre comme moyenneur, intégrateur ou dérivateur
- Simuler numériquement la sortie d'un filtre

■■ Résumé de cours

■ Décomposition d'un signal

– Selon le principe de l'analyse de Fourier, un signal périodique quelconque $e(t)$, de fréquence f et de période T, peut se décomposer en une somme d'un terme constant et de termes sinusoïdaux de fréquences multiples de f :

$$\boxed{e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\omega t + \varphi_n)} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Le terme constant E_0 est la **valeur moyenne** du signal.

Le terme sinusoïdal de pulsation $n\,\omega$ est l'**harmonique** de rang n ; l'harmonique de rang 1, donc de même fréquence que le signal, est le **fondamental**.

La valeur efficace E_{eff} du signal est donnée par : $\boxed{E_{\text{eff}} = \sqrt{E_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2} = \sqrt{E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{n\,\text{eff}}^2}}$.

– Certains signaux non périodiques peuvent se mettre sous forme d'une somme, limitée, de termes sinusoïdaux : c'est le cas d'un produit de deux signaux sinusoïdaux indépendants.

■ Fonction de transfert

❑ Définition

– Pour un système physique linéaire fournissant un signal de sortie (ou réponse) $s(t)$ en fonction d'un signal d'entrée (ou excitation) $e(t)$, ces deux fonctions sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. En régime sinusoïdal forcé, $e(t) = E_{\text{m}} \cos(\omega t + \varphi_e) = \text{Re}[\underline{E}\, e^{j\omega t}]$ et $s(t) = S_{\text{m}} \cos(\omega t + \varphi_s) = \text{Re}[\underline{S}\, e^{j\omega t}]$: la fonction de transfert $\underline{H}$ est alors définie comme le rapport des amplitudes complexes : $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}} \left(= \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \right)$.

$\underline{H}$ est un rapport de deux polynômes en $j\omega$. L'ordre de cette fonction de transfert (qui est aussi celui de l'équation différentielle) est donné par le polynôme de plus haut degré.

– En électrocinétique, on étudie des **quadripôles**, ayant deux bornes d'entrée et deux de sortie.

La plupart du temps, on s'intéresse à la fonction de transfert en tension : $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{U}_{\text{s}}}{\underline{U}_{\text{e}}}} \left(= \frac{\underline{u}_{\text{s}}(t)}{\underline{u}_{\text{e}}(t)} \right)$.

Pour cela on doit préciser ce qui est branché (**impédance de charge**) entre les deux bornes de sortie : si rien n'est branché, on dit qu'on est en **sortie ouverte**, ce qui est équivalent à une impédance de charge *infinie*.

⇨ Méthode 7.2. Calcul d'une fonction de transfert avec un ou deux ponts diviseurs de tension
⇨ Méthode 7.3. Identification de la fonction de transfert avec une forme canonique

❑ Gain et phase

La fonction de transfert peut être écrite sous la forme $\underline{H} = Ge^{j\varphi}$.

$\boxed{G = \left|\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}\right| = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}}}$ (gain linéaire du filtre) caractérise l'amplification ou l'atténuation du signal.

$\boxed{\varphi = \arg(\underline{U}_s) - \arg(\underline{U}_e) = \varphi_s - \varphi_e}$ est le déphasage entre u_s et u_e.

Le **gain en décibels** est défini par : $\boxed{G_{dB} = 20\log G = 20\log\left|\underline{H}\right|}$.

❑ Effets d'un quadripôle

Filtre

En général, le gain d'un quadripôle dépend de la fréquence : dans un signal comportant plusieurs termes sinusoïdaux, certains termes sont donc sélectionnés (conservés ou amplifiés), et d'autres sont éliminés (fortement atténués), selon leur fréquence. Ce comportement est appelé **filtrage**.

⇨ **Méthode 7.1. Comportement asymptotique d'un quadripôle**

Dérivateur et intégrateur

Si on peut écrire $\underline{H} \approx k\, j\omega$ dans un certain domaine de fréquence, alors le quadripôle réalise une dérivation du signal d'entrée (à un facteur k près).

Si on peut écrire $\underline{H} \approx \dfrac{k}{j\omega}$ dans un certain domaine de fréquence, alors le quadripôle réalise une intégration du signal d'entrée (à un facteur k près).

Moyenneur

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très basse, par rapport à la fréquence du signal d'entrée, ne laisse passer que le terme de fréquence nulle, c'est-à-dire la valeur moyenne.

■ Diagramme de Bode

❑ Définition

C'est une représentation graphique de la fonction de transfert. Il se compose de deux courbes :

- la **courbe de gain** représente G_{dB} en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$ (ou parfois de $\log\omega$)
- la **courbe de phase** représente φ en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$ (ou parfois de $\log\omega$)

ω_0 étant une pulsation de référence à déterminer pour chaque quadripôle.

❑ Diagramme de Bode asymptotique

Pour les pulsations ω très éloignées de la pulsation ω_0, on obtient des équations affines (asymptotes) en conservant le terme prépondérant pour chaque polynôme en $j\omega$. La courbe est alors complétée dans la zone proche de ω_0 par détermination de la valeur correspondant à ω_0.

⇨ **Méthode 7.4. Tracé d'un diagramme de Bode d'ordre 1**
⇨ **Méthode 7.5. Interprétation d'un diagramme de Bode**

■ Filtres du premier ordre

❑ Les deux filtres principaux du premier ordre

En posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (**pulsation réduite**), on obtient les formes canonique suivantes.

– Filtre **passe-bas** : $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{1}{1+jx}$.

– Filtre **passe-haut** : $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{jx}{1+jx}$.

❑ Pulsation de coupure (à – 3 dB)

C'est la pulsation ω_c pour laquelle : $G(\omega_c) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.

Avec la pulsation réduite $x_c = \dfrac{\omega_c}{\omega_0}$: $\boxed{G(x_c) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$ ce qui équivaut à $\boxed{G_{dB}(x_c) = G_{dB\,max} - 3\,dB}$.

Dans le cas d'un filtre du premier ordre, on a toujours $\boxed{x_c = 1 \text{ soit } \omega_c = \omega_0}$: la pulsation de coupure correspond à l'intersection des deux asymptotes.

❑ Bande passante (à – 3 dB)

C'est la gamme de fréquences (ou de pulsations) pour laquelle $\boxed{G(x) \geq \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$.

Pour un filtre passe-bas, la bande passante est $[0, \omega_0]$ (il laisse passer les basses fréquences).

Pour un filtre passe-haut, la bande passante est $[\omega_0, \infty]$ (il laisse passer les hautes fréquences).

■ Filtres du second ordre

❑ Les trois filtres principaux du second ordre

– Filtre **passe-bas** : $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ ou $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{-\dfrac{jQ}{x}}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$.

– Filtre **passe-haut** : $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{-x^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ ou $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{jQx}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$.

– Filtre **passe-bande** : $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{j\dfrac{x}{Q}}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$ ou $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$.

Dans tous les cas, le dénominateur peut être mis sous l'une des deux formes canoniques (et on passe de l'une à l'autre en multipliant ou divisant tout par jx/Q). Q est le **facteur de qualité**.

❑ Pulsation(s) de coupure et bande passante

– La définition de la (ou des) pulsation(s) de coupure à – 3 dB reste la même, mais il faut faire le calcul pour chaque filtre.

– La bande passante peut également être définie et calculée comme pour le premier ordre.

Pour le passe-bande, on trouve un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ autour de ω_0 (avec $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ donc ω_0 est au milieu de la bande passante en échelle logarithmique), de largeur $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} \text{ soit } \Delta x = \dfrac{1}{Q}}$.

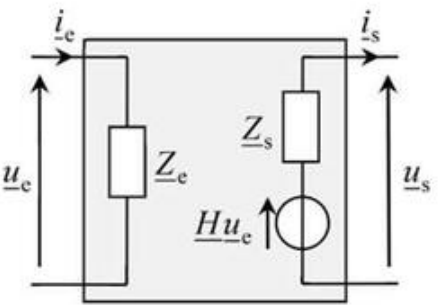
■ Mise en cascade de quadripôles

❑ Impédances d'entrée et de sortie

Pour caractériser le comportement d'un quadripôle vis-à-vis du reste du circuit (indépendamment de sa structure réelle, qui peut être inconnue), on peut *modéliser* :

– ses deux bornes d'entrée comme un dipôle passif d'impédance $\underline{Z}_e$, appelée **impédance d'entrée** ;

– ses deux bornes de sortie comme un dipôle de Thévenin de FÉM $\underline{H} \times \underline{u}_e(t)$ ($\underline{H}$ déterminée en sortie ouverte) et d'impédance interne $\underline{Z}_s$, appelée **impédance de sortie**.



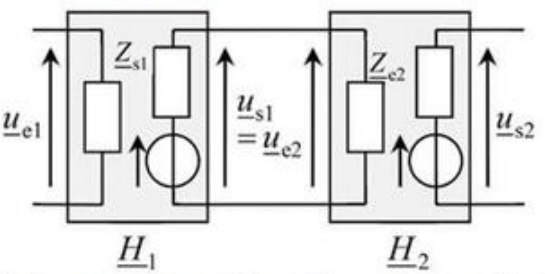
En entrée (convention récepteur) : $\underline{u}_e = \underline{Z}_e \underline{i}_e$.

En sortie (convention générateur) : $\underline{u}_s = \underline{H}\underline{u}_e - \underline{Z}_s \underline{i}_s$.

❑ Fonction de transfert de quadripôles en cascade

Deux quadripôles sont **en cascade** si les bornes de sortie de l'un sont reliées à l'entrée de l'autre.

Les fonctions de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ ayant été établies *en sortie ouverte*, pour que la fonction de transfert de l'ensemble soit $\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$, il faut que $\underline{Z}_{s1} \ll \underline{Z}_{e2}$.



Le cas idéal est donc celui où $\underline{Z}_{s1} = 0$ (quadripôle 1 **idéal en sortie**) ou bien $\underline{Z}_{e2} = \infty$ (quadripôle 2 **idéal en entrée**).

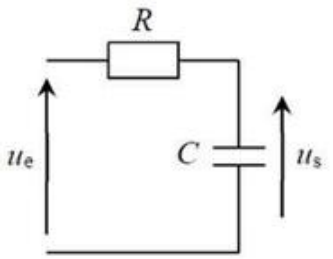
■ Comment déterminer rapidement la nature d'un filtre ?

❑ Méthode 7.1. Comportement asymptotique d'un quadripôle

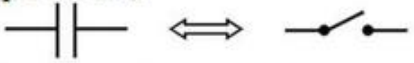
Refaire le schéma pour $\omega \to 0$ et pour $\omega \to \infty$ en remplaçant les bobines et les condensateurs par leur équivalents suivant les conditions. Évaluer la valeur de la sortie, ce qui permet de savoir dans quel domaine le filtre laisse passer le signal.

⇨ Exercices 7.1 à 7.3, 7.5 à 7.10

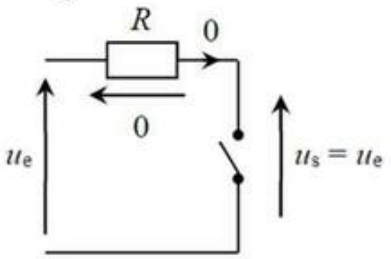
Nous allons déterminer la nature de ce filtre à partir de son comportement asymptotique.



En basse fréquence ($\omega \to 0$), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (ou coupe-circuit).



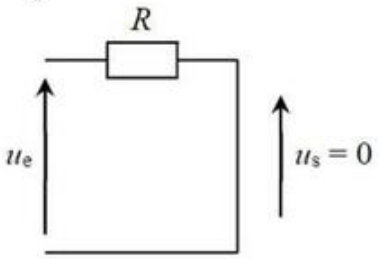
Le schéma équivalent est alors :



En haute fréquence ($\omega \to \infty$), le condensateur se comporte comme un fil (ou interrupteur fermé ou court-circuit).



Le schéma équivalent est alors :



Le signal de sortie est négligeable en haute fréquence, mais environ égal au signal d'entrée pour les basses fréquences : il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

Remarque

On ne trouve pas toujours $u_s = u_e$ dans la bande passante, mais en tout cas u_s du même ordre de grandeur que u_e, ou même d'amplitude plus grande que u_e si le filtre comporte un dispositif d'amplification (ce que ne peut pas se produire avec un filtre constitué uniquement de dipôles R, C et L).

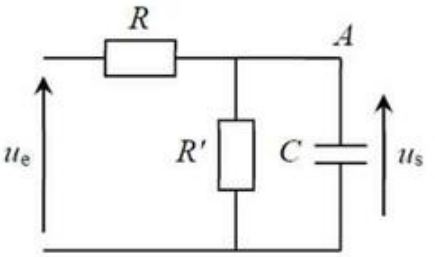
■ Comment déterminer la fonction de transfert d'un quadripôle ?

❑ Méthode 7.2. Calcul d'une fonction de transfert avec un ou deux ponts diviseurs de tension

On réalise les associations nécessaires pour obtenir un pont diviseur de tension, ou éventuellement deux successifs.
Si on doit calculer l'admittance équivalente d'une association parallèle, il est conseillé de la laisser sous cette forme aussi longtemps que possible.

⇨ Exercices 7.1 à 7.3, 7.5 à 7.9

– Exemple d'ordre 1



Nous allons identifier l'association $R'C$ parallèle comme un seul dipôle d'admittance équivalente $\underline{Y}_{éq}$, ayant la tension u_s à ses bornes.
La formule du pont diviseur donne alors :

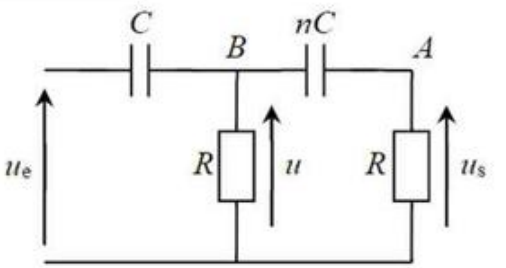
$\underline{U}_s = \dfrac{\underline{Z}_{éq}}{R+\underline{Z}_{éq}}\underline{U}_e$, d'où l'on déduit $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{\underline{Z}_{éq}}{R+\underline{Z}_{éq}}$.

Nous ne chercherons pas à calculer $\underline{Z}_{éq}$ (car nous avons affaire à une association parallèle), mais au contraire à faire apparaître l'admittance équivalente, ce qui donne : $\underline{H} = \dfrac{1}{R\underline{Y}_{éq}+1}$.

C'est seulement maintenant que nous allons remplacer l'admittance par son expression :

$$\underline{H} = \frac{1}{R\left(\dfrac{1}{R'}+jC\omega\right)+1} = \frac{1}{1+\dfrac{R}{R'}+jRC\omega}.$$

– Exemple d'ordre 2



Dans cette structure classique à quatre dipôles, on ne peut pas considérer qu'il y a un seul diviseur de tension reliant u_e et u_s : on doit alors introduire une tension intermédiaire u, et écrire successivement deux diviseurs.

Il est souvent pratique d'utiliser la formule du diviseur de tension avec des admittances plutôt qu'avec des impédances : $\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{tot}} = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = \dfrac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_2+\underline{Y}_1}$ (facile à démontrer…).

Premier diviseur de tension (capacité nC en série avec la seconde résistance R) :
$\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}} = \dfrac{jnC\omega}{jnC\omega+\dfrac{1}{R}} = \dfrac{jnRC\omega}{jnRC\omega+1}$. Second diviseur de tension (capacité C en série avec tout le

reste) : $\frac{\underline{U}}{\underline{U}_e} = \frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{R + 1/jnC\omega}} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1 + \frac{jnRC\omega}{1 + jnRC\omega}}$. On multiplie les deux :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}} \frac{\underline{U}}{\underline{U}_e} = \frac{n(jRC\omega)^2}{(jRC\omega + 1)(jnRC\omega + 1) + jnRC\omega} \text{ soit } \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{-n(RC\omega)^2}{1 + (2+n)jRC\omega - n(RC\omega)^2}}.$$

Attention, C et R à gauche ne sont pas en série (puisqu'il y a un nœud entre elles), et ne constituent donc pas à elles seules un diviseur de tension ! Par ailleurs, la tension aux bornes du dipôle équivalent à R, nC et R, donc entre le point B et le point du bas, est bien u et non la tension de sortie u_s.

❑ Méthode 7.3. Identification de la fonction de transfert avec une forme canonique

Il faut se laisser guider par le *dénominateur* de la fonction de transfert.
– Pour un filtre d'ordre 1, on cherche à avoir un 1 pour la partie réelle du dénominateur (indépendante de ω).
– Pour un filtre d'ordre 2, il y a deux formes possibles pour le dénominateur mais il comporte toujours trois termes, dont un constant (indépendant de ω) : dans les deux cas, on fait en sorte que ce terme soit égal à 1.
– On identifie alors chaque terme avec l'élément de la forme canonique du filtre associé : on obtient ainsi l'expression de ω_0, et aussi de Q pour un filtre d'ordre 2.

⇨ **Exercices 7.1, 7.2, 7.6 à 7.10**

– Reprenons l'exemple 1 précédent.
La partie réelle du dénominateur vaut $\frac{R' + R}{R'}$, que nous mettons en facteur pour faire apparaître une partie réelle égale à 1. La fonction de transfert s'écrit alors : $\underline{H} = \frac{R'}{R + R'} \frac{1}{1 + j\frac{RR'}{R + R'}C\omega}$.

On reconnaît la forme d'un filtre passe-bas du premier ordre de la forme $\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jx}$.

On identifie donc : $\boxed{H_0 = \frac{R'}{R + R'}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{RR'}{R + R'}C\omega$ d'où l'on tire $\boxed{\omega_0 = \frac{R + R'}{RR'C}}$.

– Reprenons maintenant l'exemple 2 précédent.
Le terme constant du dénominateur vaut déjà 1 : on peut donc dès maintenant identifier cette fonction de transfert avec $\underline{H}(x) = H_0 \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$. On obtient $-x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = -n(RC\omega)^2$ d'où

$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{n}}}$; $j\frac{x}{Q} = (2+n)jRC\omega$ d'où $\boxed{Q = \frac{\sqrt{n}}{2+n}}$; enfin $\boxed{H_0 = 1}$.

■ Comment manipuler les diagrammes de Bode ?

❑ Méthode 7.4. Tracé d'un diagramme de Bode d'ordre 1

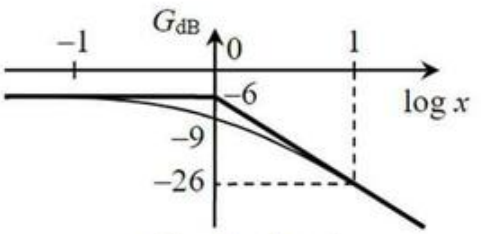
– On se place sur les deux domaines $x \ll 1$ et $x \gg 1$ et on étudie la fonction de transfert simplifiée, qui ne conserve que le terme prépondérant de la partie réelle *ou* imaginaire (au dénominateur). Cela permet d'obtenir les asymptotes en basse fréquence et en haute fréquence, pour la courbe de gain et pour celle de phase.
– On trace ensuite les deux courbes après avoir précisé leur comportement dans la zone autour de $x = 1$. Dans le cas d'un filtre d'ordre 1, on sait que pour $x = 1$, $G_{\text{dB}} = G_{\text{dB max}} - 3\,\text{dB}$ et $\varphi = \pm\pi/4$.

⇨ **Exercices 7.1, 7.5, 7.6, 7.7**

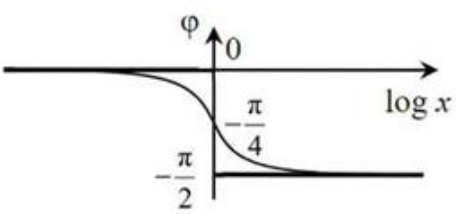
Traçons le diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1 déterminé précédemment.
Pour $x \ll 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx H_0$, soit $G_{\text{dB}} = 20\log|\underline{H}| = 20\log|H_0|$, et $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) = 0$, car ici H_0 est réel et positif.

Pour $x \gg 1$, $\underline{H}(x) \approx H_0 \dfrac{1}{jx}$, soit $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log|H_0| - 20\log x$ (le facteur -20 devant $\log x$ indique une pente de -20 dB/décade) et $\varphi = \arg(H_0) - \arg(jx) = 0 - \dfrac{\pi}{2}$.

Les asymptotes du diagramme de gain se coupent pour $20\log|H_0| = 20\log|H_0| - 20\log x$, donc pour $\log x = 0$ soit $x = 1$. De plus pour $x = 1$, $\underline{H}(1) = H_0 \dfrac{1}{1+j}$ donc $G_{\text{dB}} = 20\log(H_0) - 20\log\sqrt{2} = 20\log(H_0) - 3\,\text{dB}$ et $\varphi = \arg(H_0) - \arg(1+j) = -\dfrac{\pi}{4}$.



Courbe de gain
pour $H_0 = 1/2$ soit $20\log|H_0| = -6$



Courbe de phase

– Autre rédaction possible
Pour x quelconque : $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg(1 + jx) = 0 - \arctan(x)$
et $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\dfrac{H_0}{\sqrt{1+x^2}} = 20\log(H_0) - 10\log(1+x^2)$.
Alors pour $x \ll 1$: $\varphi = -\arctan(0) = 0$ et $G_{\text{dB}} \approx 20\log(H_0) - 10\log(1) = 20\log(H_0)$.
Pour $x \gg 1$: $\varphi = -\arctan(+\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $G_{\text{dB}} \approx 20\log(H_0) - 10\log(x^2) = 20\log(H_0) - 20\log x$.

On peut aussi rencontrer, dans d'autres cas, $\arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$.

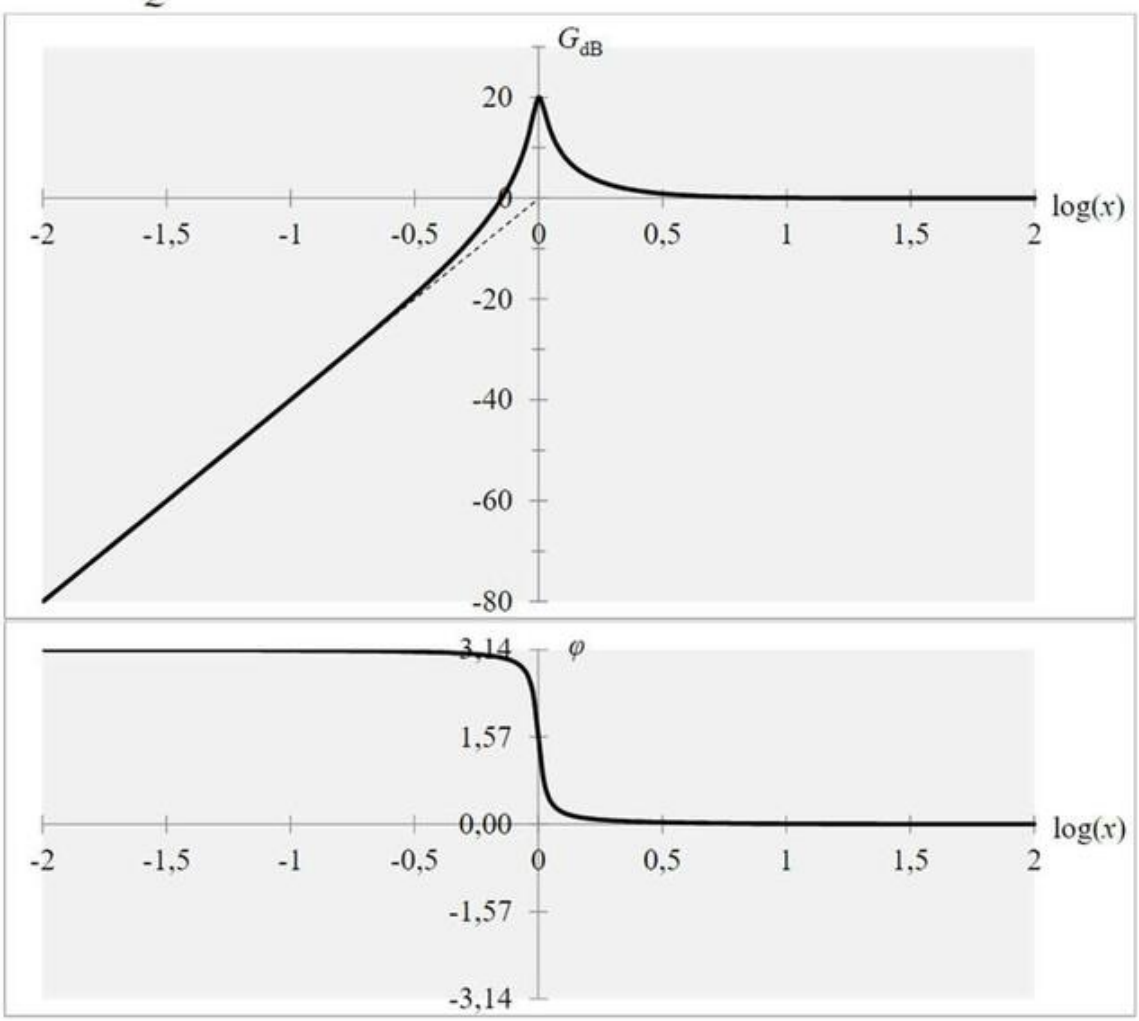
❑ Méthode 7.5. Interprétation d'un diagramme de Bode

– On détermine les équations des asymptotes à gauche et à droite : celles-ci doivent correspondre à la fonction de transfert simplifiée sur les deux domaines $x \ll 1$ et $x \gg 1$. Les asymptotes du gain se coupent toujours en $x = 1$, c'est-à-dire en $\omega = \omega_0$ ou encore $f = f_0 = \omega_0 / 2\pi$.

– Pour un filtre du second ordre, la valeur du gain en $x = 1$ donne aussi la valeur du facteur de qualité.

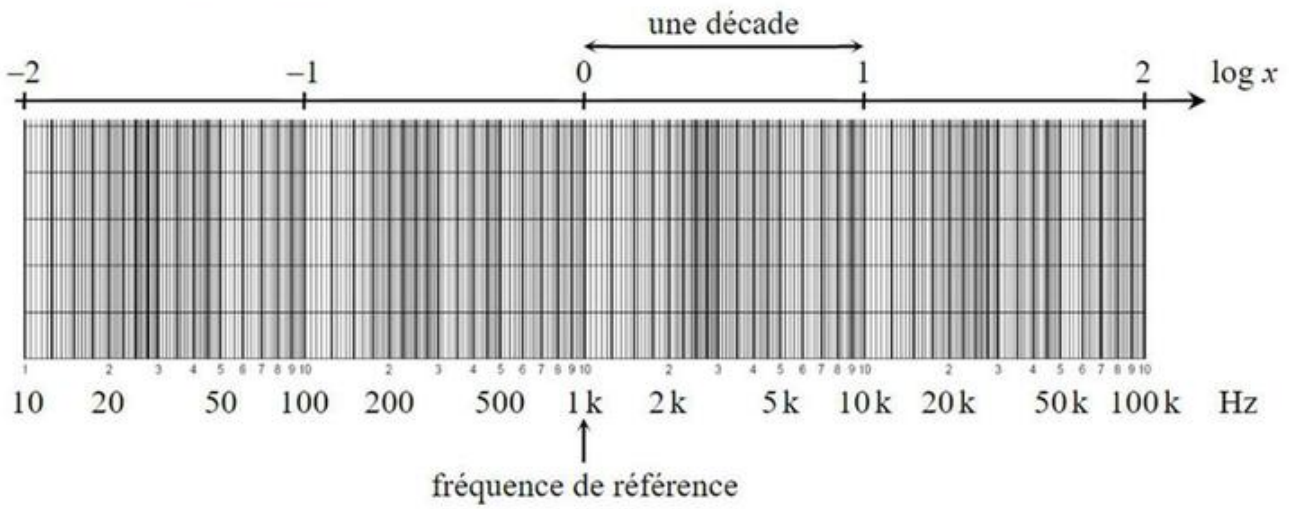
⇨ Exercices 7.3, 7.8, 7.9, 7.10

On cherche à vérifier que le diagramme de Bode ci-dessous correspond à la fonction de transfert $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{-x^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$, et à déterminer la valeur de Q.



– D'après l'allure de la courbe de gain, on reconnaît immédiatement un passe-haut, ce qui correspond effectivement à la fonction de transfert donnée.
– À gauche, c'est-à-dire pour $x \ll 1$, on observe sur la courbe de gain une asymptote (ajoutée en pointillé) de pente + 40 dB/décade (elle monte de 80 dB sur 2 décades) et d'ordonnée à l'origine 0. Cela correspond à l'équation $G_{\text{dB}} \approx +40\log x$, soit $20\log(|\underline{H}|) \approx 40\log x = 20\log(x^2)$, donc dans ce domaine $|\underline{H}| \approx x^2$ (la fonction log étant bijective). Dans le même domaine, on observe sur la courbe de phase une asymptote horizontale : $\varphi = +\pi$, ce qui correspond à $\underline{H}$ réelle négative. On trouve donc $\underline{H} \approx -x^2$ pour $x \ll 1$.
Ceci correspond bien à l'équivalent de la fonction de transfert donnée, pour x tendant vers 0 (on ne garde que le terme 1 au dénominateur).
– À droite, donc pour $x \gg 1$, G_{dB} tend vers $0 = 20\log 1$, donc $|\underline{H}| \approx 1$. Et φ tend vers 0, ce qui correspond à un réel positif. Donc $|\underline{H}| \approx 1$, qui est bien la limite de la fonction donnée pour x tendant vers l'infini.
– Finalement, en $x = 1$, soit $\log x = 0$, on lit sur le graphe $G_{\text{dB}} = 20$ dB.

Or la fonction transfert vaut $\underline{H} = jQ$ en 1, soit une phase $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, que l'on observe bien sur la courbe de phase, et $G_{\text{dB}} = 20\log Q$. On en déduit $\log Q = 1$, soit $\boxed{Q = 10}$.
– En revanche, ce diagramme de Bode ayant été donné directement avec la pulsation réduite, on ne peut pas connaître la valeur de sa fréquence de coupure.
– Si on trace une courbe expérimentale, au lieu de calculer soi-même les logarithmes des fréquences, on peut reporter directement les valeurs des fréquences sur un graphe semi-logarithmique, dans lequel les graduations de l'axe des abscisses ont été déjà placées proportionnellement à leur logarithme. Cela revient donc à avoir log x en abscisse, si on prend comme fréquence de référence l'une quelconque des fréquences de l'axe.



■■ Vrai/Faux

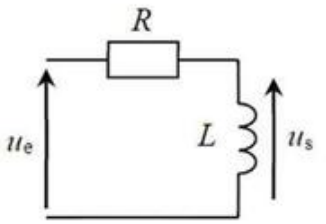
		Vrai	Faux
1.	La fonction de transfert permet de retrouver l'équation différentielle du système, valable aussi pour le régime transitoire.	☐	☐
2.	L'ordre du filtre est aussi l'ordre du système en régime transitoire.	☐	☐
3.	Un filtre passe-bande laisse passer les hautes fréquences.	☐	☐
4.	La pulsation de coupure à -3 dB est la pulsation pour laquelle la valeur du gain est $\sqrt{2}$ fois plus petite que sa valeur maximale.	☐	☐
5.	La courbe de gain d'un filtre du premier ordre peut avoir une pente de 40 décibels par décade.	☐	☐
6.	Le filtre passe-haut $\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{jx}{1+jx}$, se comporte comme un circuit dérivateur en basse fréquence.	☐	☐
7.	La pulsation de coupure réduite d'un filtre du premier ordre est $x_c = 1$.	☐	☐
8.	La pulsation de coupure réduite d'un filtre du second ordre est $x_c = 1$.	☐	☐
9.	La phase d'un filtre du premier ordre peut varier de $\dfrac{\pi}{2}$ au maximum.	☐	☐
10.	La phase d'un filtre du second ordre peut varier de $\dfrac{\pi}{2}$ au maximum.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Filtres du premier ordre

❑ Exercice 7.1. Filtre *RL*

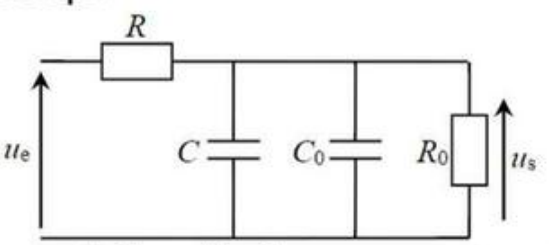
On considère le filtre ci-contre, en sortie ouverte.



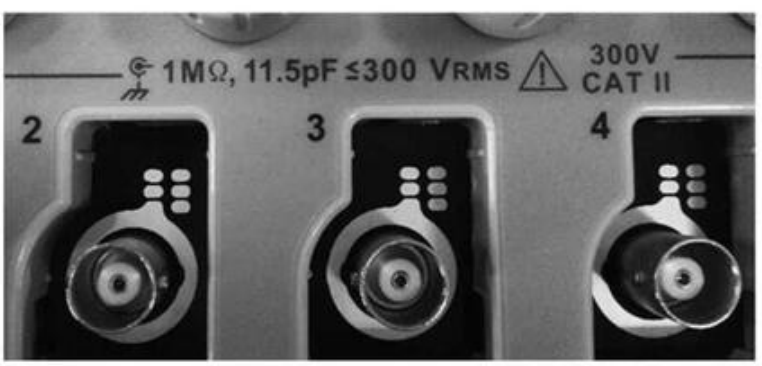
1. Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique.
2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$ de ce filtre. Identifier sa pulsation caractéristique ω_0.
3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique, avec $\log x = \log(\omega/\omega_0)$ en abscisse.
4. Définir sa pulsation de coupure à – 3 dB et tracer l'allure du diagramme de Bode réel.
5. À partir de la fonction de transfert, écrire l'équation différentielle liant $u_e(t)$ et $u_s(t)$.
6. Retrouver l'équation différentielle précédente avec une autre méthode.

❑ Exercice 7.2. Filtre observé à l'oscilloscope

Pour l'étude fréquentielle d'un filtre *RC* série, on visualise la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope, dont l'entrée peut être assimilée à une association en parallèle d'une capacité C_0 et d'une résistance R_0. On obtient donc le schéma ci-contre.

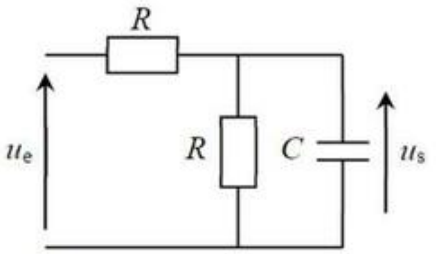


1. Déterminer la nature du filtre constitué par ces quatre dipôles, d'après son comportement asymptotique.
2. Montrer que sa fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{R_0}{R+R_0} \dfrac{1}{j\dfrac{RR_0}{R+R_0}(C+C_0)\omega + 1}$.
3. Calculer la pulsation de coupure ω_c de ce circuit, et la comparer avec la pulsation de coupure ω_c' du circuit *RC* seul. À quelles conditions l'étage d'entrée de l'oscilloscope ne perturbe-t-il pas l'étude du filtre ?
4. On prend $R = 4{,}7\ \text{k}\Omega$, $C = 6{,}8\ \text{nF}$, et on lit les valeurs de R_0 et C_0 directement sur l'oscilloscope, au-dessus de ses bornes d'entrée (image ci-contre). Comparer ω_c et ω_c' et conclure.

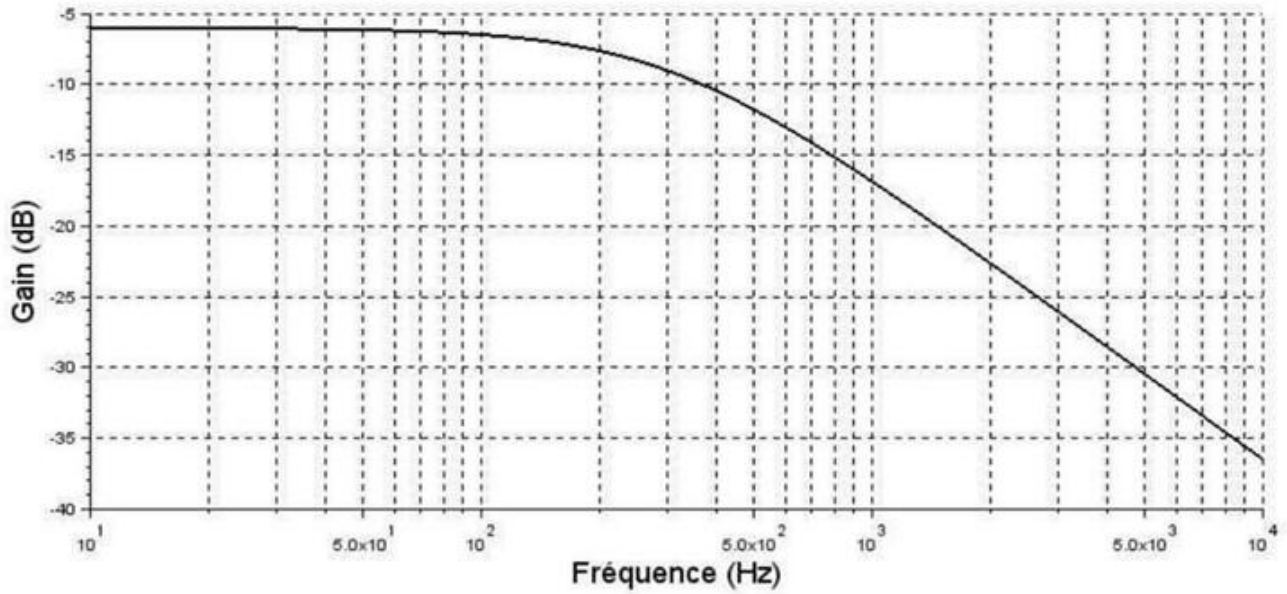


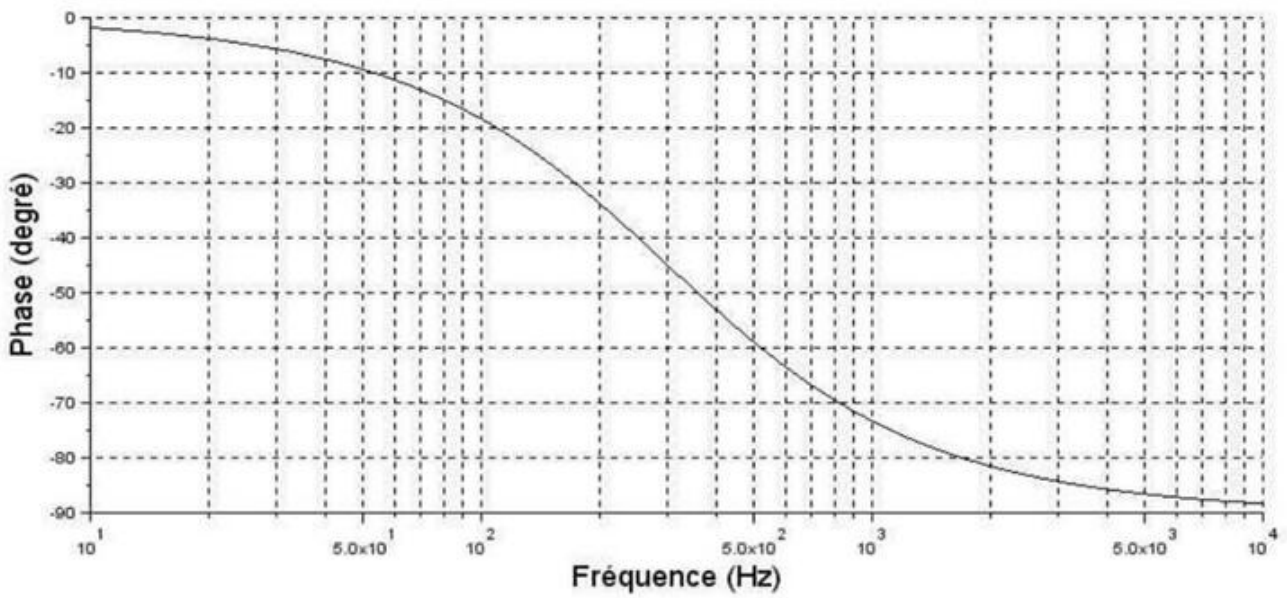
❑ Exercice 7.3. Filtre *RC**

On étudie le filtre ci-contre.



1. En effectuant un schéma équivalent en BF (basse fréquence), puis un autre en HF (haute fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre.
2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(x)$ de ce filtre en fonction de $x = RC\omega$.
3. Déterminer sa pulsation de coupure ω_c en fonction de R et C.
4. On a tracé ci-dessous le diagramme de Bode de ce filtre. Justifier les parties rectilignes du diagramme de Bode en gain. Déterminer un ordre de grandeur du produit RC.



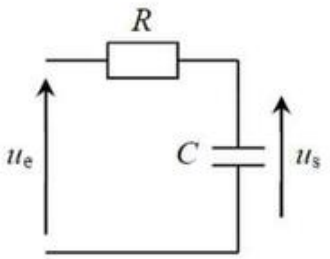


5. En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ? Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ? Vers quelle valeur tend alors le déphasage de $u_s(t)$ par rapport à $u_e(t)$?

6. Déterminer l'amplitude du signal de sortie si l'entrée vaut $10\cos\left(2\pi \cdot 900t + \frac{\pi}{3}\right)$ en volts, avec t en secondes.

❑ Exercice 7.4 Réalisation d'un filtre moyenneur * *

On désire réaliser filtre moyenneur avec un circuit RC, de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$. Pour cela, la composante continue du signal qui correspond à la valeur moyenne doit être transmise et les composantes alternatives « éliminées ».



1. Quelle est la nature de ce filtre ?
2. On considère que la condition d'élimination est réalisée si la composante alternative est atténuée de 40 dB en sortie du filtre. Sachant qu'en pratique, les signaux à traiter ont des fréquences supérieures à 1 kHz, déterminer la valeur de la fréquence de coupure. En déduire la valeur de R, sachant que l'on a déjà un condensateur $C = 1$ µF.
3. Le filtre précédent est maintenant réalisé, et fonctionne parfaitement. Pour le tester, on l'alimente avec le signal $u_e(t) = 2 + 1.\cos\left(2\pi \cdot 1000t + \frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\left(2\pi \cdot 2000t\right)$ avec t en secondes et u_e en volts. Qu'observe-t-on en sortie (on ne demande pas un calcul complet, mais une approximation rapide) ? Conclure sur la fonction attendue de ce filtre.
4. À quelle condition ce filtre se comporte-t-il comme un intégrateur ?
5. Toujours dans l'optique de vérifier le bon fonctionnement du filtre, on l'alimente avec un signal créneau évoluant entre 0 et 4 V à la fréquence 1 kHz. Qu'observe-t-on à la sortie ?
6. Toto, qui n'a pas écouté les consignes, fait l'observation du signal de sortie avec un oscilloscope en couplage AC (parfois noté CA sur les menus en français). Il n'observe rien : expliquez. Il modifie alors le calibre de l'oscilloscope et observe un signal triangulaire de fréquence 1 kHz : expliquez sans faire de calcul.



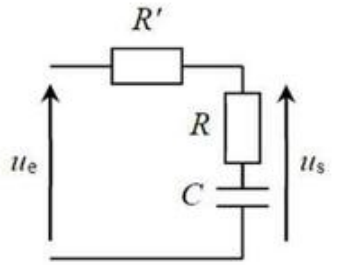
Bouton de sélection du couplage AC sur un oscilloscope analogique



Menu de sélection du couplage AC sur un oscilloscope numérique

❑ Exercice 7.5. Filtre à retard de phase* *

On considère le filtre ci-contre, en sortie ouverte. La tension d'entrée est sinusoïdale. On posera $\alpha = \dfrac{R'}{R}$ et $x = RC\omega$.



1. Faire une analyse qualitative de ce filtre pour les hautes et basses fréquences.
2. Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.
3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
4. Montrer que $\varphi < 0$ quel que soit x, et justifier la dénomination « filtre à retard de phase » donnée à ce montage.
5. Calculer en fonction de α, le déphasage minimal ainsi que le gain G_0 correspondant.

Donnée : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

■ Filtres du deuxième ordre

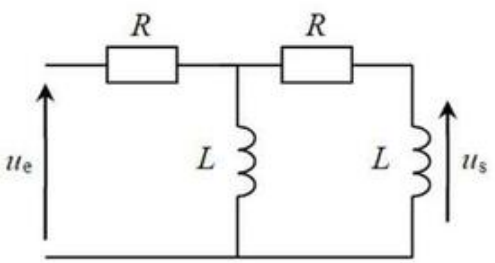
❑ Exercice 7.6. Filtre ADSL*

Le chien de Madame Michu a mangé son filtre ADSL ! Qu'à cela ne tienne, elle va en fabriquer un elle-même…

Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties : les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ; les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

1. Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Madame Michu réalise le filtre ci-contre.



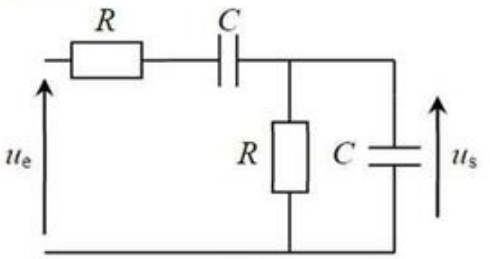
2. Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.
3. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$\underline{H}(x) = \dfrac{-x^2}{1+3jx-x^2}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et ω_0 à déterminer en fonction de R et L.

4. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.
5. Madame Michu possède des résistances de 100 Ω. Quelle valeur d'inductance doit-elle choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

❑ Exercice 7.7. Utilisation d'un filtre de Wien*

On étudie le circuit ci-contre en régime sinusoïdal permanent, alimenté par une tension d'entrée $u_e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



1. Déterminer qualitativement le comportement de ce filtre à haute et basse fréquence.

2. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$ sous la forme :

$\underline{H}(x) = H_0 \dfrac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$. Préciser le facteur de qualité Q du filtre et la valeur de H_0.

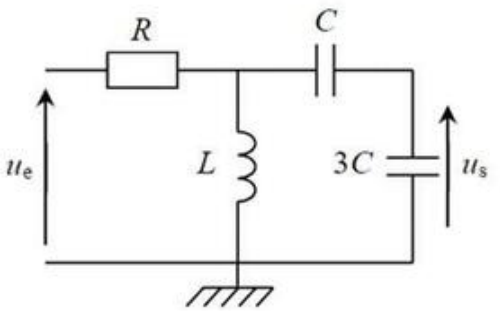
3. Calculer le gain maximum de ce filtre, ainsi que le déphasage correspondant et le gain en décibels. Calculer les pulsations de coupures ω_{c1}, ω_{c2} en fonction de Q et ω_0, et en déduire la largeur de la bande passante.

4. Représenter le diagramme de Bode de ce filtre, en précisant les asymptotes.

5. Calculer ω_0 pour $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$ et $C = 0{,}50\ \mu\text{F}$. Quel signal obtient-on en sortie si le signal d'entrée est $u_e(t) = E_m \cos(\omega t) + E_m \cos(10\omega t) + E_m \cos(100\omega t)$ avec $\omega = 2{,}0 \cdot 10^2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$?

❑ Exercice 7.8. Filtre de Colpitts

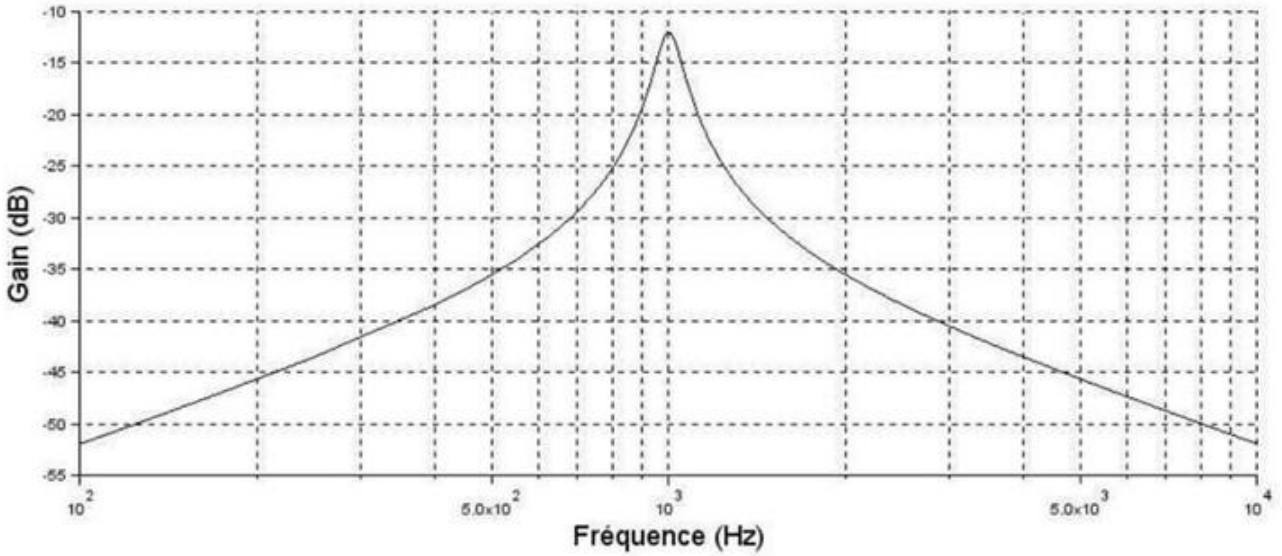
On considère le quadripôle suivant, où C est une capacité, R une résistance et L une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé, en sortie ouverte (rien n'est branché entre les bornes de sortie).

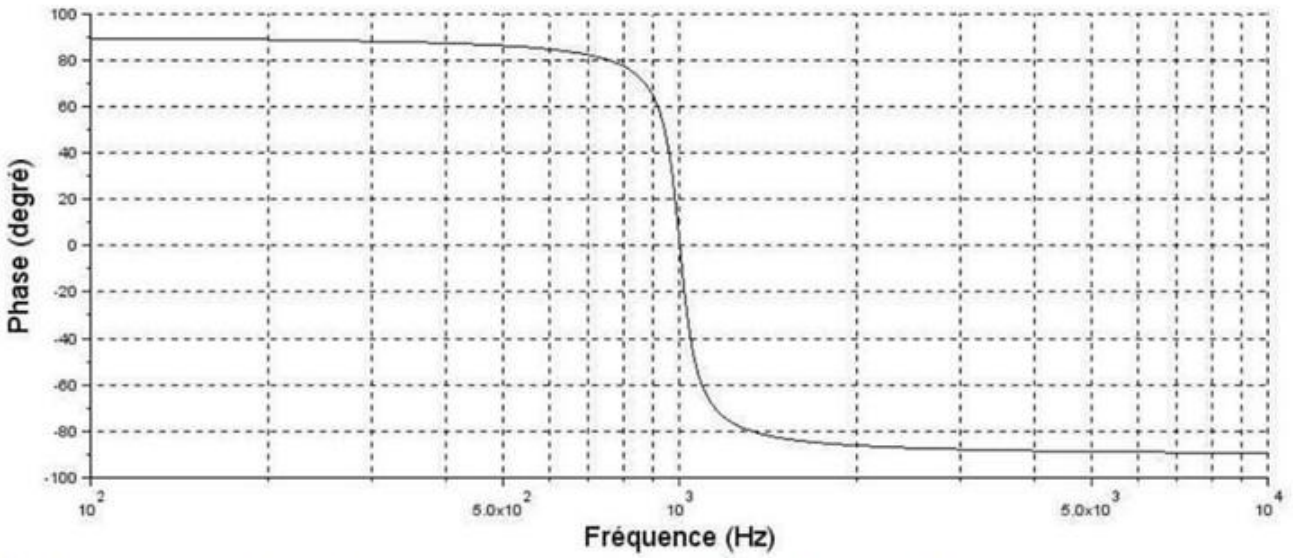


1. Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence et en basse fréquence. De quel type de filtre s'agit-il ?

2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ et la mettre sous l'une des deux formes équivalentes : $\underline{H} = \dfrac{A}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{j\dfrac{A}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ en introduisant des constantes A, ω_0 et Q dont on précisera les expressions en fonction de R, C et L.

3. Le diagramme de Bode de ce quadripôle a été relevé, et on sait que $Q = 10$ (voir page suivante). Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme de Bode. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord f_0, ainsi que des fréquences de coupure.

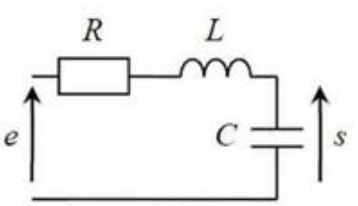




4. Un circuit multiplieur fournit le signal d'entrée $u_e(t) = 2B\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_1 = 100\omega_0$ et $\omega_2 = 101\omega_0$. Écrire $u_e(t)$ sous forme d'une somme de cosinus. En déduire le signal obtenu à la sortie de ce filtre.

❑ Exercice 7.9. Filtre *RLC* série * *

On étudie le circuit linéaire ci-contre.
Il est composé de trois dipôles en série : une résistance R, une inductance parfaite de coefficient d'induction L, et d'un condensateur de capacité C.
Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m\cos(\omega t + \varphi)$. On note $s(t)$ la tension de sortie.



1. À l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, donner la nature de ce filtre.

2. a) Établir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :

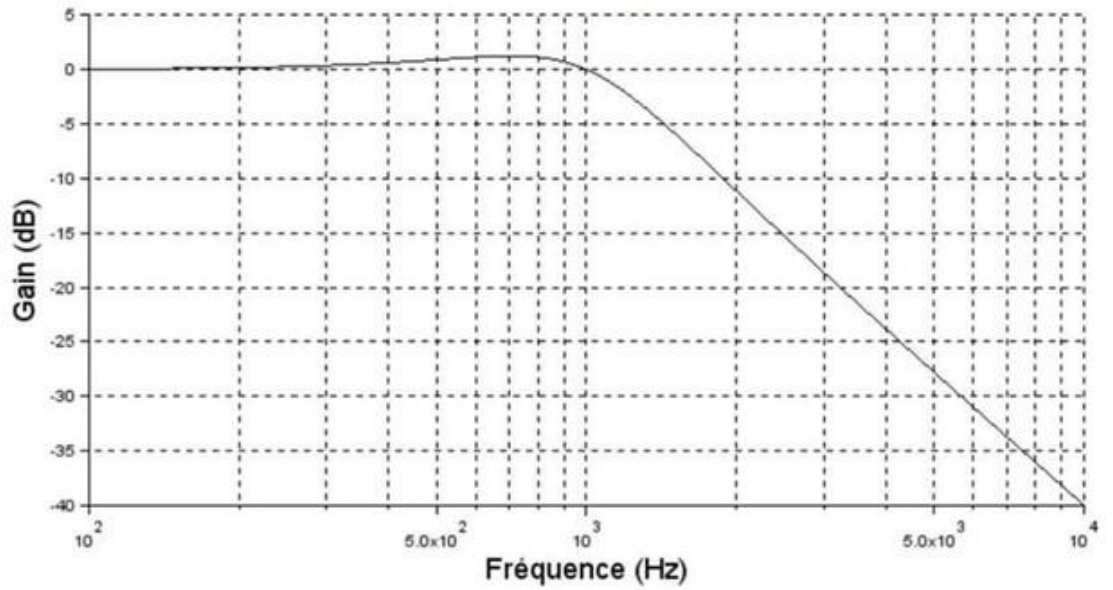
$\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ en précisant ω_0 et Q. Donner l'ordre de ce filtre.

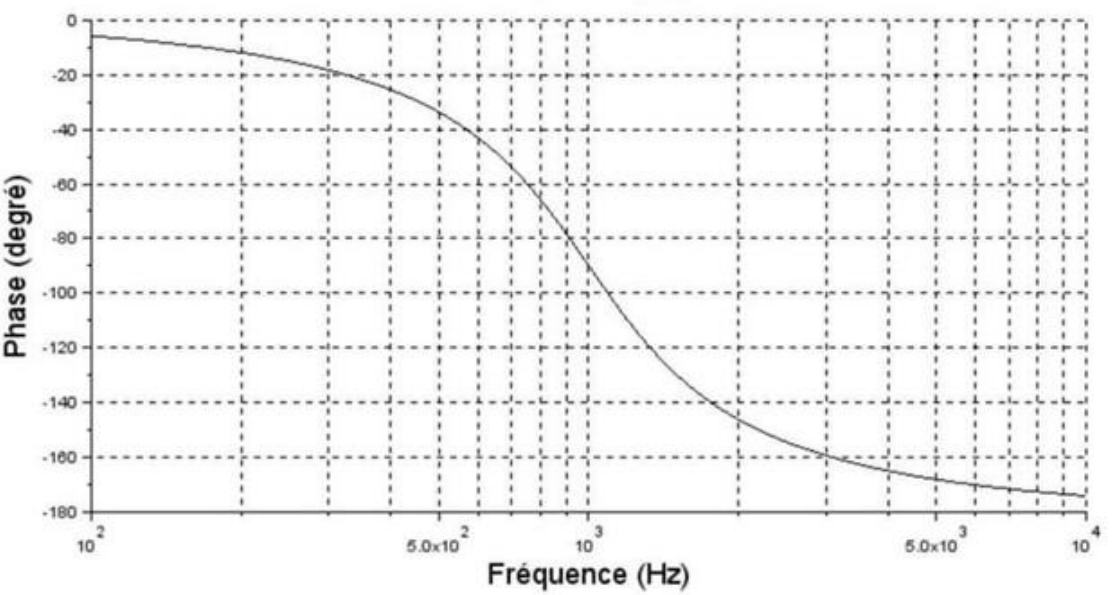
b) Si $e(t)$ est une fonction quelconque du temps (non nécessairement sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions $s(t)$ et $e(t)$?
Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction de transfert $\left|\underline{H}(\omega)\right|$, en fonction de ω, ω_0 et Q.

4. Montrer que $\left|\underline{H}(\omega)\right|$ passe par un maximum pour $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Comment appelle-t-on ce phénomène ? Déterminer ω_r, la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de ω_0 et Q.

5. On appelle gain la fonction $G_{dB}(\omega) = 20\log\left|\underline{H}(\omega)\right|$. Le tracé du diagramme de Bode est réalisé avec $Q = 1$. Déduire du diagramme la valeur de ω_0. Justifiez l'allure des asymptotes de G_{dB} aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Exprimer $G_{dB}(\omega_0)$.

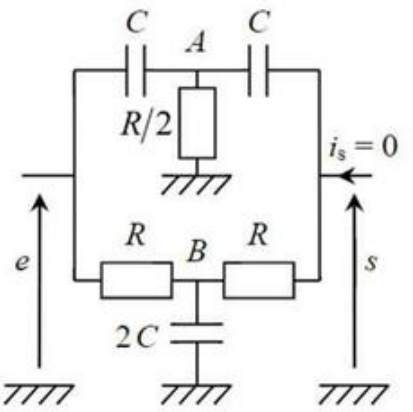




❑ Exercice 7.10. Toto et son coupe-bande* *

Toto réalise un enregistrement numérique de son groupe de rock, dans des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Mais il est gêné par un signal parasite à 50 Hz provenant de la tension du secteur : il cherche donc à éliminer ce signal au moyen d'un filtre réjecteur ou coupe-bande.

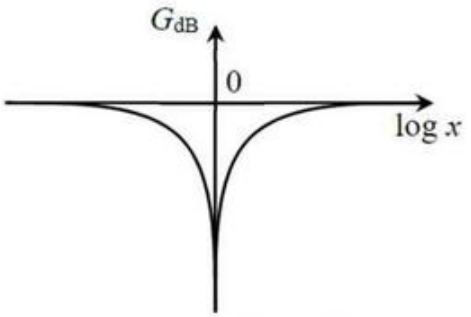
Il réalise pour cela le quadripôle ci-contre, qui est utilisé en sortie ouverte : l'impédance en sortie peut être considérée comme infinie, donc le courant de sortie est nul.

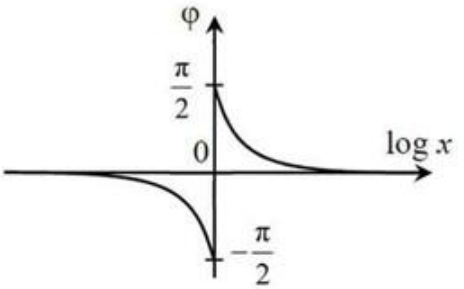


1. Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence et en basse fréquence, et en déduire qu'il s'agit bien d'un coupe-bande.

2. Déterminer sa fonction de transfert en posant $x = RC\omega$, et la mettre sous la forme $\underline{H} = H_0 \dfrac{1-x^2}{1+j\dfrac{x}{Q}-x^2}$ avec des constantes H_0 et Q dont on donnera les valeurs.

3. Le diagramme de Bode de ce quadripôle est représenté ci-dessous.





Interpréter ce diagramme de Bode, et proposer deux valeurs pour R et C permettant de couper le signal à 50 Hz.

■ Simulation numérique

❑ Exercice 7.11. Effet d'un filtre sur un signal carré

Toto n'est jamais sûr de lui lorsqu'il fait un exercice, c'est pourquoi il a choisi d'utiliser Python pour vérifier ses résultats… Mais comme il n'est pas non plus très fort en programmation, il compte sur vous !

Un signal carré d'amplitude E, présent à l'entrée d'un filtre, présente un développement en série de Fourier de la forme : $e(t) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{4E}{\pi}\dfrac{1}{2n+1}\sin(2\pi f_e(2n+1)t)$, où f_e représente la fréquence du signal carré.

Toto a déterminé la fonction de transfert du filtre $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jx}$, avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{f}{f_0}$ la pulsation réduite.

1. Définir une fonction Python nommée `generation_coefficient` qui permet de générer les coefficients du développement en série de Fourier du carré, en fonction du nombre de termes désirés appelé `nombre_termes`.
2. Générer une liste temps noté `t` qui comporte 2000 valeurs réparties sur 3 périodes du carré de fréquence f_e ainsi qu'une fonction que l'on nomme `entree` qui génère le signal carré sous forme de liste.
3. Définir la fonction `filtre_passe_bas` qui génère la sortie $s(t)$ du filtre sous forme de liste, puis compléter le programme pour tracer l'entrée et la sortie du filtre.
4. Le signal carré d'entrée a une amplitude $E = 2\,\text{V}$ et sa fréquence est de 1 kHz. Le filtre présente les caractéristiques $H_0 = 3$ et $f_0 = 10\,\text{Hz}$.

a) À l'aide des fonctions que vous avez précédemment définies, terminer le programme pour observer l'entrée et la sortie du filtre pour 100 termes du développement en série de Fourier du signal $e(t)$. D'après l'observation, que pouvez-vous en conclure sur l'opération effectuée sur le carré ?

b) À l'aide de la forme asymptotique du diagramme de Bode, déterminer l'amplitude du signal de sortie, valeur que l'on pourra vérifier sur la simulation.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 7.3. Question 4 : il faut déterminer graphiquement la fréquence de coupure et en déduire la pulsation de coupure.

Exercice 7.5. À la question 3, il faut aussi étudier le domaine $\frac{1}{1+\alpha} \ll x \ll 1$, en supposant qu'il existe. À la question 5, étudier la dérivée de la fonction argument pour avoir son extremum.

Exercice 7.9. À la question 4, calculer la dérivée du terme contenu dans la racine du dénominateur du gain, et chercher la condition d'existence d'un extremum.

Exercice 7.10. Ici la structure du montage est trop complexe pour que la méthode du pont diviseur de tension soit utilisable : on revient aux lois de base des circuits. On peut par exemple appliquer la loi des nœuds en A, en B et au point de sortie, et remplacer toutes les intensités par des rapports entre tension et impédance.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux

3. Il coupe les basses et les hautes fréquences, et laisse passer une bande de fréquences intermédiaires.

5. Il existe trois valeurs de pente pour un filtre du premier ordre : 0, + 20 dB/déc et –20dB/déc. Une pente de ± 40dB/déc correspond à un terme en ω^2 donc à un filtre du second ordre.

6. En basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à $\underline{H}(x) = H_0 jx = \frac{H_0}{\omega_0} j\omega$. Or une multiplication par $j\omega$ en complexes correspond à une dérivation temporelle.

8. Il faut toujours calculer la ou les pulsation(s) de coupure d'un filtre du second ordre, en fonction de sa nature ; pour un passe-bande par exemple, $x = 1$ est sa pulsation centrale (ou pulsation de résonance), et ses deux pulsations de coupure sont de part et d'autre de cette valeur.

10. La phase d'un filtre du second ordre peut varier au maximum de π, car le terme prépondérant du dénominateur varie de 1 (argument 0) en BF à $-\omega^2$ (argument π) en HF.

❑ Les erreurs classiques

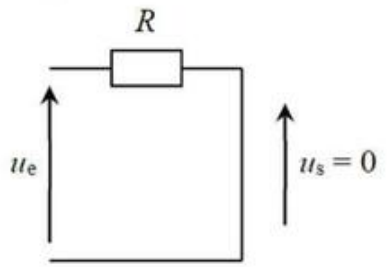
– Dans l'étude (sans calcul) du comportement asymptotique, la tension aux bornes d'un interrupteur *ouvert* est souvent non nulle, en tout cas inconnue a priori.
– Attention à bien appliquer la formule du diviseur de tension uniquement à des dipôles (ou associations) *en série*, c'est-à-dire *sans nœud entre eux* (le nœud en sortie n'en est pas vraiment un si la sortie est ouverte).
– Ne pas poser systématiquement $x = RC\omega$ pour un filtre comportant des résistances R et des capacités C : la pulsation caractéristique peut être $\omega_0 = \frac{\alpha}{RC}$ avec α différent de 1 (voir les exemples des méthodes).
– Ne pas oublier les barres de module dans l'expression du gain : $G(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right|$ et $G_{dB}(\omega) = 20\log\left|\underline{H}(\omega)\right|$.
– Contrairement aux formules de chimie (pH, etc.), il n'y a pas de signe – devant le logarithme définissant le gain en décibels.

Exercice 7.1

1. En basse fréquence ($\omega \to 0$), la bobine se comporte comme un fil.



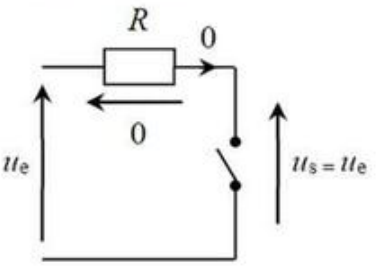
Le schéma équivalent est alors :



En haute fréquence ($\omega \to \infty$), la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.



Le schéma équivalent est alors :



Le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, négligeable aux basses fréquences : c'est un filtre passe-haut.

⇨ *Méthode 7.1*

2. En utilisant la formule du pont diviseur de tension, on obtient $\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \underline{H} = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}$.

On la met sous forme canonique en divisant par R en haut et en bas, soit $\underline{H} = \dfrac{j\dfrac{L}{R}\omega}{1 + j\dfrac{L}{R}\omega}$, qui est de la forme $\boxed{\underline{H} = H_0 \dfrac{jx}{1+jx}}$ avec par identification $\boxed{H_0 = 1}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{L}{R}\omega$ soit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{R}{L}}$.

⇨ *Méthode 7.2, 7.3*

3. Pour $x \ll 1$ la fonction de transfert devient $\underline{H} \approx jx$, soit $\boxed{G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log(x)}$ (asymptote de pente de +20 dB/décade) et $\boxed{\varphi = \arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{2}}$.

Pour $x \gg 1$ la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx \dfrac{jx}{jx} = 1$, soit $\boxed{G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = 0}$ et $\boxed{\varphi = 0}$.

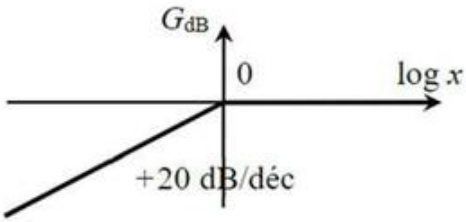
Les asymptotes se coupent pour $20\log(x) = 0$.

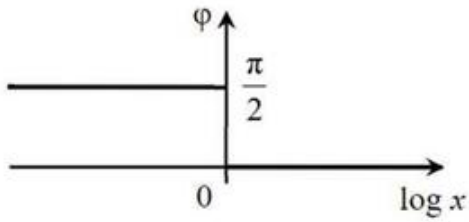
– Autre rédaction possible

Pour tout x, $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log H_0 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

On en déduit les quatre limites précédentes $\left(\text{sachant que } \arctan(0)=0 \text{ et } \arctan(+\infty)=+\frac{\pi}{2}\right)$.

Le diagramme de Bode asymptotique du filtre a donc l'allure suivante.

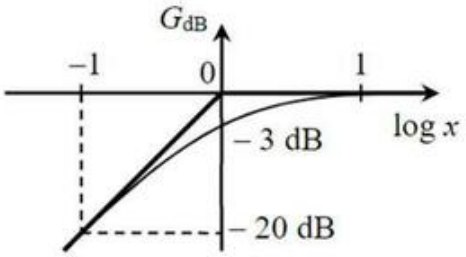


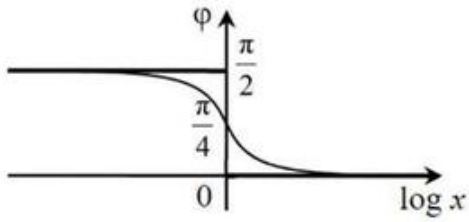


Cette fois le zéro est valable pour l'axe des ordonnées et aussi pour l'axe des abscisses, où $\log x = 0$ *correspond à la valeur* $x=1$, *soit* $\omega=\omega_0$.

4. La pulsation de coupure à -3 dB correspond à la valeur $G_{dB}=-20\log\sqrt{2}=-3\,\text{dB}$ soit $G(x_c)=\dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x_c^2}}$: on en déduit immédiatement $x_c^2=1$, soit $x_c=1$ et $\boxed{\omega_c=\omega_0}$.

D'autre part, $\varphi(1)=\arg(j)-\arg(1+j)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.





5. À partir de $\underline{H}=\dfrac{j\dfrac{L}{R}\omega}{1+j\dfrac{L}{R}\omega}=\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}=\dfrac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)}$ on effectue le produit en croix :

$j\dfrac{L}{R}\omega\underline{u}_e(t)=\underline{u}_s(t)+j\dfrac{L}{R}\omega\underline{u}_s(t)$. On repasse ensuite au domaine temporel, sachant que chaque facteur $j\omega$ correspond à une dérivation par rapport au temps : $\dfrac{L}{R}\dfrac{du_e}{dt}=u_s+\dfrac{L}{R}\dfrac{du_s}{dt}$ soit sous forme canonique $\boxed{\dfrac{du_e}{dt}=\dfrac{R}{L}u_s+\dfrac{du_s}{dt}}$.

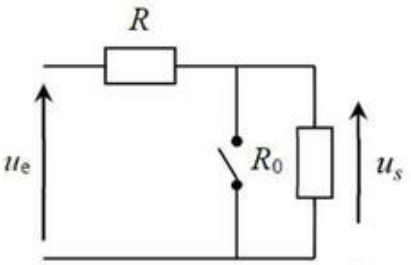
6. Les relations élémentaires sont, en convention récepteur : $u_R=Ri$ et $u_s=L\dfrac{di}{dt}$. La loi des mailles donne $u_e=Ri+u_s$. Pour obtenir une relation liant les tensions d'entrée et de sortie, il faut alors dériver l'équation, ce qui donne $\boxed{\dfrac{du_e}{dt}=\dfrac{R}{L}u_s+\dfrac{du_s}{dt}}$.

Exercice 7.2

1. En basse fréquence ($\omega \to 0$), un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.



Le schéma équivalent est alors :

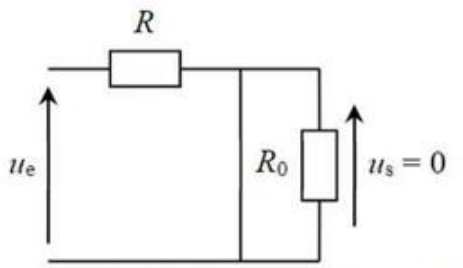


Pont diviseur de tension : $u_s = \dfrac{R_0}{R+R_0} u_e$.

En haute fréquence ($\omega \to \infty$), un condensateur se comporte comme un fil.



Le schéma équivalent est alors :



La tension u_s est la tension aux bornes d'un fil, elle est donc nulle.

Le signal de sortie est important pour les basses fréquences, négligeable pour les hautes fréquences : il s'agit d'un filtre passe-bas.

⇨ *Méthode 7.1*

2. On considère l'association parallèle C, C_0 et R_0 que l'on considère comme un dipôle d'impédance $\underline{Z}_{éq}$ (dont l'admittance est obtenue immédiatement). D'après le formule du diviseur de tension, on peut écrire $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}_{éq}}{R+\underline{Z}_{éq}}$, soit en divisant par $\underline{Z}_{éq}$, $\underline{H} = \dfrac{1}{R\underline{Y}_{éq}+1}$, avec $\underline{Y}_{éq} = j(C+C_0)\omega + \dfrac{1}{R_0}$. On obtient alors $\underline{H} = \dfrac{1}{jR(C+C_0)\omega + \dfrac{R+R_0}{R_0}}$. On cherche à obtenir une partie réelle unitaire pour le dénominateur soit $\boxed{\underline{H} = \dfrac{R_0}{R+R_0} \dfrac{1}{j\dfrac{RR_0}{R+R_0}(C+C_0)\omega + 1}}$. On a une forme $\boxed{\underline{H} = H_0 \dfrac{1}{1+jx}}$ en identifiant $\boxed{H_0 = \dfrac{R_0}{R+R_0}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{RR_0}{R+R_0}(C+C_0)\omega$, soit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{R+R_0}{RR_0(C+C_0)}}$.

⇨ *Méthodes 7.2, 7.3*

3. Par définition : $G(x_c) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1+x_c^2}}$, d'où $x_c = 1$ soit $\boxed{\omega_c = \omega_0 = \dfrac{R+R_0}{RR_0(C+C_0)}}$.

Pour un filtre passe-bas du premier ordre, le gain maximum est obtenu lorsque x tend vers zéro.

Dans le cas d'un simple circuit RC, la fonction de transfert est $\dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R+\dfrac{1}{jC\omega}}=\dfrac{1}{1+jRC\omega}$. On aurait par identification avec la forme canonique $H_0'\dfrac{1}{1+jx'}$, $H_0'=1$ et $x'=RC\omega$. La pulsation réduite de coupure vaut $x_c'=1=RC\omega_c'$ donc $\omega_c'=\dfrac{1}{RC}$. On constate que <u>le fait de brancher le filtre RC sur un autre circuit modifie sa pulsation de coupure.</u>

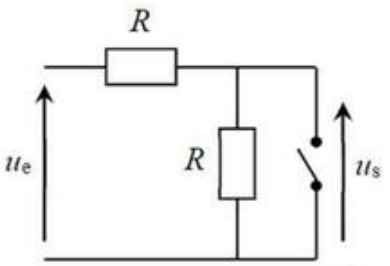
Pour que le filtre ne soit pas perturbé par l'oscilloscope, il faut $\omega_c'\approx\omega_c$, il faut donc un rapport des deux pulsations unitaire : $\dfrac{\omega_c}{\omega_c'}=\dfrac{R+R_0}{R_0}\cdot\dfrac{C}{C+C_0}\approx 1$ soit $\boxed{R_0\gg R \text{ et } C_0\ll C}$.

4. D'après les données de l'énoncé, on trouve $\omega_c'=31{,}3\ \text{krad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_c=31{,}4\ \text{krad}\cdot\text{s}^{-1}$. On constate que ces deux pulsations sont très proches (il faut aller au troisième chiffre significatif pour les distinguer) : l'oscilloscope ne perturbe pas le fonctionnement du filtre.

> *Heureusement que l'oscilloscope ne perturbe généralement pas le fonctionnement des filtres, car en TP on l'utilise toujours pour les étudier !*

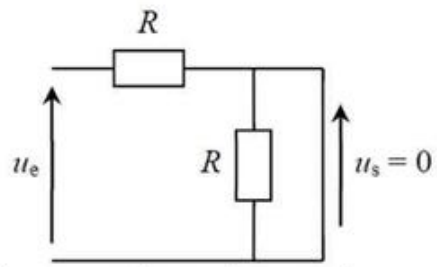
Exercice 7.3

1. En basse fréquence ($\omega\to 0$) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



Pont diviseur de tension : $u_s=\dfrac{R_0}{R+R_0}u_e$.

En haute fréquence ($\omega\to\infty$) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



La tension u_s est la tension aux bornes d'un fil, elle est donc nulle.

Le signal de sortie est négligeable pour les hautes fréquences, important pour les basses fréquences : il s'agit d'un <u>filtre passe-bas</u>.

⇨ *Méthode 7.1*

2. On considère l'association parallèle RC comme un dipôle d'impédance $\underline{Z}_{éq}$ (dont l'admittance $\underline{Y}_{éq}$ est obtenue immédiatement). Diviseur de tension : $\underline{H}=\dfrac{\underline{Z}_{éq}}{R+\underline{Z}_{éq}}=\dfrac{1}{R\underline{Y}_{éq}+1}$, avec $\underline{Y}_{éq}=jC\omega+\dfrac{1}{R}$, soit $\underline{H}=\dfrac{1}{jRC\omega+2}$. En posant $x=RC\omega$ on obtient $\boxed{\underline{H}=\dfrac{1}{2+jx}}$.

On peut mettre la fonction de transfert sous forme canonique avec une partie réelle unitaire pour le dénominateur soit $\underline{H} = \dfrac{1/2}{1 + jx/2}$.

⇨ *Méthodes 7.2, 7.3*

3. Le gain de la fonction de transfert s'écrit $G = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$, il est alors évident que $G_{\max} = \dfrac{1}{2}$, qui correspond à la valeur $|H_0|$ si on avait fait une identification avec la forme canonique.

Par définition, $G(x_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x_c^2/4}}$, donc $4 + x_c^2 = 8$ soit $x_c = 2$. On obtient la pulsation de coupure $\boxed{\omega_c = \dfrac{2}{RC}}$.

De façon inhabituelle, cet énoncé définit une pulsation réduite x qui n'est pas égale à ω/ω_c, *on trouve donc une valeur de* x_c *différente de 1.*

4. – Pour $x \ll 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{2}$.

Alors $G_{dB} = 20\log(1/2) = -6\,\text{dB}$, d'où une asymptote horizontale à – 6 dB en basse fréquence sur la courbe de gain. Et $\varphi = \arg(1/2) = 0$, d'où l'asymptote pour la phase en BF.

– Pour $x \gg 1$, $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{jx} = -\dfrac{j}{x}$.

Alors $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = -20\log x$: le facteur –20 devant $\log x$ indique une pente de l'asymptote de –20 dB/décade. Et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ qui représente l'asymptote de la phase en HF.

On détermine la fréquence de coupure par intersection des asymptotes : on lit $f_c = 300\,\text{Hz}$. Or $\omega_c = 2\pi f_c = \dfrac{2}{RC}$ donc $RC = \dfrac{1}{\pi f_c}$. AN $\boxed{RC = 1\,\text{ms}}$.

On peut aussi déterminer la fréquence de coupure en cherchant la fréquence pour laquelle le gain est inférieur de 3 décibels à sa valeur maximale (abscisse –9 environ), ou encore celle où la phase vaut –45°.

⇨ *Méthode 7.5*

5. À haute fréquence, $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{jx}$. On reconnaît l'opérateur intégration, caractérisé sur un diagramme de Bode par une pente de –20 dB/décade (division par ω) et un déphasage qui tend vers –90° (division par j).

6. Pour 900 Hz, on lit $G_{dB} = -16\,\text{dB} = 20\log G$. On en déduit $G = 10^{-16/20} = 0{,}16 = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}}$. Donc $U_{sm} = G \cdot U_{em} = 0{,}16 \cdot 10$ soit $\boxed{U_{sm} = 1{,}6\,\text{V}}$.

Exercice 7.4

1. D'après la fonction de transfert, on reconnait un filtre passe-bas du premier ordre. En effet, si $\omega \to 0$, alors $\underline{H} \approx 1$, le signal est transmis. Si $\omega \to \infty$, alors $\underline{H} \approx 0$, le signal est coupé.

2. En haute fréquence, $H \approx \frac{1}{x} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f_0}{f}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, ce qui correspond à une pente de – 20 dB/décade dans la courbe de gain. En basse fréquence, $H \approx 1$. L'atténuation de 40 dB (au moins) équivaut à une division de l'amplitude par 100 (au moins) pour une fréquence f = 1 kHz, soit $\boxed{f_0 = \frac{f}{100} = 10 \text{ Hz}}$.

On en déduit $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC}$, d'où $\boxed{R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = 16 \text{ k}\Omega}$. Il s'agit de la valeur la plus faible que l'on peut prendre pour R. Si sa valeur est plus élevée, la pulsation de coupure sera plus basse et les composantes à partir de 1 kHz encore plus atténuées.

3. D'après l'énoncé, on considère que les composantes du signal au-delà de 1 kHz sont supprimées. Donc seule la composante continue du signal engendre une sortie non nulle : on obtient en sortie $\boxed{u_s(t) = 2 \text{ V}}$. Le filtre renvoie donc bien la valeur moyenne du signal.

4. Le filtre se comporte comme un intégrateur si sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme $\underline{H} \approx \frac{1}{jRC\omega}$. Pour cela, il faut que on puisse négliger la partie réelle du dénominateur devant la partie imaginaire, soit $RC\omega \gg 1$, donc le filtre se comporte comme un intégrateur si le signal d'entrée a une pulsation $\omega \gg \frac{1}{RC}$, c'est-à-dire une fréquence grande devant 10 Hz.

5. D'après la décomposition en séries de Fourier, le signal créneau peut se décomposer en une composante continue de valeur 2 V et une somme de sinusoïdes de fréquence 1 kHz et ses multiples. Comme le filtre élimine toutes les composantes à partir de 1 kHz, on observe uniquement la réponse au signal continu de 2 V qui donne, avec un gain de 1, $\boxed{u_s(t) = 2 \text{ V}}$.

6. L'entrée AC de l'oscilloscope ne laisse passer que la composante alternative du signal, donc comme d'après ce qui précède, il ne devrait y avoir en sortie du filtre que du continu, Toto voit 0 V continu sur l'oscilloscope.

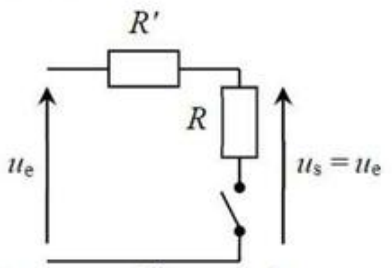
En faisant une modification du calibre, il peut donc observer le traitement par le filtre de la composante alternative. D'après le diagramme de Bode, toutes les composantes sinusoïdales du développement en séries de Fourier correspondent au carré centré. Elles sont à des fréquences de 1 kHz, 2 kHz, 3 kHz, 4 kHz… donc toutes ces fréquences sont dans la partie intégrateur du filtre. Or l'intégrale d'un carré est un triangle. On observe donc un triangle centré en sortie.

> *En mode DC, le signal triangulaire est aussi présent, mais son amplitude est très faible devant la valeur moyenne, c'est pour cela que l'on ne l'observe pas. Il est négligeable en comparaison de l'autre.*

Corrigé

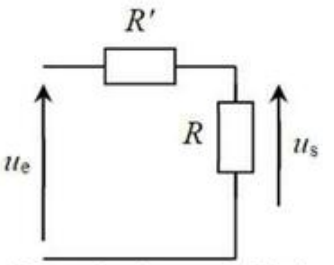
Exercice 7.5

1. En basse fréquence ($\omega \to 0$) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



En effet $u_e - R'i - u_s = 0$ avec $i = 0$ (interrupteur ouvert) donc $u_s = u_e$.

En haute fréquence ($\omega \to \infty$) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



D'après la formule du pont diviseur on obtient $u_s = \dfrac{R}{R+R'}u_e$.

Ce filtre laisse passer les hautes et basses fréquences, mais avec des coefficients différents : on ne peut pas vraiment conclure à partir de cette étude préliminaire.

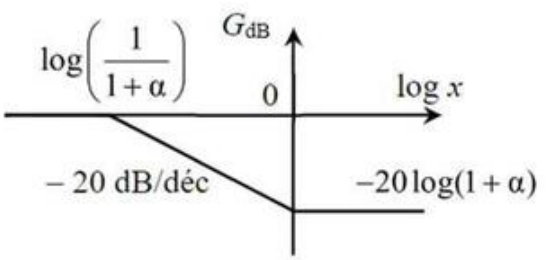
⇨ *Méthode 7.1*

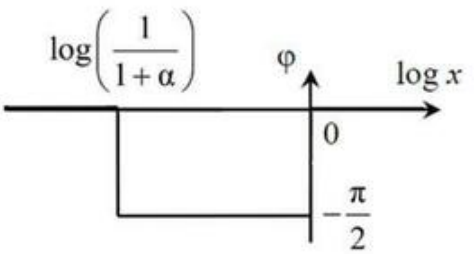
2. On utilise la formule du diviseur de tension, soit $\underline{H} = \dfrac{R + \dfrac{1}{jC\omega}}{R' + R + \dfrac{1}{jC\omega}}$. On multiplie alors numérateur et dénominateur par $jC\omega$ pour avoir des parties réelles unitaires et des puissances croissantes de ω : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1 + jRC\omega}{1 + j(R+R')C\omega} = \dfrac{1 + jx}{1 + j(1+\alpha)x}}$.

⇨ *Méthode 7.2*

3. Pour $x \ll \dfrac{1}{1+\alpha}$: $\underline{H}(x) \approx 1$ soit $G_{dB} = 0$, $\varphi = 0$. Pour $\dfrac{1}{1+\alpha} \ll x \ll 1$ (si ce domaine existe) : $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{j(1+\alpha)x}$ soit $G_{dB} = -20\log(1+\alpha) - 20\log x$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $x \gg 1$: $\underline{H}(x) \approx \dfrac{1}{1+\alpha}$ soit $G_{dB} = -20\log(1+\alpha)$, $\varphi = 0$.





4. D'après le diagramme asymptotique de la phase, on voit immédiatement que l'argument de la fonction de transfert est toujours négatif, soit $\varphi = \arg(\underline{u_s}) - \arg(\underline{u_e}) < 0$: la sortie est en retard sur l'entrée, d'où le nom filtre à retard de phase.

5. On cherche le déphasage minimal, donc le minimum de la fonction $\arg(\underline{H})$ qui doit correspondre à son seul extremum d'après le diagramme asymptotique de la phase.

$\varphi = \arctan x - \arctan((1+\alpha)x)$ donc l'extremum correspond à $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1+\alpha}{1+((1+\alpha)x)^2} = 0$,

soit $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1+\alpha}{1+((1+\alpha)x)^2} \Leftrightarrow 1-(1+\alpha) = (1-(1+\alpha))(1+\alpha)x^2 \Leftrightarrow \alpha = \alpha(1+\alpha)x^2$.

Les solutions sont $\boxed{x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \text{ pour } \alpha \neq 0}$ ou $\boxed{\text{toutes les valeurs de } x \text{ si } \alpha = 0}$, mais dans ces conditions, la fonction de transfert est toujours unitaire, et le filtre ne sert absolument à rien !

– Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$ avec $\alpha \neq 0$, la phase minimale vaut $\varphi = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}} - \arctan\sqrt{1+\alpha}$ soit $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{1+\alpha}}$ et le gain vaut alors $G_0 = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{1+\alpha}}}{\sqrt{1+\left((1+\alpha)\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\right)^2}}$ soit $\boxed{G_0 = \sqrt{\dfrac{1}{1+\alpha}}}$.

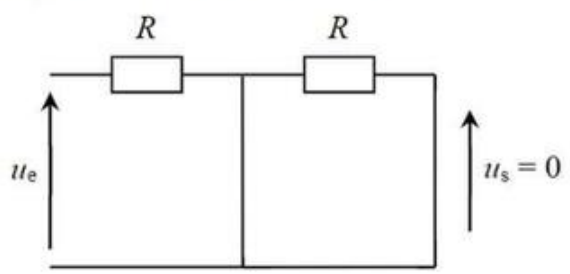
– Si $\alpha = 0$, le gain vaut $G_0 = 1$, quel que soit x car il n'y a plus de résistance R'.

Exercice 7.6

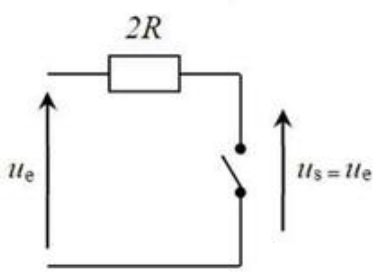
1. On isole les signaux téléphoniques (basses fréquences) avec un filtre passe-bas, et les signaux informatiques avec un filtre passe-haut.

La fréquence de coupure doit être nettement plus grande que les fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : le meilleur choix est $\boxed{f_0 = 10\ \text{kHz}}$.

2. En basse fréquence ($\omega \to 0$), les bobines se comportent comme des fils, d'où :



En haute fréquence ($\omega \to \infty$), les bobines se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Le signal de sortie est de l'ordre de grandeur du signal d'entrée pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

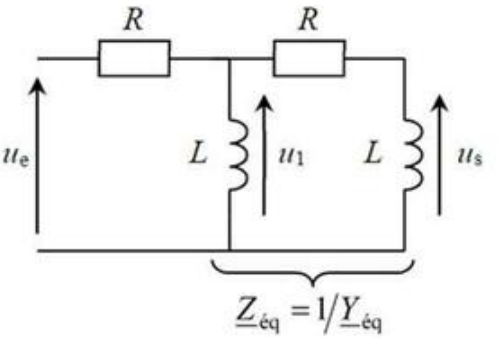
⇨ *Méthode 7.1*

3. On considère deux ponts diviseurs successifs.

Soit $\underline{Y}_{éq} = \dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{R + jL\omega}$ l'admittance de l'ensemble L en parallèle avec RL (ayant la tension u_1 à ses bornes).

Un premier pont diviseur donne :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{éq}}{\underline{Z}_{éq} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{éq}}\underline{U}_e .$$



> *La résistance et l'inductance de gauche ne sont pas en série, et ne constituent pas à elles seules un diviseur de tension. En revanche la résistance et l'inductance de droite, elles, sont bien en série.*

Un second diviseur de tension donne : $\underline{U}_s = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{U}_1$, soit $\underline{U}_s = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \dfrac{1}{1 + R\underline{Y}_{éq}}\underline{U}_e$.

On obtient en développant : $\underline{U}_s = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega + R\left(\dfrac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1\right)}\underline{U}_e = \dfrac{-(L\omega)^2}{R^2 + j3RL\omega - (L\omega)^2}\underline{U}_e$.

On divise par R^2 pour avoir une partie réelle unitaire et des puissances croissantes de ω au dénominateur : $\underline{H} = \dfrac{-\left(\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + j3\dfrac{L}{R}\omega - \left(\dfrac{L}{R}\omega\right)^2}$. En posant $\boxed{\omega_0 = \dfrac{R}{L}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$: $\boxed{\underline{H}(x) = \dfrac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}}$.

⇨ *Méthodes 7.2, 7.3*

4. Pour $x \gg 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx 1$ donc $\boxed{G_{dB} = 0}$ et $\boxed{\varphi = 0}$ (réel positif).

Pour $x = 1$, $\underline{H}(1) = \dfrac{-1}{1 + 3j - 1} = \dfrac{j}{3}$, donc $\boxed{G_{dB} = 20\log\left(\dfrac{1}{3}\right) = -9{,}5 \text{ dB}}$ et $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2}}$ (imaginaire pur positif).

Pour $x \ll 1$, $\underline{H} \approx -x^2$, donc $\boxed{G_{dB} = 40\log x}$ (pente de +40 dB/décade) et $\boxed{\varphi = \arg(-x^2) = \pi}$: on choisit π car le saut de phase ne peut être que de $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur pour $x = 1$.

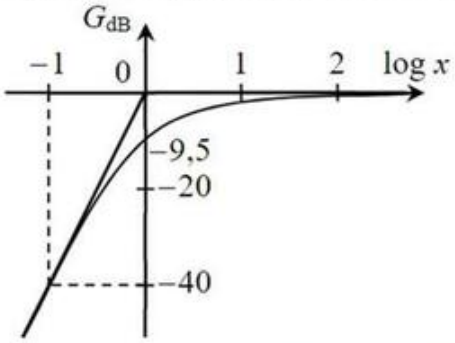
> *Pour un nombre réel négatif comme $-x^2$, on pourrait choisir aussi un argument de $-\pi$ au lieu de $+\pi$, les deux sont équivalents. Mais ici ce sont les autres valeurs qui nous imposent ce choix.*

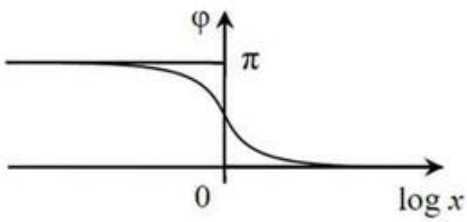
Autre rédaction : pour tout x, $G_{dB} = 20\log\dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}} = 40\log x - 10\log\left[(1-x^2)^2+9x^2\right]$ et

$\varphi = \arg\dfrac{-x^2}{1+3jx-x^2} = \arg\dfrac{jx}{3+j\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, d'où on peut déduire les limites et valeurs précédentes $\left(\text{avec } \arctan(0)=0,\ \arctan(+\infty)=+\dfrac{\pi}{2} \text{ et } \arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

On note que les asymptotes de gain se coupent pour $\log x = 0$.

On complète le diagramme avec les valeurs calculées précédemment en $x=1$.



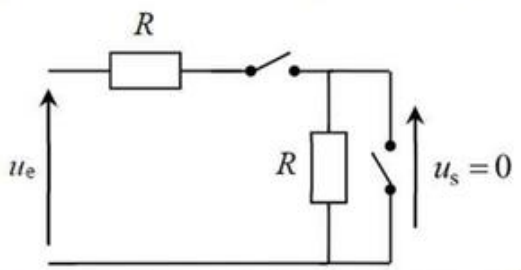


Le diagramme de Bode réel n'a pas de pic de résonance car le facteur de qualité du filtre vaut $Q = \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (voir exercice 9.9) ; de plus en $x=1$ la courbe est nettement en dessous de la valeur maximale, il est donc impossible d'avoir un pic dans ces conditions.

5. La fréquence de coupure est $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{R}{2\pi L}$ donc $\boxed{L = \dfrac{R}{2\pi f_0}}$. AN $\boxed{L = 1{,}6 \text{ mH}}$ (ordre de grandeur des inductances effectivement utilisées dans les filtres ADSL).

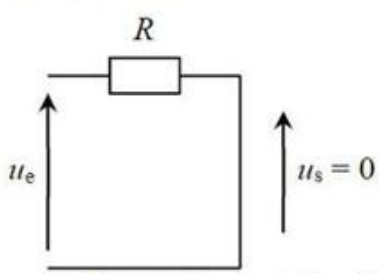
Exercice 7.7

1. En BF ($\omega \to 0$) les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Aucun courant ne peut circuler donc $u_s = 0$.

En HF ($\omega \to \infty$) les condensateurs se comportent comme des fils, d'où :



La tension est nulle aux bornes d'un fil.

Le signal de sortie est nul pour les hautes et basses fréquences, et n'est donc important que pour une bande de fréquences intermédiaires : il s'agit d'un filtre passe-bande.

⇨ *Méthode 7.1*

2. On applique la méthode du diviseur de tension, avec $\underline{Z}_{éq}$ l'impédance des branches R et C en parallèle : $\underline{H} = \dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \dfrac{\underline{Z}_{éq}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_{éq}} = \dfrac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)\underline{Y}_{éq}} = \dfrac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + jC\omega\right)}$

$= \dfrac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{1}{jx}\right)(1 + jx)}$ soit $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1 + \dfrac{j}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}}$. Par identification, $\boxed{Q = \dfrac{1}{3}}$ et $\boxed{H_0 = \dfrac{1}{3}}$.

⇨ *Méthodes 7.2, 7.3*

3. Le gain s'écrit $G = |\underline{H}| = |H_0| \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$. Sa valeur maximale correspond au minimum du dénominateur, obtenu pour $x = 1$ $\left(x - \dfrac{1}{x} = 0\right)$. Alors $\underline{H} = H_0$, soit $\boxed{G_{max} = |H_0| = H_0 = \dfrac{1}{3}}$, $\boxed{G_{dB\,max} = 20\log\left(\dfrac{1}{3}\right) = -9{,}5 \text{ dB}}$ et $\boxed{\varphi = \arg\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0}$.

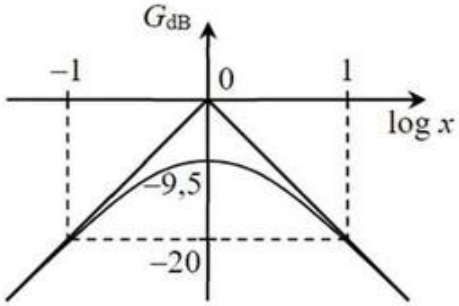
Par définition de la pulsation de coupure réduite : $G(x_c) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right)^2}}$

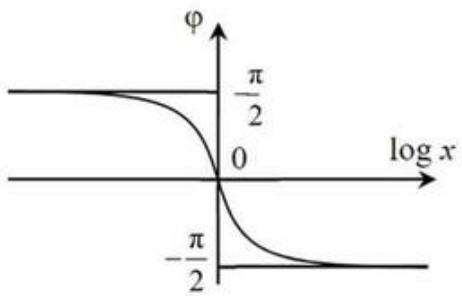
$\Leftrightarrow 1 + Q^2\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow Q\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right) = \pm\dfrac{1}{Q}$, ce qui s'écrit en multipliant par x_c : $x_c^2 \pm \dfrac{x_c}{Q} - 1 = 0$ (deux équations du second degré). Discriminant : $\Delta = \dfrac{1}{Q^2} + 4 > \dfrac{1}{Q^2}$ d'où les quatre solutions $x_c = \dfrac{1}{2}\left(\pm\dfrac{1}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right) = \dfrac{\omega_c}{\omega_0}$. Or seules les solutions positives sont possibles, donc $\boxed{\omega_{c1} = \dfrac{\omega_0}{2}\left(-\dfrac{1}{Q} + \sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4}\right)}$ et $\boxed{\omega_{c2} = \dfrac{\omega_0}{2}\left(\dfrac{1}{Q} + \sqrt{\dfrac{1}{Q^2} + 4}\right)}$. La largeur de la bande passante est alors $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ soit $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$.

4. Pour $x \ll 1$ la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) = \dfrac{H_0}{-\dfrac{jQ}{x}} = jx$, car $\dfrac{H_0}{Q} = 1$, donc $G_{dB} = 20\log(x)$ (pente de $+20$ dB/décade) et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (imaginaire pur positif).

Pour $x \gg 1$, $\underline{H}(x) \approx \dfrac{H_0}{jQx} = -\dfrac{j}{x}$ donc $G_{dB} = -20\log x$ (pente de -20 dB/décade) et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Les asymptotes de gain se coupent en $\log x = 0$, pour $G_{dB} = 0$.





5. Les valeurs de R et C permettent de déterminer $\boxed{\omega_0 = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 2{,}0 \text{ krad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Alors le premier terme de $u_e(t)$ est à la pulsation $\omega = \dfrac{\omega_0}{10}$ soit $x = \dfrac{1}{10}$ et $\log x = -1$; donc $G_{dB} \approx -20 \text{ dB} = 20\log\dfrac{1}{10}$ et $\varphi \approx +\dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne en sortie $\dfrac{E_m}{10}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{E_m}{10}\sin(\omega t)$.

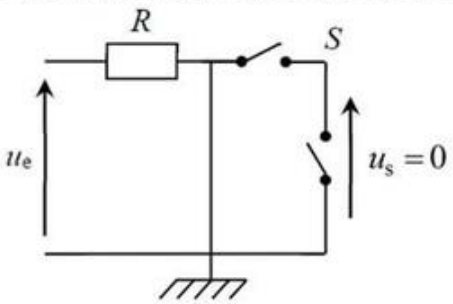
Le deuxième terme est à la pulsation $\omega' = 10\omega = \omega_0$ soit $x' = 1$ et $\log x' = 0$; donc $G_{dB} = -9{,}5 \text{ dB} = 20\log\dfrac{1}{3}$ et $\varphi = 0$, ce qui donne en sortie $\dfrac{E_m}{3}\cos(10\omega t)$.

Enfin le troisième terme est à la pulsation $\omega'' = 100\omega = 10\omega_0$ soit $x'' = 10$ et $\log x = 1$; donc $G_{dB} \approx -20 \text{ dB} = 20\log\dfrac{1}{10}$ et $\varphi \approx -\dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne $\dfrac{E_m}{10}\cos\left(100\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = +\dfrac{E_m}{10}\sin(100\omega t)$.

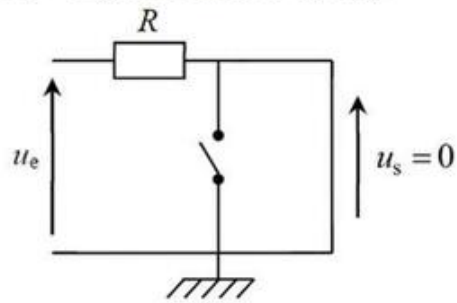
Conclusion : $\boxed{u_s(t) = -\dfrac{E_m}{10}\sin(\omega t) + \dfrac{E_m}{3}\cos(10\omega t) + \dfrac{E_m}{10}\sin(100\omega t)}$.

Exercice 7.8

1. En BF ($\omega \to 0$), les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, la bobine comme un fil : S n'est relié à rien donc $u_s = 0$.



En HF ($\omega \to \infty$), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un coupe-circuit : $u_s = 0$ (aux bornes d'un fil).



Ce quadripôle coupe les basses et les hautes fréquences : c'est donc un filtre passe-bande.

⇨ *Méthode 7.1*

2. On peut identifier ici, non pas un mais deux diviseurs de tension successifs.
D'une part, les deux condensateurs peuvent être considérés comme étant en série (car rien n'est branché aux bornes de sortie). La tension aux bornes du deuxième ($2C$) est u_s et la tension aux

bornes de l'ensemble des deux est aussi celle aux bornes de l'inductance L, que l'on note u. La formule du diviseur de tension donne donc : $\underline{u}_s = \dfrac{1/j3C\omega}{1/j3C\omega + 1/jC\omega}\underline{u} = \dfrac{1}{1+3}\underline{u}$ soit $\underline{u}_s = \dfrac{\underline{u}}{4}$.

D'autre part la résistance R est en série avec l'association des trois autres dipôles : la tension aux bornes de l'ensemble est u_e et celle aux bornes de l'association des trois dipôles est u. Pour cette association en parallèle on travaillera avec son admittance $\underline{Y}$, beaucoup plus légère à écrire que son impédance $\underline{Z}$: ainsi $\underline{u} = \dfrac{\underline{Z}}{\underline{Z}+R}\underline{u}_e = \dfrac{1}{1+R\underline{Y}}\underline{u}_e = \dfrac{1}{1+R\left(\dfrac{1}{jL\omega} + jC_{éq}\omega\right)}\underline{u}_e$ avec

$C_{éq} = \dfrac{C \times 3C}{C+3C} = \dfrac{3C}{4}$ (condensateurs en série) donc $\underline{u} = \dfrac{1}{1+jR\left(\dfrac{3C\omega}{4} - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\underline{u}_e$.

On combine les deux relations : $4\underline{u}_s = \dfrac{1}{1+jR\left(\dfrac{3C\omega}{4} - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\underline{u}_e$ d'où $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\dfrac{1}{4}}{1+j\left(\dfrac{3RC\omega}{4} - \dfrac{R}{L\omega}\right)}}$

qu'on peut identifier à la première forme canonique donnée.

Tout d'abord $\boxed{A = \dfrac{1}{4}}$. Ensuite $\dfrac{Q}{\omega_0} = \dfrac{3RC}{4}$ et $Q\omega_0 = \dfrac{R}{L}$: en multipliant membre à membre on obtient $\boxed{Q = \dfrac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}}$, tandis qu'en divisant membre à membre on trouve $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3LC}}}$.

⇨ *Méthodes 7.2, 7.3*

3. – Pour $\boxed{\omega \ll \omega_0}$, $\underline{H} \approx j\dfrac{A}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

$G_{dB} = 20\log\dfrac{A}{Q} + 20\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$, la courbe de gain présente une asymptote de pente $\boxed{+20\text{ dB/décade}}$

et la phase une asymptote $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2}}$.

– Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = A$ donc $G_{dB} = 20\log\dfrac{1}{4} = -12\text{ dB}$ et $\varphi = 0$.

– Pour $\boxed{\omega \gg \omega_0}$, $\underline{H} \approx -j\dfrac{A}{Q}\dfrac{\omega_0}{\omega}$

$G_{dB} = 20\log\dfrac{A}{Q} - 20\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$ la courbe de gain présente une asymptote de pente $\boxed{-20\text{ dB/décade}}$

et la phase une asymptote $\boxed{\varphi = -\dfrac{\pi}{2}}$.

On sait que l'intersection des asymptotes de gain d'un passe-bande se fait en f_0. On lit donc directement sur le diagramme $\boxed{f_0 = 1\text{ kHz}}$.

On peut aussi remarquer que lorsque le signal d'entrée est à la pulsation ω_0, alors la fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = A = \frac{1}{4}$. C'est donc la fréquence pour laquelle la phase de la fonction de transfert vaut 0, soit $f_0 = 1\,\text{kHz}$.

Par définition, la fréquence de coupure correspond à la valeur maximale du gain – 3 dB. On lit approximativement sur le diagramme $\boxed{f_1 = 950\,\text{Hz}}$ et $\boxed{f_0 = 1050\,\text{Hz}}$.

On vérifie bien pour un passe-bande : $\dfrac{\Delta f}{f_0} = \dfrac{1}{Q}$.

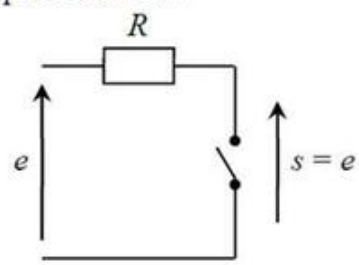
⇨ *Méthode 7.5*

4. $u_e(t) = 2B\cos(100\omega_0 t)\cos(101\omega_0 t) = B\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(201\omega_0 t)\right]$.

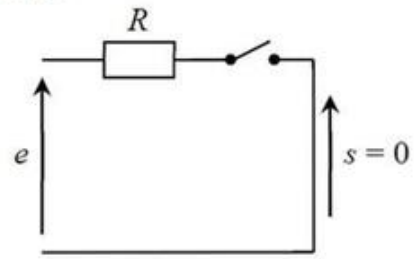
La pulsation $201\omega_0$ est très éloignée de la résonance, donc le second terme est pratiquement éliminé. Pour le terme à ω_0, $G_{\text{dB}} = 20\log\frac{1}{4} = -12\,\text{dB}$ et $\varphi = 0$ donc on obtient $\boxed{u_s(t) \approx \frac{B}{4}\cos(\omega_0 t)}$.

Exercice 7.9

1. À basse fréquence, l'inductance se comporte comme un fil, et le condensateur comme un interrupteur ouvert :



À haute fréquence, l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert, et le condensateur comme un fil :



Ce quadripôle est un filtre passe-bas.

⇨ *Méthode 7.1*

2. a) Pour établir la fonction de transfert, il suffit d'appliquer la règle du diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{RjC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$. C'est un filtre d'ordre 2.

⇨ *Méthode 7.2*

b) On a les équivalences suivantes entre la notation complexe et la notation réelle :

$j\omega \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{1}{j\omega} \leftrightarrow \int \mathrm{d}t$. On a $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$, soit $\underline{s} \times \left(1 + \dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = \underline{e}$. Cette expression devient en temporel : $\boxed{\dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{Q\omega_0}\dfrac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{d}t} + s(t) = e(t)}$.

Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation sans second membre. Ici tous les coefficients de l'équation différentielle sont positifs, les racines de l'équation caractéristique ont une partie réelle négative : les solutions sont des exponentielles convergentes quand $t \to \infty$.

3. $\boxed{\left|\underline{H}(\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}}$.

4. $\left|\underline{H}(\omega)\right|$ est maximal quand $\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$ est minimal, donc quand $\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \dfrac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}$ est minimal (car la fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante). Alors sa dérivée est nulle :

$2 \times \left(-2\dfrac{\omega}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2\dfrac{\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0$ et comme $\omega \neq 0$, on obtient $\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \dfrac{1}{2Q^2}$ soit finalement $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \dfrac{1}{2Q^2}$. La solution existe si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0$, soit $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$: alors le <u>maximum</u> de $\left|\underline{H}(j\omega)\right|$ se produit pour $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$. Ce phénomène s'appelle la <u>résonance.</u>

La solution n'existe pas si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} < 0$, soit $\boxed{Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$: alors $\left|\underline{H}(j\omega)\right|$ n'a <u>pas de maximum</u>.

5. Pour $\omega \ll \omega_0$, $\underline{H} \approx 1$ donc $G_{\text{dB}} = 0$, $\varphi = 0$.

Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = -jQ$ donc $G_{\text{dB}} = 20\log(Q)$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

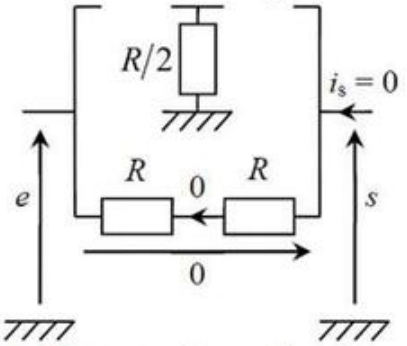
Pour $\omega \gg \omega_0$, $\underline{H} \approx -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$ donc $G_{\text{dB}} = 40\log(\omega_0) - 40\log(\omega)$, $\varphi = -\pi$.

On lit donc graphiquement la valeur de $\boxed{f_0 = 1\ \text{kHz}}$ lorsque $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

⇨ *Méthode 7.5*

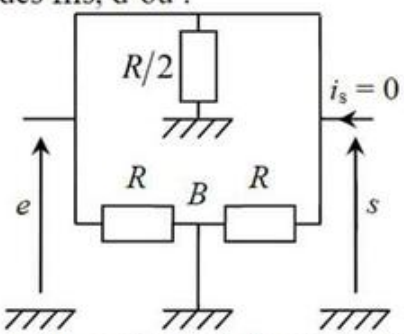
Exercice 7.10

1. En BF ($\omega \to 0$) les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Loi des mailles : $s - 0 - e = 0$ soit $s = e$.

En HF ($\omega \to \infty$) les condensateurs se comportent comme des fils, d'où :



L'entrée et la sortie sont directement reliées par le fil du haut, donc $s = e$.

Ce quadripôle laisse passer les signaux de basses fréquences et de hautes fréquences, et ne supprime donc qu'une bande de fréquences intermédiaires : c'est bien un filtre coupe-bande.

⇨ *Méthode 7.1*

2. On introduit comme intermédiaires de calcul les tensions u_A (aux bornes de $R/2$) et u_B (aux bornes de $2C$), qui sont égales aux potentiels des points A et B (car l'autre point est la masse). On applique trois fois la loi des nœuds, et on remplace chaque intensité par un rapport $\underline{u}/\underline{Z}$ ou un produit $\underline{Y}\underline{u}$. En A :

$$\sum \underline{i}_k = 0 \Leftrightarrow jC\omega(\underline{e} - \underline{u}_A) + jC\omega(\underline{s} - \underline{u}_A) - \frac{2\underline{u}_A}{R} = 0 \Leftrightarrow \underline{u}_A = \frac{jC\omega\underline{e} + jC\omega\underline{s}}{2jC\omega + \dfrac{2}{R}} \Leftrightarrow \underline{u}_A = \frac{jx\underline{e} + jx\underline{s}}{2jx + 2}.$$

En B : $$\frac{\underline{e} - \underline{u}_B}{R} + \frac{\underline{s} - \underline{u}_B}{R} - j2C\omega\underline{u}_B = 0 \Leftrightarrow \underline{u}_B = \frac{\dfrac{\underline{e}}{R} + \dfrac{\underline{s}}{R}}{\dfrac{2}{R} + j2C\omega} \Leftrightarrow \underline{u}_B = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2 + j2x}.$$

Enfin à la sortie : $$\frac{\underline{u}_B - \underline{s}}{R} + jC\omega(\underline{u}_A - \underline{s}) + 0 = 0 \Leftrightarrow \underline{s} = \frac{jC\omega\underline{u}_A + \dfrac{1}{R}\underline{u}_B}{jC\omega + \dfrac{1}{R}} \Leftrightarrow (jx+1)\underline{s} = jx\underline{u}_A + \underline{u}_B.$$

Les formules obtenues ici constituent la loi des nœuds en termes de potentiels, ou théorème de Millman.

Dans cette dernière égalité, on remplace $\underline{u}_A$ et $\underline{u}_B$ par les expressions trouvées avant :

$$(jx+1)\underline{s} = jx\frac{jx\underline{e} + jx\underline{s}}{2jx+2} + \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2 + j2x} \quad \Leftrightarrow \quad (2jx+2)(jx+1)\underline{s} = (1-x^2)\underline{e} + (1-x^2)\underline{s}$$

$\Leftrightarrow (1 + 4jx - x^2)\underline{s} = (1-x^2)\underline{e}$ d'où finalement $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1-x^2}{1+4jx-x^2}}$.

Il s'agit de la forme cherchée avec $\boxed{H_0 = 1}$ et $\boxed{Q = \dfrac{1}{4}}$.

3. On voit que le gain tend vers $-\infty$ en $x=1$, soit $f=f_0$, ce qui correspond au fait que la fonction de transfert s'annule (et dans ce cas, la phase n'est pas définie : on observe une discontinuité).
Par ailleurs, $\underline{H}$ tend vers 1 pour $x \to 0$ et pour $x \to \infty$, ce qui donne bien $G_{dB} \to 0$ et $\varphi \to 0$ (asymptotes horizontales).

⇨ *Méthode 7.5*

On veut éliminer la fréquence $f_0 = 50\,\text{Hz}$ avec $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}$ donc on doit prendre $\boxed{RC = \dfrac{1}{2\pi f_0} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{s}}$. On peut prendre par exemple $\boxed{R = 68\,\text{k}\Omega \text{ et } C = 47\,\text{nF}}$ (valeurs usuelles au laboratoire).

Exercice 7.11

1 à 3. Voir le programme ci-dessous.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

H0=3          #gain du filtre
f0=1e1        #frequence de coupure
fe=1e3        #frequence du signal d'entrée
E=2           #amplitude du signal d'entrée
nb_termes=100     #nombre de termes dans le spectre
t = np.linspace(0, 3/fe, 2000)      #liste du temps sur 3 périodes



def generation_coefficient(nombre_termes):  #génération des coefficients du carré
    coef=[]
    n=0
    while len(coef) < nombre_termes :
        coef.append(4*E/np.pi*1/(2*n+1))
        n=n+1
    return(coef)

def  entree(coef,temps):                    #génération du signal carré d'entrée
    e=[0]
    for n in range(len(coef)):
        e=e+coef[n]*np.sin(2*np.pi*fe*(2*n+1)*temps)
    return(e)

def filtre_passe_bas(coef,temps,H0,f0):     #génération du signal de sortie
    s=[0]
    for n in range(len(coef)):
        f=fe*(2*n+1)
        s=s+coef[n]*H0/(np.sqrt(1+(f/f0)**2))*np.sin(2*np.pi*f*temps-np.arctan(f/f0))

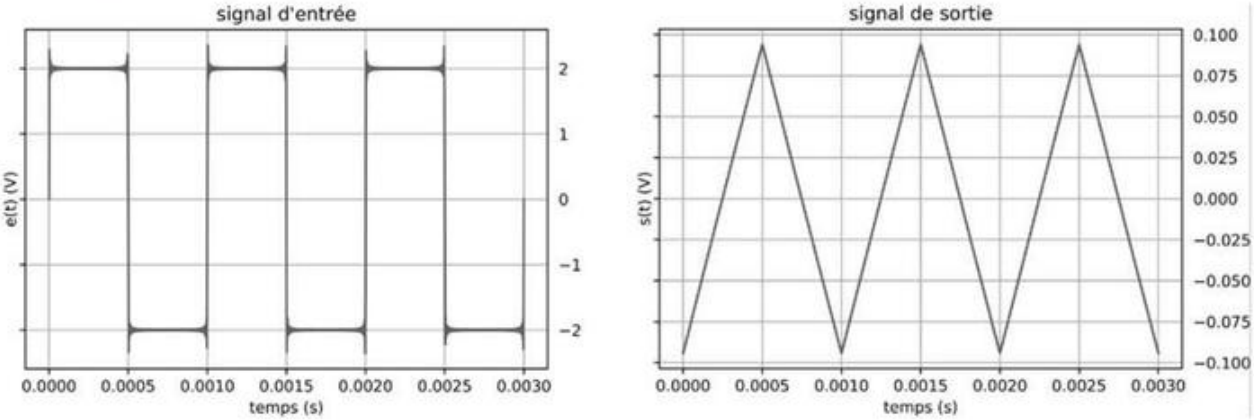
    return(s)
```

```
coef_carre=generation_coefficient(nb_termes)     #Liste des coefficients
carre=entree(coef_carre,t)                       #Liste du signal carré d'entrée
sortie_passe_bas=filtre_passe_bas(coef_carre,t,H0,f0)   #Liste du signal de sortie

plt.plot(t,carre,label="signal entrée")
plt.title("signal d'entrée")
plt.xlabel('temps (s)')
plt.tick_params(axis='y', labelleft='off', labelright='on')
plt.ylabel('e(t) (V)')
plt.grid()
plt.savefig("entree.pdf")
plt.show()

plt.plot(t,sortie_passe_bas,label="signal de sortie du passe bas")
plt.title("signal de sortie")
plt.xlabel('temps (s)')
plt.tick_params(axis='y', labelleft='off', labelright='on')
plt.ylabel('s(t) (V)')
plt.grid()
plt.savefig("sortie.pdf")
plt.show()
```

4.a) On observe les signaux suivants :



On note que le signal est relativement proche d'un signal carré. On pourra observer que si on le décrit avec moins de termes, 10 par exemple, la forme est alors un peu plus éloignée.
Le signal de sortie étant triangulaire, il s'agit de l'intégration du signal d'entrée.

b) On note que tous les éléments du signal carré sont dans la partie intégration du signal, car pour $f > 10 f_0$ alors $\underline{H} \approx \dfrac{H_0}{jx} = \dfrac{H_0\omega_0}{j\omega} = \dfrac{\underline{s}_i}{\underline{e}_i}$ pour tous les harmoniques de rang i du signal d'entrée (et donc de sortie, puisque le filtre est linéaire). On peut donc écrire $H_0\omega_0\underline{e}_i = j\omega\underline{s}_i$, soit $H_0\omega_0\, e_i(t) = \dfrac{\mathrm{d}\, s_i}{\mathrm{d}\, t}$. On somme tous les termes et l'on obtient $H_0\omega_0 \sum_i e_i(t) = \dfrac{\mathrm{d}\left(\sum_i s_i\right)}{\mathrm{d}\, t}$, soit $H_0\omega_0\, e(t) = \dfrac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t}$.

On effectue le calcul sur le premier intervalle par exemple $H_0\omega_0 E = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \underset{\text{(pente constante)}}{=} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \underset{\text{(triangle)}}{=} \dfrac{2S_{\max}}{T/2}$.

On en déduit $\boxed{S_{\max} = H_0\omega_0 E\dfrac{T}{4} = 94 \text{ mV}}$, valeur conforme à ce que donne la simulation.

Chapitre 8

Propagation d'un signal

UN SCIENTIFIQUE



Le génie anglais **Thomas Young** (1773-1829) est un esprit universel ; il parle une dizaine de langues, et contribue par exemple au déchiffrement des hiéroglyphes égyptiens. Il se passionne aussi pour la botanique et la philosophie, mais c'est en tant que médecin qu'il exerce. Sa célébrité lui vient pourtant de ses expériences en optique, sur les interférences lumineuses, qui font apparaître la nature ondulatoire de la lumière.

Un peu d'histoire

La propagation du son est étudiée dès l'Antiquité mais sans en comprendre la nature ondulatoire. Robert Boyle (1627-1691) montre que le son ne se propage pas dans le vide et, peu après, Mersenne et Gassendi essayent d'en estimer la vitesse de propagation dans l'air.

En 1690, Christiaan Huygens propose une théorie ondulatoire de la lumière et entre en conflit avec Newton qui penche pour une nature corpusculaire. Au tout début du XIX^{e} siècle, Thomas Young reprend l'idée du savant hollandais qu'il justifie par des expériences de diffraction en obtenant ce qu'il nomme des interférences. Cette approche est peu après confortée par les travaux d'Augustin Fresnel puis, en 1850, par l'expérience de Léon Foucault sur le calcul de la vitesse de la lumière. La théorie des ondes électromagnétiques, énoncée en 1873 par James Clerk Maxwell, confirme le caractère ondulatoire de la lumière.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les différents types d'ondes
- La forme mathématique d'une onde progressive (cas général et cas sinusoïdal)
- La notion de milieu dispersif, et des exemples de propagation dispersive ou non
- La notion de spectre et des ordres de grandeur de fréquences
- Le phénomène d'interférences
- La notion de différence de chemin optique entre deux ondes, et sa relation avec le déphasage

Ce qu'il faut savoir faire

- Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive
- Établir et utiliser la relation entre fréquence, longueur d'onde et célérité pour une onde progressive sinusoïdale
- Déterminer l'amplitude résultant d'une interférence entre deux ondes
- Déterminer la différence de chemin optique entre deux ondes lumineuses

■■ Résumé de cours

■ Propagation d'un signal

❑ Signaux et ondes

Un **signal** est une fonction $s(t)$ décrivant les variations d'une grandeur physique au cours du temps. Un signal existant en tout point M d'une région de l'espace, et comportant des oscillations au cours du temps, constitue une **onde**, décrite par une fonction $s(M,t)$.

– Un signal acoustique est constitué de variations de la pression d'un milieu matériel, de sa masse volumique et de la vitesse des particules.

– Un signal électrique est constitué de variations de l'intensité et de la tension dans un circuit.

– Un signal électromagnétique est constitué de variations des champs électrique et magnétique dans le milieu de propagation (qui peut être le vide) ; cela inclut la lumière, les infrarouges, les ultraviolets, les rayons X et gamma, les ondes hertziennes (ondes radio, micro-ondes…).

❑ Onde progressive unidimensionnelle

Une onde **unidimensionnelle** dépend d'une seule coordonnée spatiale le long d'un axe, souvent (Ox). Il s'agit, soit d'une onde dans un milieu à une dimension (onde électrique dans un câble, onde mécanique sur une corde…), soit d'un type particulier d'onde, l'**onde plane**, dans un milieu à deux ou trois dimensions.

Une **onde** (plane) **progressive** (OP) est la propagation d'un signal dans une certaine direction de l'espace, avec une certaine vitesse de propagation dont la norme c est appelée **célérité**.

Une OP se propageant sans déformation selon l'axe (Ox) peut s'écrire sous la forme générale :

$s(M,t) = F(t - x/c)$ ou $s(M,t) = F(x - ct)$ si elle se propage dans le sens des x croissants ;

$s(M,t) = G(t + x/c)$ ou $s(M,t) = G(x + ct)$ si elle se propage dans le sens des x décroissants.

En un point M d'abscisse x, le signal prend les mêmes valeurs qu'à l'abscisse 0 mais avec un **retard** (algébrique) de x/c dans le premier cas, ou une **avance** de x/c dans le second cas.

⇨ Méthode 8.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

■ Onde progressive sinusoïdale (ou monochromatique)

❑ Forme mathématique

Une onde (plane) progressive sinusoïdale (ou harmonique) est de la forme :

$s(M,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ si elle se propage dans le sens des x croissants ;

$s(M,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi)$ si elle se propage dans le sens des x décroissants.

C'est un cas particulier de la forme générale indiquée précédemment, à condition que la **pulsation temporelle** ω et la **pulsation spatiale** k vérifient : $\boxed{\omega = kc}$ (c étant plutôt appelée ici **vitesse de phase**).

On appelle **vecteur d'onde** le vecteur $\vec{k} = k\vec{e_x}$ (premier cas) ou $\vec{k} = -k\vec{e_x}$ (second cas).

❑ Double périodicité

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité, temporelle et spatiale :

– la **période temporelle** $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ est l'intervalle de temps minimal séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné ;

– la période spatiale ou **longueur d'onde** $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ est, à un instant donné, la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même.

Ces deux périodes vérifient la relation $\boxed{\lambda = cT}$ qui montre que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde en une période. Autre expression : $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$ où f est la fréquence temporelle.

❑ Déphasage

En un point d'abscisse x, le terme $\pm kx$ est le **déphasage** entre l'onde en ce point et l'onde au point d'abscisse 0 (où se trouve par exemple la source).

Entre deux point d'abscisses x_1 et x_2, le déphasage est $\pm k(x_2 - x_1)$.

■ Onde progressive quelconque

❑ Spectre

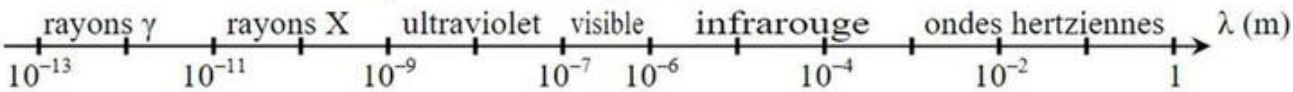
Une onde progressive quelconque peut être considérée comme une somme d'ondes progressives sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes : elles constituent le **spectre** de l'onde.

❑ Cas des ondes électromagnétiques

– La lumière visible correspond aux ondes électromagnétiques dans l'intervalle de fréquences $4 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ environ, soit $800\,\text{nm} > \lambda > 400\,\text{nm}$ environ dans le vide.

Les différents types de sources ont des spectres variés (voir chapitre **1**).

– Les autres domaines du spectre électromagnétique sont les suivants :



❑ Cas des ondes acoustiques

– Les sons audibles sont des ondes acoustiques dans l'intervalle $20\,\text{Hz} < f < 20\,\text{kHz}$ environ. La fréquence correspond à la hauteur du son (grave pour f faible, aigu pour f élevée).

– Une note de musique est généralement une superposition de signaux appelés **harmoniques**, dont les fréquences sont multiples de la fréquence **fondamentale** définissant cette note.

– Les ultrasons correspondent à $f > 20\,\text{kHz}$, les infrasons à $f < 20\,\text{Hz}$.

❑ Dispersion

La propagation d'une onde est **dispersive** si la célérité varie en fonction de la fréquence : cela dépend du milieu dans lequel l'onde se propage (on distingue des **milieux dispersifs** ou non).

Lorsqu'une onde non monochromatique se propage dans un milieu dispersif, elle se déforme.

Exemples de propagation dispersive ou non

– La propagation de la lumière dans la plupart des milieux transparents est dispersive, l'indice de réfraction dépendant de la longueur d'onde (d'où la séparation des couleurs par un prisme). Mais la dispersion est négligeable dans l'air ou dans l'eau. Le vide est un milieu non dispersif.

– La propagation des vagues à la surface de l'eau est fortement dispersive.

– La propagation de l'onde de déformation sur une corde, d'une onde acoustique dans un fluide, d'une onde électrique dans un câble coaxial, peut être considérée comme non dispersive en première approximation.

❑ Diffraction

Lorsqu'une onde traverse une ouverture de largeur a, elle ressort en divergeant : c'est le phénomène de **diffraction**. La zone où l'amplitude diffractée est importante est un secteur de demi-angle θ tel que : $\sin\theta \approx \frac{\lambda}{a}$. Le phénomène n'est donc pas perceptible pour une ouverture large, telle que $a \gg \lambda$.

Si l'onde n'est pas monochromatique, ce phénomène peut conduire à séparer les couleurs.

■ Interférences entre deux ondes

❑ Phénomène d'interférences

Lorsque deux ondes progressives sinusoïdales, de célérité c et *de même fréquence* f (donc de même pulsation $\omega = 2\pi f$) se propagent dans une région de l'espace, il existe en tout point M une différence δ entre les chemins parcourus par les deux ondes, d'où un décalage temporel τ et un déphasage φ proportionnels à δ : $\tau = \frac{\delta}{c}$ et $\varphi = k\delta = kc\tau = \omega\tau$.

Les fonctions correspondant aux deux ondes s'additionnent. On obtient ainsi le phénomène d'**interférences** : l'onde résultante au point M est encore une onde sinusoïdale, dont l'amplitude dépend du déphasage φ entre les deux ondes initiales en ce point. En particulier :

– en un point où les deux ondes arrivent **en phase** ($\varphi = 2m\pi$ avec m entier), l'amplitude résultante est *maximale*, les interférences sont **constructives** ;

– en un point où les deux ondes arrivent **en opposition de phase** ($\varphi = (2m+1)\pi$ avec m entier), l'amplitude résultante est *minimale* (et même nulle si ces deux ondes ont la même amplitude), les interférences sont **destructives**.

⇨ **Méthode 8.2. Déterminer l'amplitude résultant des interférences entre deux ondes**

❑ Formule de Fresnel pour des interférences lumineuses

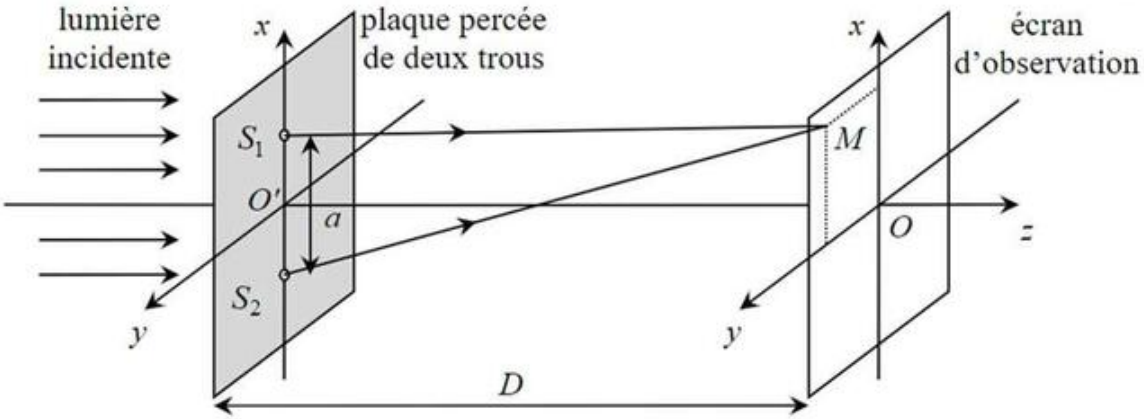
Dans le cas de la lumière, les détecteurs (œil, capteur numérique…) sont sensibles à l'**intensité** de l'onde, qui est de la forme $I(M) = KA^2$ pour une onde sinusoïdale.

Lors des interférences entre deux ondes d'intensités I_1 et I_2, on observe sur un écran une **figure d'interférences** formée de **franges** sombres ou brillantes. L'intensité en un point M de l'écran est donnée par la **formule de Fresnel** : $\boxed{I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi(M)}$.

Si la lumière change de milieu sur son parcours, le calcul de la différence de chemin optique δ fait intervenir les indices des milieux traversés (mais pour l'air, on prend généralement $n \approx 1$).

Exemple d'interférences lumineuses : trous de Young

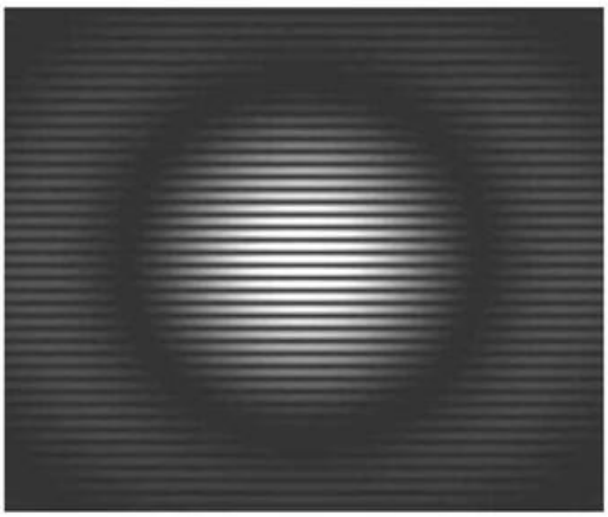
Un faisceau de lumière éclaire une plaque percée de deux trous : ils diffractent la lumière et se comportent comme deux sources ponctuelles. On observe sur un écran parallèle à la plaque.



La différence de chemin optique entre les deux rayons arrivant en un point $M(x,y)$ de l'écran est $\delta = S_2M - S_1M = \dfrac{ax}{D}$ pour $a \ll D$, $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$. Leur déphasage est $\varphi = k\delta = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda}$.

⇨ **Méthode 8.3. Calculer la différence de chemin optique pour les trous de Young**

On observe sur l'écran une figure d'interférences formée de franges rectilignes équidistantes, orthogonales à la direction joignant les deux trous (le tout à l'intérieur d'une tache centrale circulaire entourée d'anneaux, ce qui correspond à la diffraction par chaque trou).



■ Comment étudier une onde progressive ?

❑ Méthode 8.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

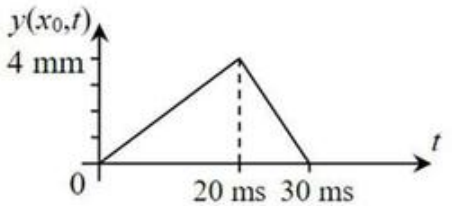
Supposons qu'on connaisse l'évolution temporelle d'un signal en un point donné, ainsi que la célérité de l'onde considérée.
– On peut en déduire l'évolution temporelle du signal en un autre point où passe l'onde, en déterminant simplement le retard entre les deux points.
– On peut également en déduire la forme globale du signal, sur l'ensemble du milieu considéré, à un instant donné. Pour cela, on repère les abscisses où apparaissent à cet instant certaines valeurs particulières du signal ; l'allure de la courbe est alors analogue à la précédente (variation temporelle), mais à l'envers.

Inversement, si on connaît à un instant donné la forme du signal dans l'espace, on peut en déduire sa forme à un autre instant, ou l'évolution temporelle en un point donné.

⇨ Exercices 8.1, 8.2

Considérons une onde de déformation se propageant le long d'une corde, selon l'axe (Ox), dans le sens des x croissants à partir du point d'abscisse 0, à une célérité $c = 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

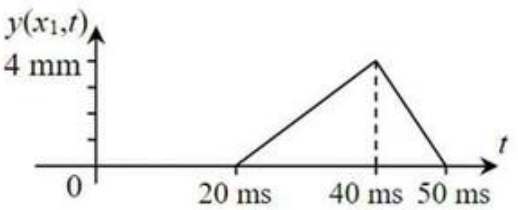
La variation de l'élongation y en $x_0 = 0$ au cours du temps est représentée sur le schéma ci-contre ; elle est nulle pour $t < 0$ et pour $t > 30$ ms.



On cherche à en déduire, d'une part la variation temporelle de l'élongation en $x_1 = 1{,}0$ m, d'autre part l'aspect de la corde aux instants $t_1 = 20$ ms, $t_2 = 40$ ms et $t_3 = 60$ ms.

– L'onde progressive est une fonction de la forme $y(M,t) = f(t - x/c)$. Tout se qui se passe en x_0 se reproduit en x quelconque avec un retard $(x - x_0)/c$.

À l'abscisse x_1, le retard de l'onde par rapport au point d'abscisse 0 vaut $x_1/c = 20$ ms. L'évolution temporelle de y en ce point reproduit donc celle à l'abscisse $x_0 = 0$ avec un retard de 20 ms.



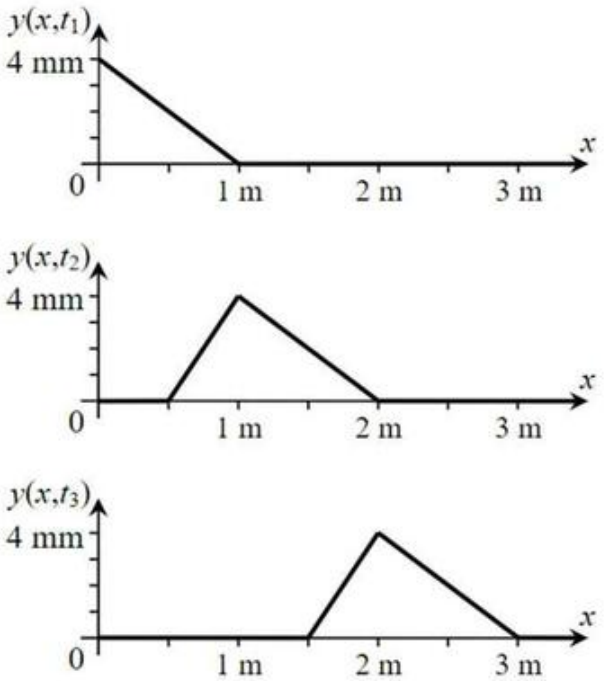
– Déterminons maintenant l'aspect global de la corde à différents instants.

Tout se qui se passe en x_0 à instant t_0 se reproduit ensuite, à un instant $t > t_0$, à l'abscisse $x_0 + c(t - t_0)$.

Le « front » du signal, c'est-à-dire le point où une élongation non nulle apparaît à cet instant, se trouve à l'abscisse ct_i, soit $ct_1 = 1{,}0$ m à t_1 puis $ct_2 = 2{,}0$ m et $ct_3 = 3{,}0$ m.

Le maximum d'élongation, qui se produit en 0 à l'instant $t_{\max 0} = t_1 = 20$ ms, se trouve à un instant ultérieur $t_i > t_{\max 0}$ à une abscisse $c(t_i - t_{\max 0})$, soit $c(t_2 - t_{\max 0}) = 1{,}0$ m à t_2 puis $c(t_3 - t_{\max 0}) = 2{,}0$ m à t_3.

Enfin la « queue » du signal, où se trouve la dernière élongation non nulle, n'apparaît sur la corde qu'à partir de l'instant $t_{q0} = 30$ ms où l'excitation se termine. Elle se trouve à un instant ultérieur $t_i > t_{q0}$ à une abscisse $c(t_i - t_{q0})$, soit à l'abscisse $c(t_2 - t_{q0}) = 0{,}5$ m à t_2 puis $c(t_3 - t_{q0}) = 1{,}5$ m à t_3.



– On peut finalement vérifier la cohérence entre le premier graphe et les deux autres :

en $x_0 = 0$, à l'instant $t_1 = 20$ ms l'ordonnée est à son maximum de 4 mm, puis à $t_2 = 40$ ms et à $t_3 = 70$ ms elle est redevenue nulle ;

le point d'abscisse $x_1 = 1{,}0$ m a bien une ordonnée nulle (mais qui va juste commencer à augmenter) à $t_1 = 20$ ms, une ordonnée de 4 mm à $t_2 = 40$ ms, et de nouveau nulle à $t_3 = 60$ ms.

❑ Méthode 8.2. Déterminer l'amplitude résultant des interférences entre deux ondes

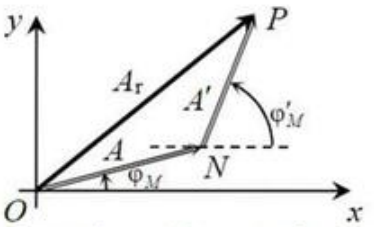
Lorsque deux ondes déphasées s'additionnent au même point, l'amplitude de l'onde résultante peut être obtenue avec une construction de Fresnel, dans laquelle une fonction sinusoïdale $A\cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par un vecteur de norme A et faisant un angle φ avec l'axe (Ox). L'addition des deux ondes correspond à l'addition graphique des deux vecteurs, et on peut alors déterminer l'amplitude de l'onde résultante par calcul géométrique.

⇨ Exercice 8.10

Supposons que les deux ondes $s(M,t) = A\cos(\omega t + \varphi_M)$ et $s'(M,t) = A'\cos(\omega t + \varphi'_M)$, de même pulsation ω, interfèrent en un point M ; leurs phases φ_M et φ'_M au point M dépendent de la position de celui-ci et des phases de ces ondes à la source.

– Calcul général

Dans le plan de Fresnel, on représente les deux ondes par deux vecteurs mis bout à bout. La norme A_r de leur somme, c'est-à-dire l'amplitude de l'onde résultante, correspond à la longueur du côté OP de ce triangle.

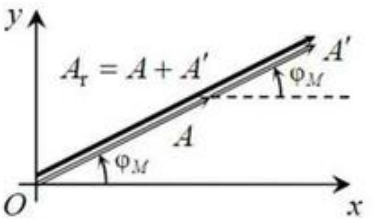


Elle s'obtient avec le théorème d'Al-Kashi (ou formule du cosinus) : $A_r^2 = A^2 + A'^2 - 2AA'\cos\widehat{ONP}$. L'angle $\widehat{ONP}$ vaut $(\pi - \varphi'_M + \varphi_M)$, donc $\cos\widehat{ONP} = -\cos(\varphi'_M - \varphi_M)$ soit $\boxed{A_r = \sqrt{A^2 + A'^2 + 2AA'\cos\varphi}}$ où $\varphi = \varphi'_M - \varphi_M$ est le déphasage entre les deux ondes incidentes au point M.

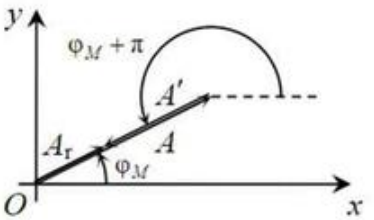
– Cas particuliers

Si $\varphi'_M = \varphi_M$, soit $\varphi = 0$ (ondes *en phase* au point M) : l'amplitude de l'onde résultante est maximale et vaut $A_r = A + A'$.

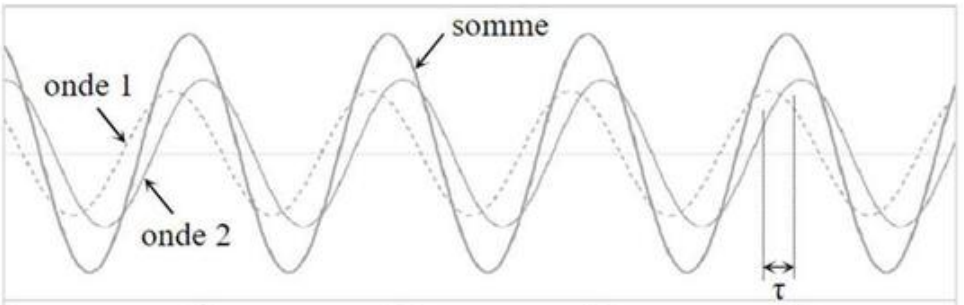
Il en va de même si $\varphi = 2m\pi$ avec m entier quelconque.



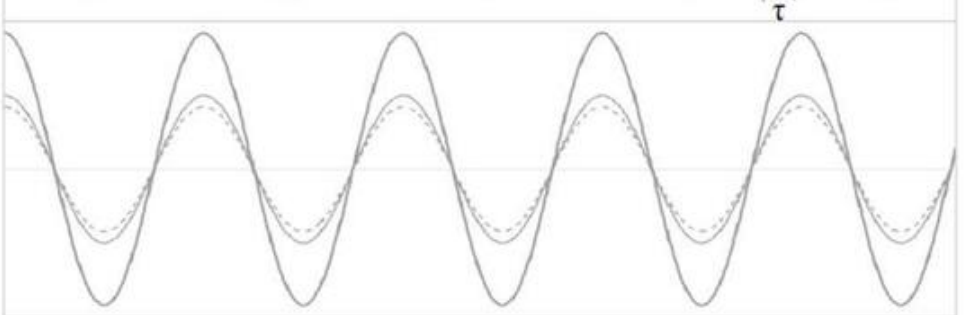
Si $\varphi'_M = \varphi_M \pm \pi$, soit $\varphi = \pm\pi$ (ondes *en opposition de phase* au point M) : l'amplitude de l'onde résultante est minimale et vaut $A_r = |A - A'|$. Dans le cas où les deux ondes incidentes ont la même amplitude A, l'onde résultante est nulle en M.



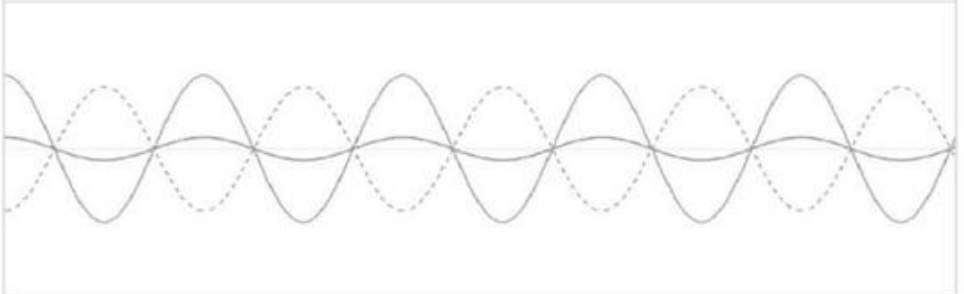
Ondes avec déphasage quelconque



Ondes en phase : amplitude résultante maximale



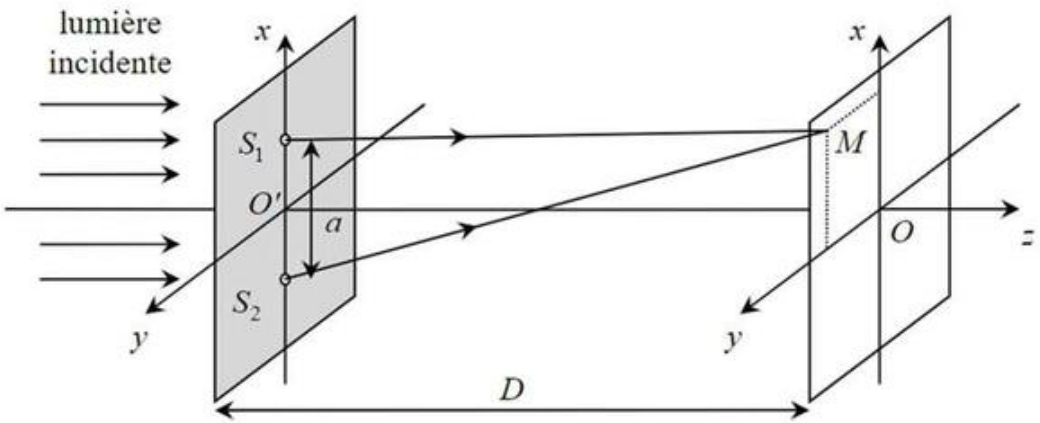
Ondes en opposition de phase : amplitude résultante minimale



❑ Méthode 8.3. Calculer la différence de chemin optique pour les trous de Young

Dans l'air d'indice $n \approx 1$, la différence de chemin optique s'identifie à la différence de distance parcourue : il s'agit donc d'un calcul géométrique avec les coordonnées des points. Pour obtenir une expression approchée simple, sur de petites distances, on utilise la formule d'approximation : $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $\varepsilon \ll 1$.

⇨ Exercice 8.10



On cherche à déterminer $\delta = S_2M - S_1M$ en supposant que la lumière incidente arrive sous incidence normale (orthogonalement à la plaque trouée).
On utilise la formule géométrique de la distance entre deux points dans l'espace (trois coordonnées cartésiennes) : $S_1M = \sqrt{(x_M - x_{S_1})^2 + (y_M - y_{S_1})^2 + (z_M - z_{S_1})^2}$ soit avec les notations du schéma : $S_1M = \sqrt{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$ et de même $S_2M = \sqrt{\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$.

Donc $\delta = \sqrt{\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$. Cette formule ne permet pas de déterminer simplement la géométrie des franges d'interférences.
Mais celles-ci ne sont observables qu'au voisinage de l'axe (Oz), on peut donc faire les approximations $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$. Par ailleurs, on prend aussi toujours $a \ll D$ pour une bonne visibilité du phénomène (franges pas trop serrées). On fait alors apparaître des expressions de la forme $\sqrt{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon \ll 1$: $\delta = D\sqrt{1 + \left(\dfrac{x + a/2}{D}\right)^2 + \dfrac{y^2}{D^2}} - D\sqrt{1 + \left(\dfrac{x - a/2}{D}\right)^2 + \dfrac{y^2}{D^2}}$.

Et on applique l'approximation $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\delta \approx D\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\frac{y^2}{2D^2}-1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2-\frac{y^2}{2D^2}\right]$$

$$= D\left[1+\frac{x^2+ax+a^2/4}{2D^2}+\frac{y^2}{2D^2}-1-\frac{x^2-ax+a^2/4}{2D^2}-\frac{y^2}{2D^2}\right] \text{ soit } \boxed{\delta \approx \frac{ax}{D}} \text{ après simplification.}$$

Si la direction de la lumière incidente n'est pas orthogonale à la plaque, mais fait un angle θ avec l'axe (Oz), il faut ajouter un second terme, qui est la différence de distance parcourue entre la source et chacun des deux trous, et qui vaut $a\sin\theta$.

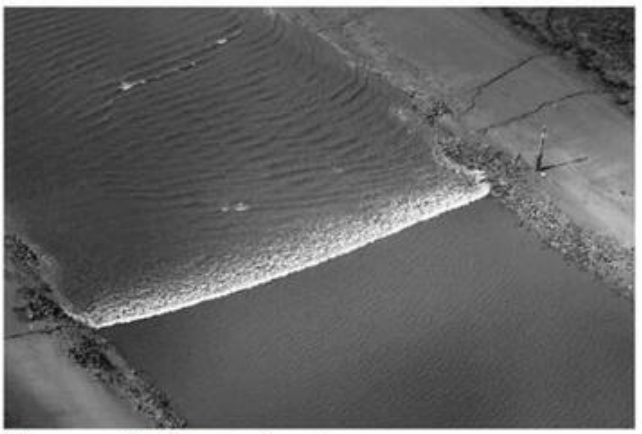
Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Une onde est une fonction du temps et de l'espace.	☐	☐
2.	Une onde progressive possède une célérité qui dépend du milieu de propagation.	☐	☐
3.	Dans une onde plane progressive sinusoïdale, tous les points de l'espace oscillent avec la même amplitude.	☐	☐
4.	La période temporelle et la période spatiale d'une onde sinusoïdale sont deux grandeurs indépendantes l'une de l'autre.	☐	☐
5.	Les rayons X sont des ondes électromagnétiques.	☐	☐
6.	Un milieu dispersif est un milieu qui fait varier la direction d'une onde.	☐	☐
7.	Une onde progressive quelconque peut être considérée comme une somme d'ondes sinusoïdales de fréquences différentes.	☐	☐
8.	Le déphasage entre deux ondes dépend du point considéré.	☐	☐
9.	Le phénomène d'interférences se produit seulement entre deux ondes de même direction.	☐	☐
10.	Le phénomène d'interférences peut se produire entre deux ondes de fréquences différentes.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Ondes de forme quelconque

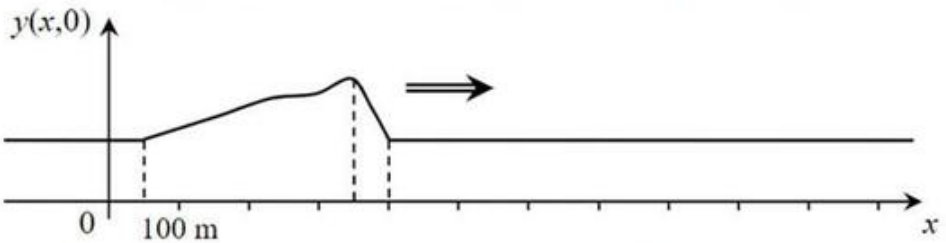
❑ Exercice 8.1. Mascaret



Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoquée par une interaction entre son écoulement et la marée montante.

On considère ici un mascaret se déplaçant à la vitesse $c = 20\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe (Ox) dans la direction et le sens de sa propagation.

À un instant $t_0 = 0$, le profil de niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :

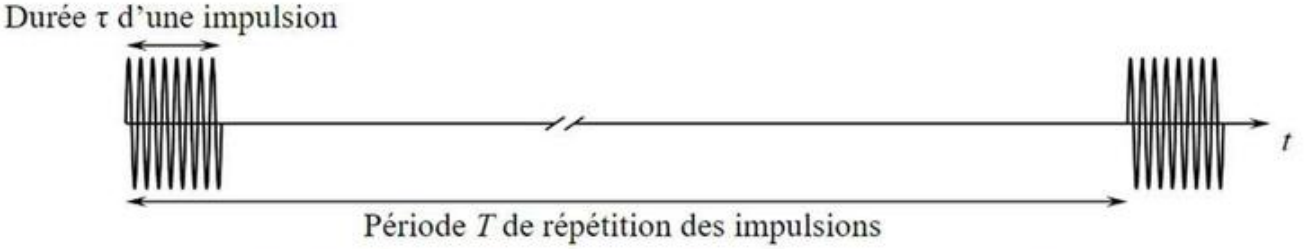


1. Faire un schéma du profil de niveau du fleuve à $t = 1{,}0$ minute, en supposant que l'onde se propage sans déformation.
2. Toto attend avec sa planche de surf à l'abscisse $x_T = 2{,}0$ km. À quel instant va-t-il recevoir la vague ?
3. Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse $x_d = 1{,}4$ km. Dessiner l'allure des variations $y(x,t)$ en fonction de t.
4. En réalité, l'onde se déforme petit à petit car la vitesse de propagation en un point augmente avec la hauteur d'eau sous ce point. Comment évolue alors le profil de la vague ?

❑ Exercice 8.2. Mesure de distance et de vitesse par radar* *

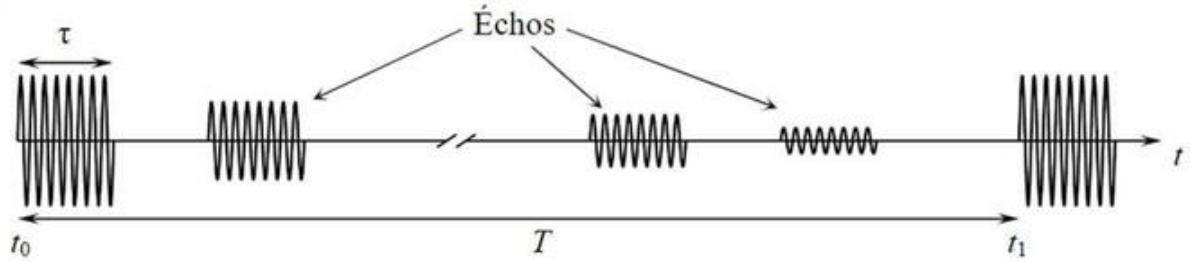
Un radar (mot provenant de l'acronyme anglais pour *radio detection and ranging*) est un appareil utilisant des ondes radio (ondes électromagnétiques de fréquences comprises entre 3 MHz et 110 GHz) pour détecter la présence d'objets mobiles, et pouvant également déterminer leur distance et leur vitesse. On présente ici le principe de ces deux mesures.

Le radar comporte une antenne qui émet, avec une période T, des impulsions, c'est-à-dire des signaux sinusoïdaux de durée limitée τ. Deux de ces impulsions successives sont représentées sur le schéma ci-dessous (attention, il y a une rupture d'échelle due au fait que les durées sont très différentes).



Ces impulsions sont envoyées dans toutes les directions de l'espace. Lorsque l'une d'elles rencontre un objet réfléchissant, elle est renvoyée vers l'antenne, qui devient réceptrice entre deux impulsions (mais elle ne peut pas détecter de signal reçu tant qu'elle émet une impulsion). Cela fait alors apparaître un point lumineux sur un écran, indiquant la direction de la cible, et l'analyse du signal reçu permet d'effectuer les mesures souhaitées.

1. Un radar émet des impulsions de fréquence $f = 2{,}90$ GHz et de durée $\tau = 1{,}0$ µs, avec une période $T = 100{,}0$ µs. L'enregistrement ci-dessous montre deux impulsions émises par le radar, commençant aux instants $t_0 = 0{,}0$ µs et $t_1 = 100{,}0$ µs, et trois échos renvoyés par des objets, commençant aux instants $t_A = 3{,}0$ µs, $t_B = 80{,}0$ µs et $t_C = 90{,}0$ µs, et provenant de la réflexion de l'impulsion émise à t_0.



a) Calculer la longueur d'onde λ des ondes émises pendant une impulsion, et le nombre N d'oscillations dans chaque impulsion. On prendra pour l'air la célérité $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Déterminer la distance à laquelle se trouvent les différents objets détectés, en supposant que les ondes se propagent à la même célérité que dans le vide. Comment expliquer la différence d'amplitude entre les impulsions initiales et les échos ?

c) Montrer qu'il existe une distance minimale en dessous de laquelle on ne peut pas détecter un objet, et calculer sa valeur numérique.

2. Pour déterminer la vitesse, une première possibilité consiste à utiliser l'effet Doppler : si par exemple l'objet s'éloigne du radar à une vitesse v, l'onde réfléchie aura une fréquence légèrement inférieure à f : $f' = f\left(1 - \dfrac{v}{c}\right)$.

Déterminer la variation relative de fréquence pour un avion s'éloignant à la vitesse $v = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et conclure sur la précision de cette méthode.

3. On peut également comparer des échos successifs reçus du même objet, en mesurant simplement le décalage temporel entre ces échos. Calculer le décalage temporel entre les deux échos successifs reçus de l'avion ci-dessus, et commenter.

4. Enfin une autre méthode consiste à envoyer les impulsions toujours avec la même phase initiale, et à déterminer le déphasage entre deux échos successifs.

Déterminer ce déphasage φ, en fonction de la vitesse v dont s'éloigne l'objet selon la ligne de visée, de la durée T, et de la longueur d'onde λ.

Faire l'application numérique pour $v = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et commenter.

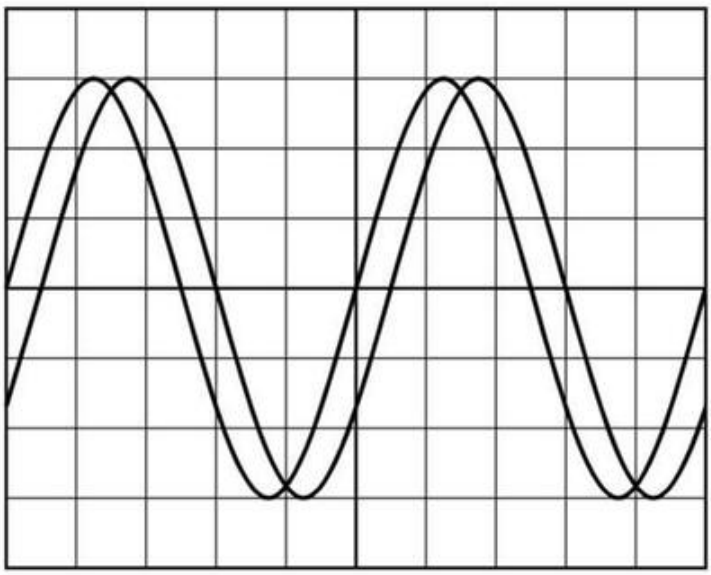
5. Les trois méthodes citées mesurent uniquement la composante de vitesse longitudinale (selon la ligne de visée). Comment détermine-t-on la composante v_2 de vitesse transversale, et finalement la norme de la vitesse de l'objet ?

■ Ondes progressives sinusoïdales

❑ Exercice 8.3. Mesure de la célérité du son

Un haut-parleur est mis en vibration par un générateur de tension sinusoïdale fournissant une tension $u(t) = U_m \cos(2\pi f t)$, de fréquence f = 1500 Hz. Il émet ainsi émet une note pure, constituée d'une onde acoustique sinusoïdale de même fréquence, en phase avec la tension $u(t)$ et se propageant avec une célérité c. Un microphone est placé à une distance d du haut-parleur, et convertit le signal sonore reçu en une tension électrique $u'(t)$ en phase avec ce signal sonore. Sur un oscilloscope, on visualise simultanément les deux tensions $u(t)$ et $u'(t)$. On règle l'amplification du microphone et les échelles de l'oscilloscope de manière à avoir la même amplitude pour les deux courbes.

1. Pour une certaine position du microphone, l'écran a l'allure ci-dessous. Montrer qu'il est possible de faire coïncider les deux courbes en modifiant la distance d.



2. En augmentant progressivement d, on trouve cette coïncidence pour deux valeurs successives d_1 et d_2. Montrer qu'on peut en déduire la célérité du son. Faire l'application numérique pour $d_1 = 35$ cm et $d_2 = 57$ cm.

❑ Exercice 8.4. Corde excitée de façon sinusoïdale

L'extrémité S d'une corde élastique est reliée à un vibreur qui lui impose un mouvement oscillatoire vertical, sinusoïdal, de fréquence f = 100 Hz et d'amplitude Y_m. Chaque point de la corde est repéré par son abscisse x et son élongation verticale y dans le repère $(Oxyz)$, O désignant la position d'équilibre de S. Le mouvement de S débute à l'instant $t = 0$. Un dispositif amortisseur placé à l'autre extrémité de la corde empêche la réflexion de l'onde issue de S.

1. À l'instant $t = 0$, S passe par sa position d'équilibre avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ verticale ascendante de norme $v_0 = 2{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Donner l'équation horaire du mouvement de S, notée $y_S(t)$, en précisant les valeurs numériques de tous les paramètres.

2. La plus petite distance entre deux points vibrant en opposition de phase étant $d = 6{,}0$ cm, en déduire la longueur d'onde λ et la célérité c des ondes le long de la corde.

3. On considère maintenant un point M de la corde, d'abscisse $x_M = 21$ cm.

a) Quelle est son équation horaire $y_M(t)$? Calculer la valeur numérique de son retard par rapport à S.

b) Comparer les mouvements des points S et M.

c) Calculer les élongations des points S et M à l'instant de date $t_1 = 40$ ms.

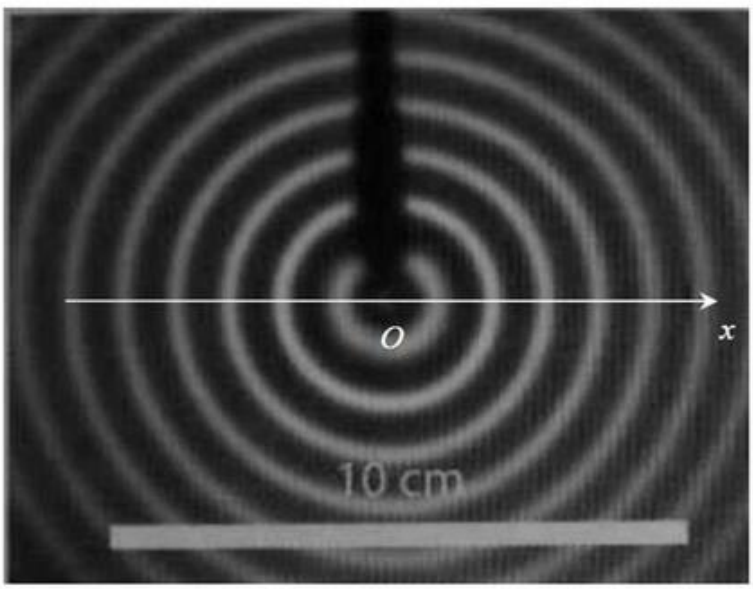
4. On étudie maintenant la corde globalement à l'instant $t_1 = 40$ ms.

a) Déterminer la fonction $y_{t_1}(x)$ décrivant l'élongation le long de la corde à cet instant. Quelle est sa période spatiale ?

b) Représenter précisément l'aspect de la corde à cet instant.

❑ Exercice 8.5. Vagues à la surface de l'eau

À la surface d'une cuve à ondes, un petit vibreur, oscillant à la fréquence $f = 20$ Hz, crée une onde circulaire. À un instant choisi comme origine ($t = 0$) on a pris la photo suivante.



1. Déterminer la longueur d'onde, et en déduire la célérité de cette onde à la surface de l'eau.

2. Quelle serait l'allure de la photo aux instants $t_1 = 100$ ms et $t_2 = 125$ ms ?

3. En supposant que cette onde est sinusoïdale, donner l'expression de la hauteur d'eau pour les points de l'axe (Ox), soit $z(x,t)$, pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

4. En réalité l'amplitude Z_m de l'onde ne reste pas constante lors de sa propagation : elle diminue lorsqu'on s'éloigne du point origine O, car son énergie est répartie sur un domaine de plus en plus grand. Sachant que la densité d'énergie transportée par l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude, proposer une expression de Z_m en un point M en fonction de $r = OM$ s'il n'y a aucune perte d'énergie, et modifier les expressions de la question 3.

❑ Exercice 8.6. Ondes électromagnétiques

Les antennes qui émettent des ondes électromagnétiques dans l'espace, ou qui les reçoivent, doivent avoir une longueur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des ondes émises : on choisit généralement un sous-multiple comme $\lambda/4$, $\lambda/8$ …

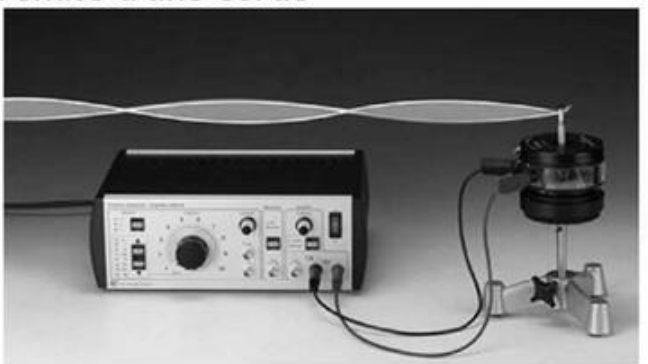
1. Pour transmettre la radio, on pourrait envisager d'émettre des signaux électromagnétiques ayant les mêmes fréquences que les sons audibles (audiofréquences), entre 20 Hz et 20 kHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air (assimilable au vide) de telles ondes électromagnétiques, et montrer que la taille des antennes serait irréalisable.
2. On transforme alors ces signaux par un procédé appelé modulation de fréquence (FM), qui leur donne des fréquences beaucoup plus élevées, entre 87,5 MHz et 108 MHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air des ondes de radio FM, et en déduire l'ordre de grandeur de la taille des antennes nécessaires.
3. Voyez-vous une autre raison pour laquelle les stations de radio ne pourraient pas émettre dans le domaine des audiofréquences ?

Donnée : célérité des ondes électromagnétiques dans le vide $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

■ Interférences

❑ Exercice 8.7. Réflexion sur l'extrémité d'une corde*

Une corde AB a son extrémité B fixe et son extrémité A actionnée transversalement par un vibreur de fréquence $f = 100$ Hz.
La célérité des ondes transversales sur la corde est $c = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



1. L'onde progressive sinusoïdale se propage de A vers B, dans le sens des x croissants. Dans le repère $(Oxyz)$, d'origine O choisie en un point quelconque de la corde, l'équation horaire de O est $y_O(t) = a\cos\omega t$, a étant l'amplitude, supposée constante tout le long de la corde.

a) Donner l'équation horaire $y_M(t)$ d'un point M de la corde, d'abscisse x.

b) Déterminer la pulsation temporelle k et la longueur d'onde λ.

2. L'onde se réfléchit en B en subissant un déphasage φ. Pour simplifier, on prendra maintenant l'origine du repère en B.

a) Exprimer les élongations $y_{Bi}(t)$ due à l'onde incidente et $y_{Br}(t)$ due à l'onde réfléchie, et montrer que $\varphi = \pi$.

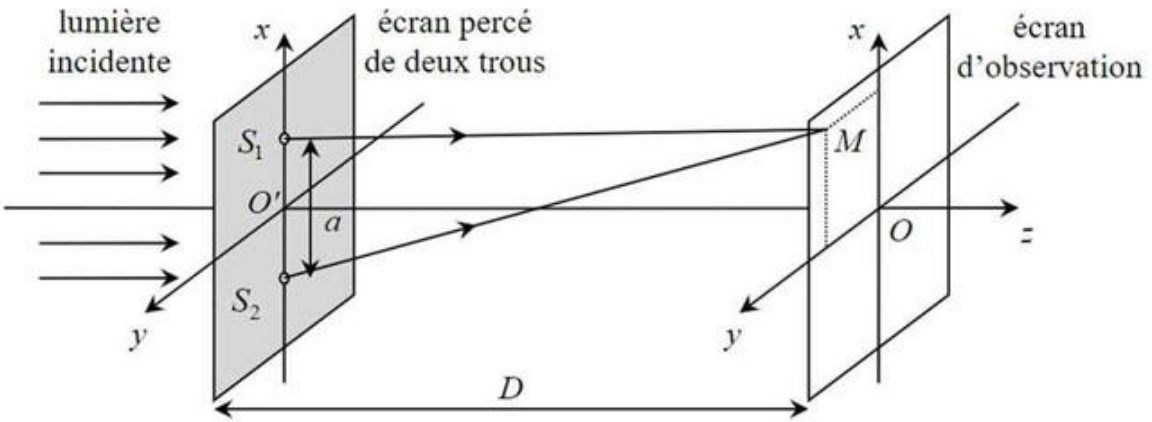
b) Pour un point M d'abscisse x (négative), exprimer $y_{Mi}(t)$ et $y_{Mr}(t)$, puis l'élongation $y_M(t)$ résultant de la superposition des deux ondes.

c) Montrer que certains points, appelés *nœuds de vibration*, n'oscillent pas du tout. Interpréter ce fait à l'aide de la notion de déphasage entre les ondes incidente et réfléchie.

❑ Exercice 8.8. Expérience de Young*

Le génial savant britannique Thomas YOUNG réalisa en 1803 une expérience clé pour établir la nature ondulatoire de la lumière : ayant séparé en deux un mince faisceau de lumière, il observa sur un écran des franges d'interférences résultant de la superposition des deux faisceaux obtenus. L'expérience a ensuite été perfectionnée en utilisant deux trous percés dans un écran.

Considérons les deux trous S_1 et S_2 percés dans un écran confondu avec le plan $(O'xy)$, et séparés d'une distance a selon la direction $(O'x)$. Ces deux trous étant éclairés par un faisceau de lumière parallèle à l'axe (Oz), ils se comportent comme deux sources lumineuses ponctuelles émettant en phase. La longueur d'onde de la lumière est λ dans l'air, assimilé au vide (indice 1). On observe la figure d'interférences sur un écran (Oxy).



On suppose $a \ll D$, $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$.

1. Montrer que la différence de chemin optique en $M(x, y)$ est $\delta = S_2M - S_1M = \dfrac{ax}{D}$.

2. Exprimer le déphasage φ entre les deux ondes arrivant en un point M de l'écran. Pour quelles valeurs de φ aura-t-on des interférences constructives ? destructives ?

3. On appelle *frange sombre* un ensemble de points ayant une même valeur de φ, donnant des interférences destructives. Donner l'équation cartésienne d'une frange sombre et en déduire sa nature géométrique précise.

4. On appelle *interfrange* la distance notée i entre deux franges sombres successives. Calculer i pour $D = 2{,}5$ m, $a = 2{,}5$ mm et $\lambda = 600$ nm.

5. Montrer que le déphasage en $x_a = 0{,}45$ mm vaut 270°. En déduire l'amplitude A_r de l'onde résultante, en notant A l'amplitude de chaque onde incidente. L'intensité lumineuse I étant proportionnelle au carré de l'amplitude, comparer I en x_a à l'intensité maximale I_{max} en $x = 0$.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 8.2. Question 1 : la longueur d'onde λ est liée à la fréquence f de ces ondes, et non à la période T de répétition des impulsions. Question 3 : pour pouvoir calculer les instants de réception de deux impulsions successives, définir très précisément des notations pour chaque instant intervenant dans les calculs (instant d'émission, instant d'arrivée sur l'objet et instant de retour pour chaque impulsion) ; la durée mise par l'onde pour atteindre l'objet dépend de la distance qu'il parcourt pendant cette même durée.
Exercice 8.3. Écrire la forme du signal au niveau du microphone, et en déduire pour quelles positions le déphasage est nul.
Exercice 8.8. Question 2 : le déphasage des deux ondes en un point est proportionnel à la différence de marche en ce point. Question 5 : pour déterminer l'amplitude résultante, on peut utiliser une construction de Fresnel.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux

4. Elles sont liées par la relation $\lambda = cT$.

6. C'est un milieu dans lequel les ondes de fréquences différentes ont des vitesses de propagation différentes.

9. Leur direction est généralement différente : voir par exemple le cas des trous de Young.

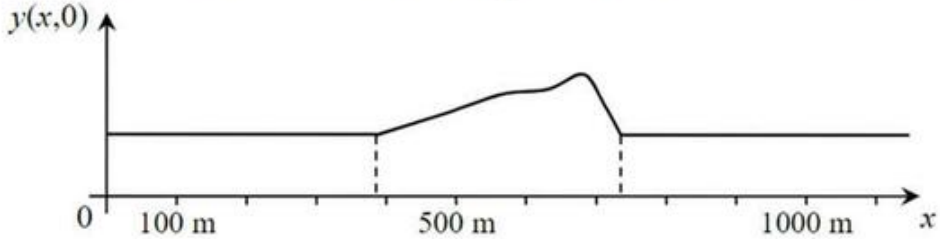
10. Seules des ondes de même fréquence donnent lieu au phénomène d'interférences.

❑ Les erreurs classiques

– Dans l'étude du profil d'une onde quelconque, non périodique, ne pas confondre les variations en fonction de x, à t donné (aspect global instantané du système) et les variations en fonction de t, à x donné (vibrations locales au cours du temps).
– Ne pas confondre les différentes grandeurs caractéristiques d'une onde sinusoïdales ni leurs dimensions (T est un temps, f et ω sont les inverses d'un temps, λ est une longueur, k est l'inverse d'une longueur).
– Les interférences ne se produisent qu'entre deux ondes sinusoïdales de même nature et *de même fréquence* : ne pas rechercher d'interférences hors de ces critères.

Exercice 8.1

1. À l'instant t, l'onde s'est déplacée d'une distance $ct = 330$ m, d'où le profil suivant, avec le front de l'onde aux alentours de $x = 730$ m et une queue autour de $x = 380$ m.



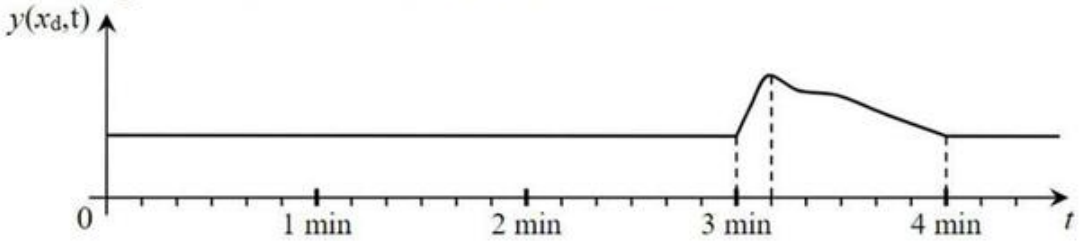
⇨ *Méthode 8.1*

2. Le front de l'onde, qui est en $x_f = 400$ m à l'instant $t_0 = 0$, atteint l'abscisse x_T avec un retard $\boxed{t = \dfrac{x_T - x_f}{c}}$. Application numérique : $t = \dfrac{2000 - 400}{20} \times 3{,}6$ soit $\boxed{t = 290 \text{ s} = 4 \text{ min } 50 \text{ s}}$.

Le facteur 3,6 correspond à la conversion des kilomètres par heure en mètres par seconde. D'autre part, la précision des données ne permet pas de donner plus de deux chiffres significatifs dans le résultat.

3. Déterminons les instants particuliers pour l'onde à l'abscisse x_d. Le front d'onde arrive avec un retard $t_f = \dfrac{x_d - x_f}{c} = 180 \text{ s} = 3 \text{ min}$. Le sommet, qui était en $x_s = 350$ m à l'instant $t_0 = 0$, arrive en $t_s = \dfrac{x_d - x_s}{c} = 170 \text{ s} = 3 \text{ min } 10 \text{ s}$. Enfin la queue de la vague, qui était en $x_q = 50$ m à l'instant $t_0 = 0$, arrive en $t_s = \dfrac{x_d - x_q}{c} = 240 \text{ s} = 4 \text{ min}$.

L'évolution temporelle à l'abscisse x_d a donc l'allure suivante :



L'onde apparaît toujours « à l'envers » quand on compare le graphe temporel à x donné et le graphe spatial à t donné : ici le point considéré monte d'abord très vite, lorsqu'il est atteint par le front de la vague, puis redescend lentement au fur et à mesure que le « dos » passe.

4. La vitesse est plus grande là où la hauteur d'eau est plus grande, donc vers le haut de la vague : ainsi le profil à l'avant va s'accentuer petit à petit jusqu'au déferlement de la vague :



Exercice 8.2

1. a) $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$. AN $\boxed{\lambda = 10{,}3 \text{ cm}}$.

L'oscillation à l'intérieur de chaque impulsion a une fréquence f, donc une période $T_{imp} = 1/f$, à ne pas confondre avec la période T séparant deux émissions d'impulsions. Le nombre d'oscillations pendant la durée τ d'une impulsion est donc : $\boxed{N = \frac{\tau}{T_{imp}} = \tau f}$. AN $\boxed{N = 2900}$.

b) Le temps que met l'onde pour faire un aller-retour entre le radar et un objet détecté à une distance d est : $t = \frac{2d}{c}$, d'où $\boxed{d = \frac{ct}{2}}$. AN $d_A = \frac{ct_A}{2} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \times 6 \cdot 10^{-6}}{2}$ soit $\boxed{d_A = 450 \text{ m}}$, et de même $\boxed{d_B = 12{,}0 \text{ km}}$ et $\boxed{d_C = 13{,}5 \text{ km}}$.

La diminution progressive des amplitudes des échos est due à l'absorption partielle des ondes par l'air : plus la distance parcourue dans l'air est grande, plus l'onde est atténuée.

c) Le radar ne peut pas détecter les échos tant qu'il émet, donc la détection de ne peut avoir lieu qu'à des instants $t > \tau = 2{,}0$ µs. Cela correspond à des distances d telles que $\boxed{d > \frac{c\tau}{2} = d_{min}}$.

AN $\boxed{d_{min} = 150 \text{ m}}$.

2. La variation relative de fréquence est $\boxed{\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = -\frac{v}{c}}$. AN $\boxed{\frac{\Delta f}{f} = -5 \cdot 10^{-7} = -0{,}00005\ \%}$

avec $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour pouvoir détecter l'effet Doppler, avec ce véhicule pourtant très rapide, il faut donc des appareils pouvant mesurer la fréquence avec au moins 7 chiffres significatifs (et même plus si on veut de la précision sur la vitesse), ce qui n'est pas toujours le cas avec les circuits électroniques utilisés.

3. Deux impulsions successives sont séparées d'une durée T. Si l'objet est immobile, les échos sont aussi séparés de $T = 100{,}0$ µs. En revanche, s'il se déplace le calcul est plus compliqué.

– La première impulsion est émise à $t = 0$ alors que l'objet est à une distance d de l'émetteur. Cette impulsion atteint l'objet à un instant t_1 tel que la distance ct_1 parcourue par l'onde entre 0 et t_1 est égale à la distance $d + vt_1$ séparant l'objet de l'émetteur à t_1 : $ct_1 = d + vt_1$ soit $t_1 = \frac{d}{c - v}$. Après réflexion sur l'objet, l'impulsion parcourt la même distance pendant la même durée dans l'autre sens et revient donc au niveau de l'antenne à l'instant $t_2 = 2t_1 = \frac{2d}{c - v}$.

– La deuxième impulsion est émise à $t_3 = T$ alors que l'objet est à une distance $d + vt_3 = d + vT$ de l'émetteur. Cette impulsion atteint l'objet à un instant t_4 tel que la distance $c(t_4 - t_3) = c(t_4 - T)$ parcourue par l'onde entre t_3 et t_4 est égale à la distance $d + vt_4$ séparant l'objet de l'émetteur à t_4 : $c(t_4 - T) = d + vt_4$ soit $t_4 = \dfrac{d + cT}{c - v}$. Elle revient sur l'antenne après la même durée $t_4 - T$, donc à l'instant $t_5 = t_4 + (t_4 - T) = 2\dfrac{d + cT}{c - v} - T = \dfrac{2d + (c + v)T}{c - v}$.

– Finalement le décalage temporel recherché est $\Delta t = t_5 - t_2$, soit $\boxed{\Delta t = T\dfrac{c + v}{c - v}}$.

> *Notons que pour $v = 0$, c'est-à-dire pour un objet immobile, on retrouve bien $\Delta t = T$.*

An $\boxed{\Delta t = 100{,}0\ \mu s}$ avec la précision permise par les données. Pour pouvoir distinguer cette valeur Δt de la valeur T pour un objet immobile, cette méthode nécessiterait également une précision extrêmement grande : $\dfrac{\Delta t - T}{T} = \dfrac{2v}{c - v} \approx \dfrac{2v}{c} = 1 \cdot 10^{-6} = 0{,}0001\ \%$, soit un écart relatif juste deux fois plus grand que dans la méthode précédente.

4. Entre deux impulsions successives, c'est-à-dire sur une durée T, la distance d a augmenté de vT, donc la phase a augmenté de $\boxed{\varphi = k \times 2vT = \dfrac{4\pi vT}{\lambda}}$. AN $\boxed{\varphi = 1{,}83\ \text{rad}}$ $\left(\text{un peu plus de } \dfrac{\pi}{2}\right)$, valeur tout à fait mesurable.

5. Mesurer la vitesse transversale v_2 est beaucoup plus facile : il suffit de repérer sur l'écran différentes positions successives de la cible, et de diviser la distance parcourue par la durée.
Si on note v_1 la vitesse longitudinale (déterminée avec l'une des méthodes précédentes), la norme de la vitesse est alors $\boxed{v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

Exercice 8.3

1. Notons (Ox) l'axe allant du haut-parleur vers le microphone.
L'onde émise par le haut-parleur se propage vers les x croissants donc elle est de la forme $s(x,t) = S_m \cos(2\pi f t - kx + \varphi)$, avec $\omega = 2\pi f = kc$.

> *A priori il y a un déphasage φ, inconnu, entre la tension qui alimente le haut-parleur et l'onde sonore qu'il émet. Ceci n'aura aucune influence sur la suite.*

Lorsqu'elle arrive sur le microphone, elle vaut donc $s(d,t) = S_m \cos(2\pi f t - kd + \varphi)$, ce qui correspond à la tension observée $u'(t) = U_m \cos(2\pi f t - kd + \varphi)$. Les deux courbes coïncident si leur déphasage est un multiple de 2π, soit $kd - \varphi = n \times 2\pi$, d'où $\boxed{d = n \times \dfrac{2\pi}{k} + \dfrac{\varphi}{k} = n \times \dfrac{c}{f} + \dfrac{\varphi}{k}}$.

2. L'écart entre d_1 et d_2 vaut donc $\dfrac{c}{f}$, d'où $\boxed{c = f(d_2 - d_1)}$. AN $\boxed{c = 330\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Exercice 8.4

1. S a un mouvement rectiligne sinusoïdal vertical, de la forme $\boxed{y_S(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)}$. La pulsation est $\boxed{\omega = 2\pi f = 630 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$. Sa vitesse est $\vec{v} = \dot{y}_S(t)\vec{e_y} = -Y_m \omega \sin(\omega t + \varphi)\vec{e_y}$. À $t = 0$, $y_S(0) = 0 = Y_m \cos\varphi$ (position d'équilibre) donc $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$; et $v_0 = -Y_m \omega \sin\varphi > 0$ donc $\sin\varphi < 0$ d'où $\boxed{\varphi = -\dfrac{\pi}{2}}$, ce qui permet de réécrire l'élongation sous la forme $\boxed{y_S(t) = Y_m \sin(\omega t)}$.

Enfin $v_0 = Y_m \omega$ d'où $\boxed{Y_m = \dfrac{v_0}{2\pi f} = 4{,}0 \text{ mm}}$.

2. Entre deux points en opposition de phase, la distance est $(2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$, donc ici $d = \dfrac{\lambda}{2}$. Or $\lambda = cT = \dfrac{c}{f}$, donc $\boxed{c = 2fd}$. AN $\boxed{c = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

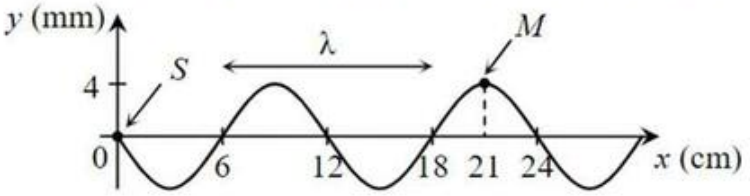
3. a) M reçoit l'onde avec un retard $\Delta t = \dfrac{x_M}{c}$. AN $\boxed{\Delta t = 18 \text{ ms}}$. Son équation horaire est alors $\boxed{y_M(t) = Y_m \sin\left(\omega\left(t - \dfrac{x_M}{c}\right)\right)}$ pour $t > 18$ ms.

b) La position de M est telle que $SM = \dfrac{7}{2}d = \dfrac{7}{2} \times \dfrac{\lambda}{2}$, sachant que la distance d correspond à un déphasage de π, donc M est en retard de $\dfrac{7\pi}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{\text{en avance de } \dfrac{\pi}{2}}$ par rapport à S.

c) AN à $t_1 = 40 \text{ ms} = \dfrac{4}{f} = 4T$: $\boxed{y_S(t_1) = y_S(0) = 0}$ et $y_M(t_1) = Y_m \sin\left(4\omega T + \dfrac{\pi}{2}\right) = Y_m \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ soit $\boxed{y_M(t_1) = Y_m = 4{,}0 \text{ mm}}$.

4. a) Cette fois on fixe $t = t_1$ dans l'expression de y, et chaque point d'abscisse x a un retard de $\dfrac{x}{c}$ par rapport à S : $y_{t_1}(x) = Y_m \sin\left(\omega\left(t_1 - \dfrac{x}{c}\right)\right)$ soit $\boxed{y_{t_1}(x) = -Y_m \sin\left(\dfrac{\omega x}{c}\right) = -Y_m \sin(kx)}$ avec $\boxed{k = 52 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}}$. Période spatiale (longueur d'onde) : $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{c}{f}$. AN $\boxed{\lambda = 12 \text{ cm}}$.

b) Une photographie de la corde à cette instant donnerait donc l'allure suivante :



Exercice 8.5

1. La longueur d'onde est l'écart entre deux maxima consécutifs, donc entre les rayons de deux cercles clairs successifs sur la photo. Pour plus de précision, on mesure l'écart entre le deuxième cercle et le sixième (les deux étant bien nets), soit 4 longueurs d'onde : avec l'échelle indiquée on trouve un écart $e = 3{,}6$ cm, d'où $\boxed{\lambda = 0{,}90 \text{ cm}}$. Alors $\boxed{c = \lambda f}$. AN $\boxed{c = 18 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}$.

2. La période des ondes est $T = \dfrac{1}{f} = 0{,}05 \text{ s} = 50 \text{ ms}$. Donc $t_1 = 2T$: après un nombre entier de périodes, toutes les grandeurs reprennent la même valeur, donc la photo serait identique.
D'autre part, $t_2 = 2{,}5T$: après une demi-période supplémentaire, les maxima deviennent des minima et inversement, donc le contraste de la photo serait inversé (les cercles blancs deviendraient noirs et inversement).

3. Pour $x > 0$, l'onde se déplace vers les x croissants : $\boxed{z(x,t) = Z_m \cos(\omega t - kx + \varphi)}$.
Pour $x < 0$, l'onde se déplace vers les x décroissants : $\boxed{z(x,t) = Z_m \cos(\omega t + kx + \varphi)}$.

4. Au cours de la propagation, une même énergie totale E se répartit sur des cercles de périmètre $2\pi r$ de plus en plus grand, avec une densité de la forme $kZ_m(r)^2$: $E = kZ_m(r)^2 \times 2\pi r = \text{cte}$ donc l'amplitude est de la forme $\boxed{Z_m(r) = \dfrac{A}{\sqrt{r}}}$ $\left(\text{avec } A = \sqrt{\dfrac{E}{2\pi k}} = \text{cte}\right)$.

L'expression de l'onde sur l'axe (Ox) est donc : $\boxed{z(x,t) = \dfrac{A}{\sqrt{x}} \cos(\omega t - kx + \varphi)}$ pour $x > 0$, et $\boxed{z(x,t) = \dfrac{A}{\sqrt{-x}} \cos(\omega t + kx + \varphi)}$ pour $x < 0$.

Exercice 8.6

1. $\boxed{\lambda = \dfrac{c}{f}}$. AN $\boxed{15 \text{ km} < \lambda < 15000 \text{ km}}$. Il faudrait donc des antennes de plusieurs kilomètres !

2. Cette fois on trouve $\boxed{2{,}8 \text{ m} < \lambda < 3{,}4 \text{ m}}$. Les antennes peuvent donc cette fois avoir une taille de l'ordre du mètre ou de quelques dizaines de centimètres.

3. Si les stations de radio émettaient toutes dans le domaine des audiofréquences, leurs émissions se mélangeraient et il n'y aurait aucun moyen pour le récepteur de les séparer. Tandis que l'émission de chaque station dans son propre domaine de fréquences permet de la séparer des autres par filtrage (voir chapitre 7).

Exercice 8.7

1. a) L'onde se propage vers les x croissants donc elle arrive au point M avec un retard x/c par rapport au point O : alors $\boxed{y_M(t) = a\cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)}$.

b) Cette équation horaire peut encore s'écrire $y_M(t) = a\cos(\omega t - kx)$ en posant $\boxed{k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}}$.

AN $\boxed{k = 25 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}}$. La longueur d'onde est $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}}$. AN $\boxed{\lambda = 25 \text{ cm}}$.

2. a) L'onde incidente est l'onde précédente, valant $\boxed{y_{Bi}(t) = a\cos(\omega t)}$ à l'origine B. L'onde réfléchie en B est déphasée de φ, soit $\boxed{y_{Br}(t) = a\cos(\omega t + \varphi)}$. Or B est fixé, donc son élongation résultant des deux ondes est toujours nulle : $y_B(t) = a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t + \varphi) = 0, \forall t$.

Cela impose donc $\boxed{\varphi = \pi}$ puisque $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$, soit $\boxed{y_{Br}(t) = -a\cos(\omega t)}$.

b) L'onde incidente est toujours $\boxed{y_{Mi}(t) = a\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)}$. L'onde réfléchie se propage vers les x décroissants donc $\boxed{y_{Mr}(t) = -a\cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)}$. L'élongation résultante est alors :

$y_M(t) = a\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) - a\cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$ soit $\boxed{y_M(t) = 2a\sin(kx)\sin(\omega t)}$.

On reconnaît l'expression d'une onde stationnaire, produit d'une fonction sinusoïdale du temps et d'une fonction sinusoïdale de la position.

c) Les nœuds sont les points où l'amplitude $2a\sin(kx)$ est nulle :

$kx = n\pi$ soit $\boxed{x_{\text{nœuds}} = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}}$ avec n entier. AN $\boxed{x_{\text{nœuds}} = n \times 12{,}5 \text{ cm}}$.

D'après la théorie des interférences, deux ondes qui se superposent en un point donnent un signal nul, c'est-à-dire des interférences destructives, si leur déphasage est un multiple impair de π. Vérifions que c'est bien le cas ici pour les abscisses ci-dessus. Il faut écrire les deux signaux sous la même forme $a\cos(\omega t + \varphi(M))$:

$y_{Mi}(t) = a\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$ d'où $\varphi_i(M) = -\frac{\omega x}{c}$;

$y_{Mr}(t) = -a\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c}\right) = a\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c} + \pi\right)$ d'où $\varphi_r(M) = \frac{\omega x}{c} + \pi$.

Le déphasage entre eux est donc $\varphi(M) = \varphi_r(M) - \varphi_i(M) = 2\frac{\omega x}{c} + \pi = 2kx + \pi$. Pour les points ci-dessus, $2kx = 2n\pi$ donc on a bien trouvé $\boxed{\varphi(M) = (2n+1)\pi}$.

Exercice 8.8

1. On calcule les deux distances :

$S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$ et $S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$

donc $\delta = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$.

Sachant que $|x| \ll D$, $|y| \ll D$ et $a \ll D$, on fait apparaître des expressions de la forme $\sqrt{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon \ll 1$, et on applique l'approximation $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\delta = D\sqrt{1+\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\frac{y^2}{D^2}} - D\sqrt{1+\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\frac{y^2}{D^2}}$$

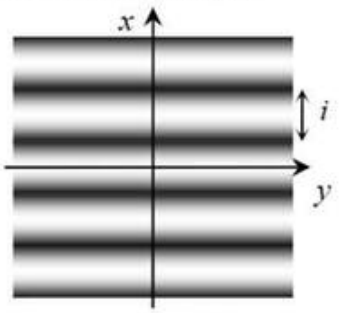
$$\approx D\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\frac{y^2}{2D^2}-1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2-\frac{y^2}{2D^2}\right]$$

$$= D\left[1+\frac{x^2+ax+a^2/4}{2D^2}+\frac{y^2}{2D^2}-1-\frac{x^2-ax+a^2/4}{2D^2}-\frac{y^2}{2D^2}\right] \text{ soit } \boxed{\delta \approx \frac{ax}{D}} \text{ après simplification.}$$

⇨ *Méthode 8.3*

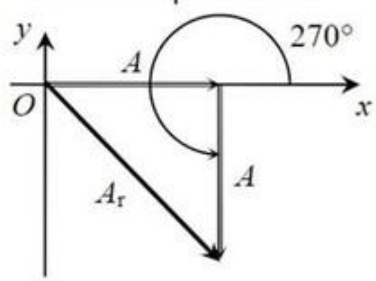
2. Le déphasage est proportionnel à la différence des chemins parcourus par les deux ondes : $\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ soit $\boxed{\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda D}}$. Les interférences sont constructives si $\varphi = 2m\pi$, et destructives si $\varphi = (2m+1)\pi$, avec m entier.

3. D'après la question précédente : $\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda D} = (2m+1)\pi$ donc $\boxed{x = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} = \text{cte}}$. Dans le plan (Oxy), une équation de la forme $x = \text{cte}$ caractérise une droite parallèle à l'axe (Oy).
La figure d'interférences a donc l'allure ci-contre.



4. L'interfrange i est la distance entre les franges repérées par m et $m+1$, soit $\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$. AN $\boxed{i = 0{,}60 \text{ mm}}$.
Les franges sont très serrées mais visibles à l'œil nu.

5. On calcule $\varphi = \frac{2\pi a x_a}{\lambda D}$: on obtient $\varphi = 4{,}7$ rad soit $\boxed{\varphi = 270°}$.
On peut alors faire une représentation de Fresnel des deux ondes, en représentant l'une des deux par un vecteur de norme A et de direction quelconque, par exemple colinéaire à l'axe (Ox), et l'autre par un vecteur de même norme faisant avec l'autre un angle de 270°, ce qui est équivalent à –90°. On obtient alors l'amplitude résultante avec le théorème de Pythagore : $A^2 + A^2 = A_r^2$ soit $\boxed{A_r = A\sqrt{2}}$.



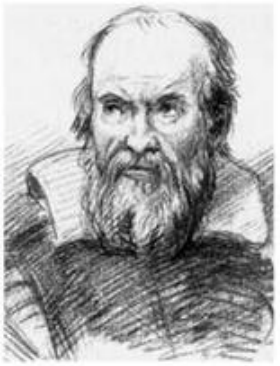
⇨ *Méthode 8.2*

L'intensité à cette abscisse x_a vaut donc (à une constante près) $I = A_r^2 = 2A^2$. Or l'intensité maximale est obtenue quand les deux ondes sont en phase, ce qui donne $A_{r,max} = 2A$ donc $I_{max} = A_{r,max}^2 = 4A^2$. On a donc trouvé en x_a : $\boxed{I = \frac{I_{max}}{2}}$ (c'est une frange « semi-brillante »).

Chapitre 9

Cinématique du point

UN SCIENTIFIQUE



Galilée (1564-1642) est né en Toscane en pleine Renaissance italienne. Après des études de médecine, il préfère se tourner vers les mathématiques qu'il enseigne pendant plusieurs années. C'est pourtant en physique et en astronomie qu'il effectue ses plus grandes découvertes. Convaincu de la justesse du modèle copernicien, il le défend et se voit condamné par l'Église. Plus généralement, il affirme que la nature suit des lois mathématiques.

Un peu d'histoire

Au XIV^e siècle, Nicole Oresme énonce la loi du mouvement uniforme mais son idée, trop visionnaire, n'est pas comprise à l'époque. Galilée apporte une compréhension fondamentale à l'étude des mouvements. Il énonce le principe d'inertie selon lequel un mobile conserve sa vitesse acquise quand on supprime l'action de la force extérieure. En 1604, il découvre la loi de la chute des corps qui affirme que l'espace parcouru est proportionnel au carré de la distance. À la même époque, le savant allemand Johannes Kepler énonce trois lois vérifiées par les orbites des planètes, en particulier il affirme que ces astres décrivent des ellipses ayant pour foyer le soleil. C'est cependant avec Isaac Newton que tout s'explique. La loi de la gravitation qu'il introduit explique les constatations de ses prédécesseurs et permet de prévoir plus généralement la trajectoire d'un mobile.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les trois systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques) et les bases correspondantes
- ▷ Les définitions relatives au mouvement
- ▷ Les composantes du vecteur position dans les trois bases, et celles des vecteurs vitesse et accélération dans les bases cartésienne et cylindrique
- ▷ Les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet, pour un mouvement plan
- ▷ Les propriétés de quelques mouvements simples d'un point

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer les composantes d'une vitesse et d'une accélération à partir des équations horaires
- ▷ Déterminer des équations horaires à partir de l'accélération
- ▷ Identifier et dessiner une trajectoire à partir des équations horaires
- ▷ Passer d'un système de coordonnées à un autre
- ▷ Dériver un vecteur dans la base cylindrique

■■ Résumé de cours

■ Cadre de la mécanique classique

❑ Définitions

La mécanique est l'étude des systèmes matériels en mouvement.
La mécanique **classique**, ou newtonienne, est valable tant que :
– la vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à celle de la lumière dans le vide (quand on s'en approche, on doit utiliser la relativité) ;
– la taille des systèmes étudiés est très supérieure à celle d'un atome (à l'échelle atomique, on doit utiliser la mécanique quantique).

La **cinématique** est l'étude descriptive des mouvements, indépendamment de leurs causes.
On se limite ici au mouvement d'un point, au sens mathématique du terme.

❑ Référentiel et repères

Le mouvement absolu n'existe pas : un objet est toujours en mouvement par rapport à quelque chose. Pour pouvoir étudier le mouvement d'un point, il est donc nécessaire de définir un **référentiel** $\mathcal{R}$: solide par rapport auquel on observe le mouvement.
On lui associe un **repère spatial** (origine et système d'axes orthogonaux, avec unité de mesure spatiale) et un **repère temporel** (origine des temps et unité de mesure temporelle).

■ Systèmes de coordonnées et bases

Un repère orthonormé $(Oxyz)$ étant choisi, un point M est repéré, à chaque instant, par trois coordonnées ; celles-ci sont des fonctions du temps appelées **équations horaires**.
On définit trois systèmes de coordonnées, auxquels on associe trois bases orthonormées.

❑ Coordonnées cartésiennes

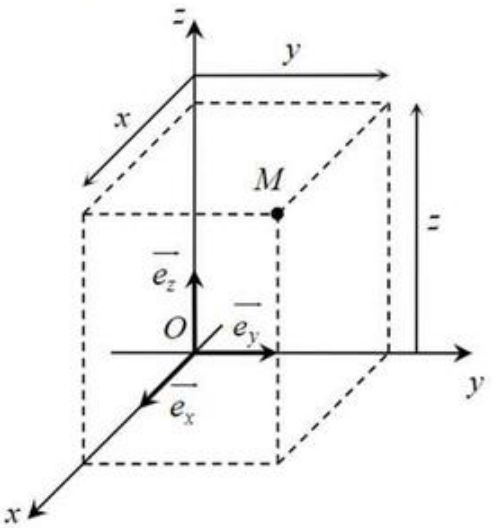
x est l'abscisse de M : $x \in]-\infty, +\infty[$.

y est l'ordonnée de M : $y \in]-\infty, +\infty[$.

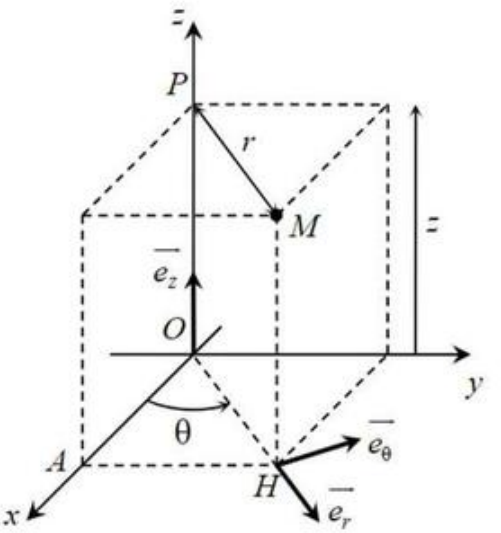
z est la cote de M : $z \in]-\infty, +\infty[$.

Base cartésienne

$\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont trois vecteurs unitaires dirigés selon les axes (Ox), (Oy) et (Oz).
La base cartésienne est une base fixe de $\mathcal{R}$.



❑ Coordonnées cylindriques



r est la distance entre M et l'axe (Oz) : $r \in [0,+\infty[$.

θ est l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OH}$: tout l'espace peut être décrit avec $\theta \in [0,2\pi[$.

z est la cote de M : $z \in]-\infty,+\infty[$.

Base cylindrique

$\overline{e_r}$ est dirigé de O vers H, ou de P vers M

$\overline{e_\theta}$ est orthogonal à $\overline{e_r}$, dans le plan (Oxy) et dirigé dans le sens des θ croissants.

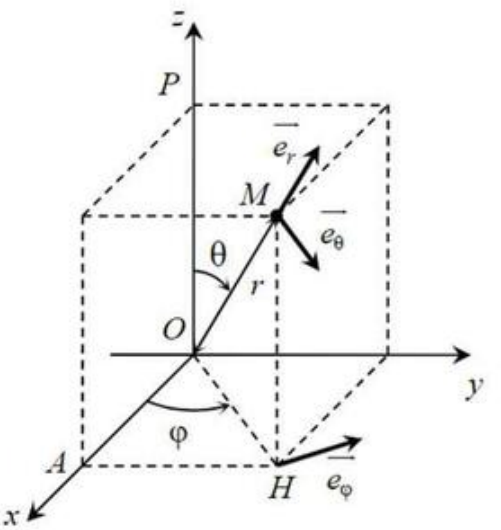
$\overline{e_z}$ est dirigé selon l'axe (Oz).

Dans le plan (Oxy), $\left(\overline{e_r},\overline{e_\theta}\right)$ est appelée **base polaire**.

La direction de $\overline{e_r}$ est dite **radiale**, celle de $\overline{e_\theta}$ est dite **orthoradiale**.

$\overline{e_r} = \cos\theta\,\overline{e_x} + \sin\theta\,\overline{e_y}$ et $\overline{e_\theta} = -\sin\theta\,\overline{e_x} + \cos\theta\,\overline{e_y}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\overline{e_r}}{\mathrm{d}\theta} = \overline{e_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overline{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\overline{e_r}$.

❑ Coordonnées sphériques



r est la distance entre O et M : $r \in [0,+\infty[$.

θ est l'angle entre (Oz) et $\overrightarrow{OM}$: $\theta \in [0,\pi]$.

φ est l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OH}$: $\varphi \in [0,2\pi[$.

Base sphérique

$\overline{e_r}$ est dirigé de O vers M.

$\overline{e_\theta}$ est orthogonal à $\overline{e_r}$, dans le plan (OHM) et dirigé dans les sens des θ croissants.

$\overline{e_\varphi}$ est dans le plan (Oxy), dirigé vers les φ croissants et orthogonal aux deux autres.

Les bases cylindrique et sphérique, contrairement à la base cartésienne, sont des bases *locales*, c'est-à-dire qu'elles sont mobiles avec M.

⇨ **Méthode 9.1. Passage d'un système de coordonnées à un autre**

■ Éléments cinématiques

❑ Vecteur position

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ donne à chaque instant la position du point M (en mouvement ou non).
L'ensemble des positions successives du point M définit sa **trajectoire**.

❑ Vecteur vitesse

Il donne les variations du vecteur position. Si le point passe de M en M' entre t et t', le vecteur vitesse à la date t est défini par : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \lim\limits_{t' \to t} \left(\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} \right)_{\mathcal{R}}$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathcal{R}}}$.

Le vecteur vitesse dépend du référentiel $\mathcal{R}$ mais non du choix du point fixe O.
Il est tangent, en tout point, à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.
S'il est constant en norme, le mouvement du point est **uniforme**.
S'il est constant en direction, le mouvement du point est **rectiligne**.

❑ Vecteur accélération

Il donne les variations du vecteur vitesse. Avec les mêmes notations que précédemment, on définit : $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \lim\limits_{t' \to t} \left(\dfrac{\vec{v}(M')_{\mathcal{R}} - \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{t' - t} \right)$ soit $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} \right)_{\mathcal{R}}}$.

Le vecteur accélération dépend, lui aussi, du référentiel $\mathcal{R}$ mais non du point O.
Si la trajectoire est courbée, il est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.

❑ Composantes dans les différentes bases

Dans la base cartésienne

$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}}$; $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$; $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$.

Dans la base cylindrique

$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}}$; $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$; $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$.

Dans la base sphérique

$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}}$; $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}$.

⇨ **Méthode 9.2. Dérivation en coordonnées cylindriques**
⇨ **Méthode 9.3. Calcul de la vitesse et de l'accélération à partir des équations horaires**

❑ Évolution de la norme de la vitesse

À un instant donné :

- si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} > 0$, le mouvement est **accéléré** (la norme de la vitesse augmente) ;
- si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} < 0$, le mouvement est **retardé** (la norme de la vitesse diminue) ;
- si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$, la norme de la vitesse passe par un extremum.

Mais si $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$ *à tout instant*, alors le mouvement est uniforme.

■ Base de Frenet pour un mouvement plan

❑ Abscisse curviligne

Dans le cas où la trajectoire du point M est connue ainsi que le sens du mouvement, la position de M à chaque instant peut être repérée sur cette trajectoire, à partir de sa position initiale M_0, par son abscisse curviligne $s(t) = \overset{\frown}{M_0M}$, qui est la longueur de la trajectoire qu'il a parcourue depuis l'instant initial.

Dans le cadre du programme, on se limitera à des trajectoires planes.

❑ Rayon de courbure

Au voisinage d'un point M de la trajectoire, celle-ci peut être assimilée localement à un arc de cercle, de rayon R et centre I, appelé **cercle osculateur**. R est le **rayon de courbure** de la trajectoire au point M.

La seule courbe plane ayant le même rayon de courbure en tout point est le cercle : son rayon de courbure est son rayon.

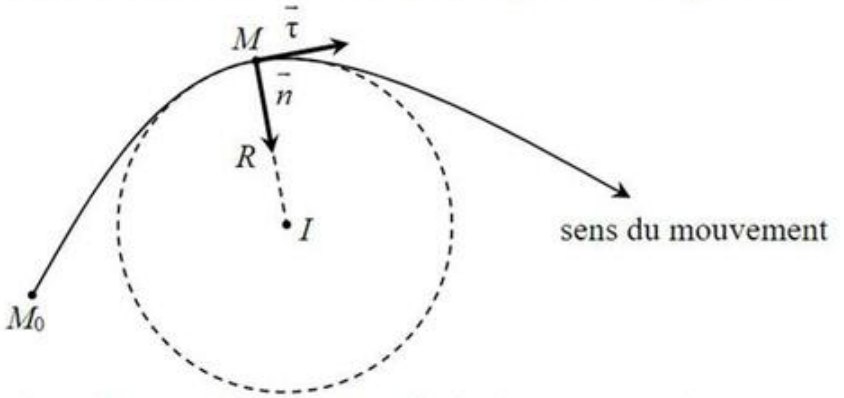
Pour une trajectoire rectiligne, le rayon de courbure est infini.

❑ Base de Frenet

À chaque instant du mouvement de M on peut définir deux vecteurs unitaires :

- le vecteur $\vec{\tau}$, tangent à la trajectoire en M et orienté dans le sens du mouvement ;
- le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{\tau}$ et dirigé vers l'*intérieur* de la trajectoire.

Ces deux vecteurs constituent la base de Frenet dans le plan de la trajectoire.



Cette base est locale, et donc mobile avec M : elle évolue au cours du temps.

Remarque

Un troisième vecteur, la binormale $\vec{b}$, peut être ajouté pour obtenir une base orthonormée tridimensionnelle, mais il ne sera pas utilisé en cinématique pour une trajectoire plane.

❑ Éléments cinématiques dans la base de Frenet

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse s'exprime simplement dans la base de Frenet : $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = v(M)_{\mathcal{R}}\,\vec{\tau}}$

où $v(M)_{\mathcal{R}}$ est sa norme.

Vecteur accélération

Le vecteur accélération se décompose en $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a_t}(M)_{\mathcal{R}} + \vec{a_n}(M)_{\mathcal{R}}}$ avec :

– l'**accélération tangentielle** $\boxed{\vec{a_t}(M)_{\mathcal{R}} = \dfrac{\mathrm{d}\,v(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}}$ qui correspond à la *variation de la norme* du vecteur vitesse (elle est donc nulle si le mouvement est uniforme) ;

– l'**accélération normale** $\boxed{\vec{a_n}(M)_{\mathcal{R}} = \dfrac{v(M)^2_{\mathcal{R}}}{R}\vec{n}}$ qui correspond à la *variation de la direction* du vecteur vitesse (elle est donc nulle si le mouvement est rectiligne).

■ Exemples de mouvements simples d'un point

❑ Mouvement à vecteur accélération constant

C'est un mouvement où le vecteur accélération est une constante, par exemple $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = a\vec{e_y}$.

Mouvement rectiligne uniformément varié

Si le vecteur vitesse initial est colinéaire à l'accélération, soit $\vec{v_0} = v_0\vec{e_y}$, le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré ou retardé.

Le mouvement rectiligne uniforme est un cas particulier obtenu pour $a = 0$.

Mouvement parabolique

Si le vecteur vitesse initial n'est pas colinéaire à l'accélération, on peut le prendre dans le plan (Oxy) et formant un angle α avec l'accélération.

La trajectoire est alors un arc de parabole, d'axe parallèle à (Oy) et d'équation cartésienne $y(x) = \dfrac{1}{2}a\dfrac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + (\tan\alpha)x + y_0$, dans le plan d'équation $z = z_0$ [parallèle à (Oxy)].

⇨ **Méthode 9.4. Détermination des équations horaires cartésiennes à partir de l'accélération**
⇨ **Méthode 9.5. Détermination des équations cartésiennes de la trajectoire**

❑ Mouvement circulaire

Par définition, la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle ; s'il s'agit d'un cercle de centre O, de rayon R, appartenant au plan (Oxy), alors la base polaire est idéale pour décrire ce mouvement. En notant $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e_r} \quad ; \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = R\omega\vec{e_\theta} \quad ; \quad \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e_r} + R\dot{\omega}\vec{e_\theta}}.$$

Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

Si $\omega = \text{cte}$, le mouvement est circulaire uniforme.

Alors $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e_r} = -\dfrac{v(M)^2_{\mathcal{R}}}{R}\vec{e_r} = -\omega^2\overrightarrow{OM}}$ ou encore $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \dfrac{v(M)^2_{\mathcal{R}}}{R}\vec{n}}$.

Ce vecteur est dirigé vers O tout au long du mouvement, on parle d'**accélération centripète**.

■■ Méthodes

■ Comment utiliser les différents systèmes de coordonnées ?

❑ Méthode 9.1. Passage d'un système de coordonnées à un autre

On utilise les relations dans les triangles rectangles :

$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \; ; \; \text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \; ; \; \text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

⇨ Exercice 9.13

– Passage des cylindriques aux cartésiennes ou inversement

Avec le triangle *OAH* (voir schéma du cours), on obtient les relations :

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ avec } \cos\theta \text{ du signe de } x$$

$$\left(\text{donc } \theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ si } x > 0, \text{ et } \theta = \arctan\frac{y}{x} \pm \pi \text{ si } x < 0 \right).$$

La troisième coordonnée z est la même pour les deux systèmes.

– Passage des sphériques aux cartésiennes ou inversement

Avec les triangles *OPM* et *OAH* (voir schéma du cours), on obtient les relations :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \; ; \; y = r\sin\theta\sin\varphi \; ; \; z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; ; \; \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \text{ avec } \cos\theta \text{ du signe de } z \; ;$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ avec } \cos\varphi \text{ du signe de } x.$$

❑ Méthode 9.2. Dérivation en coordonnées cylindriques

On utilise les formules habituelles de dérivation d'une somme et d'un produit, et celle de la dérivée composée : $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} \times \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$ valable pour une grandeur a scalaire ou vectorielle, fonction de b qui est elle-même fonction de t.

⇨ Exercices 9.4, 9.5

– Dérivation des vecteurs unitaires

On exprime d'abord les vecteurs unitaires de la base polaire dans la base cartésienne :

$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$.

De plus $\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sin\theta \times \dot{\theta}$ et $\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \cos\theta \times \dot{\theta}$.

Alors $\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_x} + \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_y} = \dot{\theta}\left[-\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}\right] = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$

et $\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_x} + \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e_y} = -\dot{\theta}\left[\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}\right] = -\dot{\theta}\vec{e_r}$.

– Dérivation du vecteur position pour obtenir le vecteur vitesse :

$\vec{v}(M) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} + r\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e_z} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$.

– Dérivation du vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$\vec{a}(M) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$

soit $\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}$.

■ Comment déterminer les caractéristiques du mouvement d'un point ?

❑ Méthode 9.3. Calcul de la vitesse et de l'accélération à partir des équations horaires

À partir des équations horaires en cartésiennes ou en cylindriques on obtient les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération par dérivations successives, suivant les formules du cours.

⇨ Exercices 9.1, 9.2, 9.3, 9.11, 9.13

Soit par exemple un point M en mouvement, repéré à chaque instant par ses coordonnées cartésiennes : $x(t) = \alpha t^2 + \beta$; $y(t) = \gamma t$; $z(t) = \delta$, où α, β, γ et δ sont des constantes.

Les composantes du vecteur vitesse de M sont : $\dot{x}(t) = 2\alpha t$; $\dot{y}(t) = \gamma$; $\dot{z}(t) = 0$, soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 2\alpha t\vec{e_x} + \gamma\vec{e_y}}$.

Celles de son vecteur accélération sont : $\ddot{x} = 2\alpha$; $\ddot{y} = 0$; $\ddot{z} = 0$, soit $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = 2\alpha\vec{e_x}}$.

❑ Méthode 9.4. Détermination des équations horaires cartésiennes à partir de l'accélération

On considère un point en mouvement dont on connaît le vecteur accélération, ainsi que les conditions initiales : vecteurs vitesse et position du point à la date $t = 0$. On cherche à déterminer ses équations horaires.

– On détermine les composantes, à chaque instant, du vecteur vitesse de M par intégration des composantes du vecteur accélération. Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions initiales sur la vitesse.

– De même on détermine les composantes, à chaque instant, du vecteur position de M par intégration des composantes du vecteur vitesse. Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions initiales sur la position.

– Cette méthode n'est pas utilisable dans les autres systèmes de coordonnées, car on utilise ici le fait que les vecteurs unitaires cartésiens sont des *constantes*.

⇨ Exercices 9.6, 9.7, 9.8, 9.12

Un point M en mouvement a pour vecteur accélération constant : $\vec{a} = a\vec{e_x}$.

Les conditions initiales sont : $\vec{v}(0) = v_{0x}\vec{e_x} + v_{0y}\vec{e_y} + v_{0z}\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{OM}(0) = x_0\vec{e_x} + y_0\vec{e_y} + z_0\vec{e_z}$.

On intègre les composantes du vecteur accélération : $\vec{v}(t) = (at + \text{cte}_1)\vec{e_x} + \text{cte}_2\,\vec{e_y} + \text{cte}_3\,\vec{e_z}$.

Avec les conditions initiales sur la vitesse, on trouve les trois constantes : $\vec{v}(t) = (at + v_{0x})\vec{e_x} + v_{0y}\vec{e_y} + v_{0z}\vec{e_z}$. Puis on intègre les composantes du vecteur vitesse obtenu, en tenant compte de même des conditions initiales sur la position, et on obtient le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{2}at^2 + v_{0x}t + x_0\right)\vec{e_x} + (v_{0y}t + y_0)\vec{e_y} + (v_{0z}t + z_0)\vec{e_z}$.

Les équations horaires sont donc : $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{0x}t + x_0}$; $\boxed{y(t) = v_{0y}t + y_0}$; $\boxed{z(t) = v_{0z}t + z_0}$.

❑ Méthode 9.5. Détermination des équations cartésiennes de la trajectoire à partir des équations horaires

Dans l'espace, il faut non pas une mais *deux* équations cartésiennes pour décrire une courbe.

– Pour les courbes planes auxquelles nous nous limiterons, l'une des équations est celle du plan contenant la trajectoire. Il s'agit souvent d'un plan simple à décrire, parallèle à l'un des trois plans de base du repère. (Dans beaucoup d'exercices, il s'agit du plan (Oxy).)

– Pour déterminer l'équation cartésienne de la courbe dans ce plan, il faut éliminer la variable temps entre les différentes équations horaires.

⇨ Exercices 9.3, 9.11, 9.12

– Reprenons l'exemple précédent en supposant que $v_{0y} = 0$: les équations horaires deviennent $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{0x}t + x_0$; $y(t) = y_0$; $z(t) = v_{0z}t + z_0$.

La deuxième équation, $\boxed{y = y_0}$, est l'équation cartésienne d'un plan parallèle à (Oxz), la trajectoire que l'on cherche est donc contenue dans ce plan.

Ensuite on peut exprimer t en fonction de z et reporter dans x : $t = \frac{z - z_0}{v_{0z}}$ d'où $\boxed{x = \frac{1}{2}a\left(\frac{z - z_0}{v_{0z}}\right)^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0z}}(z - z_0) + x_0}$. C'est l'équation d'une parabole d'axe parallèle à (Ox).

On aurait pu envisager d'exprimer d'abord t en fonction de x puis de reporter dans z, mais cela nécessiterait de résoudre une équation du second degré et poserait des problèmes de signes.

– Prenons maintenant un mouvement décrit par les équations horaires suivantes :
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$; $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$; $z(t) = 0$, avec $A > 0$.

La troisième équation est celle du plan (Oxy).

Pour éliminer t, la méthode précédente ne marche plus, car l'utilisation de fonctions trigonométriques inverses (arcsinus, arccosinus) nécessite de se limiter à certains intervalles.

En revanche on peut utiliser la formule : $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$, ce qui équivaut à $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y - B}{A}\right)^2 = 1$ ou encore $\boxed{x^2 + (y - B)^2 = A^2}$. On reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle de centre Ω de coordonnées $(0, B, 0)$, et de rayon A.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Le vecteur vitesse d'un point en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.	☐	☐
2.	Le vecteur accélération est toujours orthogonal au vecteur vitesse.	☐	☐
3.	Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont tous fixes au cours du mouvement d'un point M.	☐	☐
4.	Les vecteurs unitaires de la base cylindrique sont tous fixes au cours du mouvement d'un point M.	☐	☐
5.	Si le vecteur accélération d'un point en mouvement est constant, le mouvement est uniforme.	☐	☐
6.	Si le vecteur accélération d'un point en mouvement est nul, le mouvement est rectiligne et uniforme.	☐	☐
7.	Si le mouvement d'un point est uniforme, alors son vecteur vitesse est nul.	☐	☐
8.	Si le mouvement d'un point est circulaire et uniforme, alors son vecteur accélération est constant.	☐	☐
9.	La base de Frenet est une base mobile.	☐	☐
10.	Lorsque l'accélération tangentielle d'un point M est toujours nulle, on peut affirmer que le mouvement de M est uniforme.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Utilisation des différentes bases

❑ Exercice 9.1. Éléments cinématiques en cartésiennes

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant : $x(t) = a_0 t^2 + x_0$, $y(t) = -vt$ et $z(t) = z_0$, avec $x_0 = 1\,\text{m}$, $z_0 = -1\,\text{m}$, $a_0 = 2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $v = 3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.
2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 2\,\text{s}$.
3. Calculer la norme de l'accélération de M à la date $t = 1\,\text{s}$.

❑ Exercice 9.2. Éléments cinématiques en cylindriques

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant : $r(t) = a_0 t^2 + r_0$, $\theta(t) = \omega t - \theta_0$ et $z(t) = -vt$, avec $r_0 = 1\,\text{m}$, $a_0 = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\omega = 3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\theta_0 = 2\,\text{rad}$ et $v = 2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.
2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 1\,\text{s}$.
3. Calculer la norme de l'accélération de M à l'instant initial ($t = 0$).

❑ Exercice 9.3. Analyse d'équations horaires

Voici différents mouvements dans le plan (Oxy) dont on donne les équations horaires, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires (a, b, c, d et e étant des constantes). Indiquer, dans chaque cas, les caractéristiques du mouvement du point M étudié.

1. $x(t) = at^2 - bt + c$ et $y(t) = 2c$.
2. $r(t) = 2c$ et $\theta(t) = dt + e$.
3. $r(t) = bt + c$ et $\theta(t) = 2e$.

❑ Exercice 9.4. Éléments cinématiques dans la base cylindrique*

1. Donner l'expression du vecteur position d'un point M en mouvement dans sa base cylindrique.
2. Donner les expressions des vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.
3. Utiliser ces résultats pour retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

❑ Exercice 9.5. Éléments cinématiques dans la base sphérique**

1. Donner l'expression du vecteur position d'un point M en mouvement dans sa base sphérique.
2. Donner les expressions des vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.
3. Utiliser ces résultats pour établir les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base sphérique.

■ Mouvement rectiligne

❑ Exercice 9.6. Freinage d'urgence

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a = 4{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Calculer la durée et la distance de freinage.

❑ Exercice 9.7. Dépassement*

Une voiture A de longueur $d = 4\ \text{m}$ suit un camion de longueur $D = 10\ \text{m}$ à la vitesse constante $v_0 = 72\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur une route droite et horizontale. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors $L = 35\ \text{m}$. À un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante $a = 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

1. Établir l'équation horaire $x_{\text{av}}(t)$ du mouvement de l'avant de la voiture ainsi que celle du mouvement de l'avant du camion, $X_{\text{av}}(t)$.
2. Si on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est 20 m devant l'avant du camion, calculer la durée du dépassement ainsi que la distance parcourue par le camion pendant ce temps.

❑ Exercice 9.8. Attention au choc !*

Deux voitures se suivent sur une ligne droite à la vitesse $v = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à une distance $d = 80\ \text{m}$ l'une de l'autre. À la date $t = 0$, la première freine avec une décélération constante de $\ddot{x}_A = -2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Celle qui la suit commence à freiner seulement 2,0 secondes plus tard, avec une décélération constante de $\ddot{x}_B = -1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à la date $t = 0$, établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules.
2. Déterminer la position et la date du contact.

❑ Exercice 9.9. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Un anneau au bout d'un ressort oscille de manière sinusoïdale le long d'une tige horizontale. On repère sa position par rapport à sa position d'équilibre ; elle est donnée par la fonction $x(t) = X_{\text{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

1. La longueur totale parcourue par la masse entre ses deux positions extrêmes est de 20 cm. Que vaut X_{m} ?
2. La période des oscillations est $T = 0{,}5\ \text{s}$. Calculer ω_0.
3. À l'instant $t = 0$, la masse est à la position $x(0) = 5{,}0\ \text{cm}$. Calculer φ. En déduire la position de l'anneau à l'instant $t_1 = 1{,}5\ \text{s}$.
4. Exprimer la vitesse de l'anneau en fonction X_{m}, ω_0, φ et t. Calculer sa vitesse maximale.
5. Établir l'expression de l'accélération de l'anneau en fonction de X_{m}, ω_0, φ et t, puis en fonction de ω_0 et x. Commenter le résultat obtenu.

■ Mouvement circulaire

❑ Exercice 9.10. Sortie d'autoroute

Madame Michu, au volant de son automobile (qu'on assimilera à un point matériel) se déplace sur l'autoroute à la vitesse $V_0 = 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Elle souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50 \text{ m}$. Pour éviter de déraper dans la bretelle, la norme de l'accélération du véhicule ne peut excéder $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. En utilisant la base de Frenet, montrer que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse V_0 au risque de quitter la route.
2. Expliquer pourquoi il ne faut pas freiner dans le virage au risque, encore, de quitter la route.
3. Quelle est la vitesse maximale $V_{\max}$ à laquelle la voiture peut décrire le virage ?

❑ Exercice 9.11. Mouvement circulaire d'un satellite terrestre



On considère un satellite géostationnaire (dont la période de révolution est égale à celle de la Terre, soit $T = 86164 \text{ s}$) gravitant sur une orbite circulaire dont le centre coïncide avec celui de la Terre à une altitude $h = 35800 \text{ km}$. On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique et on supposera que ce mouvement est uniforme.

Donnée : rayon de la Terre $R_T = 6400 \text{ km}$.

1. Faire un schéma du problème et représenter la base de Frenet.
2. Calculer la norme du vecteur vitesse du satellite.
3. Calculer la norme du vecteur accélération du satellite.

❑ Exercice 9.12. Mouvement circulaire uniforme* *

Une araignée assimilable à un point matériel M se déplace sur sa toile, par rapport au repère $Oxyz$ selon les équations horaires cartésiennes suivantes, a et ω étant deux constantes positives :

$$x(t) = a\sin(\omega t) \ ; \ y(t) = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \ ; \ z(t) = a\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

1. Montrer que la trajectoire de M est contenue dans un plan passant par O et donner l'équation cartésienne de ce plan.
2. Montrer que l'araignée se déplace sur un cercle de centre O, et donner son rayon.
3. Calculer la norme du vecteur vitesse de l'araignée à chaque instant. Comment peut-on qualifier le mouvement ?
4. Calculer la période T de ce mouvement.

D'après ENAC

❑ Exercice 9.13. Stabilité d'une trajectoire circulaire*

Une particule M est soumise à une accélération constamment dirigée vers le point O du plan (Oxy) et de norme $a = k\left(\frac{b}{r}\right)^n$, où k, b et n sont des constantes positives.

1. Comment faut-il choisir la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ pour que M décrive dans le plan (Oxy) un cercle de centre O et de rayon b ?
2. Cette condition étant remplie, exprimer la fréquence associée à ce mouvement.

■ Mouvement quelconque

❑ Exercice 9.14. Jeu de plage*

Le jeune Toto, situé en O sur la plage, lance un frisbee avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}$ horizontal, et faisant un angle α avec la direction (Ox) dans laquelle se trouve son camarade Lulu, à une distance D de lui. Le mouvement du frisbee est très complexe, aussi le modélise-t-on de façon simple : il a lieu dans le plan (Oxy) et le frisbee, assimilable à un point M, subit tout au long de son mouvement, une accélération $\vec{a} = -a\overrightarrow{e_y}$. Le mouvement sera donc étudié dans le repère (O,x,y,z), muni de la base $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$.

1. Déterminer les équations horaires du mouvement de M.
2. Établir les équations cartésiennes de la trajectoire de M.
3. Si $\alpha = 45°$, exprimer V_0 pour que Lulu puisse récupérer le frisbee sans avoir à bouger.

❑ Exercice 9.15. Toto sur un toboggan*

Toto, assimilable à un point matériel M, est installé, prêt à partir, en haut d'un grand toboggan d'un parc aquatique.

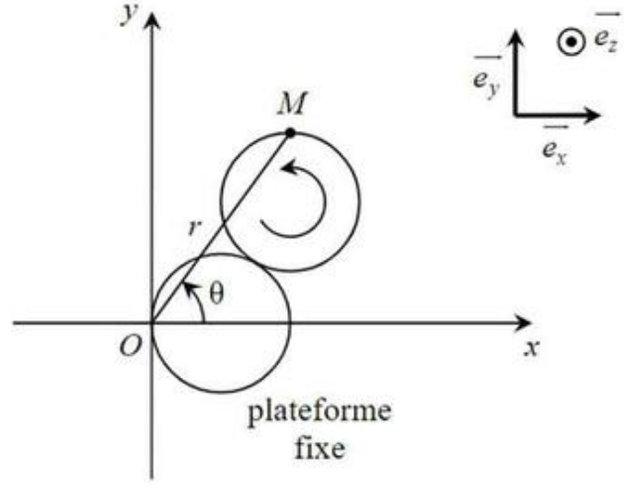
À partir de l'instant $t = 0$, les équations horaires de M sont, en coordonnées cartésiennes ; $x = R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$ et $z = -bt$, (R, ω et b sont des constantes positives).

1. Déterminer ses coordonnées cylindriques.
2. En déduire la nature et les caractéristiques de la trajectoire.
3. Déterminer le module de la vitesse de M.
4. Déterminer le module de l'accélération de M.

❑ Exercice 9.16. Toto sur un manège*

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, on définit un repère $Oxyz$ avec un axe (Oz) vertical ascendant. La figure ci-contre est une vue de dessus. Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe (Ox) ; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première.

Le petit Toto, assimilé à un point M, a pris place sur le manège, en un point de la circonférence de la plateforme mobile.



M décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal (Oxy) et décrite par l'équation polaire : $r = 2R(1+\cos\theta)$ et on suppose de plus que la vitesse angulaire ω est maintenue constante, soit $\theta = \omega t$ à partir de l'instant initial $t = 0$.

1. Trajectoire

Reproduire sur un schéma les axes du plan et le cercle représentant la plateforme fixe. Placer sur ce schéma les quatre points de la trajectoire de M correspondant aux angles $\theta = 0$ (ce point sera noté A), $\theta = \frac{\pi}{2}$ (point B), $\theta = \pi$ (point C), $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (point D), puis dessiner l'allure de la trajectoire complète (cette courbe s'appelle une cardioïde). Ajouter la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ au point D.

2. Vitesse

a) Déterminer, en fonction du temps t et des deux constantes R et ω, les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point D.

b) Calculer la norme de la vitesse.

c) En quel point Toto risque-t-il le plus d'être éjecté du manège (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?

d) En quel point Toto pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ?

3. Accélération

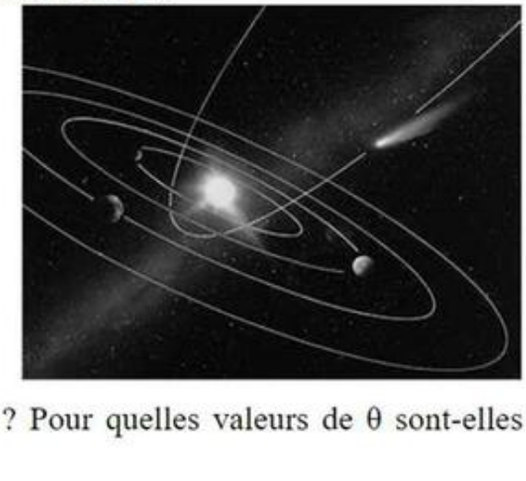
a) Déterminer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point D.

b) Calculer la norme de l'accélération.

c) Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit. En quel point Toto risque-t-il le plus de se sentir mal (accélération maximale) ?

❑ Exercice 9.17. Trajectoire elliptique d'une comète**

Une comète est un petit corps céleste décrivant une orbite elliptique dont l'un des foyers est le Soleil.
La comète est assimilée à un point M, et se déplace dans le plan (xOy) sur une ellipse d'équation polaire : $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où e et p sont des constantes (avec $0 < e < 1$). À $t = 0$, elle est au point P défini par $\theta = 0$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_P} = v_P \overrightarrow{e_y}$ (avec $v_P > 0$).



1. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de r ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ?

2. Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point P, le point A le plus éloigné de O, et également le point H d'ordonnée maximale et le point B d'ordonnée minimale. En M quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.

3. On suppose que l'accélération de M est toujours radiale. En déduire que $r^2\dot{\theta}$ est une constante (qu'on notera C). Déterminer C en fonction de p, e et v_P.

4. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_A}$ de M au point A.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 9.3. Commencer dans chaque cas par examiner l'équation la plus simple, et en déduire une information sur la trajectoire.
Exercice 9.5. Faire deux schémas plans pour la question 2 : l'un dans le plan méridien (OMP), l'autre dans le plan (Oxy), et introduire comme intermédiaire un vecteur unitaire $\vec{u}$ selon (OMP).
Exercice 9.9. Définir précisément la période pour la question 2.
Exercice 9.12. À la question 1, il faut relier x, y et z en éliminant le temps t : pour cela, développer les deux derniers sinus et soustraire. À la question 2, montrer que la distance OM est constante.
Exercice 9.13. Avec les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques, déterminer la norme (constante) de la vitesse, puis préciser sa direction.
Exercice 9.15. La trajectoire est une courbe complexe car elle n'est pas plane : analyser les informations données par chacune des coordonnées cylindriques pour en déduire l'allure de la courbe.
Exercice 9.16. La trajectoire doit passer par les quatre points trouvés et aussi avoir une forme raisonnable : on peut utilement se demander ce que signifie son nom.
Exercice 9.17. Pour tracer la trajectoire, commencer par bien placer les deux points trouvés à la question 1, et en déduire la position de l'ellipse sans a priori…

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai

2. Il n'y a aucune relation générale entre leurs directions.

4. Seul le vecteur $\overline{e_z}$ est fixe.

7. La norme du vecteur vitesse est *constante*, mais non nulle.

8. Seule sa *norme* est constante, mais sa direction tourne avec le point.

❑ Les erreurs classiques

– Les erreurs d'homogénéité sont fréquentes : bien vérifier par exemple que chaque terme d'accélération a les dimensions d'une longueur divisée par un temps au carré (chaque point de dérivation correspondant à une division par un temps).
– Attention, dans les bases cylindriques et sphériques, les *composantes* du vecteur position sont différentes des *coordonnées* du point : ne jamais écrire $\overrightarrow{OM} = r\overline{e_r} + \theta\overline{e_\theta} + z\overline{e_z}$ ou $\overrightarrow{OM} = r\overline{e_r} + \theta\overline{e_\theta} + \varphi\overline{e_\varphi}$! Ces formules sont non seulement fausses, elles ne sont même pas homogènes, car un angle est sans dimension !
– Il ne faut pas confondre un vecteur et sa norme. Pour qu'un vecteur soit constant, il faut que sa norme *et* sa direction restent constantes au cours du temps. Par exemple, si le vecteur vitesse est constant, alors le mouvement est rectiligne et uniforme, mais si seule la *norme* du vecteur vitesse est constante, le mouvement est uniforme mais non rectiligne.
– L'accélération étant la dérivée du vecteur vitesse, le *seul* cas où elle est *toujours nulle* est le mouvement *rectiligne uniforme*. Dans un mouvement circulaire uniforme par exemple, l'accélération est non nulle et dirigée vers le centre du cercle.
– Les vecteurs $\overline{e_r}$ et $\overline{e_\theta}$ de la base polaire son définis à partir du point O et non de la trajectoire, contrairement à la base de Frenet. Pour un mouvement quelconque, $\overline{e_r}$ *n'est pas orthogonal* à la trajectoire et $\overline{e_\theta}$ *n'est pas tangent* à la trajectoire. Le seul cas où ces propriétés sont valables est le mouvement *circulaire de centre* O : en effet, dans ce cas uniquement, les deux bases sont liées par $\overline{e_r} = -\vec{n}$ et $\overline{e_\theta} = \vec{\tau}$.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 9.1

1. $\boxed{v_x(t) = \dot{x}(t) = 2a_0 t}$; $\boxed{v_y(t) = \dot{y}(t) = -v}$; $\boxed{v_z(t) = \dot{z}(t) = 0}$ soit $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 2a_0 t\,\vec{e_x} - v\vec{e_y}$.

$\boxed{a_x(t) = \ddot{x}(t) = 2a_0}$; $\boxed{a_y(t) = \ddot{y}(t) = 0}$; $\boxed{a_z(t) = \ddot{z}(t) = 0}$ soit $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = 2a_0\vec{e_x}$.

2. $v(t) = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{4a_0^2 t^2 + v^2}$. AN à $t = 2$ s : $\boxed{v(2\text{ s}) = 8{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

3. $a(t) = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = 2a_0$ pour toute date t. AN $\boxed{a = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

⇨ *Méthode 9.3*

Exercice 9.2

1. $\boxed{v_r(t) = \dot{r} = 2a_0 t}$; $\boxed{v_\theta(t) = r\dot{\theta} = (a_0 t^2 + r_0)\omega}$; $\boxed{v_z(t) = \dot{z} = -v}$

soit $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 2a_0 t\,\vec{e_r} + \omega(a_0 t^2 + r_0)\vec{e_\theta} - v\vec{e_z}$.

$\boxed{a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2}$; $\boxed{a_\theta(t) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4a_0 t\omega}$; $\boxed{a_z(t) = \ddot{z} = 0}$

soit $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \left(2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2\right)\vec{e_r} + 4a_0 t\omega\vec{e_\theta}$.

2. $v(t) = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{4a_0^2 t^2 + (a_0 t^2 + r_0)^2\omega^2 + v^2}$. AN à $t = 1$ s : $\boxed{v(1\text{ s}) = 6{,}6\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

3. $a(t) = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\left(2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2\right)^2 + (4a_0 t\omega)^2}$. AN à $t = 0$: $\boxed{a(0) = 7\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

⇨ *Méthode 9.3*

Exercice 9.3

1. La trajectoire appartient à la droite $y = 2c$, donc le mouvement est rectiligne. D'autre part, le vecteur accélération est une constante ($\ddot{x} = 2a$ et $\ddot{y} = 0$). Le mouvement est donc rectiligne et uniformément accéléré.

2. On constate que r est constant, ce qui traduit un mouvement circulaire de centre O. De plus, la vitesse, qui se résume à la composante orthoradiale $v_\theta = r\dot{\theta}$, est constante. Le mouvement est donc circulaire et uniforme.

3. θ est constant, ce qui entraîne que le mouvement est rectiligne (selon une droite passant par O). Ensuite, le vecteur vitesse est une constante ($v_r = \dot{r} = b$ et $v_\theta = r\dot{\theta} = 0$), donc le mouvement est rectiligne et uniforme.

⇨ *Méthode 9.5*

Exercice 9.4

1. $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}}$.

2. $\boxed{\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}}$, $\boxed{\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}}$, et le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ est commun aux deux bases.

3. $\vec{v}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} + r\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z} + z\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t}$, avec $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ (car $\overrightarrow{e_z}$ est constant) et

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_y} = \dot{\theta}\left[-\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}\right] = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, donc $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$.

Ensuite on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps.

$\vec{a}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z} + \dot{z}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t}$, donc avec

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_y} = -\dot{\theta}\left[\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}\right] = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$ et les deux dérivées précédentes on obtient $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$.

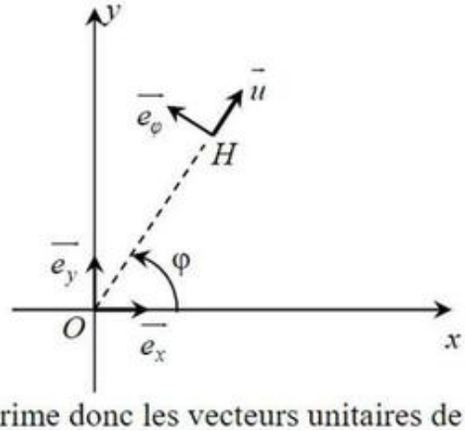
⇨ *Méthode 9.2*

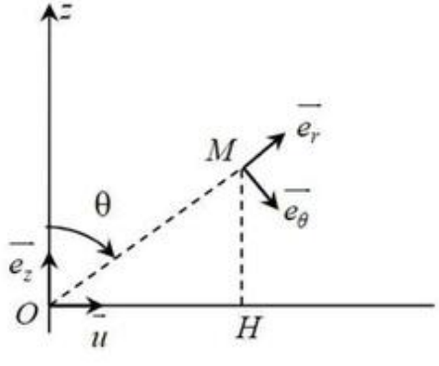
Exercice 9.5

1. $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}}$.

2. Pour y voir plus clair, utilisons deux plans particuliers : (Oxy) et le plan contenant O, M et H.

On utilisera le vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\left\|\overrightarrow{OH}\right\|}$ comme intermédiaire de calcul.





On exprime donc les vecteurs unitaires de la base sphérique dans la base cartésienne :

$\boxed{\overrightarrow{e_r} = \sin\theta\vec{u} + \cos\theta\overrightarrow{e_z} = \sin\theta\cdot\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\cdot\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z}}$;

$\boxed{\overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\vec{u} - \sin\theta\overrightarrow{e_z} = \cos\theta\cdot\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\cdot\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z}}$;

$\boxed{\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}}$.

3. Le vecteur vitesse s'obtient en dérivant le vecteur position :

$$\vec{v}(M)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\vec{e}_r\right)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\left[\cos\theta\cdot\cos\varphi\vec{e}_x+\cos\theta\cdot\sin\varphi\vec{e}_y-\sin\theta\vec{e}_z\right]+r\dot{\varphi}\left[-\sin\theta\cdot\sin\varphi\vec{e}_x+\sin\theta\cdot\cos\varphi\vec{e}_y\right] \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\vec{v}(M)=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi}.$$

Pour obtenir le vecteur accélération, on dérive à nouveau cette expression.

$$\vec{a}(M)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\vec{e}_r+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}+\left(\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}+\left(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+r\ddot{\varphi}\sin\theta+r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi$$

$$+r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Or $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$, $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\vec{e}_r+\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}=-\dot{\varphi}\left[\sin\theta\vec{e}_r+\cos\theta\vec{e}_\theta\right]$,

En remplaçant ces résultats dans l'expression de $\vec{a}(M)$, on trouve la « simple » expression :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}(M)=&(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta\\&+(2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi}+r\sin\theta\ddot{\varphi}+2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta})\vec{e}_\varphi\end{aligned}}.$$

Cette expression n'est pas à connaître et ne sera jamais utilisée en dynamique.

Exercice 9.6

Si on observe le mouvement rectiligne de la voiture sur un axe (Ox), en prenant pour origine des dates le début du freinage, sa vitesse est alors donnée par $v_x(t)=\dot{x}(t)=-at+v_0$ et son équation horaire par $x(t)=-a\frac{t^2}{2}+v_0t+x_0$. Elle s'arrête quand sa vitesse s'annule, soit pour une date t_a telle que $-at_\mathrm{a}+v_0=0$ donc $\boxed{t_\mathrm{a}=\frac{v_0}{a}}$. AN $\boxed{t_\mathrm{a}=6{,}0\ \mathrm{s}}$.

Ne pas oublier de convertir la vitesse en mètres par seconde (unité SI).

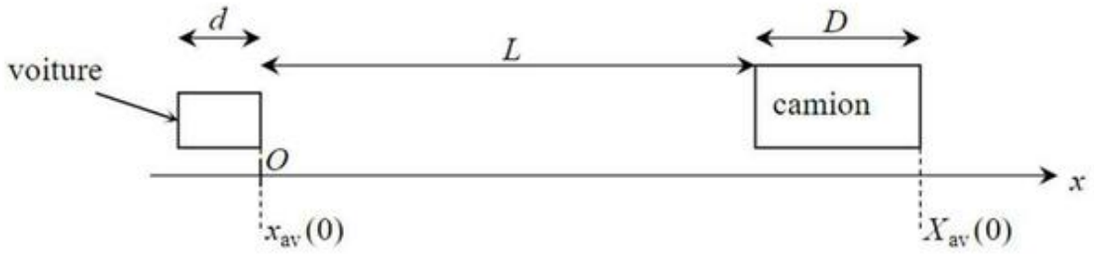
À cette date, son abscisse est donc $x(t_\mathrm{a})$ et la distance de freinage est

$d=x(t_\mathrm{a})-x_0=-a\frac{t_\mathrm{a}^2}{2}+v_0t_\mathrm{a}$, soit $\boxed{d=\frac{v_0^2}{2a}}$. AN $\boxed{d=74\ \mathrm{m}}$.

⇨ *Méthode 9.4*

Exercice 9.7

1. Un petit schéma de ce qui se passe à $t=0$ permettra d'y voir un peu plus clair.



La voiture est animée, pour $t \geq 0$, d'un mouvement rectiligne uniformément retardé :

$\ddot{x}_{av} = +a$; $\dot{x}_{av}(t) = at + \dot{x}_{av}(0) = at + v_0$; $x_{av}(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_{av}(0)$, soit $\boxed{x_{av}(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t}$.

Le camion est, quant à lui, animé d'un mouvement rectiligne uniforme. On obtient donc, en tenant compte des conditions initiales ($X_{av}(0) = L + D = 45$ m) : $\boxed{X_{av}(t) = v_0 t + L + D}$.

⇨ *Méthode 9.4*

2. On cherche donc une date t_1 telle que $x_{av}(t_1) - X_{av}(t_1) = \ell + d$ avec $\ell = 20$ m. Cela conduit à : $\frac{a}{2}t^2 + v_0 t - v_0 t - L - D = \ell + d$ d'où $\boxed{t = \sqrt{\frac{2(\ell + d + L + D)}{a}}}$. AN $\boxed{t_1 = 6{,}8 \text{ s}}$.

Alors la distance parcourue par le camion est $\boxed{C = X_{av}(t_1) - X_{av}(0) = v_0 t_1}$. AN $\boxed{C = 140 \text{ m}}$.

Exercice 9.8

1. À l'instant initial, les positions des deux véhicules sont les suivantes :



Pour la première voiture à partir de $t = 0$: $\ddot{x}_A = \text{cte}$ donc $\dot{x}_A(t) = \ddot{x}_A t + \text{cte}$, avec $\dot{x}_A(0) = v$ d'où $\dot{x}_A(t) = \ddot{x}_A t + v$; ensuite $\boxed{x_A(t) = \frac{\ddot{x}_A}{2}t^2 + vt + d}$ avec $x_A(0) = d$.

Pour la seconde à partir de $t_B = 2{,}0$ s : $\ddot{x}_B = \text{cte}$, $\dot{x}_B(t) = \ddot{x}_B t + \text{cte}$, avec $\dot{x}_B(t_B) = v$ d'où $\dot{x}_B(t) = \ddot{x}_B(t - t_B) + v$; ensuite $x_B(t) = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t - t_B)^2 + vt + \text{cte}$, avec $x_B(t_B) = x_B(0) + vt_B = vt_B$ donc $\boxed{x_B(t) = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t - t_B)^2 + vt}$.

Ces équations horaires ne sont valables que pendant la durée du freinage de chacune des voitures, donc avant leurs dates d'arrêt : $t'_A = -\frac{v}{\ddot{x}_A} = 15$ s pour la première, $t'_B = t_B - \frac{v}{\ddot{x}_B} = 32$ s pour l'autre.

⇨ *Méthode 9.4*

2. On cherche s'il existe une date t_c telle que $x_A(t_c) = x_B(t_c) \Leftrightarrow \frac{\ddot{x}_A}{2}t_c^2 + d = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t_c - t_B)^2$ ce qui donne l'équation du second degré : $(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B)t_c^2 + 2\ddot{x}_B t_B t_c + 2d - \ddot{x}_B t_B^2 = 0$. La résolution de cette

équation du second degré donne $\boxed{t_c = 11\ \text{s}}$. Cette date se trouve bien dans le domaine de validité des équations horaires.
Pour trouver l'abscisse du contact, on utilise, au choix, une des deux équations horaires : $\boxed{x_c = x_A(t_c) = x_B(t_c) = 300\ \text{m}}$.

Exercice 9.9

1. La fonction cosinus variant de -1 à $+1$, la coordonnée $x(t)$ est comprise entre $-X_m$ et $+X_m$: l'anneau parcourt donc une distance égale à $2X_m$, d'où $\boxed{X_m = 10\ \text{cm}}$.

2. La période T correspond au plus petit réel positif et non nul tel que pour toute date t on puisse écrire $x(t+T) = x(t)$, ce qui conduit à à : $\omega_0 T = n \cdot 2\pi$ (n entier). Les contraintes de la définition imposent de prendre $n = 1$ et donc et donc $\omega_0 T = 2\pi$, ou $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

AN $\boxed{\omega_0 = 13\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

3. À l'instant initial, $x(0) = X_m \cos(\varphi)$ d'où $\cos(\varphi) = x(0)/X_m$. AN $\boxed{\varphi = 60°}$. Finalement, on en déduit $\boxed{x(t_1) = 5{,}0\ \text{cm}}$.

> *Toutes les valeurs numériques de l'énoncé sont données avec deux chiffres significatifs. Les résultats des applications numériques doivent respecter la même contrainte et être fournies avec deux chiffres significatifs. Attention toutefois à réaliser les calculs intermédiaires à la calculatrice avec le plus de chiffres possible.*

4. En dérivant la position $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ par rapport aux temps, on obtient $\boxed{\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}$. La vitesse maximale est alors donnée par $\boxed{\dot{x}_{max} = \omega_0 X_m}$.

AN $\boxed{\dot{x}_{max} = 1{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

5. L'accélération est obtenue en dérivant la vitesse par rapport au temps : $\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$. On remarque que $\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x}$, soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$: c'est l'équation de l'oscillateur harmonique, cohérente avec la solution $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ proposée.

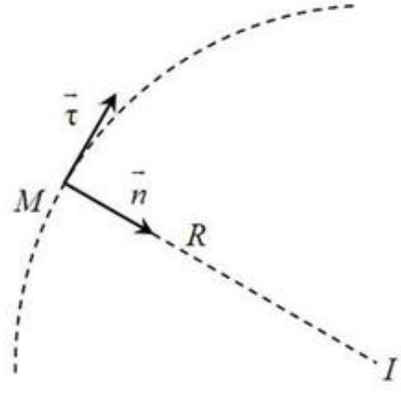
Exercice 9.10

1. La voiture est assimilée à un point matériel M décrivant une trajectoire circulaire de centre I et de rayon R : on utilise la base de Frenet.

Les éléments cinématiques sont $\vec{v}(M) = v\vec{\tau}$ et $\vec{a}(M) = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$ puisque la vitesse est constante en norme.

La norme de l'accélération est $\boxed{a_0 = \dfrac{V_0^2}{R} = 26\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

Cette valeur est supérieure à la limite de sécurité.



2. Si la voiture freine, la norme v de sa vitesse est maintenant une fonction du temps.

Son accélération devient donc $\vec{a}(M) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$.

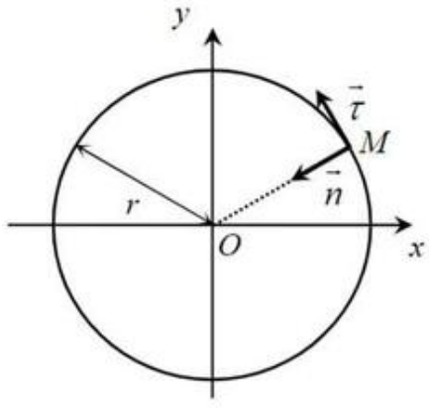
Au moment où le véhicule commence à freiner, sa vitesse est V_0, et la norme de son accélération est donc $a = \sqrt{\left(-\dfrac{V_0^2}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{a_0^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2} > a_0$. Le freinage va donc avoir pour première conséquence d'augmenter la norme de l'accélération.

3. En supposant que la bretelle est parcourue à vitesse constante, il faut que l'accélération ne dépasse pas la valeur maximale $a_{\max} = \dfrac{V_{\max}^2}{R}$. Donc $\boxed{V_{\max} = \sqrt{R\,a_{\max}}}$.

AN $\boxed{V_{\max} = 22\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}$.

Exercice 9.11

1. On note assimile le satellite à un point matériel M et on note O le centre de la Terre. Le mouvement de M a lieu dans le plan (Oxy). On note $r = R_T + h$ le rayon de la trajectoire, où h est l'altitude.



2. La vitesse s'écrit dans la base de Frenet : $\vec{v}(M) = v\vec{\tau}$.

La norme du vecteur vitesse étant constante, c'est simplement le rapport de la distance parcourue pendant une période (circonférence du cercle) par la période : $\boxed{v = \dfrac{2\pi r}{T}}$. AN $\boxed{v = 3{,}1\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}}$.

3. L'accélération s'écrit dans la base de Frenet : $\vec{a}(M) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$ soit ici $\vec{a}(M) = \dfrac{v^2}{r}\vec{n}$ car la vitesse est constante en norme, et le rayon de courbure en tout point d'un cercle est le rayon du cercle. La norme de l'accélération est donc : $\boxed{a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}}$. AN $\boxed{a = 0{,}22\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}$.

Exercice 9.12

1. On cherche à éliminer t entre les coordonnées. On développe les sinus :

$$y(t) = a\left[\sin(\omega t)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\omega t)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = a\left[\frac{\sin(\omega t) + \sqrt{3}\cos(\omega t)}{2}\right]$$

$$z(t) = a\left[\sin(\omega t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(\omega t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = a\left[\frac{\sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{2}\right]$$

et on fait la différence : $y(t) - z(t) = a\sin(\omega t) = x(t)$.

La trajectoire de M est donc contenue dans le plan d'équation $\boxed{x - y + z = 0}$ qui passe par O.

⇨ *Méthode 9.5*

2. $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2\left[\sin^2(\omega t) + \left(\frac{\sin(\omega t) + \sqrt{3}\cos(\omega t)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{2}\right)^2\right]$

$= \frac{a^2}{4}\left[6\sin^2(\omega t) + 6\cos^2(\omega t)\right] = \frac{3a^2}{2}$.

Le mouvement a donc lieu sur un cercle de centre O et de rayon $\boxed{R = a\sqrt{\frac{3}{2}}}$.

3. Le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ a pour composantes : $v_x = \dot{x} = a\omega\cos(\omega t)$,

$v_y = \dot{y} = a\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ et $v_z = \dot{z} = a\omega\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$. On en déduit :

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (a\omega)^2\left[\cos^2(\omega t) + \left(\frac{\cos(\omega t) - \sqrt{3}\sin(\omega t)}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\cos(\omega t) - \sqrt{3}\sin(\omega t)}{2}\right)^2\right].$$

Le développement des carrés fait disparaître les doubles produits et on obtient :

$v^2 = (a\omega)^2\left[\cos^2(\omega t) + \frac{\cos^2(\omega t) + 3\sin^2(\omega t)}{2}\right] = \frac{3}{2}(a\omega)^2$ soit $\boxed{v = \sqrt{\frac{3}{2}}a\omega = \text{cte}}$.

Il s'agit donc d'un mouvement circulaire uniforme.

4. La période T est telle que $\overrightarrow{OM}(t+T) = \overrightarrow{OM}(t)$; les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ ayant la même période, c'est aussi la période T recherchée, donc $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$.

Exercice 9.13

1. Si on utilise la base polaire, l'accélération s'écrit, en tenant compte des données de l'énoncé, $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} = -k\left(\frac{b}{r}\right)^n\vec{e_r}$. Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon $r = b = \text{cte}$, $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ donc ces expressions entraînent $b\dot{\theta}^2 = k$ et $b\ddot{\theta} = 0$. On en déduit donc $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{k}{b}}$ et $v = r|\dot{\theta}| = \sqrt{kb} = \text{cte}$ (mouvement uniforme). La vitesse initiale doit donc avoir la valeur $\boxed{v_0 = \sqrt{kb}}$ pour norme, mais cette condition n'est pas suffisante : il faut également (propriété du mouvement circulaire) qu'elle soit orthogonale au vecteur position initial $\overrightarrow{OM_0}$.

2. La fréquence (inverse de la période) est définie par $f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v_0}{2\pi b}$ soit $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{b}}}$.

Exercice 9.14

1. On connaît les composantes du vecteur accélération : $a_x = \ddot{x} = 0$; $a_y = \ddot{y} = -a$; $a_z = \ddot{z} = 0$.

On peut donc déterminer celles du vecteur vitesse, à chaque instant, par intégration, en déterminant les constantes à l'aide des conditions initiales :

$v_x = \dot{x} = V_0 \cos(\alpha)$; $v_y = \dot{y} = -at + V_0 \sin(\alpha)$; $v_z = \dot{z} = 0$.

Une nouvelle intégration, en tenant compte toujours des conditions initiales, permet d'obtenir les équations horaires : $\boxed{x(t) = V_0 \cos(\alpha) t \ ; \ y(t) = -\frac{a}{2}t^2 + V_0 \sin(\alpha) t \ ; \ z(t) = 0}$.

⇨ *Méthode 9.4*

2. L'une des équations cartésiennes est $\boxed{z = 0}$: le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).

Il suffit d'éliminer le temps entre les deux premières équations pour obtenir l'équation de la trajectoire : $t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)}$ d'où $\boxed{y(x) = -\frac{a}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x}$.

La trajectoire est parabolique, d'axe parallèle à (Oy).

⇨ *Méthode 9.5*

3. Pour que Lulu attrape le frisbee, il faut que $y(D) = 0$, d'où $V_0 = \sqrt{\frac{aD}{2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}}$ soit encore $\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{aD}{\sin(2\alpha)}}}$. (Pour $\alpha = 45°$, l'expression se simplifie en $V_0 = \sqrt{aD}$.)

Exercice 9.15

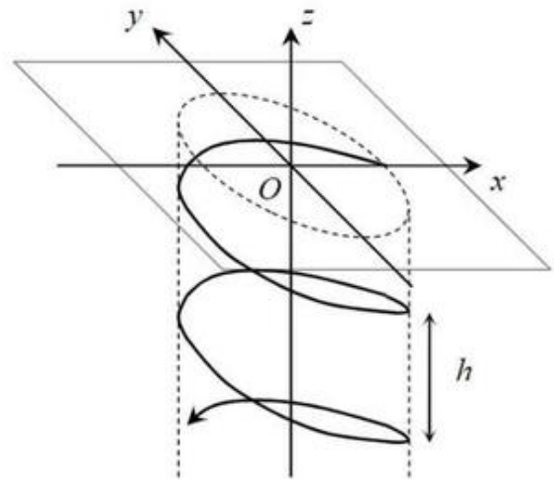
1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc $\boxed{r = R = \text{cte}}$. $\tan\theta = \frac{y}{x} = \tan(\omega t)$ avec $\cos\theta = \frac{x}{R} = \cos(\omega t)$, donc $\boxed{\theta = \omega t}$.

⇨ *Méthode 9.1*

2. $r = R = \text{cte}$ donc la trajectoire se trouve sur un cylindre d'axe (Oz) et de rayon R.

θ augmente régulièrement donc Toto tourne autour de l'axe, et z diminue régulièrement donc Toto descend aussi le long de l'axe.

Il s'agit donc globalement d'une <u>hélice circulaire</u> d'axe (Oz), de rayon R et de pas $h=\dfrac{2\pi b}{\omega}$ (le pas est la distance dont Toto descend à chaque tour).



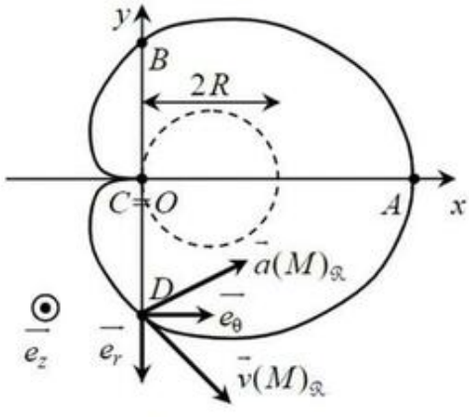
3. $v_x=\dot{x}=-\omega R\sin(\omega t)$, $v_y=\dot{y}=\omega R\cos(\omega t)$ et $v_z=\dot{z}=-b$ donc $\boxed{v=\sqrt{\omega^2R^2+b^2}}$. On constate que le mouvement est uniforme.

4. $a_x=\ddot{x}=-\omega^2R\cos(\omega t)$, $a_y=\ddot{y}=\omega^2R\sin(\omega t)$ et $a_z=\ddot{z}=0$ donc $\boxed{a=\omega^2R}$. Le module de l'accélération est également constant au cours du mouvement.

⇨ *Méthode 9.3*

Exercice 9.16

1.



Point A : $\theta=0$, $r=4R$. Point B : $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $r=2R$. Point C : $\theta=\pi$, $r=0$ (donc c'est l'origine O). Point D : $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$, $r=2R$.

Pour chaque valeur de θ il y a une valeur unique de r, donc cette courbe ne peut pas comporter de « boucle »... D'autre part, r diminue quand θ varie de 0 à π, puis augmente quand θ varie de π à 2π.

2. a) $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\dot{z}\vec{e}_z$ avec $\dot{\theta}=\omega$ et $\dot{r}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=-2R\sin\theta\dot{\theta}$ donc

$\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}=-2R\sin(\omega t)\,\omega\vec{e}_r+2R(1+\cos(\omega t))\,\omega\vec{e}_\theta}$.

En D la vitesse est donc $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}=2R\omega\vec{e}_r+2R\omega\vec{e}_\theta$.

b) $v(M)_{\mathcal{R}}=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2}=\sqrt{4R^2\sin^2(\omega t)\omega^2+4R^2(1+\cos(\omega t))^2\omega^2}$

soit $\boxed{v(M)_{\mathcal{R}}=2R\omega\sqrt{2+2\cos(\omega t)}=4R\omega\left|\cos\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\right|}$.

c) Le maximum de $v(M)_{\mathcal{R}}$ est $v_{\max} = 4R\omega$ pour $\omega t = 0 + 2k\pi$, c'est-à-dire au point A. Le vecteur vitesse est alors $\overrightarrow{v_A} = 4R\omega\overrightarrow{e_y}$ donc Toto serait éjecté dans la direction et le sens de (Oy).

d) $v(M)_{\mathcal{R}}$ s'annule pour $\omega t = \pi + 2k\pi$, c'est-à-dire au point C (point O).

3. a) $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$

avec $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2R\omega^2\cos(\omega t) - 2R(1+\cos(\omega t))\omega^2 = -4R\omega^2\cos(\omega t) - 2R\omega^2$ et $\ddot{\theta} = 0$ donc $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -2R\omega^2[2\cos(\omega t)+1]\overrightarrow{e_r} - 4R\omega^2\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}}$.

En D l'accélération est donc $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -2R\omega^2\overrightarrow{e_r} + 4R\omega^2\overrightarrow{e_\theta}$.

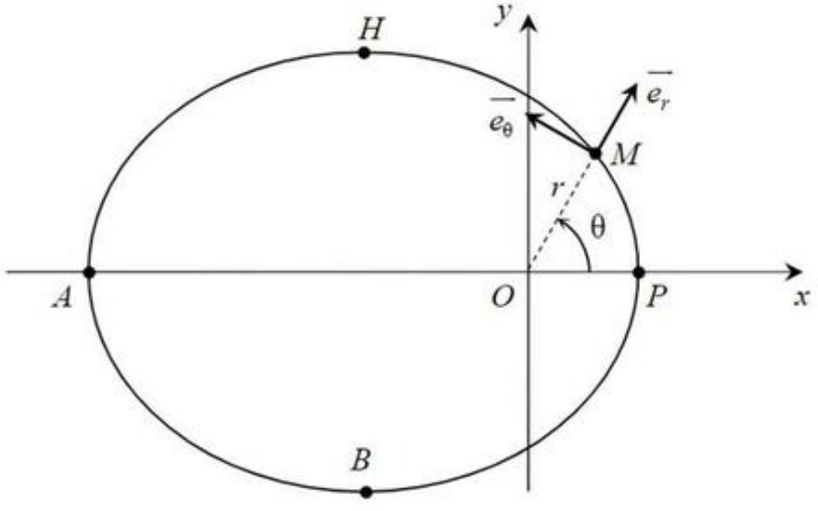
b) $a(M)_{\mathcal{R}} = 2R\omega^2\sqrt{(2\cos(\omega t)+1)^2 + 4\sin^2(\omega t)}$ soit $\boxed{a(M)_{\mathcal{R}} = 2R\omega^2\sqrt{5+4\cos(\omega t)}}$.

c) Le maximum de $a(M)_{\mathcal{R}}$ est $a_{\max} = 6R\omega^2$ pour $\omega t = 0$, c'est-à-dire au point A.

Exercice 9.17

1. La valeur maximale de r est $\boxed{r_{\max} = \dfrac{p}{1-e}}$, obtenue pour $\boxed{\theta = \pi}$; la valeur minimale est $\boxed{r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}}$, correspondant à $\boxed{\theta = 0}$ (c'est donc la valeur de r en P).

2.



L'origine O n'est pas le centre de symétrie de l'ellipse ! Il ne faut donc pas essayer de mettre à tout prix les points B et H sur l'axe (Oy)... D'autre part, les vecteurs unitaires ne sont ni tangents, ni normaux à la trajectoire : c'est encore plus évident si on les fait apparaître au point H ou au point B.

3. Dans la base polaire, l'accélération s'écrit $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$. Le fait que cette accélération soit radiale entraîne qu'à chaque instant, $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$.

Pour montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante, calculons sa dérivée :

$\dfrac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cte}}$.

Initialement : $r_0 = r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$ (donc $\dot{r} = 0$) ; alors $\vec{v}(M) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = \vec{0} + r_{\min}\dot{\theta}_0\,\vec{e_y} = v_P\,\vec{e_y}$ donc $\dot{\theta}_0 = \dfrac{v_P}{r_{\min}}$. On en déduit $\boxed{C = r_{\min} v_P = \dfrac{p}{1+e} v_P}$.

4. Aux points A et P, $\dot{r} = 0$ et donc $v_A = r_A\dot{\theta}_A$ et $v_P = r_P\dot{\theta}_P$, soit $\dfrac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_P} = \dfrac{r_P v_A}{r_A v_P}$. Par ailleurs, la loi démontrée dans la question précédente appliquée en A et P donne $\dfrac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_P} = \left(\dfrac{r_P}{r_A}\right)^2$. Par identification, on trouve donc que $r_A v_A = r_P v_P$, d'où $\boxed{v_A = \dfrac{1-e}{1+e} v_P}$.

Chapitre 10

Principes de la dynamique

UN SCIENTIFIQUE



Les découvertes d'**Isaac Newton** (1643-1727), tant en physique qu'en mathématiques, ont révolutionné ces deux disciplines. En 1672, il découvre la nature de la lumière blanche, superposition de raies colorées. Dans son ouvrage *Principia mathematica*, qu'il publie tardivement en 1687, il établit la loi de la gravitation universelle et surtout les trois lois générales de la dynamique. En mathématiques, Newton introduit, avant Leibniz, le calcul différentiel et intégral.

Un peu d'histoire

Non seulement Galilée a mis en évidence le principe d'inertie mais il a compris l'importance des mathématiques pour décrire les lois de la nature. Après lui, divers savants ont emprunté la voie qu'il avait tracé pour l'étude des mouvements. Grâce à des observations précises de son maître Tycho Brahe, Johannes Kepler a montré le parcours elliptique des planètes et il a énoncé la loi des aires ; Christiaan Huygens, de son côté, a étudié les mouvements du pendule et les chocs élastiques. Il manquait une explication globale de tous ces phénomènes. Ce fut l'œuvre d'Isaac Newton ! Le savant anglais a compris le rôle des forces dans les perturbations du mouvement d'un solide. Il a mis en évidence l'existence d'une force gravitationnelle invisible qui expliquait le mouvement des astres et a su mettre en équation son action, ainsi que celle de toute autre force, permettant ainsi de prévoir la trajectoire d'un mobile.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les notions de point matériel, de masse, de force
- ▷ La quantité de mouvement d'un point matériel, d'un système de points
- ▷ Les caractéristiques des forces usuelles : poids, réaction d'un support, tension d'un ressort ou d'un fil inextensible, force de frottement fluide
- ▷ Les trois lois de Newton
- ▷ Le mouvement relatif de deux référentiels galiléens

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur un point matériel et donner des informations sur leurs composantes
- ▷ Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur un système de points matériels en distinguant forces intérieures et forces extérieures
- ▷ Appliquer la deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) pour obtenir les équations du mouvement
- ▷ Exploiter les équations du mouvement pour en déduire les équations horaires ou bien la valeur d'une force
- ▷ Étudier le mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur
- ▷ Établir l'équation du mouvement du pendule simple, et justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire
- ▷ Étudier un oscillateur mécanique harmonique ou amorti par frottement visqueux
- ▷ Formuler une hypothèse quant au glissement ou non d'un solide, et la valider en utilisant les lois de Coulomb du frottement

■■ Résumé de cours

■ Notions fondamentales de la dynamique

❑ Modèle du point matériel

Un **point matériel** est un objet physique pouvant être assimilé à un point mathématique, c'est-à-dire dont la position est entièrement repérée par trois coordonnées. C'est le cas notamment si ses dimensions sont négligeables à l'échelle d'observation, et si son orientation n'intervient pas.
Le mouvement d'un solide en translation peut aussi s'étudier comme celui d'un point matériel (tous ses points ayant la même vitesse et la même accélération à tout instant).

❑ Masse

La masse (inertielle) est une grandeur scalaire positive, intrinsèque, extensive et conservative, qui caractérise l'**inertie** d'un corps, c'est-à-dire la difficulté à le mettre en mouvement ou à modifier son mouvement. L'unité SI de masse est le kilogramme (kg).

❑ Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m, dans un référentiel $\mathcal{R}$, est le vecteur : $\boxed{\vec{p}(M)_{\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}$.

❑ Action mécanique et force

Action mécanique

On appelle **action mécanique** toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.

Force

En mécanique classique, une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un **vecteur force** : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité SI de force est le newton (N).

Propriétés

– Les forces ne dépendent pas du référentiel.
– Les forces sont additives : deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées sur un point matériel sont équivalentes à une force unique $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.
– Un point matériel est **isolé** (mécaniquement) s'il n'est soumis à aucune force.
Il est **pseudo-isolé** s'il est soumis à des forces dont la somme vectorielle est nulle.

Troisième loi de Newton : principe des interactions

Si deux points matériels M_1 et M_2 sont en interaction :

$$\boxed{\vec{F}_{M_1 \to M_2} = -\vec{F}_{M_2 \to M_1} \text{ et ces forces sont colinéaires à la droite } (M_1M_2)}.$$

❑ Système de points matériels

Un système S (discret) est constitué de N points matériels M_i, de masses m_i, i étant un entier compris entre 1 et N. On note m_{tot} la masse totale du système : $m_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

La masse d'un système fermé (contenant toujours les mêmes points matériels) reste constante.

Centre d'inertie du système

On appelle **centre d'inertie**, **centre de masse**, ou **barycentre**, du système S le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}} \text{ ou encore } \boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}.$$

Quantité de mouvement du système

La quantité de mouvement du système S dans R est définie par $\vec{p}(S)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}$.

Elle peut également être exprimée en utilisant le centre d'inertie : $\boxed{\vec{p}(S)_{\mathcal{R}} = m_{tot} \vec{v}(G)_{\mathcal{R}}}$.

Forces intérieures et extérieures

Dans l'inventaire des forces qui s'exercent sur un système, on distingue :
- les forces intérieures, exercées par une partie du système sur une autre partie du système ;
- les forces extérieures, exercées sur tout ou une partie du système par des corps extérieurs.

Le principe des interactions permet d'écrire que $\sum \overrightarrow{F_{int}} = \vec{0}$.

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force *extérieure*, et pseudo-isolé s'il est soumis à des forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle : dans les deux cas, $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$.

■ Première et deuxième lois de Newton

❑ Première loi de Newton : principe d'inertie

Énoncé

Il existe une classe de référentiels, appelés **galiléens** ou **inertiels**, par rapport auxquels le mouvement de tout point matériel isolé est rectiligne et uniforme.

Propriété

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Exemples

- En pratique, le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen dans la majorité des expériences usuelles (à l'échelle du laboratoire).
- On utilise le **référentiel géocentrique** (ayant le centre de la Terre pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines) pour étudier les mouvements de corps autour de la Terre.
- On utilise le **référentiel héliocentrique** (ayant le centre du Soleil pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines) pour étudier les mouvements des astres du système solaire.

❑ Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Énoncé

Pour un point matériel M de masse m, soumis à des forces de résultante $\sum \vec{F}$, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen : $\boxed{\sum \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}}$ ou encore $\boxed{\sum \vec{F} = m\,\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}}$ (forme utile en pratique).

Conséquence : théorème de la quantité de mouvement (TQM) pour un système

Pour un système S de points matériels, soumis à des forces extérieures de résultante $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen : $\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}(S)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}}$.

On peut aussi l'écrire : $\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}}\,\vec{a}(G)_{\mathcal{R}}}$ (appelé aussi **théorème du centre de masse**).

■ Modélisation des forces usuelles

❑ Tension d'un fil inextensible

Un point matériel accroché à un fil inextensible subit une force de tension, selon la direction du fil et orientée du point vers le fil ; sa norme est une inconnue a priori.

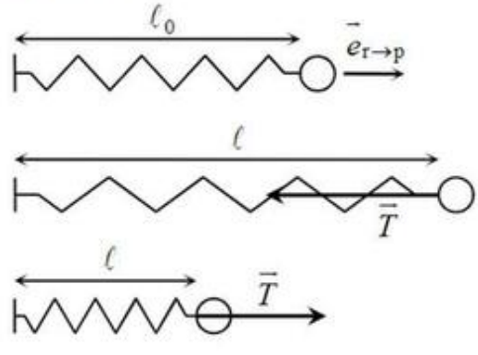
Un fil idéal (sans masse) exerce des tensions opposées (de même norme) à ses deux extrémités. Si le fil passe sur une poulie idéale (sans masse et sans frottements), la tension change de direction mais sa norme reste la même aux deux extrémités.

❑ Tension (ou force de rappel élastique) d'un ressort

Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos ℓ_0 et son coefficient de raideur k. Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur produit sur chacune de ses extrémités la force :

$\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_{\text{r}\to\text{p}}}$ (loi de Hooke)

où ℓ est sa longueur et $\vec{e}_{\text{r}\to\text{p}}$ le vecteur unitaire de la direction du ressort, orienté du ressort vers le point d'attache considéré.



❑ Réaction d'un support solide

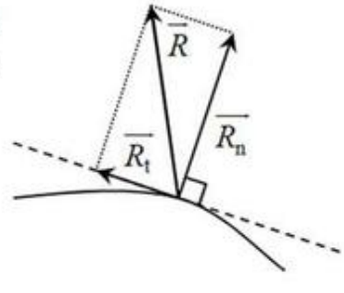
Lorsqu'un point matériel ou un solide en translation se déplace sur un support, celui-ci exerce sur lui une force de contact $\vec{R}$, appelée aussi **réaction** du support. On peut la décomposer en deux termes :

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_{\text{n}} + \vec{R}_{\text{t}}}$$

avec $\vec{R}_{\text{n}}$ la **réaction normale** (orthogonale au support)

$\vec{R}_{\text{t}}$ la **réaction tangentielle** ou **force de frottement solide**.

Dans le modèle *sans frottement*, $\vec{R}_{\text{t}} = \vec{0}$, soit $\vec{R} = \vec{R}_{\text{n}}$.



❑ Forces de pression

– La force de pression exercée par un fluide sur une surface S plane d'un solide est $\boxed{\vec{F} = PS\vec{n}}$ où P est la pression du fluide, $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface, du fluide vers le solide.

– La résultante des forces de pression sur un corps totalement entouré par un fluide au repos est la **poussée d'Archimède**, égale à l'opposé du poids du « fluide déplacé ».

❑ Force de frottement fluide (ou visqueux)

Quand un objet est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une force de frottement de direction opposée au vecteur vitesse de l'objet par rapport au fluide.

– Pour une vitesse faible ou un fluide très visqueux, on peut adopter un modèle linéaire : $\boxed{\vec{F_f} = -h\vec{v}(M) = -hv(M)\vec{\tau}}$ avec $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent de la base de Frenet.

– Pour une vitesse plus élevée, on peut adopter un modèle quadratique : $\boxed{\vec{F_f} = -hv(M)^2\vec{\tau}}$.

❑ Force de gravitation

Deux corps quelconques exercent l'un sur l'autre une force de gravitation attractive, proportionnelle à leurs masses. Pour deux corps ponctuels A et B (ou deux sphères de centres A et B) :

$\boxed{\vec{F}_{g\,A\to B} = -\vec{F}_{g\,B\to A} = -G\dfrac{m_A m_B}{AB^2}\vec{e}_{A\to B}}$ avec $G = 6{,}674\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ la constante de gravitation universelle et $\vec{e}_{A\to B}$ un vecteur unitaire orienté de A vers B.

❑ Poids

Au voisinage de la Terre, un corps de masse m subit une force appelée le poids : $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$ avec $\vec{g}$ le **champ de pesanteur**, souvent considéré comme uniforme (de norme $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$). Il a pour origine principale l'attraction gravitationnelle de la Terre.

❑ Force électrique (coulombienne)

Deux corps chargés exercent l'un sur l'autre une force électrique, attractive ou répulsive, proportionnelle à leurs charges. Pour deux corps ponctuels A et B (ou sphères de centres A et B) :

$\boxed{\vec{F}_{\text{él}\,A\to B} = -\vec{F}_{\text{él}\,B\to A} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_A q_B}{AB^2}\vec{e}_{A\to B}}$ avec $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$ la permittivité du vide.

⇨ Méthode 10.1. Écriture des composantes des forces
⇨ Méthode 10.2. Inventaire des forces pour un point matériel ou un système
⇨ Méthode 10.5. Détermination de composantes de forces inconnues

■ Exemples d'études de mouvements

❑ Chute dans le champ de pesanteur

C'est un problème dans lequel un point matériel M est mobile dans l'espace sans aucune liaison.

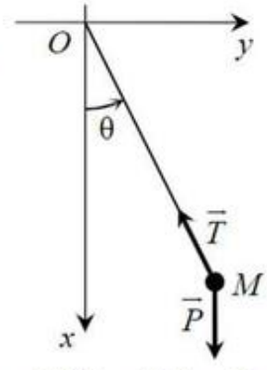
– Si on néglige les frottements de l'air, il n'est soumis qu'à son poids : il s'agit alors d'un mouvement à vecteur accélération constant, donnant une trajectoire parabolique.

– Si on tient compte des frottements visqueux dus à l'air, l'équation différentielle ne peut être résolue de façon analytique que dans le cas d'une force linéaire (proportionnelle à la vitesse). Mais on peut exploiter l'équation différentielle sans la résoudre analytiquement : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite (indépendante des conditions initiales), utilisation des résultats obtenus par simulation numérique.

❑ Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M, de masse m, lié à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe en un point O.

Si on ne considère que le mouvement dans un plan vertical fixe, on repère la position de M avec l'angle θ que forme, à chaque instant, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale descendante. M étant soumis à son poids et à la tension du fil, le PFD permet d'établir l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$.

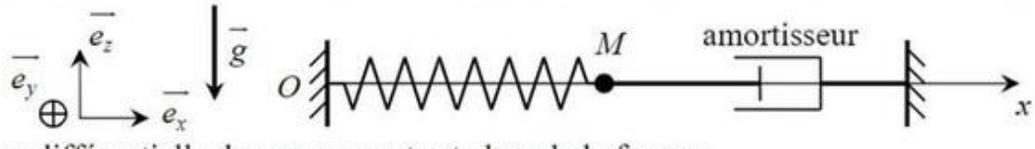


Si l'angle θ est petit ($\theta \ll 1$), alors $\sin\theta \approx \theta$ et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$.

⇨ **Méthode 10.3. Obtention des équations du mouvement**
⇨ **Méthode 10.4. Résolution des équations du mouvement**

❑ Oscillateur amorti par frottement visqueux

Un point matériel M de masse m est fixé à un ressort et peut glisser sur un support horizontal. On suppose qu'il existe des frottements visqueux, soit dus au fluide environnant (généralement l'air), soit volontairement introduits à l'aide d'un amortisseur ; on les modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}(M)$, où $\vec{v}(M)$ est la vitesse de M par rapport au fluide exerçant ces frottements.



L'équation différentielle du mouvement est alors de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2\, x_{\text{éq}} \qquad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}.$$

La résolution de ce type d'équation différentielle a été vue au chapitre **5**.

Une excitation sinusoïdale (mouvement de O par exemple) peut aussi conduire à un régime sinusoïdal forcé, et notamment à des phénomènes de résonance (voir chapitre **6**) et de filtrage (voir chapitre **7**).

■ Comment écrire les informations initiales sur les forces appliquées au point matériel ou au système ?

❑ Méthode 10.1. Écriture des composantes des forces

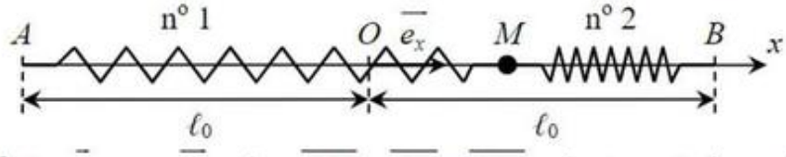
– Pour certaines interactions il existe une formule déterminant complètement le vecteur force. Pour d'autres, il existe seulement une information sur leur direction et leur sens, mais leur norme est inconnue a priori.
– Dans les deux cas, l'application du PFD nécessite de projeter les différentes forces, c'est-à-dire de déterminer leurs composantes dans une certaine base, généralement $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$. Ces projections peuvent nécessiter l'utilisation de formules simples de trigonométrie.

⇨ Exercices 10.1, 10.2, 10.5 à 10.22

– Force de rappel d'un ressort

Appliquer rigoureusement la formule $\overrightarrow{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r\to p}$, ce qui nécessite de bien identifier le vecteur unitaire $\vec{e}_{r\to p}$ et la longueur ℓ du ressort en fonction des notations de l'exercice (il s'agit généralement de l'un des vecteurs unitaires de la base utilisée).

Considérons par exemple un objet M quasi ponctuel pouvant se déplacer sur un axe horizontal (Ox), entre deux points A et B fixes tels que $\overrightarrow{AB} = 2\ell_0\overrightarrow{e_x}$. L'abscisse $x = 0$ (origine O) correspond au milieu de $[AB]$. M étant lié au point A par un ressort idéal n° 1 de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et au point B par un ressort n° 2, de même raideur k mais de longueur à vide *nulle*, on cherche les forces $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ exercées par ces deux ressorts sur M.



Pour le ressort n° 1 : $\vec{e}_{r1\to p} = \overrightarrow{e_x}$, $\ell_1 = \overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = \ell_0 + x$ et $\ell_{0,1} = \ell_0$ donc la formule donne $\overrightarrow{T_1} = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$ soit $\overrightarrow{T_1} = -k\,x\,\overrightarrow{e_x}$.

Pour le ressort n° 2 : $\vec{e}_{r2\to p} = -\overrightarrow{e_x}$, $\ell_2 = \overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = \ell_0 - x$ et $\ell_{0,2} = 0$ donc $\overrightarrow{T_2} = -k(\ell_0 - x - 0)\left(-\overrightarrow{e_x}\right)$ soit $\overrightarrow{T_2} = +k(\ell_0 - x)\overrightarrow{e_x}$.

Ces deux formules sont valables quel que soit le signe de x.

– Réaction d'un support

A priori, la réaction d'un support quelconque s'écrit $\vec{R} = R_x\vec{e_x} + R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}$ avec trois composantes inconnues ; mais l'absence de frottement permet d'éliminer la ou les composante(s) tangentielle(s) au support.

Sur le schéma précédent, supposons que M est mobile sans frottement sur la tige AB. Parmi les trois vecteurs unitaires $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$, le premier est tangent à la tige et les deux autres sont normaux : la réaction normale de la tige s'écrit donc $\vec{R} = R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}$.

Si maintenant on considère un point M mobile librement sur un plan (Oxy), toujours sans frottement, cette fois les deux vecteurs $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ sont tangents au support et seul $\vec{e_z}$ est orthogonal : la réaction normale du plan s'écrit donc $\vec{R} = R_z\vec{e_z}$.

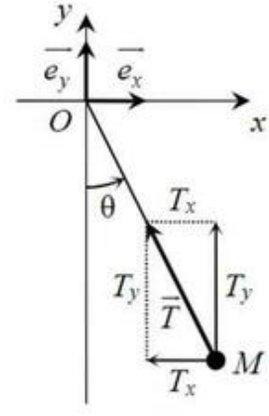
– Tension d'un fil inextensible

Lorsque le fil n'est pas parallèle à l'un des axes du repère, il faut projeter la tension sur deux (voire trois) directions.

Dans le cas ci-contre d'un fil contenu dans le plan (Oxy), on cherche la tension sous la forme $\vec{T} = T_x\vec{e_x} + T_y\vec{e_y}$ (la composante sur $\vec{e_z}$, orthogonal au plan de figure, est nulle).

On commence par dessiner le vecteur $\vec{T}$ dont on connaît la direction et le sens, seule sa norme T étant inconnue. On voit alors que la composante T_x est négative (car orientée en sens contraire du vecteur $\vec{e_x}$) et que T_y est positive (dans le même sens que $\vec{e_y}$).

Les valeurs de ces deux composantes sont données par les formules de trigonométrie :



$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{|T_x|}{T} \text{ d'où } T_x = -T\sin\theta \ ; \ \cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{|T_y|}{T} \text{ d'où } T_y = +T\cos\theta .$$

❑ Méthode 10.2. Inventaire des forces pour un point matériel ou un système

C'est une étape capitale en mécanique, c'est pourquoi il faut la traiter avec beaucoup de rigueur.

– Il faut d'abord définir le système dont on veut étudier le mouvement et vérifier qu'il est assimilable à un point matériel ou à un système de points matériels.

– Ensuite faire la liste des interactions entre le système et l'extérieur. On peut, pour s'aider, se poser les questions suivantes : le mouvement a-t-il lieu au voisinage de la surface terrestre ? le point matériel est-il lié (fil, ressort), ou au contact d'un support ? le point matériel a-t-il une charge électrique ?

– Dans le cas d'un point matériel, il faut prendre en compte les forces exercées par l'extérieur sur le point et non les forces exercées par le point sur l'extérieur !

– Dans le cas d'un système de points matériels, il faut prendre en compte toutes les forces exercées par l'extérieur sur les points du système. Les forces intérieures (entre deux points du système) ne sont pas prises en compte pour l'application de la deuxième loi de Newton.
– Il faut ensuite identifier les caractéristiques de ces forces et les exprimer dans la base choisie (méthode précédente), afin de pouvoir appliquer la deuxième loi de Newton (méthode suivante).

⇨ Exercices 10.3 à 10.22

– Inventaire des forces sur un point matériel

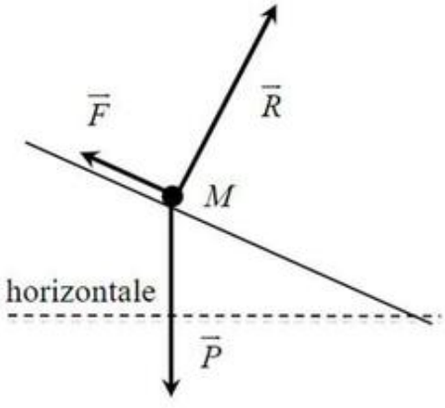
Un skieur, assimilable à un point matériel M, descend une piste de ski selon un mouvement rectiligne. Les frottements entre le skieur et la piste sont négligés.

– La piste de ski étant située a priori sur Terre, le skieur est soumis à son poids $\vec{P}$.

– L'action de la piste sur le skieur est modélisée par une force $\vec{R}$ orthogonale à la piste puisque les frottements solides sont négligés.

– Rien n'étant dit sur les frottements de l'air, on peut supposer l'existence d'une force $\vec{F}$ opposée au vecteur vitesse et proportionnelle à sa norme.

L'inventaire des forces sur le skieur est $\{\vec{P}, \vec{R}, \vec{F}\}$.



– Inventaire des forces sur un système (déformable)

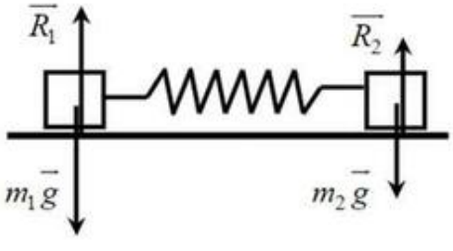
Deux palets autoporteurs de masses m_1 et m_2 liés par un ressort de masse négligeable se déplacent sur une table horizontale à coussin d'air, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On étudie mécaniquement le système {palets + ressort}.

– Chaque palet est soumis à son poids.

– La table exerce une réaction sur chaque palet, orthogonale à sa surface, car le coussin d'air permet de supposer les frottements solides négligeables.

– Les actions du ressort sur les palets ainsi que celles des palets sur le ressort sont des forces intérieures.

L'inventaire des forces extérieures sur le système est donc :
$\{m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, \vec{R_1}, \vec{R_2}\}$.



■ Comment appliquer la deuxième loi de Newton ?

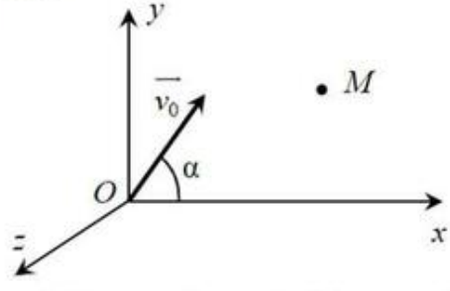
❑ Méthode 10.3. Obtention des équations du mouvement

– Après avoir bien défini le point matériel ou système étudié, préciser le référentiel d'étude. Dans ce chapitre, il s'agira généralement du référentiel terrestre, supposé galiléen.
– Faire un schéma et paramétrer le problème (choisir un système d'axes et une base adaptée, et nommer les grandeurs qui permettront de suivre le mouvement).
– Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le point matériel ou le système et identifier leurs caractéristiques (méthodes 10.1 et 10.2). C'est une étape capitale !
– Analyser le mouvement possible, et en déduire des informations sur les composantes de la vitesse et de l'accélération.
– Appliquer le PFD ou le TQM et le projeter sur la base choisie. Les équations différentielles obtenues, et ne contenant pas d'autres inconnues que les coordonnées et leurs dérivées, sont appelées équations du mouvement.
(Celles contenant une composante de force inconnue, telle que réaction de support ou tension de fil, seront traitées dans un deuxième temps : voir méthode 10.5.)
– Attention, dans le cas d'un système de points, l'application du TQM ne permet d'obtenir que le mouvement du centre de masse G du système, et non celui de chacun de ses points : pour ceux-ci, qui peuvent tourner, se rapprocher ou s'éloigner par rapport à G, il faut encore appliquer une autre loi.

⇨ Exercices 10.5 à 10.15, 10.18 à 10.22

– Chute libre dans le champ de pesanteur, sans résistance de l'air

Un projectile de masse m, assimilable à un point matériel M, est lancé depuis un point O du sol avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ dans le plan (Oxy) et formant avec l'axe horizontal (Ox) un angle α ; (Oy) est l'axe vertical ascendant. On cherche à déterminer le mouvement de M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, en supposant qu'il est soumis uniquement à son poids.



La position ultérieure quelconque a priori dans l'espace : en l'absence de contraintes sur le mouvement, on utilisera une base cartésienne.

Le PFD s'écrit : $\sum \vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ d'où $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{cte}}$. Il s'agit donc d'un mouvement à vecteur accélération constant, type de mouvement déjà étudié dans le chapitre de cinématique.

Projections du PFD sur la base cartésienne : $\boxed{\ddot{x} = 0}$, $\boxed{\ddot{y} = -g}$ et $\boxed{\ddot{z} = 0}$.

– Chute libre dans le champ de pesanteur, avec résistance de l'air

On suppose maintenant que l'air exerce en plus une force de frottement linéaire $\vec{F_f} = -h\vec{v}(M)$.

Le PFD devient alors : $\sum \vec{F} = m\vec{g} - h\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{h}{m}\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g}}$ qui est une équation différentielle d'ordre 1 pour la vitesse.

On peut la projeter sur les trois axes pour résoudre trois équations différentielles scalaires, ou bien intégrer cette équation vectoriellement.

– Pendule simple oscillant dans un plan vertical

Un point matériel M, de masse m, est accroché à un fil inextensible de longueur L, dont l'autre extrémité est fixée en O. Il est lâché sans vitesse initiale depuis un point M_0. On suppose que le mouvement de M se fait dans le plan vertical (Oxy), et on repère sa position par l'angle θ avec la verticale descendante (Ox). On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre, supposé galiléen.

Informations cinématiques : mouvement circulaire, donc $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -L\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$.

Forces appliquées : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{e_r} - mg\sin\theta\vec{e_\theta}$; tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e_r}$.

On applique le PFD à M dans $\mathcal{R}$: $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$.

Projections dans la base cylindrique : $\begin{cases} mg\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2 & (1) \\ mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} & (2) \\ 0=0 & (3) \end{cases}$

(3) n'apporte aucune information puisqu'on a supposé dès le départ le mouvement plan.

(2) fournit l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$.

Dans le cas des angles faibles, $\sin\theta \approx \theta$, et on obtient alors l'équation différentielle du deuxième ordre $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0}$ caractéristique d'un oscillateur harmonique.

❑ Méthode 10.4. Résolution des équations du mouvement

Les équations du mouvement sont des équations différentielles : leur résolution conduit aux équations horaires, c'est-à-dire aux expressions des coordonnées cherchées en fonction du temps.
Les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions initiales.

➪ **Exercices 10.5 à 10.15, 10.18 à 10.22**

– Chute libre dans le champ de pesanteur, sans résistance de l'air

On intègre les équations du mouvement trouvées, en tenant compte des conditions initiales :
$\dot{x} = v_0\cos\alpha$, $\dot{y} = -gt + v_0\sin\alpha$ et $\dot{z} = 0$.

On intègre à nouveau : $\boxed{x(t) = (v_0\cos\alpha)t}$, $\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t}$ et $\boxed{z(t) = 0}$.

Le mouvement a donc lieu dans le plan vertical (Oxy), et en éliminant t on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire : $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$.

– Chute libre dans le champ de pesanteur, avec résistance de l'air

Solution de l'équation différentielle vectorielle : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \tau\vec{g} + \vec{A}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ en posant $\tau = \frac{m}{h}$.

La constante d'intégration $\vec{A}$ s'obtient avec la condition initiale :

$\overrightarrow{v_0} = \tau\vec{g} + \vec{A}$ soit $\vec{A} = \overrightarrow{v_0} - \tau\vec{g}$, d'où $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \tau\vec{g} + \left(\overrightarrow{v_0} - \tau\vec{g}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Quand t tend vers l'infini (c'est-à-dire $t \gg \tau$), la vitesse tend vers une valeur limite $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \tau\vec{g} = \dfrac{m\vec{g}}{h}$ (verticale descendante, et indépendante des conditions initiales).

On intègre encore une fois pour obtenir la position : $\overrightarrow{OM} = \tau\vec{g}\,t - \tau\left(\overrightarrow{v_0} - \tau\vec{g}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \vec{B}$.

À $t = 0$: $\vec{0} = \vec{0} - \tau\left(\overrightarrow{v_0} - \tau\vec{g}\right) + \vec{B}$ d'où $\vec{B} = \tau\left(\overrightarrow{v_0} - \tau\vec{g}\right)$ et finalement :

$\overrightarrow{OM} = \tau\vec{g}\,t + \tau\left(\overrightarrow{v_0} - \tau\vec{g}\right)\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]$. Le mouvement est toujours dans le plan vertical (Oxy), mais cette fois la trajectoire n'est pas une courbe simple.

– Pendule simple oscillant dans un plan vertical

Solution de l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$: $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou bien $\theta(t) = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

Prenons par exemple la seconde forme, et cherchons les deux constantes d'intégration avec les conditions initiales. La position initiale M_0 étant repérée par l'angle θ_0 et la vitesse initiale étant nulle : $\theta(0) = \theta_0 = \Theta_m \cos\varphi$ et $\dot{\theta}(0) = 0 = -\omega_0\Theta_m \sin\varphi$. Donc $\sin\varphi = 0$ et on peut choisir $\varphi = 0$; alors $\cos\varphi = 1$ d'où $\theta_0 = \Theta_m$. Finalement : $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$.

(En utilisant la première forme de la solution, on aurait trouvé $A = \theta_0$ et $B = 0$.)

❑ Méthode 10.5. Détermination de composantes de forces inconnues

Les projections du PFD permettent également de déterminer une force partiellement inconnue, notamment la tension d'un fil ou la réaction d'un support, lorsqu'on connaît le mouvement (dont on peut déduire les composantes de l'accélération) : il suffit alors d'utiliser les équations du mouvement où la force cherchée apparaît pour déterminer ses composantes.
Dans le cas d'un point matériel à l'équilibre, l'application du PFD et ses projections servent uniquement pour cette étape.

⇨ **Exercices 10.10, 10.11, 10.13, 10.17, 10.18**

Dans le cas du pendule simple oscillant dans un plan vertical, le mouvement ayant été déterminé dans le cas de petits angles, la projection (1) du PFD écrit précédemment donne alors l'expression de la tension du fil :

$T = mg\cos\theta + mL\dot{\theta}^2$ soit $\boxed{T = mg\cos[\theta_0\cos(\omega_0 t)] + mL\omega_0^2\theta_0^2\sin^2(\omega_0 t)}$.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La position d'un point matériel est déterminée par trois coordonnées.	☐	☐
2.	Les forces exercées sur un point matériel dépendent du référentiel.	☐	☐
3.	La réaction d'un support est orthogonale au support si le contact se fait sans frottements.	☐	☐
4.	La réaction d'un support a pour origine le poids de l'objet.	☐	☐
5.	La force de rappel exercée par un ressort idéal est proportionnelle à sa longueur.	☐	☐
6.	La force de rappel exercée par un ressort, sur une masse accrochée à son extrémité, est toujours orientée de cette masse vers le ressort.	☐	☐
7.	Une force de frottement fluide dépend de la vitesse de l'objet par rapport au fluide.	☐	☐
8.	Le principe d'inertie définit le concept de référentiel galiléen.	☐	☐
9.	Le principe fondamental de la dynamique est valable dans tous les référentiels.	☐	☐
10.	Pour appliquer le théorème de la quantité de mouvement à un système de points matériels, on ne prend pas en compte les forces intérieures.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

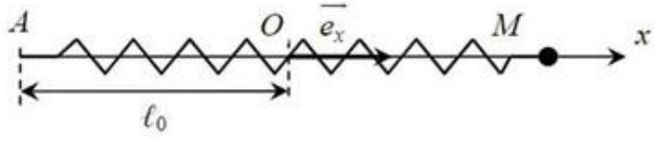
Dans tous les exercices, le référentiel terrestre est supposé galiléen et on prendra $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

■ Forces

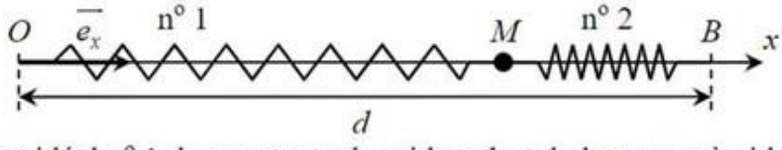
❑ Exercice 10.1. Forces de rappels de ressorts

Exprimer vectoriellement les tensions des différents ressorts dans les cas suivants, où l'objet M quasi ponctuel est repéré par son abscisse $x = \overline{OM}$ sur l'axe (Ox).

1. M est lié à un point fixe A, tel que $\overrightarrow{AO} = \ell_0\,\vec{e}_x$, par un ressort idéal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



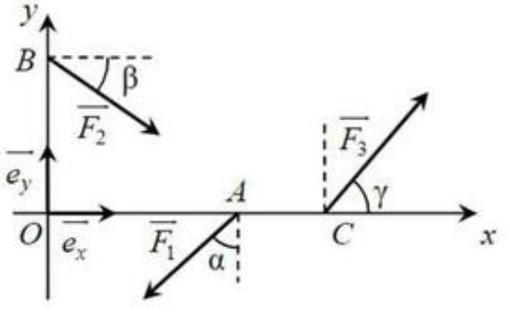
2. M se déplace entre l'origine O et le point B fixe tel que $\overrightarrow{OB} = d\,\vec{e}_x$.



M est lié à l'origine O par un ressort idéal n° 1 de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et au point B par un ressort n° 2, identique au ressort n° 1.

❑ Exercice 10.2. Projections de forces

Projeter chacune des trois forces ci-contre, c'est-à-dire donner ses composantes dans la base cartésienne $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ en fonction de sa norme $\left(F_1, F_2 \text{ ou } F_3\right)$ et de l'angle α, β ou γ.



❑ Exercice 10.3. Atome d'hydrogène simplifié

Une première étude de l'atome d'hydrogène consiste à envisager un électron en mouvement autour d'un proton fixe, les deux étant assimilés à des points matériels.

1. Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'électron dans ce modèle ?

2. Donner un ordre de grandeur de ces forces. Conclure.

3. Peut-on appliquer les lois de Newton à l'électron ?

Données : charge d'un proton $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; charge d'un électron $-e$; distance moyenne proton-électron $r = 53$ pm ; masse de l'électron $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$.

❑ Exercice 10.4. Débats en CPGE

Toto, élève en première année de CPGE, travaille son cours sur la mécanique des systèmes de points matériels et se demande s'il peut appliquer les théorèmes correspondants au système {Terre + Lune}. Manquant d'assurance, il en parle avec son camarade Lulu, qui lui, est en deuxième année.

Indiquer, dans chaque cas, qui a tort et qui a raison même partiellement, en étudiant la situation physique.

1. Toto pense qu'il n'est pas possible d'assimiler la Terre ou la Lune à des points matériels, compte tenu de leur taille. Lulu a déjà vu un exercice où c'était envisagé et pense donc que c'est possible.
2. Toto déclare que la force exercée par la Lune sur la Terre est négligeable par rapport à celle exercée par la Terre sur la Lune. Lulu pense qu'elles ont le même ordre de grandeur.
3. Lulu explique qu'en faisant l'inventaire des forces extérieures qui s'exercent sur le système {Terre + Lune}, ils pourront connaître le mouvement du centre de la Terre et celui du centre de la Lune.
4. Toto pense pouvoir étudier le mouvement de la Lune par rapport à la Terre en appliquant la deuxième loi de Newton dans le référentiel terrestre.

■ Chute libre avec ou sans frottement

❑ Exercice 10.5. Fusée*



Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m, est mise à feu à la surface de la Terre avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$.

On définit un repère $Oxyz$ tel que O coïncide avec le point de départ de la fusée, (Oz) soit un axe vertical ascendant et (Ox) un axe horizontal. Le vecteur vitesse initial est dans le plan (Oxz) et fait un angle α avec l'horizontale. L'action de l'air sur la fusée est négligée.

1. **a)** Montrer que le mouvement a lieu dans le la plan (Oxz), et établir l'équation de la trajectoire $z = f(x)$.

b) Exprimer la portée (distance de O au point d'impact au sol) et la flèche (hauteur maximale atteinte) en fonction de g, V_0 et α.

c) Calculer la portée maximale et la valeur correspondante de la flèche pour $V_0 = 1{,}0\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. On suppose que V_0 est fixée et on veut atteindre avec la fusée un point A. Calculer les deux valeurs possibles de l'angle α. Application numérique : $x_A = 73$ km et $z_A = 20$ km.

❑ Exercice 10.6. Étude d'un mouvement par chronophotographie*

On étudie le mouvement d'une balle de golf de masse $m = 45$ g par chronophotographie : on pointe les positions successives de la balle, image par image. On utilise un système d'axes (Ox) (horizontal et dirigé dans le sens du mouvement) et (Oy) (vertical et ascendant), le point O coïncidant avec le moment où la balle quitte la main du lanceur.

On obtient le tableau de résultats ci-contre.

Position	x (m)	y (m)
0	0,000	0,000
1	0,032	0,117
2	0,060	0,219
3	0,093	0,308
4	0,116	0,382
5	0,153	0,434
6	0,185	0,466
7	0,218	0,485
8	0,250	0,485
9	0,278	0,466
10	0,315	0,429
11	0,343	0,373
12	0,375	0,308
13	0,407	0,219
14	0,440	0,117
15	0,468	0,000

1. Le standard vidéo utilisé est de 24 images par seconde.

a) Tracer les courbes $x(t)$ et $y(t)$ en utilisant un tableur ou une calculatrice.

b) Utiliser le tableur pour déterminer les courbes de tendance (équations de ces courbes).

2. On étudie à présent la vitesse.

a) Calculer, en utilisant les données du tableau, les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse pour chaque position (justifier la méthode).

b) Tracer les courbes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ et déterminer leur équation. Vérifier le lien avec les courbes tracées au 1.

c) Utiliser ces équations pour déterminer les composantes du vecteur accélération.

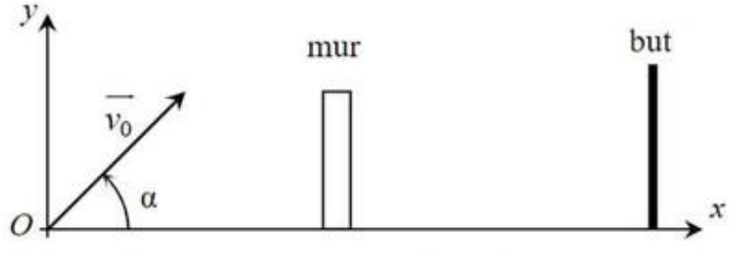
3. On compare maintenant les courbes obtenues avec les courbes théoriques.

a) Rappeler les expression théoriques $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$ et $a_y(t)$ pour une chute libre, la balle étant lancée avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α avec (Ox).

b) Calculer V_0 et l'angle α.

❑ Exercice 10.7. Coup franc* *

On étudie, dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe $Oxyz$, un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (Oxy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.





Le ballon, de masse m = 430 g, est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse

initiale $\vec{v_0}$ de norme $20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a) Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

b) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

c) Le tir est-il cadré ?

2. En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5{,}0\cdot10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

a) Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \dfrac{m}{h}$.

b) Donner l'équation de la trajectoire.

c) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

d) Le tir est-il cadré ?

❑ Exercice 10.8. Chute verticale*

On lâche un objet sphérique de rayon r = 3 cm et de masse volumique μ = 1,7 $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ depuis une altitude h = 25 m (comptée à partir du sol). On étudie le mouvement de cet objet dans le référentiel terrestre, muni d'un repère d'origine O correspondant au point de départ de l'objet et d'un axe vertical orienté vers le bas. Donnée : masse volumique de l'air : $\mu_a = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1. La poussée d'Archimède, que subit l'objet de la part de l'air, a pour norme le poids de l'air « déplacé » par la sphère. Montrer qu'elle est négligeable par rapport à son propre poids.

2. On suppose que l'objet n'est soumis qu'à son poids au cours de son mouvement.

a) Établir l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de l'objet.

b) En déduire la durée de sa chute.

3. On suppose à présent qu'en plus de son poids, l'objet est soumis au cours de sa chute à une force de frottements $\vec{f} = -K\vec{v}$ (avec K = 0,020 unité SI, et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'objet).

a) Quelle est la dimension de K ? En déduire son unité SI.

b) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v_z(t)$ de l'objet au cours de son mouvement.

c) Déterminer l'expression de $v_z(t)$. Montrer qu'il existe une vitesse limite.

d) Donner l'expression de $z(t)$.

4. Pour évaluer la durée de chute, on cherche la solution d'une équation de la forme $\beta(t) = 0$. On écrit donc le code suivant en Python, traduisant une méthode dichotomique.

```
import numpy as np

def dicho(f ,a, b, epsilon = 10**(-4)) :
    if f(a)*f(b)>0 :
        return None  # cas où il n'y a pas de solution
    u = a
    v = b
    while abs(v-u) > 2*epsilon:
        w = (u + v)/2
```

```
        if f(u)*f(w) <= 0 :
            v = w instruction 1
        else :
            u = w
    return (u + v)/2

def position(t):
    return 94.306*(t + 9.6613*(np.exp(-0.104*t)-1)) - 25 instruction 2
dicho(position,0,3)
```

a) Donner l'expression de $\beta(t)$. Montrer que l'équation $\beta(t) = 0$ admet une solution comprise entre $t = 0$ et $t = 3$.

b) Indiquer les instructions correspondant à `instruction 1` et à `instruction 2`.

c) L'exécution de ce code renvoie la valeur : `2.396026611328125`. Quelle est la précision de la méthode dichotomique utilisée ?

d) Quelle est la durée de chute en tenant compte des frottements ?

❑ Exercice 10.9. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère*

Une goutte d'eau sphérique de rayon a, indéformable et de masse volumique ρ, tombe dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ suivant un axe vertical Oz dirigé vers la bas. L'atmosphère exerce sur la goutte une force dite de traînée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime par la relation $\vec{F} = -6\pi\eta\dfrac{a\vec{v}}{1+\ell/a}$. On négligera la poussée d'Archimède de l'air.

1. Exprimer la vitesse limite de chute de la goutte que l'on notera $\vec{V}_{\text{lim}}$.

2. On donne $\rho = 1{,}0\cdot10^{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\ell = 0{,}07\ \mu\text{m}$ et $\eta = 1{,}7\cdot10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{2}$.
Calculer V_{lim} pour $a = a_1 = 0{,}01$ mm puis pour $a = a_2 = 0{,}1$ mm.

3. L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km. En utilisant les résultats précédents, calculer le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2.

4. Quel serait le temps de transit dans l'atmosphère de bulles de rayon a_2 et d'épaisseur $e = 0{,}1a_2$?

D'après X-ESPCI-ENS

■ Mouvement sur un support solide

❑ Exercice 10.10. Brique sur un plan incliné

On considère un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Une brique de masse $m = 600$ g est lancée depuis le bas du plan vers le haut avec une vitesse $\vec{v_0}$ de norme $2{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On utilise, pour étudier le mouvement, un axe (Ox) parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut et tel que O coïncide avec le départ de la brique.

1. On suppose que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements.

a) Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de la montée.

b) Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

2. On suppose maintenant qu'il existe des frottements solides. La force de contact a alors la forme suivante : $\vec{R} = \vec{R_n} + \vec{R_t}$ avec $\vec{R_t}$ colinéaire et de sens contraire à la vitesse, et $R_t = f \cdot R_n$ où $f = 0,20$ est le coefficient de frottement.

Répondre aux mêmes questions dans ce cas.

❑ Exercice 10.11. Descente à ski* *



Madame Michu descend une piste à ski, selon la ligne de plus grande pente faisant l'angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$, où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse de la skieuse.

On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction exercée par la neige, et f le coefficient de frottement solide tel que $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) de la ligne de plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note (Oy) la normale à la piste dirigée vers le haut.

1. Calculer les normes de $\vec{T}$ et $\vec{N}$.

2. Calculer la vitesse et la position de la skieuse à chaque instant.

3. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite v_ℓ. Application numérique : calculer v_ℓ avec $\lambda = 8,8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $m = 80 \text{ kg}$, $\alpha = 45°$ et $f = 0,055$.

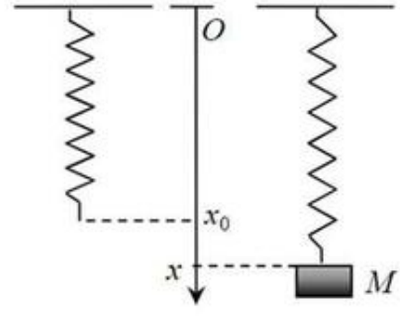
4. Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où la skieuse a une vitesse égale à $\frac{v_\ell}{2}$.

5. À la date t_1, Madame Michu tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 20. Calculer la distance parcourue par Madame Michu, dans cette position peu glorieuse, avant de s'arrêter.

D'après E3A-Polytech

■ Oscillateurs à ressort

❑ Exercice 10.12. Oscillations verticales



On considère le système ci-contre : une masse m est suspendue à un ressort vertical idéal, de masse négligeable et de raideur k. L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point O. On utilise l'axe (Ox), vertical et dirigé vers le bas pour repérer la position de l'extrémité libre du ressort par son abscisse x. Soit x_0 la longueur à vide du ressort et $x_{éq}$ sa longueur lorsque la masse m est accrochée à l'extrémité inférieure du ressort et est à l'équilibre.

1. Exprimer $x_{éq}$ en fonction de m, g, k et x_0.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x lorsque la masse est en mouvement.

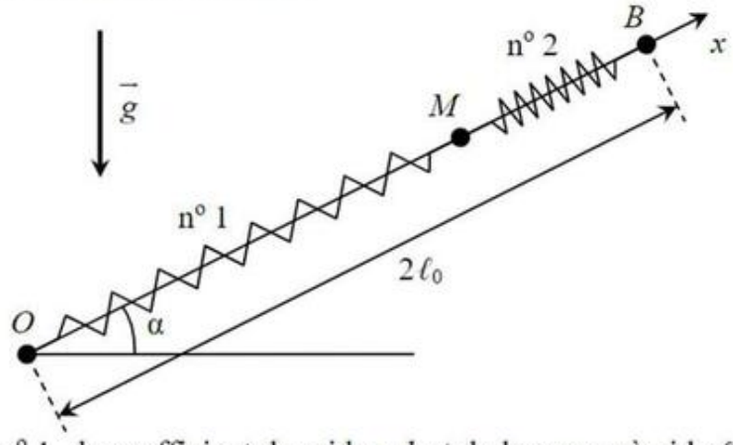
3. À l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à $x_{éq}$. On lui communique alors une vitesse v_0 verticale et dirigée vers le bas.

a) Déterminer l'expression de $x(t)$ en fonction des données du problème.

b) Exprimer la période T_0 des oscillations.

❑ Exercice 10.13. Mobile entre deux ressorts*

Un objet M de masse m, assimilé à un point matériel, est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige rectiligne, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et fixe par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ (supposé galiléen). M peut se déplacer entre l'origine O et un point fixe B tel que $\overrightarrow{OB} = 2\ell_0 \overrightarrow{e_x}$; il sera donc repéré par son abscisse x.



M est lié au point O par un ressort idéal n° 1, de coefficient de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et il est également lié au point B par un ressort idéal n° 2, de même raideur k mais de longueur à vide *nulle* (c'est-à-dire négligeable devant ℓ_0).

1. Faire une liste complète des forces appliquées à M, en indiquant précisément pour chacune d'elles quelles sont ses composantes dans une base cartésienne $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$. [Certaines de ces composantes peuvent être des inconnues a priori.]

2. Déterminer l'abscisse $x_{éq}$ de M lorsqu'il est à l'équilibre.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lorsque M est en mouvement (on pourra faire apparaître $x_{éq}$ dans cette équation différentielle).

4. À l'instant initial $t = 0$, on lâche M à l'abscisse $x_0 = x_{éq}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0 \overrightarrow{e_x}$.

a) Déterminer complètement la solution de l'équation différentielle.

b) Quelle est la condition pour que M ne touche pas le point B ? Tracer alors la courbe de x en fonction de t, en supposant $x_{éq} > \ell_0$.

5. Déterminer la réaction de la tige sur M à tout instant.

❑ Exercice 10.14. Suspension de voiture



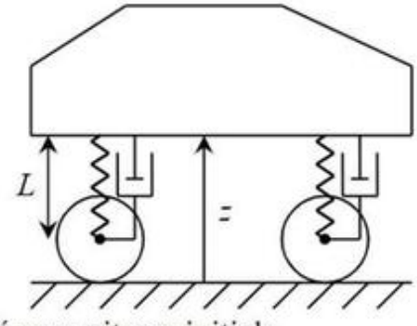
La suspension d'une voiture est assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

– d'un ressort hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 ;

– d'un amortisseur tubulaire à piston, fixé parallèlement au ressort, exerçant une force de frottement visqueux linéaire de coefficient d'amortissement λ.

On suppose que la masse totale M (voiture et passagers) est toujours également répartie entre les *quatre* systèmes.

Les roues de rayon R sont considérées comme entièrement rigides. On n'envisage que des déplacements verticaux du châssis, repéré par son altitude z par rapport au sol ; la longueur commune des quatre ressorts est notée L.



1. Le véhicule étant immobile sans freins sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e des ressorts au repos et la « garde au sol » z_e du véhicule ?

2. Le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle de la position $z(t)$ du châssis par rapport au sol. On introduira la grandeur $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ et un facteur de qualité Q dont on précisera l'expression.

b) L'amortisseur a été réglé de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible*, lorsque la masse M est seulement celle de la voiture (1100 kg). Quelle doit être la valeur de λ en fonction de M et k ?

c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_e, h et ω_0 .

d) Tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution de z en fonction du temps.

3. La même expérience, avec les mêmes conditions initiales, est réalisée sur cette voiture avec à l'intérieur Madame Michu (90 kg), son mari (150 kg) et ses trois filles (80 kg chacune).
Que vaut alors le facteur de qualité ? Déterminer la nouvelle solution $z(t)$. Cette situation est-elle plus ou moins confortable que la précédente ?

D'après E3A-Polytech

❑ Exercice 10.15. Ressort à attache mobile

On considère une bille M de masse m, attachée à une extrémité d'un ressort horizontal (k, ℓ_0) selon l'axe (Ox). Elle subit également une force de frottement visqueux linéaire $\vec{F} = -h\vec{v}(M)$.

On communique à l'autre extrémité A du ressort, à partir de l'instant $t = 0$, un mouvement oscillatoire : $x_A(t) = A_m \cos(\omega t)$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t) = \overline{OM}(t)$ du point M.

2. Déterminer $x(t)$ en régime permanent.

3. Le mouvement de M peut-il présenter un phénomène de résonance ? de filtrage ?

■ Équilibre d'un point matériel

❑ Exercice 10.16. Pendule électrostatique
Résolution de problème

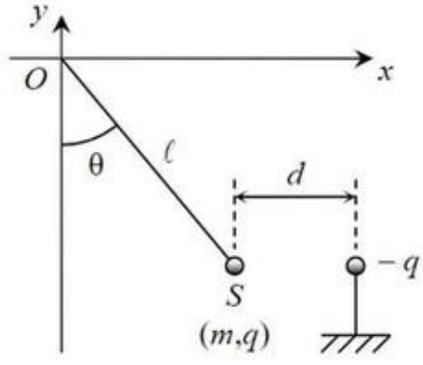
Un pendule est constitué d'une petite sphère S, de masse $m = 45\,\text{g}$, attachée au bout d'un fil sans masse de longueur ℓ.

On communique à cette sphère une charge électrique positive q, que l'on souhaite déterminer. D'autre part, une autre sphère est chargée avec une charge opposée $-q$ et placée au voisinage du pendule : celui-ci s'écarte alors de la verticale d'un angle θ.

On supposera que les deux sphères sont à la même hauteur.

Les valeurs mesurées sont les suivantes : $\theta = 36°$; $d = 22\,\text{cm}$.

La permittivité de l'air est pratiquement égale à celle du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$.

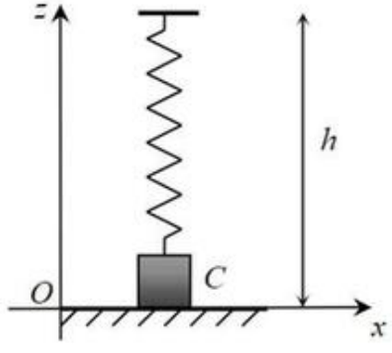


Déterminer la valeur de la charge q.

❑ Exercice 10.17. Plateau et ressort*

Un cube C d'arête a, de masse m, est accroché à un ressort linéaire de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Il est d'autre part posé sur un plateau horizontal immobile, coïncidant avec le plan (Oxy).

L'autre extrémité du ressort est maintenue fixe, à une hauteur h au-dessus du plateau, et le ressort est vertical.

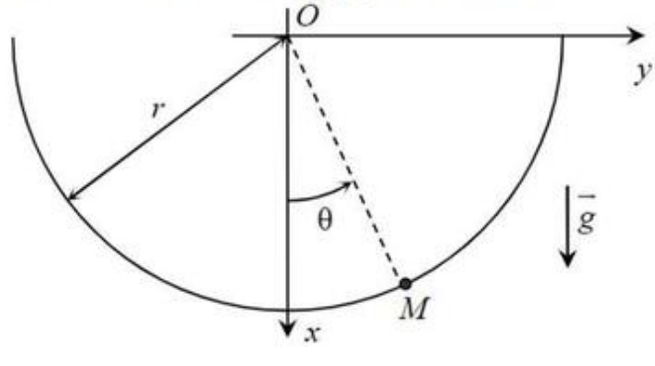


1. Faire la liste complète des forces s'exerçant sur le cube à l'équilibre, en précisant leurs composantes, connues ou inconnues.
2. Déterminer complètement la réaction du plateau sur le cube.
3. Montrer que cette situation n'est possible que si h est inférieure à une valeur $h_{\max}$ que l'on déterminera. Que se passe-t-il si $h > h_{\max}$?

■ Pendules simples

❑ Exercice 10.18. Oscillations d'un anneau sur un support circulaire*

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à coulisser sans frottement le long d'une tige circulaire de centre O et de rayon r, située dans le plan vertical (Oxy). La position de M sera repérée par l'angle θ entre (Ox) et $\overline{OM}$. À la date $t = 0$, on lâche M sans vitesse initiale d'un angle θ_0.



1. Appliquer la deuxième loi de Newton et la projeter dans la base cylindrique.

2. a) Établir une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, en intégrant l'une de ces projections (que l'on devra d'abord multiplier par $\dot{\theta}$).

b) En déduire l'expression de la réaction du support en fonction de θ et des données du problème.

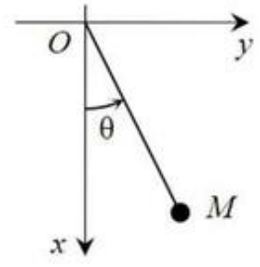
c) À quel instant du mouvement la norme de cette réaction est-elle maximale ?

3) On suppose que l'angle θ reste petit au cours du mouvement.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par θ.

b) Donner l'expression de $\theta(t)$.

❑ Exercice 10.19. Oscillations d'un pendule simple



Un pendule simple est constitué d'un point matériel M, de masse m, lié à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse nulle, l'autre extrémité étant fixe en un point O. On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical (Oxy), et on repère la position de M avec l'angle polaire θ (voir figure), l'angle θ restant toujours faible. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse depuis un angle θ_0, sans vitesse initiale.

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M, et α une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ et l'écrire sous la forme : $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{2}{\tau}\dfrac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$.

2. a) À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

On supposera par la suite que cette condition est vérifiée et que l'angle θ peut se mettre sous la forme : $\theta(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + B)$ où A et B sont des constantes et $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{\tau^2}}$.

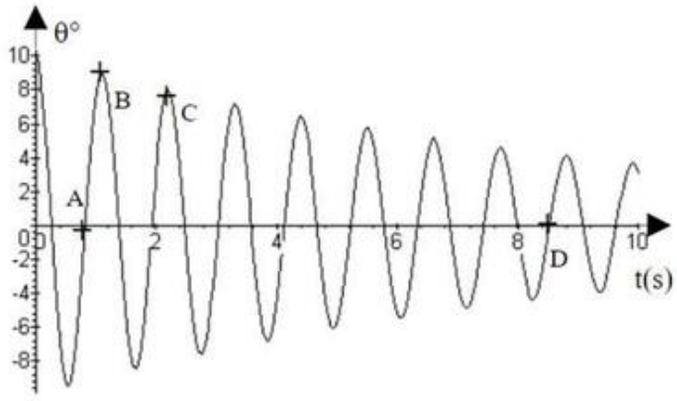
b) Que représente τ ?

3. On appelle décrément logarithmique la quantité $\delta = \ln\left(\dfrac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$.

Exprimer δ en fonction de T et τ.

4. La figure ci-dessous représente les variations de θ avec le temps. On précise les coordonnées de quatre points particuliers.

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,10	2,20	8,25
θ (°)	0,00	8,95	8,02	0,00



La masse est $m = 470$ g.
Calculer numériquement, à partir des valeurs expérimentales :
– le décrément logarithmique δ ;
– la pseudo-période T ;
– le temps τ ;
– la constante α.

■ Systèmes de points matériels

❑ Exercice 10.20. Toto lanceur de cailloux* *

Toto a attaché deux cailloux presque identiques (qu'on assimilera à deux points matériels de même masse m), l'un à une extrémité d'une ficelle (de longueur 2ℓ et de masse négligeable) et l'autre au milieu de celle-ci. Il fait alors tourner l'ensemble, à la vitesse angulaire ω, dans un plan horizontal, en le tenant par l'extrémité de la ficelle où il n'y a pas de caillou. À l'instant $t = 0$, il lâche la ficelle : seule la portion de ficelle entre les deux cailloux reste alors tendue.

1. Dans un premier temps on néglige l'action de la pesanteur.

a) Quel est alors le mouvement du centre d'inertie G des deux cailloux ?

b) Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ (ayant G pour point fixe, et des axes de directions fixes dans le référentiel terrestre) est-il galiléen ?

c) On suppose que le mouvement des cailloux dans $\mathcal{R}^*$ reste dans un plan horizontal. Quelle est la forme de leurs trajectoires dans ce plan ?

d) Faire un schéma dans ce plan, avec la position initiale et une position ultérieure quelconque (a priori). Déterminer l'évolution de la vitesse angulaire des deux cailloux.

2. Maintenant on tient compte de la pesanteur.

a) Déterminer le mouvement de G.

b) Le référentiel barycentrique est-il galiléen ?

❑ Exercice 10.21. Oscillations de deux points élastiquement liés*

Deux masses m_1 et m_2 sont fixées aux extrémités M_1 et M_2 d'un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Ces masses, assujetties à glisser sans frottements sur un axe horizontal (Ox), sont initialement à l'équilibre, M_1 étant en O. À l'instant $t = 0$, un choc communique à la masse m_1 une vitesse $v_0\,\overrightarrow{e_x}$.

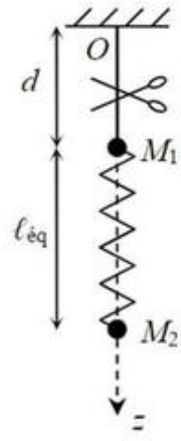
1. Faire un schéma où apparaissent toutes les forces appliquées aux deux points, en distinguant les forces extérieures et intérieures.

2. Montrer que le système est pseudo-isolé et déterminer le mouvement de son barycentre G.

3. a) Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du système, lié au repère $(Gxyz)$, est-il galiléen ?

b) Appliquer le PFD à chacune des deux masses, et en déduire l'évolution temporelle de la longueur ℓ du ressort.

❑ Exercice 10.22. Chute d'un ressort vertical*



Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen, on définit un repère $(Oxyz)$ avec l'axe (Oz) vertical descendant.
Deux masses ponctuelles identiques m sont attachées aux extrémités d'un ressort idéal (raideur k, longueur à vide ℓ_0). Initialement le système est suspendu en équilibre par un fil, de longueur d, reliant une des deux masses au point fixe O (origine des z).

1. Quelle est la longueur initiale $\ell_{éq}$ du ressort ?

À l'instant $t = 0$, on coupe le fil.

2. Déterminer alors le mouvement du centre d'inertie G du système.

3. Appliquer le PFD à chacune des deux masses, et en déduire l'évolution temporelle de la longueur ℓ du ressort.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 10.7. Questions 1.b et c : les abscisses du mur et du but étant connues, comparer leurs hauteurs à l'ordonnée du ballon pour ces abscisses.
Exercice 10.11. Obtenir d'abord la réaction normale avec une projection du PFD.
Exercice 10.12. Appliquer rigoureusement la formule générale pour établir l'expression de la tension du ressort.
Exercices 10.14 et 10.19. À partir de la question 2, remarquer l'analogie avec un circuit *RLC* libre et utiliser les connaissances et méthodes du chapitre **5**.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai

4. Elle a pour origine les interactions microscopiques au niveau des surfaces en contact.

5. Elle est proportionnelle à son *allongement* algébrique, c'est-à-dire à la différence entre sa longueur (actuelle) et sa longueur au repos.

6. Elle va de la masse vers le ressort s'il est étiré, mais en sens contraire s'il est comprimé.

9. Il est valable seulement dans les référentiels galiléens.

❑ Les erreurs classiques

– Il faut un référentiel galiléen pour appliquer le PFD ou TQM : ce sera toujours le cas dans ce chapitre, mais ne pas oublier de le préciser systématiquement.
– La troisième loi peut sembler surprenante (la Lune et la Terre exercent l'une sur l'autre une force de même intensité), mais dans un inventaire de forces, seules les forces exercées *par* l'extérieur *sur* le point considéré interviennent (si on étudie la Terre, la force qu'elle exerce sur la Lune n'a aucune importance).
– Ne pas oublier que l'Univers est à trois dimensions et non deux… Ainsi, même si on fait un schéma plan, il faut toujours envisager ce qui se passe dans la direction orthogonale au plan de figure (mouvement ou forces). Le PFD sera donc toujours projeté a priori sur *trois* vecteurs unitaires, mais dans certains cas on constatera que l'une des projections n'apporte aucune information.
– La réaction normale d'un support modélisé par une courbe comporte a priori deux composantes sur une base. Par exemple, si c'est une tige assimilée à l'axe (Ox), la réaction normale est définie par deux composantes selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$: il est hors de question de « deviner » que l'une de ces composantes est nulle, il faut la *déterminer* avec le PFD… et voir si elle est vraiment nulle !
– L'autre erreur classique sur la réaction d'un support est l'affirmation systématique selon laquelle « elle compense le poids »… Ces deux forces ont des origines totalement indépendantes, et elles ne s'annulent que dans le cas particulier où le support est horizontal, sans frottement, immobile dans un référentiel galiléen et en l'absence d'autre force verticale : autant oublier ce pseudo-théorème !

■■ Corrigé des exercices

Exercice 10.1

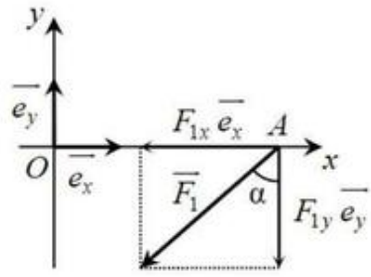
1. La longueur du ressort est $\ell_0 + x$ et le vecteur unitaire $\vec{e}_{r\to p}$ est $\vec{e}_x$, donc la formule générale $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r\to p}$ donne $\vec{T} = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\vec{e}_x$ soit $\boxed{\vec{T} = -k\,x\,\vec{e}_x}$.

2. Pour le ressort n° 1 : $\vec{e}_{r1\to p} = \vec{e}_x$, $\ell_1 = x$ donc $\boxed{\vec{T_1} = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x}$.

Pour le ressort n° 2 : $\vec{e}_{r2\to p} = -\vec{e}_x$, $\ell_2 = \overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = d - x$ donc $\vec{T_2} = -k(d - x - \ell_0)\left(-\vec{e}_x\right)$ soit $\boxed{\vec{T_2} = +k(d - x - \ell_0)\vec{e}_x}$.

Exercice 10.2

– Les deux composantes de $\vec{F_1}$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont négatives car elles vont en sens inverse de ces deux vecteurs unitaires. La composante sur $\vec{e}_x$ correspond au côté opposé à l'angle α : $\sin\alpha = \dfrac{|F_{1x}|}{F_1}$ d'où $F_{1x} = -F_1\sin\alpha$.



La composante sur $\vec{e}_y$ correspond alors au côté adjacent à α : $\cos\alpha = \dfrac{|F_{1y}|}{F_1}$ d'où $F_{1y} = -F_1\cos\alpha$. Finalement : $\boxed{\vec{F_1} = -F_1\sin\alpha\,\vec{e}_x - F_1\cos\alpha\,\vec{e}_y}$.

– De même pour $\vec{F_2}$: composante positive sur $\vec{e}_x$, négative sur $\vec{e}_y$; $\cos\beta = \dfrac{|F_{2x}|}{F_2}$ d'où $F_{2x} = +F_2\cos\beta$; $\sin\beta = \dfrac{|F_{2y}|}{F_2}$ d'où $F_{2y} = -F_2\sin\beta$. Finalement : $\boxed{\vec{F_1} = +F_2\cos\beta\,\vec{e}_x - F_2\sin\beta\,\vec{e}_y}$.

– Pour $\vec{F_3}$: les deux composantes sont positives ; $\cos\gamma = \dfrac{|F_{3x}|}{F_3}$ d'où $F_{3x} = +F_3\cos\gamma$; $\sin\gamma = \dfrac{|F_{3y}|}{F_3}$ d'où $F_{3y} = +F_3\sin\gamma$. Finalement : $\boxed{\vec{F_1} = +F_3\cos\gamma\,\vec{e}_x + F_3\sin\gamma\,\vec{e}_y}$.

Exercice 10.3

1. L'électron est soumis à son poids (si on suppose que l'atome se trouve sur Terre) et à la force électrique exercée par le proton.

> *On pourrait envisager de tenir compte aussi de l'attraction gravitationnelle exercée par le proton, mais elle serait elle-même infiniment plus faible (plus exactement, 10^{51} fois plus faible) que celle de la Terre, c'est-à-dire le poids.*

2. $\boxed{P = mg = 9{,}1 \cdot 10^{-30}\ \text{N}}$ et $\boxed{F_e = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 8{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{N}}$.

3. On constate que $F_e \gg P$. On pourra négliger le poids par rapport à la force électrique dans l'étude du mouvement de l'électron.

Exercice 10.4

1. Lulu a raison : il est possible d'assimiler la Terre à un point matériel placé en son centre de masse, et affecté de la masse totale de la Terre. En appliquant la deuxième loi de Newton à ce point, on aura accès aux équations du mouvement du centre de masse de la Terre.

En revanche, on ne peut pas étudier le mouvement d'un autre point de la Terre.

2. Toto commet une grave erreur, et Lulu est en dessous de la vérité. Ces deux forces ne sont pas « du même ordre de grandeur », elles sont *rigoureusement égales* en norme ! On le déduit de la troisième loi de Newton (principe des interactions).

3. Non, en effectuant le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le système {Terre + Lune}, ils pourront connaître le mouvement du centre de masse du système, mais pas le mouvement du centre de chaque planète.

4. Oui, il faut faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la Lune et appliquer la deuxième loi de Newton à la Lune dans le référentiel terrestre. On obtiendra ainsi le mouvement du centre d'inertie de la Lune.

Il faut supposer que le référentiel terrestre est galiléen. En réalité, le référentiel le plus adapté pour étudier un mouvement autour de la Terre est le référentiel géocentrique, *dans lequel l'axe des pôles est fixe, mais qui ne suit pas la Terre dans son mouvement de rotation.*

Exercice 10.5

1.a) On étudie la fusée, assimilée à un point matériel M de masse m, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La fusée n'étant, au cours de son mouvement, soumise qu'à son poids, la deuxième loi de Newton donne : $\sum \vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ d'où $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{cte}}$.

Projections sur la base cartésienne : $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = -g$.

On intègre deux fois par rapport au temps : $\dot{x} = V_0 \cos\alpha$, $\dot{y} = 0$ et $\dot{z} = -gt + V_0 \sin\alpha$

puis $x(t) = (V_0 \cos\alpha)t$, $y(t) = 0$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t$.

Comme $y(t) = 0$, le mouvement a lieu dans le plan (Oxz). On obtient l'équation cartésienne en éliminant le temps t, d'où : $\boxed{z(x) = -\dfrac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x}$.

b) La portée est obtenue en posant $z(p)=0$ soit $\boxed{-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}p^2+(\tan\alpha)p}$. La solution non nulle est : $\boxed{p=\frac{2V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{g}}$.

L'autre solution, $p=0$, correspond au départ de l'objet en O.

Quant à la flèche, elle correspond au maximum de la trajectoire, soit, au moment où la composante $\dot{z}$ s'annule, ce qui correspond à la date $t_f=\frac{V_0\sin\alpha}{g}$. On remplace donc cette date dans l'expression de $z(t)$ pour obtenir la flèche : $\boxed{f=\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$.

c) La portée maximale est obtenue pour $\alpha=\frac{\pi}{4}$: $\boxed{p_{max}=\frac{V_0^2}{g}}$. AN $\boxed{p_{max}=100\text{ km}}$.

La flèche est alors : $\boxed{f=\frac{V_0^2}{4g}}$. AN $\boxed{f=26\text{ km}}$.

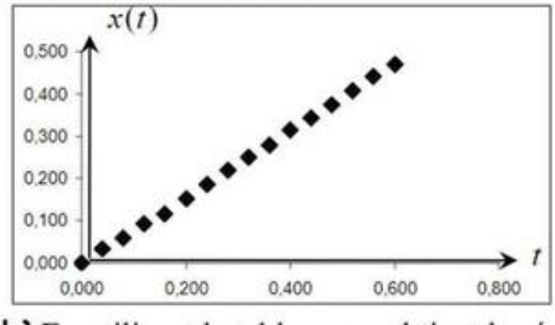
2. Les coordonnées de A doivent vérifier l'équation de la trajectoire :

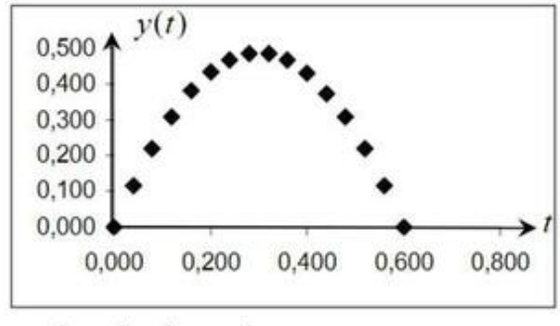
$z_A=-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x_A^2+(\tan\alpha)x_A$, soit $\tan^2\alpha-\frac{2V_0^2}{gx_A}\tan\alpha+\left[1+\frac{2V_0^2z_A}{gx_A^2}\right]=0$.

Avec les valeurs numériques fournies, cette équation devient : $\tan^2\alpha-2{,}8\tan\alpha+1{,}8=0$. Elle admet deux solutions : $\tan\alpha_1=0{,}96$ soit $\boxed{\alpha_1=44°}$, et $\tan\alpha_2=1{,}8$ soit $\boxed{\alpha_2=61°}$.

Exercice 10.6

1. a) Le standard vidéo utilisé montre qu'il s'écoule 0,042 s entre deux images. On peut donc tracer les deux courbes :

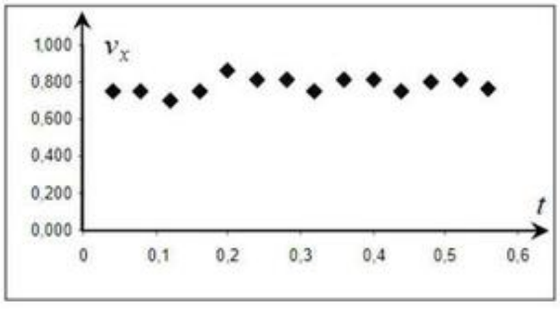


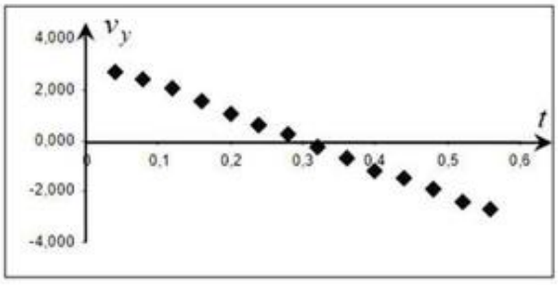


b) En utilisant le tableur, on obtient les équations des courbes de régression :
$\boxed{x(t)=0{,}76t}$ et $\boxed{y=-5{,}0t^2+3{,}2t}$.

2. a) $v_x(t)\approx\frac{x(t+\tau)-x(t-\tau)}{2\tau}$ et $v_y(t)\approx\frac{y(t+\tau)-y(t-\tau)}{2\tau}$ avec $\tau=0{,}042$ s.

b)





Date (s)	v_x (m·s^{-1})	v_y (m·s^{-1})
0		
0,04166667	0,753	2,738
0,08333333	0,753	2,388
0,125	0,698	2,038
0,16666667	0,755	1,575
0,20833333	0,863	1,050
0,25	0,813	0,638
0,29166667	0,813	0,238
0,33333333	0,750	-0,238
0,375	0,813	-0,700
0,41666667	0,813	-1,163
0,45833333	0,750	-1,513
0,5	0,800	-1,925
0,54166667	0,813	-2,388
0,58333333	0,763	-2,738
0,625		

En utilisant le tableur, on trouve : $\boxed{v_x = 0,8}$ et $\boxed{v_y = -10,3t + 3,2}$ en m·s^{-1}.

On vérifie qu'on a bien $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

c) Sachant que $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ et $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$, on obtient $\boxed{a_x = 0}$ et $\boxed{a_y = -10,3 \text{ m·s}^{-2}}$.

L'accélération verticale diffère de 5 % de la valeur connue (g).

3. a) $\boxed{\ddot{x} = 0,\ \dot{x} = V_0\cos\alpha,\ x = (V_0\cos\alpha)t}$ et $\boxed{\ddot{y} = -g,\ \dot{y} = -gt + V_0\sin\alpha,\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\alpha)t}$.

b) En identifiant les expressions théoriques et expérimentales, on obtient $V_0\cos\alpha = 0,77$ et $V_0\sin\alpha = 3,2$. Alors $V_0 = \sqrt{0,77^2 + 3,2^2}$ soit $\boxed{V_0 = 3,3 \text{ m·s}^{-1}}$ et $\boxed{\alpha = \arctan\left(\dfrac{3,2}{0,77}\right) = 76°}$.

Exercice 10.7

1. a) La seule force qui s'exerce sur le ballon au cours du mouvement étant son poids, on en déduit que $\vec{a} = \vec{g}$ en utilisant la deuxième loi de Newton.

Ceci entraîne que $\ddot{x} = 0$, puis $\dot{x} = v_0\cos\alpha$, puis $\boxed{x(t) = (v_0\cos\alpha)t}$ pour le mouvement sur l'axe (Ox), et $\ddot{y} = -g$, puis $\dot{y} = -gt + v_0\sin\alpha$, puis $\boxed{y(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + (v_0\sin\alpha)t}$ en projection sur l'axe (Oy). L'équation de la trajectoire, dans le plan (Oxy) est donc :

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x}.$$

On pourrait vérifier qu'il n'y a pas de mouvement sur (Oz).

b) Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{mur}) \geq 1{,}90$ m. AN $y(x_{mur}) = 2{,}17$ m, donc le ballon passe au-dessus du mur.

c) Le tir est cadré si $y(x_{but}) \leq 2{,}44$ m. AN $y(x_{but}) = 1{,}73$ m, donc le tir est cadré.

2. a) On prend maintenant en compte la force de frottement $\vec{F}$, ce qui donne, en appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$. Projections sur (Ox) et (Oy) (en supposant toujours qu'il n'y a pas de mouvement sur (Oz)) : $m\ddot{x} = -h\dot{x}$ (1) et $m\ddot{y} = -mg - h\dot{y}$ (2).

(1) s'écrit aussi $v_x + \tau \frac{dv_x}{dt} = 0$ et admet une solution du type $Ae^{-t/\tau}$, où A est une constante qui se détermine par la condition $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$: on obtient $v_x(t) = v_0 \cos\alpha e^{-t/\tau}$ (3).

(2) s'écrit $v_y + \tau \frac{dv_y}{dt} = -g\tau$ et admet pour solution $Be^{-t/\tau} + C$ où B est une constante à déterminer par les conditions initiales et C une solution particulière de (2).
En cherchant C sous la forme d'une constante, on trouve $C = -g\tau$, puis en utilisant la condition $v_y(0) = V_0 \sin\alpha$, on trouve $B = V_0 \sin\alpha + g\tau$, ce qui donne $v_y(t) = \left[v_0 \sin\alpha + g\tau\right]e^{-t/\tau} - g\tau$ (4).
On intègre alors (3) et (4) en tenant compte des conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$:

$$\boxed{x(t) = v_0 \tau \cos\alpha \left[1 - e^{-t/\tau}\right]} \text{ et } \boxed{y(t) = \left(v_0 \tau \sin\alpha + g\tau^2\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - g\tau t}.$$

Les constantes d'intégrations ne sont pas toujours nulles !

b) On utilise la première équation pour exprimer t : $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)$ et on reporte cette expression dans la deuxième : $\boxed{y(x) = \left(\tan\alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos\alpha}\right)x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)}$.

c) On calcule $y(x_{mur}) = 2{,}17$ m et le ballon passe donc au-dessus du mur.

d) $y(x_{but}) = 1{,}73$ m : le tir est cadré. On constate que les frottements ont peu d'influence sur ce mouvement (car il n'est pas très rapide donc la force de frottement est restée assez faible).

Exercice 10.8

1. On calcule le poids $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu g = 1{,}9$ N et la poussée d'Archimède $\Pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu_a g = 1{,}1$ mN et on constate que la poussée d'Archimède représente moins de 0,1 % du poids.

2. a) Au cours de la chute libre, l'objet n'est soumis qu'à son poids et l'application de la deuxième loi de Newton entraîne $\vec{a} = \vec{g}$. En tenant compte des conventions d'orientations et des conditions initiales, on intègre deux fois : $\ddot{z} = g \rightarrow \dot{z} = gt \rightarrow \boxed{z(t) = \frac{1}{2} g t^2}$.

b) La durée de chute est la date t_c à laquelle l'objet touche le sol, donc telle que $z(t_c) = h$.

On en déduit alors simplement $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$. AN $\boxed{t_c = 2{,}3 \text{ s}}$.

3. a) Analyse dimensionnelle : $[K] = \frac{[F]}{[V]} = \frac{[M \cdot L \cdot T^{-2}]}{[L \cdot T^{-1}]}$ soit $\boxed{[K] = [M \cdot T^{-1}]}$ donc son unité SI est le $\boxed{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}$.

b) La deuxième loi de Newton s'écrire : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$. On le projette sur l'axe (Oz) : $mg - K\dot{z} = m\ddot{z}$, ou encore, sachant que $\dot{z} = v_z$ et $\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$, $\boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{m} v_z = g}$.

⇨ *Méthode 10.1*

c) La solution de cette équation, avec la CI $v_z(0) = 0$, est $\boxed{v_z(t) = \frac{mg}{K}\left[1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right]}$.

⇨ *Méthode 10.2*

La vitesse limite est $v_{lim} = \lim\limits_{t \to \infty}\left(v_z(t)\right) = \frac{mg}{K} = 94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

> *Cette valeur élevée n'est en rien étonnante car les frottements sont faibles ; d'autre part l'existence d'une vitesse limite n'implique pas que celle-ci sera atteinte au cours de la chute, ce qui, ici est très improbable vu la hauteur de chute.*

d) En intégrant cette expression par rapport au temps, on obtient $z(t) = \frac{mg}{K}\left[t + \frac{m}{K} e^{-\frac{K}{m}t}\right] + B$ où B est une constante à déterminer en utilisant la condition initiale $z(0) = 0$. Après calcul, $B = -\frac{m^2 g}{K^2}$ et $\boxed{z(t) = \frac{mg}{K}\left[t + \frac{m}{K} e^{-\frac{K}{m}t} - \frac{m}{K}\right]}$.

> *Ici, la constante d'intégration n'est pas nulle, bien que la fonction soit nulle à l'instant initial. Il ne faut donc pas annuler aveuglément une constante d'intégration parce que « ça fait zéro », mais toujours appliquer rigoureusement les conditions initiales.*

4. a) $\boxed{\beta(t) = z(t) - h = 94{,}306\left[t + 9{,}6613\left(e^{-0{,}104t} - 1\right)\right] - 25}$. On remarque que la fonction $\beta(t)$ est continue, que $\beta(0) = -25$ et $\beta(3) = 13{,}7$. Il existe donc une valeur t_c comprise entre $t = 0$ et $t = 3$ telle que $\beta(t_c) = 0$.

b) Instruction 1 : `v = w`

À chaque boucle, on divise par 2 l'intervalle dans lequel on cherche la solution, donc on modifie l'une des deux bornes de l'intervalle.

Instruction 2 : `94.306*(t + 9.6613*(np.exp(-0.104*t)-1)) – 25`

La fonction `position(t)` doit renvoyer la valeur de $\beta(t)$.

c) La fonction `dicho(f,a,b,epsilon)` renvoie la solution de l'équation $f(t)=0$, recherchée dans l'intervalle $[a,b]$, à ε près. Ici la précision est par défaut de 10^{-4}.

d) La précision déterminée à la question précédente est celle de la méthode dichotomique, laquelle repose sur les valeurs de l'énoncé, qui sont connues avec 2 chiffres significatifs. C'est avec cette précision qu'on peut connaitre la durée de chute : $\boxed{t_c = 2{,}4\ \text{s}}$.

Exercice 10.9

1. PFD appliqué à la goutte d'eau, dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\vec{P}+\vec{F}=m\vec{a}$. On peut l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{6\pi\eta a}{m(1+\ell/a)}\vec{v}=\vec{g}$. La vitesse limite est obtenue quand $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ s'annule et donc $\boxed{\vec{V}_{\text{lim}}=\dfrac{m}{6\pi\eta a}\left(1+\dfrac{\ell}{a}\right)\vec{g}=\dfrac{2}{9}\dfrac{\rho a^2}{\eta}\left(1+\dfrac{\ell}{a}\right)\vec{g}}$.

2. AN pour a_1, $\boxed{V_{\text{lim}\,1}=1{,}3\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}}$ et pour a_2, $\boxed{V_{\text{lim}\,2}=1{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

3. Le temps de transit est donné par $\boxed{t=\dfrac{h}{V_{\text{lim}}}}$. AN pour a_1, $\boxed{t_1=6{,}2\cdot10^5\ \text{s}\ =7\ \text{jours}}$ et pour a_2, $\boxed{t_2=6{,}2\cdot10^3\ \text{s}=1{,}7\ \text{h}}$.

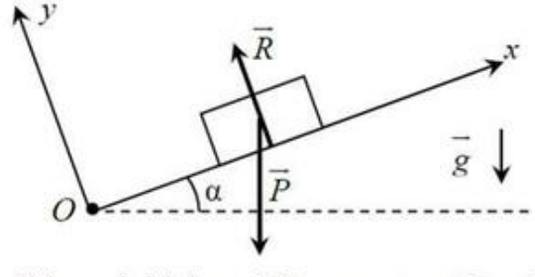
4. L'épaisseur e de la bulle étant faible par rapport au rayon, on peut estimer le volume de l'eau qui la constitue par la formule $4\pi a^2 e$, ce qui permet de calculer sa masse en négligeant celle de l'air enfermé. Cela donne une vitesse limite $V_{\text{lim}}=\dfrac{2}{3}a_2\dfrac{\rho g e}{\eta}\left(1+\dfrac{\ell}{a}\right)=0{,}38\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le temps de transit est alors $\boxed{t=2{,}1\cdot10^4\ \text{s}=6\ \text{h}}$.

Exercice 10.10

1. a) La brique est soumise à son poids $\vec{P}=-mg\sin\alpha\,\vec{e_x}-mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$ et à la réaction $\vec{R}$ du support, orthogonale à ce dernier soit $\vec{R}=R_y\vec{e_y}$.

On applique la deuxième loi de Newton : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$.

Projection sur l'axe (Ox) : $\ddot{x}=-g\sin\alpha$.



On intègre deux fois cette expression avec les conditions initiales $\dot{x}(0)=v_0$ et $x(0)=0$: $\dot{x}(t)=-(g\sin\alpha)t+v_0$ puis $\boxed{x(t)=-\dfrac{g\sin\alpha}{2}t^2+v_0t}$.

La projection sur (Oy), donnerait la valeur de la réaction, celle sur (Oz) n'apporte aucun information.

b) La date d'arrêt de la brique est telle que $\dot{x}(t_a) = 0$, soit $\boxed{t_a = \dfrac{v_0}{g\sin\alpha}}$ et la distance parcourue par la brique jusqu'à son arrêt est $\boxed{d = x(t_a) = \dfrac{v_0^2}{2g\sin\alpha}}$. AN $\boxed{t_a = 0{,}71\text{ s}}$ et $\boxed{x(t_a) = 0{,}86\text{ m}}$.

2. Dans ce cas, la deuxième loi de Newton s'écrit de la même façon, mais la projection sur (Ox) inclut la composante tangentielle de $\vec{R}$, soit $R_x = -|R_t| = -f\cdot|R_n| = -f\cdot R_y$.

On obtient donc : $-mg\sin\alpha + R_x = m\ddot{x}$ et on aura, par ailleurs, besoin de la projection sur (Oy) : $-mg\cos\alpha + R_y = m\ddot{y} = 0$ (pas de mouvement selon cette direction).

On en déduit $R_y = mg\cos\alpha$, d'où $\ddot{x} = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g$ puis on intègre deux fois avec les mêmes conditions initiales :

$\dot{x}(t) = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt + v_0$ et $\boxed{x(t) = -\dfrac{1}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + v_0 t}$.

La date d'arrêt est définie de la même façon, soit $\boxed{t'_a = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$ et la distance parcourue est $\boxed{d' = x(t'_a) = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$. AN $\boxed{t'_a = 0{,}46\text{ s}}$ et $\boxed{d' = 0{,}55\text{ m}}$.

Comme on pouvait le prévoir, les frottements ralentissent encore plus la brique et elle s'arrête plus tôt que dans le premier cas.

Exercice 10.11

1. La deuxième loi de Newton, appliquée à la skieuse dans le référentiel terrestre galiléen, s'écrit : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}$. En projetant cette relation sur l'axe (Oy), on obtient $-mg\cos\alpha + N = 0$ et donc $\boxed{N = mg\cos\alpha}$, puis $\boxed{T = f\,mg\cos\alpha}$.

⇨ *Méthode 10.2*

2. La même relation vectorielle projetée sur (Ox) donne $mg\sin\alpha - \lambda\dot{x} - f\,mg\cos\alpha = m\ddot{x}$ en notant x l'abscisse de la skieuse à chaque instant, comptée par rapport à sa position de départ.

On peut écrire cette équation différentielle sous la forme $\ddot{x} + a\dot{x} = b$ avec $a = \dfrac{\lambda}{m}$ et $b = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. La solution est donc $\dot{x}(t) = \dfrac{b}{a} + Ke^{-at}$ où K est une constante qui se détermine par les conditions initiales : $\dot{x}(0) = \dfrac{b}{a} + K = 0 \Leftrightarrow K = -\dfrac{b}{a}$.

Donc $\boxed{\dot{x}(t) = v_x(t) = \dfrac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)}$.

⇨ *Méthode 10.2*

$x(t)$ est une primitive de cette fonction, avec $x(0) = 0$. On obtient :

$$\boxed{x(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{m}{\lambda}\right)}.$$

☛ *Il faut déterminer rigoureusement la constante d'intégration qui, ici encore, n'est pas nulle.*

3. La vitesse tend vers une valeur limite $\boxed{v_\ell = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$. AN $\boxed{v_\ell = 60\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

4. La vitesse pouvant également s'écrire $v_x(t) = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$, on cherche la date t_1 telle que $v_x(t_1) = \frac{v_\ell}{2}$, soit $1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} = \frac{1}{2}$, ou $\boxed{t_1 = \frac{m}{\lambda}\ln 2}$. AN $\boxed{t_1 = 6{,}3\ \text{s}}$.

5. On choisit une nouvelle origine des temps et de l'axe : à $t' = 0$, $x'(0) = 0$ et $v_x(0) = \frac{v_\ell}{2}$. On applique alors la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}$, que l'on projette sur (Ox) : $mg\sin\alpha - 20fmg\cos\alpha = m\ddot{x}'$ et $\ddot{x}' = g\sin\alpha - 20fg\cos\alpha = -a$.

On en déduit : $\dot{x}'(t) = -at' + \frac{v_\ell}{2}$ et $x'(t') = -\frac{a}{2}t'^2 + \frac{v_\ell}{2}t'$. La vitesse s'annule pour $t'_2 = \frac{v_\ell}{2a}$ et la distance parcourue avant l'arrêt final est $\boxed{x'(t'_2) = \frac{v_\ell^2}{8g(20f\cos\alpha - \sin\alpha)}}$. AN $\boxed{x'(t'_2) = 650\ \text{m}}$.

Exercice 10.12

1. La masse est soumise à son poids $\vec{P} = +mg\vec{e_x}$ et à la force de rappel $\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e_x}$ du ressort. À l'équilibre, on peut écrire le PFD : $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$. Projection sur l'axe (Ox) : $-k(x_{\text{éq}} - x_0) + mg = 0$, et on obtient $\boxed{x_{\text{éq}} = x_0 + \frac{mg}{k}}$.

2. On applique à nouveau la deuxième loi de Newton à un instant quelconque du mouvement où la longueur du ressort est x : $-k(x - x_0) + mg = m\ddot{x}$, soit $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}}$ avec $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$.

3. a) Cette équation différentielle admet une solution du type $x(t) = A\cos(\omega_0 t + B) + x_{\text{éq}}$, A et B étant des constantes à déterminer avec les conditions initiales : $x(0) = A\cos B + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}}$ donc $\cos B = 0$ et on peut prendre $B = \frac{\pi}{2}$; et $\dot{x}(0) = -\omega_0 A\sin B = -\omega_0 A = v_0$, d'où $A = -\frac{v_0}{\omega_0}$.

On a donc trouvé $x(t) = x_{\text{éq}} - \frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = x_{\text{éq}} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

soit $\boxed{x(t) = x_{\text{éq}} + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$.

b) La période est définie par $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$.

Exercice 10.13

1. Forces appliquées à M : poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\left(\sin\alpha\,\vec{e_x} + \cos\alpha\,\vec{e_y}\right)}$; réaction normale de la tige $\boxed{\vec{R} = R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}}$; tensions des deux ressorts $\vec{T_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{e_x}$ soit $\boxed{\vec{T_1} = -k(x - \ell_0)\vec{e_x}}$, et $\vec{T_2} = -k(\ell_2 - 0)\left(-\vec{e_x}\right)$ soit $\boxed{\vec{T_2} = +k(2\ell_0 - x)\vec{e_x}}$.

> *Il faut bien prendre le temps d'écrire correctement ces deux tensions, en tenant compte du schéma et de la longueur à vide nulle d'un des deux ressorts.*

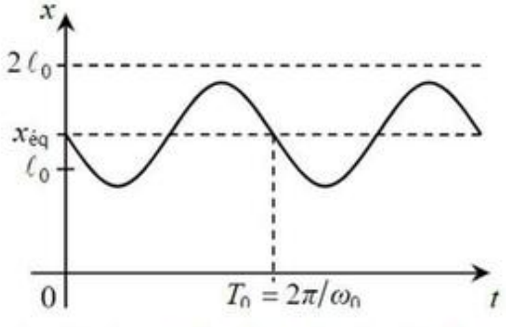
2. PFD pour M dans $\mathcal{R}$, à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$. Projection sur $\vec{e_x}$: $-mg\sin\alpha + 0 - k(x_{éq} - \ell_0) + k(2\ell_0 - x_{éq}) = 0$ d'où $\boxed{x_{éq} = \dfrac{3}{2}\ell_0 - \dfrac{mg\sin\alpha}{2k}}$.

3. PFD pour M dans $\mathcal{R}$, en mouvement : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$. Projection sur $\vec{e_x}$: $-mg\sin\alpha + 0 - k(x - \ell_0) + k(2\ell_0 - x) = m\ddot{x}$ soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{2k}{m}x = \dfrac{3k}{m}\ell_0 - g\sin\alpha}$. En posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}}$ on peut l'écrire : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{éq}}$.

4.a) Solution générale : $x(t) = x_{éq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Conditions initiales : $x(0) = x_{éq} + A = x_{éq}$ donc $A = 0$, soit $x(t) = x_{éq} + B\sin(\omega_0 t)$ et $\dot{x}(t) = B\omega_0\cos(\omega_0 t)$; $\dot{x}(0) = B\omega_0 = -v_0$ donc $B = -\dfrac{v_0}{\omega_0}$. Finalement : $\boxed{x(t) = x_{éq} - \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

b) Il faut que $x(t) < 2\ell_0, \forall t$ soit $\dfrac{3}{2}\ell_0 - \dfrac{mg\sin\alpha}{2k} - \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) < 2\ell_0, \forall t$. Le membre de gauche vaut au maximum $\dfrac{3}{2}\ell_0 - \dfrac{mg\sin\alpha}{2k} + \dfrac{v_0}{\omega_0}$ donc la condition est $\boxed{v_0 < \dfrac{\omega_0\ell_0}{2} + \dfrac{g\sin\alpha}{\omega_0}}$.

L'allure de $x(t)$ est alors la suivante :



5. Projection du PFD sur $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$: $-mg\cos\alpha + R_y + 0 + 0 = 0$ et $0 + R_z + 0 + 0 = 0$ donc $\boxed{\vec{R} = mg\cos\alpha\,\vec{e_y}}$.

Exercice 10.14

1. On étudie le châssis du véhicule, assimilé à un point matériel de masse M, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Forces appliquées à M (à l'équilibre) : son poids $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{u_z}$; quatre tensions identiques $\vec{T} = -k(L_e - L_0)\vec{u_z}$. Le PFD donne alors : $M\vec{g} + 4\vec{T} = \vec{0}$. Projection sur $\vec{u_z}$: $-Mg - 4k(L_e - L_0) = 0$ d'où $\boxed{L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}}$. $z = L + R$ donc $\boxed{z_e = L_0 - \frac{Mg}{4k} + R}$.

Vous n'avez quand même pas oublié le facteur 4 ? Il est cité pas moins de trois fois dans l'énoncé...

À l'équilibre il n'y a pas de force de frottement des amortisseurs, puisque la vitesse est nulle.

2. a) Quatre forces de frottements $\vec{F} = -\lambda\vec{v}(M) = -\lambda\dot{z}\vec{u_z}$ s'ajoutent maintenant aux précédentes : $M\vec{g} + 4\vec{T} + 4\vec{F} = M\vec{a}$. Projection sur $\vec{u_z}$: $-Mg - 4k(z - R - L_0) - 4\lambda\dot{z} = M\ddot{z}$ d'où $\ddot{z} + \frac{4\lambda}{M}\dot{z} + \frac{4k}{M}z = -g + \frac{4k}{M}(R + L_0) = \frac{4k}{M}z_e$. En posant $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$ et $\boxed{Q = \frac{M\omega_0}{4\lambda} = \frac{\sqrt{kM}}{2\lambda}}$, on obtient $\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e}$.

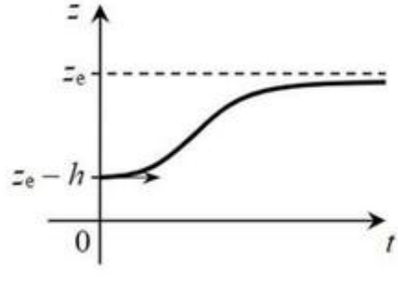
⇨ *Méthode 13.2*

b) Le retour à l'équilibre le plus bref correspond au régime critique. Le discriminant de l'équation caractéristique $\left(r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0\right)$ est alors nul : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0$ d'où $Q = \frac{1}{2}$, soit finalement $\boxed{\lambda = \sqrt{kM}}$.

⇨ *Méthode 13.3*

c) L'équation caractéristique a pour racine double $r = -\omega_0$. La solution générale est alors : $z(t) = z_e + (At + B)\exp(-\omega_0 t)$. Conditions initiales : $z(0) = z_e - h = z_e + B$ donc $B = -h$; $\dot{z}(0) = 0 = A - \omega_0 B$ donc $A = -\omega_0 h$. Finalement : $\boxed{z(t) = z_e - h(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)}$.

d) Évolution temporelle :



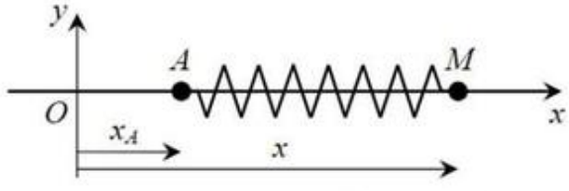
3. Avec la masse $M' = 1580$ kg : $Q' = \frac{\sqrt{kM'}}{2\lambda} = \frac{\sqrt{kM'}}{2\sqrt{kM}}$ soit $Q' = \frac{\sqrt{M'}}{2\sqrt{M}}$; AN $\boxed{Q' = 0{,}60}$.

$Q' > \dfrac{1}{2}$ donc $\Delta' < 0$: les racines de l'équation caractéristique sont maintenant les complexes conjugués $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ que l'on notera $-\dfrac{1}{\tau} \pm j\omega$. La solution générale est donc : $z(t) = z_e + e^{-t/\tau}[C\cos\omega t + D\sin\omega t]$. Conditions initiales : $z(0) = z_e - h = z_e + C$ donc $C = -h$; $\dot{z}(0) = 0 = -\dfrac{1}{\tau}C + D\omega$ donc $D = -\dfrac{h}{\omega\tau}$. Finalement : $z(t) = z_e - he^{-t/\tau}\left[\cos\omega t + \dfrac{\sin\omega t}{\omega\tau}\right]$.

Ce régime transitoire est un peu plus long que le régime critique, ce qui le rend plus désagréable ; cependant le facteur de qualité reste proche de 0,5 donc il n'y aura pas plus d'une oscillation avant l'arrêt.

Exercice 10.15

1.



Forces appliquées à M : poids $\vec{P} = -mg\vec{e_y}$; réaction normale de la tige $\vec{R} = R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}$; tension du ressort $\vec{T} = -k(AM - \ell_0)\vec{e_x} = -k(x - x_A - \ell_0)\vec{e_x}$; force de frottement fluide $\vec{F} = -h\dot{x}\vec{e_x}$. PFD : $m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F}$. Projection sur $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = 0 - k(x - x_A - \ell_0) + 0 - h\dot{x}$ soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}A_m\cos(\omega t) + \dfrac{k}{m}\ell_0}$. On pose alors $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $Q = \dfrac{m\omega_0}{h} = \dfrac{\sqrt{km}}{h}$ et $u = x - \ell_0$, d'où l'équation : $\boxed{\ddot{u} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 A_m\cos(\omega t)}$.

⇨ *Méthode 6.1*

2. Pour déterminer le régime permanent, on ne cherche que la solution particulière sinusoïdale de cette équation différentielle, de la forme $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Re}[\underline{U}e^{j\omega t}]$ en posant $\underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$. Alors l'équation devient : $-\omega^2\underline{U} + j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}\underline{U} + \omega_0^2\underline{U} = \omega_0^2 A_m$ dont la solution immédiate est $\underline{U} = \dfrac{A_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} = \dfrac{-A_m jQ\frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. Finalement, $\boxed{x(t) = \ell_0 + U_m\cos(\omega t + \varphi_u)}$

avec $\boxed{U_m = \dfrac{A_m}{\sqrt{\left(1 - \omega^2/\omega_0^2\right)^2 + \left(\omega/Q\omega_0\right)^2}}}$ et $\boxed{\varphi_u = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}$.

⇨ *Méthode 6.5*

3. Pour $\omega \to 0$, $U_m \to A_m$ et pour $\omega \to \infty$, $U_m \to 0$. Le point M suit donc exactement les oscillations de O à basse fréquence, la longueur du ressort restant alors pratiquement constante. En revanche M ne bouge pratiquement pas à haute fréquence : l'excitation étant trop rapide, l'inertie de M ne lui laisse jamais le temps de démarrer dans un sens ou dans l'autre. On a donc un filtrage passe-bas. On reconnaît d'ailleurs dans $\underline{U}$ la forme d'un filtre passe-bas d'ordre 2.

Corrigé

Pour trouver les variations de U_m, et notamment l'éventualité d'un maximum (résonance), on doit dériver U_m par rapport à ω :

$$\frac{dU_m}{d\omega} = -\frac{1}{2} A_m \frac{2(1-\omega^2/\omega_0^2)(-2\omega/\omega_0^2) + 2\omega/Q^2\omega_0^2}{\left[(1-\omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2\right]^{3/2}} = A_m \frac{\omega(2 - 2\omega^2/\omega_0^2 - 1/Q^2)}{\omega_0^2\left[(1-\omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2\right]^{3/2}}.$$

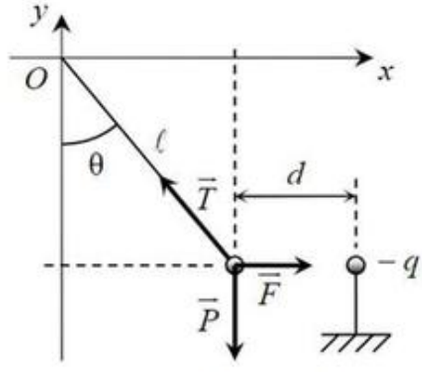
Cette dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour $2 - \frac{2\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{Q^2} = 0$ soit $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

La seconde valeur n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: elle correspond alors à un maximum, donc il y a résonance à cette pulsation, et $\omega = 0$ correspond à un minimum local.

Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, le seul extremum est $\omega = 0$ et c'est un maximum : ensuite la dérivée est toujours négative donc U_m décroît jusqu'à la valeur limite 0 ; il n'y a alors pas de résonance.

Exercice 10.16

Forces appliquées à la sphère S : son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_y}$; la force électrostatique $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\vec{e_x}$; la tension du fil $\vec{T} = T\left(-\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y}\right)$.



PFD à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$.

Projection sur la direction $\vec{e_y}$: $0 - T\sin\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2} = 0$

d'où $q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 d^2 T\sin\theta}$. Il reste à déterminer l'inconnue T, et pour cela on doit projeter la loi également sur la direction $\vec{e_x}$: $+T\cos\theta - mg + 0 = 0$ d'où $T = \frac{mg}{\cos\theta}$. On obtient donc finalement : $\boxed{q = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 d^2 mg\tan\theta}}$. AN $\boxed{q = 1{,}3\cdot10^{-6}\ \text{C}}$.

Exercice 10.17

1. Référentiel $\mathcal{R}$: terrestre supposé galiléen, lié au repère $(Oxyz)$. On étudie le cube C, de masse m, assimilé à un point matériel. Forces appliquées à C : poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}}$; force de rappel du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{\text{ressort}\to C}$ soit $\boxed{\vec{T} = +k(h - a - \ell_0)\vec{e_z}}$; réaction du plateau $\boxed{\vec{R} = R_x\vec{e_x} + R_y\vec{e_y} + R_z\vec{e_z}}$ a priori, avec $R_z > 0$ (liaison unilatérale).

On n'a ici aucune indication sur l'existence ou non de frottements solides : on doit donc supposer a priori que la réaction a trois composantes.

2. PFD pour C dans $\mathcal{R}$, à l'équilibre : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=\vec{0}$. Projections sur $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$: $R_x=0$; $R_y=0$; $-mg+R_z+k(h-a-\ell_0)=0$ d'où $\boxed{\vec{R}=[+mg-k(h-a-\ell_0)]\vec{e_z}}$.

> *Non, la réaction du support n'est pas l'opposé du poids, même si le support est horizontal et qu'on est à l'équilibre ! Seule l'application rigoureuse du PFD a permis de trouver les composantes, et de montrer en particulier que deux d'entre elles sont nulles, qu'il y ait ou non des frottements.*

3. Le calcul n'est valable que s'il donne $R_z>0$, car le cube est simplement posé sur le plateau, qui ne peut donc le repousser que vers le haut (contact unilatéral). $R_z=mg-k(h-a-\ell_0)>0$ $\Leftrightarrow k(h-a-\ell_0)<mg \Leftrightarrow \boxed{h<\frac{mg}{k}+a+\ell_0=h_{\max}}$.

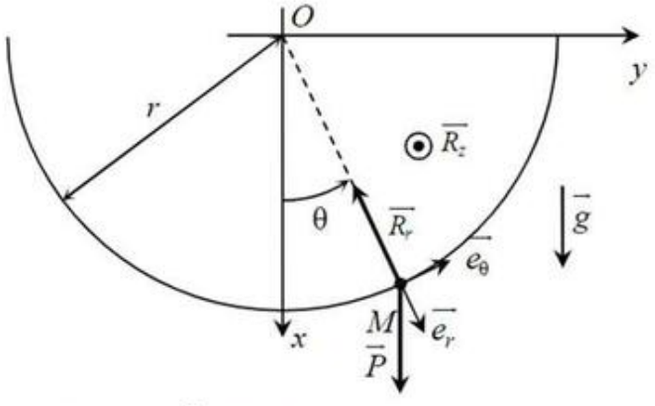
Si $h>h_{\max}$, le calcul n'étant plus valable, il faut revenir sur l'une des hypothèses de départ : la seule qui peut ne plus être valable est celle du contact entre le cube et le plateau. Donc si $h>h_{\max}$, le cube décolle nécessairement du plateau.

Exercice 10.18

1. L'anneau est soumis à son poids $\vec{P}=+mg\cos\theta\vec{e_r}-mg\sin\theta\vec{e_\theta}$ ainsi qu'à la réaction du support (qui est normale puisque les frottements sont inexistants) : $\vec{R}=R_r\vec{e_r}+R_z\vec{e_z}$. D'autre part le mouvement est circulaire de rayon r.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$.

Projections dans la base cylindrique :



$$mg\cos\theta+R_r=-mr\dot{\theta}^2\ (1)\ ;\ -mg\sin\theta=mr\ddot{\theta}\ (2)\ ;\ R_z=0\ (3).$$

2. a) La seconde projection ne comporte que la fonction θ. On la multiplie par $\dot{\theta}$, soit $-mg\sin\theta\dot{\theta}=mr\ddot{\theta}\dot{\theta}\Leftrightarrow\ddot{\theta}\dot{\theta}=-\frac{g}{r}\sin\theta\dot{\theta}$. On reconnaît alors deux dérivées que l'on peut intégrer : $\frac{\dot{\theta}^2}{2}=\frac{g}{r}\cos\theta+A$. Avec les conditions initiales $\dot{\theta}(0)=0$ (anneau immobile) et $\theta(0)=\theta_0$ on obtient finalement : $\boxed{\dot{\theta}^2=\frac{2g}{r}(\cos\theta-\cos\theta_0)}$ (4).

b) (3) montre que la réaction n'a qu'une composante non nulle, selon $\vec{e_r}$. On reporte l'expression (4) dans (1) : $\boxed{\vec{R}=mg\left[3\cos\theta-2\cos\theta_0\right]\vec{e_r}}$.

c) Cette expression est maximale pour $\theta=0$ (au moment où la particule passe par sa position la plus basse) : alors $\boxed{R_{\max}=mg\left[3-2\cos\theta_0\right]}$.

3. a) On utilise (2), sachant que pour des faibles valeurs de θ, on a $\sin\theta \approx \theta$: $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0}$.

b) Cette équation possède une solution du type $\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}\,t + C\right)$. On détermine A et C en utilisant les conditions initiales : $\theta(0) = A\cos C = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = -A\sqrt{\frac{g}{r}}\sin C = 0$.

Donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}\,t\right)}$.

Exercice 10.19

1. Référentiel $\mathcal{R}$: terrestre supposé galiléen, lié au repère $(Oxyz)$. Forces appliquées : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$; tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e_r}$ et force de frottements $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.
Informations cinématiques : le mouvement est circulaire dans le plan (Oxy), donc $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -L\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$.
PFD pour M dans $\mathcal{R}$: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$.

Projection sur le vecteur unitaire $\vec{e_\theta}$: $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. L'angle θ restant faible, on peut écrire $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0}$. On obtient la forme demandée en posant $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

2.a) L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$.

Le régime est pseudo-périodique si le discriminant de cette équation est négatif, soit : $\frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0$ ou $\boxed{\omega_0 > \frac{1}{\tau}}$.

b) τ est le temps de relaxation, qui donne l'ordre de grandeur de la durée de ce régime transitoire.

3. $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A\exp(-t/\tau)\cos(\Omega t + B)}{A\exp(-t/\tau)\exp(-T/\tau)\cos(\Omega t + B)}\right)$ soit $\boxed{\delta = \frac{T}{\tau}}$.

4. $\delta = \ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_C}\right) = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right)$ soit $\boxed{\delta = 0,110}$; $T = \frac{t_D - t_A}{7} = \frac{8,25 - 0,53}{7}$ soit $\boxed{T = 1,10\ \text{s}}$

$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{1,10}{0,110}$ soit $\boxed{\tau = 10,0\ \text{s}}$; $\alpha = \frac{2m}{\tau} = \frac{2\cdot 0,470}{10,0}$ soit $\boxed{\alpha = 9,40\cdot 10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Exercice 10.20

1. a) On étudie le système constitué par les deux cailloux et la ficelle (sans masse, donc ses éléments cinétiques sont nuls), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Si on néglige la pesanteur, il n'y a aucune force extérieure appliquée au système.

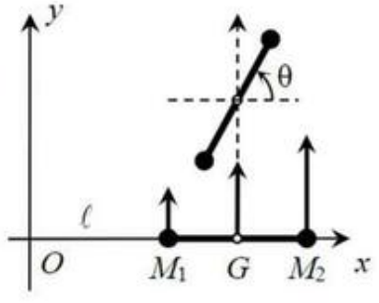
On ne considère que le mouvement après *que l'on a lâché la ficelle : seule la portion de ficelle entre les deux cailloux est tendue et exerce une force de tension.*

Le théorème de la quantité de mouvement donne donc : $2m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ d'où $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}}$. Le mouvement de G est rectiligne uniforme, avec la vitesse qu'il avait au moment où on a lâché la ficelle (vitesse horizontale de norme $\frac{3}{2}\ell\omega$).

b) Le référentiel barycentrique est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Il est donc également galiléen.

c) Puisque la distance entre chaque caillou et le barycentre est fixe, égale à $\ell/2$, le mouvement de chaque caillou dans $\mathcal{R}^*$ est circulaire, de centre G et de rayon $r = \ell/2$.

d) Pour définir entièrement les mouvements (symétriques) des deux cailloux, il reste à déterminer l'évolution de l'angle de rotation θ. On peut appliquer le PFD à l'un des cailloux, qui est soumis uniquement à la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e_r}$ (dans la base polaire) : $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}^*} = \vec{T}$. Or l'accélération dans un mouvement circulaire s'écrit $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}^*} = -r\dot{\theta}^2\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$ dans la base polaire.



Projection du PFD sur $\vec{e_\theta}$: $mr\ddot{\theta} = 0$ d'où $\dot{\theta} = \text{cte}$.

Condition initiale : $\dot{\theta}(0) = \omega$, donc finalement $\boxed{\dot{\theta} = \omega = \text{cte}}$.

Les cailloux continuent à tourner à la vitesse angulaire qu'ils avaient quand Toto les a lâchés.

2. a) Le système n'est plus isolé : $2m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = 2m\vec{g}$ d'où $\boxed{\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{cte}}}$. G ayant une vitesse initiale horizontale, son mouvement est donc parabolique, dans un plan vertical.

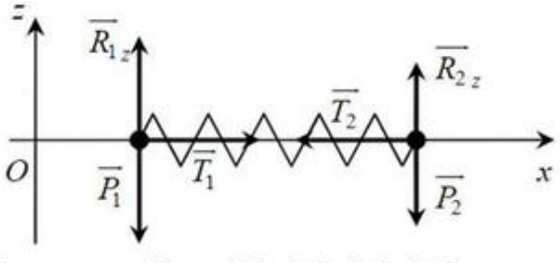
b) Cette fois le référentiel barycentrique est non galiléen, puisque sa translation par rapport au référentiel terrestre est accélérée.

Exercice 10.21

1. Système étudié : {M_1, M_2, ressort} (le ressort étant sans masse, il n'interviendra pas dans les éléments cinétiques).

Forces intérieures : $\vec{T_2} = -\vec{T_1} = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{e_x}$.

Forces extérieures : deux réactions normales $\vec{R_i} = R_{iy}\vec{e_y} + R_{iz}\vec{e_z}$; deux poids $\vec{P_i} = -m_i g\vec{e_z}$.



2. TQM pour le système dans $\mathcal{R}$ galiléen : $(m_1 + m_2)\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{R_1} + \vec{R_2}$.

Projections : $\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_G = 0 \\ 0 = R_{1y} + R_{2y} \\ 0 = -m_1 g - m_2 g + R_{1z} + R_{2z}. \end{cases}$

Les trois projections sont nulles, pour des raisons différentes : la première parce qu'il n'y a pas de force selon x, les deux autres parce qu'il ne peut pas y avoir de mouvement selon y et z.

Donc $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \vec{0}$: le système est pseudo-isolé.

Alors $\dot{x}_G = \text{cte} = \dfrac{m_1 v_0 + m_2 0}{m_1 + m_2}$ d'où $\boxed{x_G(t) = \dfrac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t + \text{cte} = \dfrac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \ell_0}$.

3. a) Le référentiel barycentrique est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre, lui-même supposé galiléen. Il est donc galiléen.

b) On peut appliquer le PFD à chaque masse dans $\mathcal{R}$ ou dans $\mathcal{R}^*$, mais c'est plus pratique de rester dans $\mathcal{R}$, où les abscisses x_1 et x_2 ont déjà été définies.

Pour M_1 : $m_1 \vec{a}(M_1)_{\mathcal{R}} = \vec{T_1} + \vec{R_1} + \vec{P_1}$. Projection sur $\vec{e_x}$: $m_1 \ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1 - \ell_0)$. De même pour M_2 : $m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)$. On divise chaque équation par la masse, puis on soustrait membre à membre : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\dfrac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - \ell_0) - \dfrac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - \ell_0) \Leftrightarrow \ddot{\ell} = -\left(\dfrac{k}{m_2} + \dfrac{k}{m_1}\right)(\ell - \ell_0)$

soit $\ddot{\ell} + \omega_0^2 \ell = \omega_0^2 \ell_0$ où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)}}$. Solution : $\ell(t) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les CI $\ell(0) = \ell_0$ et $\dot{\ell}(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = -v_0$ on trouve $\boxed{\ell(t) = \ell_0 - \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

Exercice 10.22

1. Forces appliquées à M_1 : poids $\vec{P_1} = m\vec{g} = +mg\vec{e_z}$; tension du ressort $\vec{T_1} = +k(\ell - \ell_0)\vec{e_z} = +k(z_2 - z_1 - \ell_0)\vec{e_z}$. Forces appliquées à M_2 : poids $\vec{P_2} = m\vec{g} = +mg\vec{e_z}$; tension du ressort $\vec{T_2} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_z} = -k(z_2 - z_1 - \ell_0)\vec{e_z} = -\vec{T_1}$.

Ici il suffit d'appliquer le PFD à M_2 seul dans $\mathcal{R}$ à l'équilibre ($t \leq 0$) : $\vec{P_2} + \vec{T_2} = \vec{0}$.

On projette sur $\vec{e_z}$: $+mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$ d'où $\boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}}$.

2. TQM pour le système dans $\mathcal{R}$: $2m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = 2m\vec{g}$ d'où $\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{cte}}$.

Le mouvement de G est donc rectiligne uniformément accéléré. On intègre : $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{g}t$ (nulle à $t = 0$) puis $\boxed{\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{2}\vec{g}t^2 + \overrightarrow{OG_0} = \left(\dfrac{1}{2}gt^2 + d + \dfrac{\ell_0}{2}\right)\vec{e_z}}$ (car G est au milieu de $[M_1M_2]$).

3. Le référentiel barycentrique n'est pas galiléen, on ne peut donc pas l'utiliser. On applique alors le PFD à M_1 et à M_2 dans $\mathcal{R}$, et on projette toujours sur $\vec{e_z}$: $m\ddot{z}_1 = +mg + k(\ell - \ell_0)$ et $m\ddot{z}_2 = +mg - k(\ell - \ell_0)$. On soustrait membre à membre : $m(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = m\ddot{\ell} = -2k(\ell - \ell_0)$ soit $\ddot{\ell} + \dfrac{2k}{m}(\ell - \ell_0) = 0$ [oscillateur harmonique].

Solution : $\ell(t) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$. Conditions initiales : $\ell(0) = \ell_0 + \dfrac{mg}{k} = \ell_0 + A$ et $\dot{\ell}(0) = \dot{z}_2(0) - \dot{z}_1(0) = 0 = B\omega_0$, d'où $\boxed{\ell(t) = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}\cos(\omega_0 t)}$.

Chapitre 11

Énergie mécanique

UN SCIENTIFIQUE



Gottfried Leibniz (1646-1716) a suivi des études de philosophie et de théologie et s'est intéressé à tous les domaines de la connaissance de son époque. Il se passionne pour les sciences, suite à sa rencontre à Paris avec Christiaan Huygens. C'est alors qu'il développe dans plusieurs articles la notion de calcul intégral ce qui lui permet de résoudre des problèmes de cinématique, solutions d'équations différentielles. Ses écrits en philosophie ont concouru à sa célébrité.

Un peu d'histoire

La notion d'énergie mécanique est apparue progressivement dans les considérations scientifiques des physiciens. Généralisant une idée de son ami Christiaan Huygens, Leibniz affirme la conservation dans un choc élastique de la somme des mv^2 qu'il appelle *vis viva* (*force vive* en français) et l'expose dans un traité paru en 1686, il en fait un principe général, se démarquant ainsi des idées de René Descartes.

C'est en étudiant les trajectoires des planètes qu'Isaac Newton comprend l'importance de la notion de force et en déduit les lois de l'attraction universelle. L'introduction du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz permet la résolution de nombreux problèmes. Ainsi, Leonhard Euler et Jean Le Rond D'Alembert développent des méthodes de résolution d'équations différentielles et publient chacun un traité complet de mécanique, l'un en 1736 et l'autre en 1743.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les définitions de la puissance et du travail d'une force
- Le théorème de l'énergie cinétique (forme instantanée et forme intégrale)
- La définition d'une force conservative et la relation avec son énergie potentielle
- Les énergies potentielles élastique, de pesanteur et électrostatique
- Le théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée et forme intégrale)

Ce qu'il faut savoir faire

- Calculer le travail d'une force
- Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la norme de la vitesse en un point, ou pour établir une équation différentielle du mouvement
- Déterminer une énergie potentielle à partir de l'expression de la force, ou inversement
- Déterminer les limites du mouvement d'un point matériel en utilisant son énergie potentielle et son énergie mécanique
- Déterminer les positions d'équilibre d'un point matériel en utilisant son énergie potentielle
- Établir l'équation différentielle du mouvement d'un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable

■■ Résumé de cours

■ Travail et puissance d'une force

❑ Puissance d'une force

Soit un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ et soumis à une force $\overline{F}$.

La puissance de $\overline{F}$ dans $\mathcal{R}$ est définie par : $\boxed{\mathcal{P}\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}} = \overline{F} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}$.

Si deux forces $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ sont appliquées à M : $\mathcal{P}\left(\overline{F_1}\right)_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}\left(\overline{F_2}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}\left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right)_{\mathcal{R}}$.

❑ Travail élémentaire d'une force

Si on considère l'action de $\overline{F}$ pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ au cours duquel la position de M a varié de $\mathrm{d}\overline{OM}$, le travail élémentaire de $\overline{F}$ est : $\boxed{\delta W\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}} \mathrm{d}t = \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{OM}}$.

❑ Travail d'une force le long d'une courbe

Si la force $\overline{F}$ s'applique à un point matériel M effectuant une trajectoire allant de A à B, le travail de la force sur cette trajectoire est : $\boxed{W\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}}^{A \to B} = \int_A^B \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{OM}}$.

Le travail est dit **moteur** s'il est positif, et **résistant** s'il est négatif.

❑ Cas particuliers

– Une force dont la direction est en permanence orthogonale au déplacement du point M ne travaille pas : $\mathcal{P}\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}} = 0$, $W\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}} = 0$.

– Si une force est un vecteur constant : $W\left(\overline{F}\right)_{\mathcal{R}}^{A \to B} = \overline{F} \cdot \overline{AB}$.

⇨ Méthode 11.1. Calculer un travail dans des cas particuliers
⇨ Méthode 11.2. Calculer le travail d'une force quelconque

■ Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

❑ Énergie cinétique

Pour un point matériel M de masse m en mouvement relativement à un référentiel $\mathcal{R}$, animé d'une vitesse $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$, l'énergie cinétique de M dans $\mathcal{R}$ est : $\boxed{E_c(M)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v(M)_{\mathcal{R}}^2}$.

❑ Énoncés du théorème de l'énergie cinétique (TÉC)

Soit un point matériel M, de masse m et soumis à un ensemble de forces de résultante $\sum \overrightarrow{F}$, étudié dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

Forme instantanée

À tout instant : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right)_{\mathcal{R}}}$.

Dans un problème à une seule dimension, cette forme du théorème (également appelée *théorème de la puissance mécanique*) permet d'obtenir l'équation du mouvement en éliminant directement les forces qui ne travaillent pas.

Forme intégrale

Entre deux points A et B de la trajectoire : $E_{\mathrm{c}}(M)_{\mathcal{R}}^{B} - E_{\mathrm{c}}(M)_{\mathcal{R}}^{A} = \sum W\left(\overrightarrow{F}\right)_{\mathcal{R}}^{A\to B}$

ou plus simplement $\boxed{\Delta E_{\mathrm{c}}(M)_{\mathcal{R}} = \sum W\left(\overrightarrow{F}\right)_{\mathcal{R}}}$.

Cette forme du théorème est utile lorsqu'on cherche à relier uniquement un état initial et un état final, sans chercher à déterminer l'évolution temporelle entre les deux.

■ Champ de force conservative et énergie potentielle

❑ Champ de force conservative

Une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel M constitue un **champ de force** $\overrightarrow{F}(P)$ si elle ne dépend que de la position P où se trouve M (et non de sa vitesse, ou des autres forces).
La force est alors dite **conservative** si son travail entre deux positions A et B quelconques ne dépend pas de la trajectoire suivie par le point M entre A et B.

❑ Travail et énergie potentielle

On dit qu'une force conservative $\overrightarrow{F}(P)$ dérive d'une énergie potentielle, fonction d'espace $E_{\mathrm{p}}(P)$ définie par $\boxed{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = -\delta W\left(\overrightarrow{F}\right)_{\mathcal{R}} = -\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$ pour tout déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Cette formule est équivalente à $\boxed{\overrightarrow{F}(P) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_{\mathrm{p}}(P)}$ où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est l'opérateur différentiel gradient ; on rencontrera notamment $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x}$ pour une fonction d'une seule coordonnée cartésienne, et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_{\mathrm{p}}(r) = \dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r}$ pour une fonction de r seul (coordonnée sphérique ou cylindrique).

⇨ Méthode 11.3. Déterminer l'énergie potentielle à partir de la force conservative ou l'inverse

Le travail d'une force conservative entre deux points A et B de la trajectoire est l'opposé de la variation de l'énergie potentielle : $\boxed{W\left(\overrightarrow{F}\right)_{\mathcal{R}}^{A\to B} = E_{\mathrm{p}}(A) - E_{\mathrm{p}}(B)}$.

❑ Propriétés de l'énergie potentielle

– La fonction énergie potentielle est définie à une constante additive près : le choix de cette constante correspond au choix d'une origine des énergies potentielles.

– Si un point M est soumis à plusieurs forces conservatives, on obtient son énergie potentielle totale en additionnant les énergies potentielles dont dérivent les différentes forces.

❑ Exemples

– Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (avec $\vec{g}$ uniforme) dérive de l'énergie potentielle de pesanteur :

$\boxed{E_{pp} = mgz + \text{cte}}$ si (Oz) est un axe vertical ascendant

$E_{pp} = -mgz + \text{cte}$ si (Oz) est un axe vertical descendant.

– La tension d'un ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r\to p}$ dérive de l'énergie potentielle élastique :

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}}.$$

– La force de gravitation exercée par un astre sphérique de masse M, $\overrightarrow{F_g} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$ (en coordonnées sphériques) dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle : $\boxed{E_{pg} = -G\dfrac{Mm}{r} + \text{cte}}$ (la constante étant généralement prise nulle, ce qui correspond à une origine à l'infini).

■ Énergie mécanique

❑ Définition

L'énergie mécanique d'un point matériel M est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle totale : $\boxed{E_m(M)_{\mathcal{R}} = E_c(M)_{\mathcal{R}} + E_p(M)}$.

❑ Théorème de l'énergie mécanique

Considérons un point matériel M, soumis à des forces conservatives et également à des forces non conservatives de résultante $\overrightarrow{F_{nc}}$, étudié dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

Forme instantanée

À tout instant : $\boxed{\dfrac{dE_m(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)_{\mathcal{R}}}$.

Forme intégrale

Entre deux points A et B de la trajectoire : $E_m(M)^B_{\mathcal{R}} - E_m(M)^A_{\mathcal{R}} = W\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)^{A\to B}_{\mathcal{R}}$

ou plus simplement $\boxed{\Delta E_m(M)_{\mathcal{R}} = W\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)_{\mathcal{R}}}$.

❑ Cas de conservation de l'énergie mécanique

Un cas particulier intéressant est celui d'une évolution conservative : il n'y a aucune force non conservative, ou bien les forces non conservatives ne travaillent pas. L'énergie mécanique est alors une constante du mouvement (donnée par les conditions initiales).

L'équation $E_m(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$ est appelée **intégrale première de l'énergie mécanique** (équation de conservation contenant uniquement les coordonnées de position et leurs dérivées premières).

■ Mouvement conservatif unidimensionnel

❑ Définition

Un point matériel est dit à **un degré de liberté** si son repérage dans l'espace ne nécessite qu'un seul paramètre. Ce paramètre sera noté x par la suite.
Ce point matériel est en mouvement conservatif unidimensionnel s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives et des forces de puissance nulle. Son énergie mécanique est alors constante.

❑ Équilibre d'un point matériel dans un champ de force conservative

– Une position d'équilibre est une abscisse $x_{éq}$ où M peut rester immobile. L'équilibre est alors **stable** si, lorsque M est écarté légèrement de cette position, il a tendance à y revenir. Il est **instable** si, lorsque M est écarté légèrement de cette position, il continue à s'en éloigner.
– Les positions d'équilibre de M correspondent aux extrema de son énergie potentielle totale $E_p(x)$, soit généralement $\dfrac{dE_p}{dx}(x_{éq}) = 0$.

Une position d'équilibre *stable* correspond à un *minimum* de l'énergie potentielle totale.
Une position d'équilibre *instable* correspond à un *maximum* de l'énergie potentielle totale.

⇨ **Méthode 11.4. Déterminer les positions d'équilibre**

❑ Limites du mouvement

L'énergie cinétique étant par nature positive, la conservation de l'énergie mécanique entraîne nécessairement $E_p(x) \leq E_m(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$.

Si cette condition limite les valeurs possibles de x, le point matériel M est dans un **état lié**.
Si elle n'empêche pas x de tendre vers l'infini, M est dans un **état libre** (ou **état de diffusion**).

⇨ **Méthode 11.5. Déterminer les limites du mouvement**

❑ Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Approximation de l'énergie potentielle

Pour un point matériel en évolution conservative, repéré par une variable x, l'énergie potentielle totale peut être approchée, au voisinage d'une position d'équilibre stable $x_{éq}$ (minimum), par :

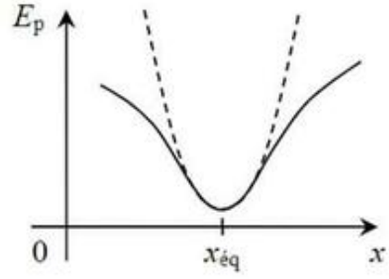
$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_{éq})^2 + \text{cte} \quad \text{en posant} \quad k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{éq}) > 0.$$

Si on choisit l'origine des x à la position d'équilibre, la formule devient plus simplement : $E_p(x) \approx \dfrac{1}{2}k\,x^2 + \text{cte}$. La variable élevée au carré est toujours *l'écart à la position d'équilibre*.

⇨ **Méthode 11.6. Établir l'expression quadratique de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre**

Interprétation graphique

Cela revient à assimiler la courbe représentative de $E_p(x)$, au voisinage de $x_{éq}$, à un arc de parabole (« puits d'énergie potentielle »).



Force de rappel

La force conservative dérivant de $E_p(x)$ est alors une force de rappel de la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} = -k(x - x_{éq})\overrightarrow{e_x}}.$$

Si on choisit l'origine des x à la position d'équilibre, la formule devient $\overrightarrow{F}(x) = -kx\overrightarrow{e_x}$.

Équation différentielle

Un point matériel en évolution conservative, au voisinage d'une position d'équilibre $x_{éq}$, obéit à une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0} \text{ en posant } u = x - x_{éq} \text{ et } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

Cette équation différentielle s'obtient facilement en dérivant l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps et en remarquant que cette dérivée doit être nulle.
On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique**.

⇨ **Méthode 11.7. Établir l'équation différentielle d'un mouvement unidimensionnel**

■ Théorème de l'énergie cinétique pour un système de points

❑ Énergie cinétique d'un système quelconque

C'est la somme des énergies cinétiques de tous les points du système.

Pour un solide S de masse m en translation dans $\mathcal{R}$ à une vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}$: $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}mv_{\mathcal{R}}^2$ comme pour un point matériel.
Le cas d'un solide S en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$ sera vu au chapitre **17**.

❑ Théorème de l'énergie cinétique

Si le système est *indéformable* (solide), le théorème de l'énergie cinétique s'écrit comme pour un point matériel, en tenant compte uniquement des forces *extérieures* exercées sur les différents points du solide.
Si le système est *déformable*, il faut prendre en compte également les forces *intérieures* au système, dont la puissance peut ne pas être nulle.

■■ Méthodes

■ Comment calculer le travail d'une force ?

❑ Méthode 11.1. Calculer un travail dans des cas particuliers

– Si la force $\overrightarrow{F}$ dont on cherche à exprimer le travail entre deux points A et B est constante (vecteur de *direction* et de *norme* constantes), alors $W\left(\overrightarrow{F}\right)_{A\to B} = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

– Si la force $\overrightarrow{F}$ est conservative, c'est-à-dire dérive d'une énergie potentielle E_p, alors $W\left(\overrightarrow{F}\right)_{A\to B} = E_\text{p}(A) - E_\text{p}(B)$.

⇨ Exercices 11.1, 11.2, 11.3, 11.4

Exemple : travail du poids

Le poids d'un point matériel de masse m est à la fois une force constante et une force conservative, donc lorsqu'il se déplace depuis l'altitude z_A jusqu'à l'altitude z_B :

$$W\left(\overrightarrow{P}\right)_{A\to B} = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{AB} = E_\text{pp}(A) - E_\text{pp}(B) = mg(z_A - z_B).$$

❑ Méthode 11.2. Calculer le travail d'une force quelconque

– Exprimer $\overrightarrow{F}$ en un point M quelconque dans le système de coordonnées adapté.

– Exprimer $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ dans le même système de coordonnées :

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$ en coordonnées cartésiennes (pour un mouvement libre dans l'espace) ; $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$ en coordonnées cylindriques (idem) ; $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$ en coordonnées sphériques (idem).

Si le mouvement est limité dans l'espace (sur une droite, un cercle, un plan…), $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ ne comportera qu'un ou deux des termes précédents.

– Effectuer le produit $\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, puis calculer l'intégrale entre les deux positions considérées.

⇨ Exercice 11.4

Exemple : travail de la force de rappel d'un ressort

Un point matériel se déplace sur l'axe (Ox) de A en B, en étant soumis à une force $\overrightarrow{F} = -kx\,\overrightarrow{e_x}$:

$$W\left(\overrightarrow{F}\right)_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B -kx\,\overrightarrow{e_x}\cdot\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} = \int_A^B -kx\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2}\left[x_A^2 - x_B^2\right].$$

■ Comment relier force et énergie potentielle ?

❑ Méthode 11.3. Déterminer l'énergie potentielle à partir de la force conservative ou l'inverse

– L'énergie potentielle E_p associée à une force conservative $\vec{F}$ s'exprime à partir de la définition locale : $\mathrm{d}E_p = -\delta W\left(\vec{F}\right)_{\mathcal{R}} = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. On exprime $\vec{F}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ dans la même base. On effectue le produit scalaire, et s'il s'exprime à l'aide d'une seule variable (ce qui sera toujours le cas dans ce chapitre et les suivants), on obtient la dérivée de E_p par rapport à cette variable. Il ne reste qu'à intégrer pour obtenir E_p à une constante près (que l'on peut fixer en choisissant une origine).

– Dans l'autre sens, le calcul de $\vec{F}$ à partir de E_p est un simple calcul de gradient, c'est-à-dire de dérivation, l'expression utile du gradient étant fournie.

⇨ Exercices 11.4, 11.6, 11.7

Exemple : énergie potentielle de pesanteur
On considère un système d'axes tel que (Oz) soit vertical et ascendant.

Par définition : $\mathrm{d}E_{pp} = -\vec{P}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -m\vec{g}\cdot\left(\mathrm{d}x\,\vec{e_x} + \mathrm{d}y\,\vec{e_y} + \mathrm{d}z\,\vec{e_z}\right) = +mg\,\mathrm{d}z$, donc $\dfrac{\mathrm{d}E_{pp}}{\mathrm{d}z} = +mg$.

Or m et g ne dépendent pas de z, donc la primitive se déduit immédiatement : $E_{pp}(z) = +mgz + \text{cte}$. Si on choisit $E_{pp}(z_0) = 0$ pour une certaine altitude z_0, on obtient $\text{cte} = -mgz_0$, d'où $E_{pp}(z) = +mg(z - z_0)$.

Inversement : $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_{pp} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left[mg(z-z_0)\right] = -\dfrac{\mathrm{d}\left[mg(z-z_0)\right]}{\mathrm{d}z}\vec{e_z}$ soit $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$.

■ Comment utiliser l'énergie potentielle pour étudier un mouvement unidimensionnel ?

❑ Méthode 11.4. Déterminer les positions d'équilibre

Pour un point matériel en évolution conservative unidimensionnelle, ayant une énergie potentielle $E_p(x)$, les positions d'équilibre correspondent aux extrema de celles-ci : un minimum correspond à une position d'équilibre stable, un maximum à une position d'équilibre instable.

– Commencer par regarder si les extrema sont évidents : dans ce cas, il n'y a aucun calcul à faire.

– Sinon, on dérive l'énergie potentielle par rapport à x et on cherche les valeurs de x pour lesquelles cette dérivée s'annule ; ce sont les positions d'équilibre. Puis on a

deux possibilités : on regarde le signe de la dérivée à gauche et à droite de la position d'équilibre ; ou bien on dérive l'énergie potentielle une nouvelle fois par rapport à x et on étudie le signe de cette dérivée seconde pour chacune des positions d'équilibre : une dérivée seconde positive caractérise un minimum (position d'équilibre stable), une dérivée seconde négative caractérise un maximum (position d'équilibre instable).

⇨ Exercices 11.7, 11.13 à 11.15

Considérons un point matériel dont le paramètre de position est x et qui possède une énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x-a)^2$, a et k étant des constantes positives.

– Elle est toujours positive, n'a pas de maximum si x est illimité, mais a un minimum évident, qui est 0 pour $\boxed{x = a}$: cette abscisse est donc une position d'équilibre stable.

– Si on préfère les calculs, on dérive une première fois : $\frac{dE_p}{dx} = k(x-a)$. Cette expression s'annule seulement pour $x = a$, ce qui constitue la position d'équilibre du point matériel.

$\frac{dE_p}{dx} < 0$ pour $x < a$ (E_p décroissante avant a) et $\frac{dE_p}{dx} > 0$ pour $x > a$ (E_p croissante après a) donc $E_p(a)$ est bien un minimum, correspondant à une position d'équilibre stable.

Ou bien $\frac{d^2E_p}{dx^2} = k$, qui est positive en $x = a$ (et en x quelconque d'ailleurs), ce qui donne bien un minimum.

❑ Méthode 11.5. Déterminer les limites du mouvement

Soit x le paramètre de position du point matériel, et $E_p(x)$ son énergie potentielle.

– On trace la courbe représentative de $E_p(x)$, et on peut y repérer les positions d'équilibre (stable ou instable).

– On détermine l'énergie mécanique E_m avec les conditions initiales, et on fait apparaître sur le graphe une droite horizontale correspondant à sa valeur.

– On cherche les domaines possibles pour le mouvement, c'est-à-dire les valeurs de x telles que $E_p(x) \leq E_m$.

⇨ Exercices 11.6, 11.11, 11.14

Considérons par exemple un point matériel repéré par le paramètre x, évoluant dans le champ de force associé à la fonction énergie potentielle ci-après (page suivante).

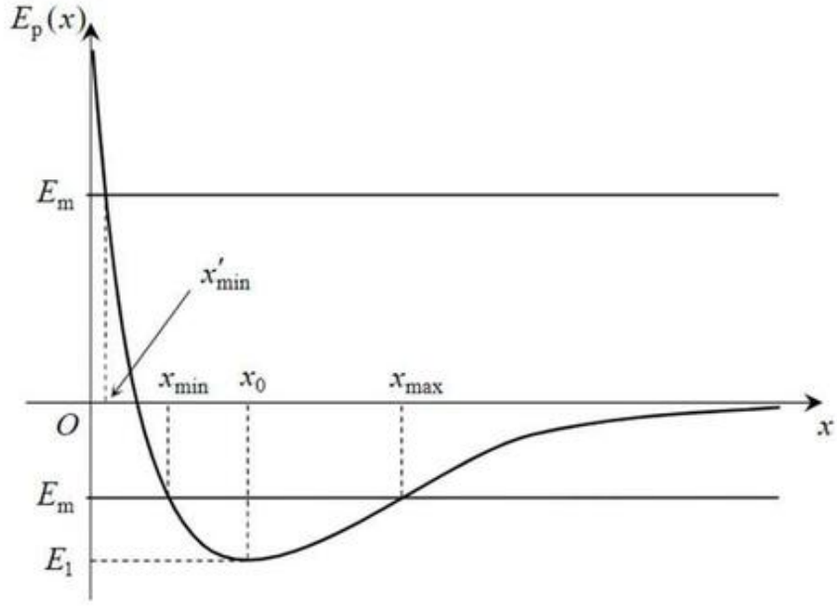
La seule position d'équilibre correspond à $x = x_0$ et il s'agit d'un équilibre stable (minimum).

On trace une droite horizontale dont l'ordonnée est l'énergie mécanique E_m (déterminée par les conditions initiales). En fonction de sa valeur on distingue deux cas possibles :

– si $E_1 \leq E_m < 0$, le domaine accessible sous la droite est $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ (état lié) ;

– si $E_m \geq 0$, le domaine accessible est $x'_{min} \leq x < \infty$ (état libre).

Le cas $E_m < E_1$ est impossible.



❑ Méthode 11.6. Établir l'expression quadratique de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre

Connaissant l'énergie potentielle totale et la position d'équilibre stable, on prend comme variable *l'écart à la position d'équilibre* (en utilisant si nécessaire le fait que cet écart reste faible) pour obtenir la forme caractéristique cherchée.

⇨ Exercices 11.5, 11.9, 11.14

– Considérons tout d'abord une masse m suspendue à un point O par l'intermédiaire d'un ressort (k, ℓ_0).



Énergie potentielle totale : $E_p = E_{p\,(élastique)} + E_{p\,(pesanteur)} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 - mgx + \text{cte}$.

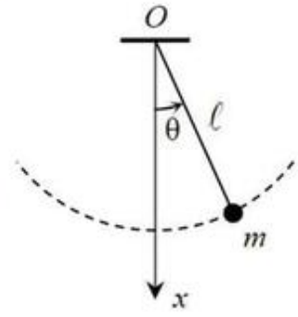
La position d'équilibre vérifie $\frac{dE_p}{dx}(x_{éq}) = 0$ soit $x_{éq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. On pose alors $u = x - x_{éq}$ et on réécrit l'énergie potentielle en faisant apparaître la variable u :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(u + \frac{mg}{k}\right)^2 - mg(u + x_{éq}) + \text{cte} = \frac{1}{2}ku^2 + umg + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 - mg(u + x_{éq}) + \text{cte}$$

soit finalement $\boxed{E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \text{cte}}$ après simplification et regroupement de toutes les constantes.

Nous n'avons pas eu à utiliser explicitement l'hypothèse d'un faible écart à la position d'équilibre, car la formule de l'énergie potentielle élastique utilise déjà l'hypothèse que l'élongation du ressort reste faible.

– Considérons maintenant un pendule simple, masse ponctuelle m attachée à un fil tendu de longueur ℓ, et repérée par son angle θ avec la verticale.



Énergie potentielle totale : $E_p = -mgx + \text{cte} = -mg\ell\cos\theta + \text{cte}$.

La position d'équilibre stable est le minimum de E_p soit $\theta_{éq} = 0$: la variable θ elle-même représente donc l'écart à la position d'équilibre. Au voisinage de cette position : $\theta \ll 1$ donc $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$. On obtient donc $E_p \approx \dfrac{1}{2}mg\ell\theta^2 + \text{cte}$ (en regroupant les deux constantes en une seule).

❑ Méthode 11.7. Établir l'équation différentielle d'un mouvement unidimensionnel

L'équation différentielle du mouvement d'un point matériel en évolution unidimensionnelle (de coordonnée x) peut s'obtenir par application de l'un des théorèmes énergétiques sous forme instantanée, en éliminant la solution correspondant à l'équilibre ($\dot{x} = 0$).

⇨ **Exercice 11.3, 11.8, 11.9, 11.12 à 11.15**

Le pendule ci-dessus est en évolution conservative, car il n'a aucun travail de force non conservative. Son énergie mécanique reste donc constante :

$E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{1}{2}mg\ell\theta^2 + \text{cte} = \text{cte}$ donc $\dfrac{dE_m}{dt} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\theta\dot{\theta} = 0$, ce qui donne soit $\dot{\theta} = 0$ (équilibre), soit $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Le travail du poids entre deux points A et B ne dépend pas de la trajectoire suivie par le point matériel entre A et B.	☐	☐
2.	Le travail de la réaction d'un support sur un point matériel est toujours nul.	☐	☐
3.	La puissance d'une force est toujours positive.	☐	☐
4.	Le théorème de l'énergie cinétique doit être appliqué dans un référentiel galiléen.	☐	☐
5.	Le théorème de l'énergie cinétique doit être projeté sur trois axes pour donner les équations du mouvement.	☐	☐
6.	Les forces non conservatives sont toujours des forces de frottement.	☐	☐
7.	L'énergie potentielle d'un point matériel est définie à une constante additive près.	☐	☐
8.	Un point matériel dans un champ de force conservative est en équilibre stable quand son énergie potentielle est maximale.	☐	☐
9.	Un point matériel dans un champ de force conservative est dans un état lié si son énergie potentielle est négative.	☐	☐
10.	Pour un système matériel indéformable, on peut appliquer le TÉC en tenant compte uniquement des forces extérieures.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Théorème de l'énergie cinétique

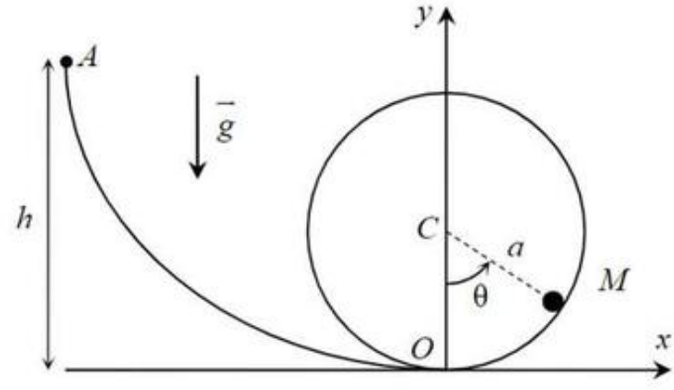
❑ Exercice 11.1. Toto le skieur

Toto descend une piste de ski d'une longueur $AB = 50$ m et inclinée d'un angle $\alpha = 25°$ par rapport à l'horizontale. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ de la piste, qui se décompose en une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ (colinéaire et de sens contraire au mouvement) ; les normes de ces composantes sont liées par la relation $T = \mu N$, avec $\mu = 0{,}10$. La masse de Toto est de 65 kg. On prendra $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Exprimer et calculer le travail des forces $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{T}$ lors de cette descente.
2. Sachant qu'il est parti du point A sans vitesse initiale, quelle sera sa vitesse lors de son passage en B ?

❑ Exercice 11.2. Acrobaties





Un adepte du roller, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au-dessus de O, point le plus bas de la rampe. À partir de O la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.

On note $\vec{g} = -g\vec{e_y}$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\vec{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme v_0 de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est :

$$\vec{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\vec{e_r}.$$

4. a) Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? (Répondre sans calcul.)

b) Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ? (Répondre sans calcul.)

5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre.

❑ Exercice 11.3. Distance de freinage d'une moto

Madame Michu (de masse m = 70 kg) teste une moto (de masse m') sur une route rectiligne et horizontale. À partir d'un instant $t = 0$ où sa vitesse est $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$, elle freine de façon constante jusqu'à l'arrêt de la moto. L'action conjointe des freins et de la route peut être modélisée comme une force de frottement solide, colinéaire et de sens contraire à la vitesse et de norme constante F (indépendante de la vitesse).

1. Par application du théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrale, calculer la distance de freinage d, c'est-à-dire la distance parcourue par la moto jusqu'à l'arrêt.

2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sous forme instantanée, déterminer l'équation horaire du mouvement de la moto. De quel type de mouvement s'agit-il ?

3. Les essais ont donné les valeurs suivantes :

	m' (kg)	v_0 (km·h^{-1})	d (m)
Suzuki XF650	162	90	39
		130	79
Yamaha R1	206	90	34
		130	71

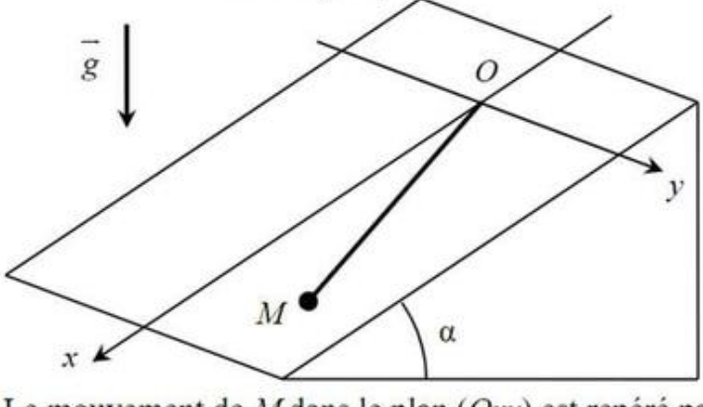
Ces valeurs confirment-elles la formule précédente ?

Déterminer pour les deux motos la norme F de la force de freinage, et celle de l'accélération subie par Madame Michu pendant le freinage ; comparer à g = 9,8 m·s^{-2}.

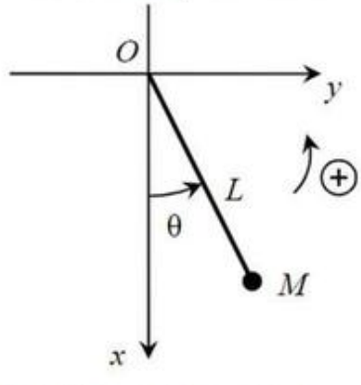
❑ Exercice 11.4. Mouvement sur un plan incliné * *

Une masse m, assimilée à un point matériel M, est reliée à un point fixe O par un fil inextensible, de longueur L et de masse négligeable. D'autre part, M repose sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; dans ce plan on définit un axe (Oy) horizontal et un axe (Ox) descendant selon la ligne de plus grande pente.

Vue en perspective



Vue dans le plan incliné

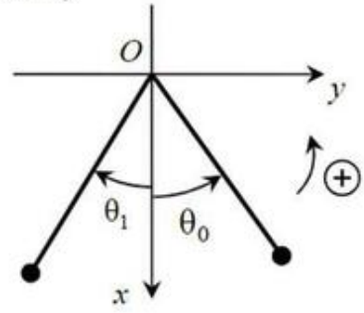


Le mouvement de M dans le plan (Oxy) est repéré par l'angle θ du fil avec l'axe (Ox).

À l'instant initial ($t = 0$), M est lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0 (positif).

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de M, à une constante près, en fonction de la variable x puis en fonction de la variable θ.
(Attention, le résultat de ce calcul sera utilisé dans toute la suite ! On prendra donc le temps de le faire soigneusement, en s'aidant d'un ou de plusieurs schémas.)

2. On néglige tout frottement de l'air, mais on suppose que le contact entre le plan incliné et la masse se fait avec un coefficient de frottement dynamique f assez important : il y a donc une force de frottement solide $\overrightarrow{R_t}$, colinéaire et de sens contraire à la vitesse, et de norme $R_t = f R_n$ où $\overrightarrow{R_n}$ est la réaction normale. La masse s'arrête alors rapidement, après avoir effectué seulement une demi-oscillation (c'est-à-dire qu'elle s'est déplacée toujours dans le même sens). Son angle final est noté θ_1 et il est négatif (avec $|\theta_1| < |\theta_0|$).



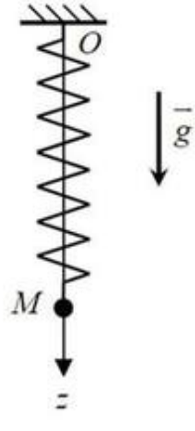
a) Calculer les travaux des différentes forces qui s'exercent sur M, entre la position initiale et la position finale.

b) En déduire l'expression du coefficient de frottement f en fonction des angles α, θ_0 et θ_1.

■ Énergie potentielle et énergie mécanique

■ Exercice 11.5. Masse au bout d'un ressort vertical*

Considérons un objet M de masse m, accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, se déplaçant sans frottements le long de l'axe vertical (Oz). On repère la position de la masse M par sa cote $z(t)$. On note $\vec{g} = g\vec{e_z}$ l'accélération de la pesanteur.



1. Équation du mouvement et équilibre

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la cote $z(t)$ de la masse M.

b) En déduire sa position d'équilibre $z_{éq}$.

c) Posons $u(t) = z(t) - z_{éq}$. Quelle est l'équation différentielle dont $u(t)$ est solution ? Commenter le résultat obtenu.

d) L'objet est lâché à $t = 0$ depuis sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $\vec{v}(0) = v_0\vec{e_z}$. Déterminer l'expression de $u(t)$ à chaque instant.

2. Énergie

Le mouvement de la masse étant vertical, son énergie potentielle comporte non seulement le terme d'énergie potentielle élastique E_{pe}, mais aussi une énergie potentielle de pesanteur E_{pp}.

a) Donner l'expression de ces deux énergies potentielles.

b) Montrer que l'énergie potentielle totale peut être mise sous la forme $E_p = \frac{1}{2}k u^2 + \text{cte}$.

c) En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de m, v_0, de la pulsation propre ω_0 et d'une éventuelle constante additive. Commenter le résultat obtenu.

❑ Exercice 11.6. Interaction électrique

Une particule α (noyau d'hélium de masse m et de charge $q = +2e$) est lancée vers un noyau immobile de charge $Q = +Ze$ et placé en O. La trajectoire est portée par la demi-droite (Ox), la particule venant de l'infini sur l'axe (Ox) avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$.

La charge Q placée en O exerce sur la particule α une force de Coulomb : $\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$.

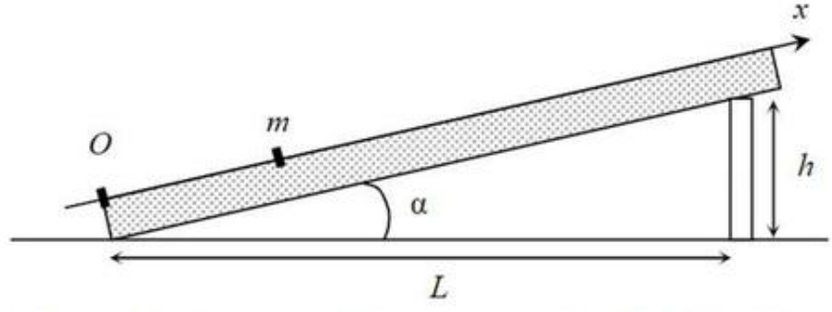
1. Exprimer l'énergie potentielle électrique dont dérive la force $\overrightarrow{F}$. On prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.

2. En déduire l'énergie mécanique de la particule α. Montrer que cette énergie mécanique est constante au cours du mouvement et calculer sa valeur.

3. Déterminer la distance minimale d entre la particule α et le noyau.

❑ Exercice 11.7. Étude expérimentale d'une force**

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle α par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O, et un autre aimant, de masse m, est fixé sur un palet mobile sans frottement :



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force notée $\overrightarrow{F}$, prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids $\overrightarrow{P}$, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

1. Faire un inventaire des forces à l'équilibre sur un schéma.

2. Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme : $\overrightarrow{F}(x) = k\left(\frac{x_0}{x}\right)^n \overrightarrow{e_x}$, avec $k > 0$ et n entier naturel. Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre $x_{éq}$ en fonction de x_0, k, m, g, L, h et n dans le cas des petits angles ($h \ll L$). Cette approximation sera toujours utilisée dans la suite.

3. On mesure $x_{éq}$ pour différentes cales, puis on note les valeurs de $\ln h$ en fonction de $\ln\left(\frac{x_{éq}}{x_0}\right)$. En prenant $x_0 = 1{,}00$ m, déduire de ces mesures les valeurs de n et de k.
On donne : $L = 120$ cm, $m = 189$ g et $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

4. Exprimer littéralement l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de M, à une constante additive près, en fonction de x, x_0, k, m, g, L, h et n, puis en fonction de x, x_0, $x_{éq}$, k et n seulement.

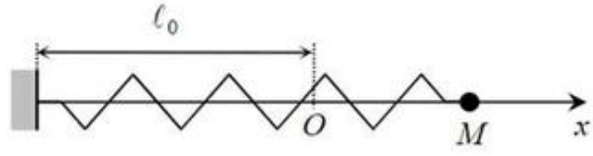
5. Déterminer si l'équilibre est stable ou instable.

$\ln\left(\frac{x_{éq}}{x_0}\right)$	$\ln h$
– 2,19	– 4,61
– 2,39	– 3,91
– 2,56	– 3,22
– 2,63	– 2,81
– 2,73	– 2,53
– 2,76	– 2,30
– 2,81	– 2,12

■ Mouvement conservatif unidimensionnel

❑ Exercice 11.8. Ressort horizontal

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige, le long de l'axe (Ox) horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité étant fixe.



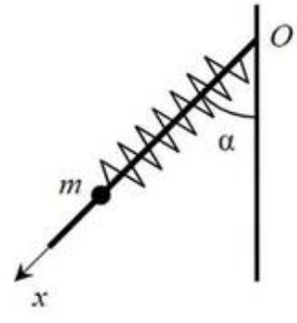
L'origine O coïncide avec sa position d'équilibre. À l'instant $t = 0$, on écarte M d'une distance $X_0 = 8{,}0$ cm et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Établir l'expression de l'énergie mécanique de M.
2. Montrer que cette énergie mécanique est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement de M.
4. Donner sa solution et calculer la période des oscillations.
5. Avec quelle vitesse le point M repasse-t-il par le point O ?

Données : $m = 250$ g ; $k = 20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

❑ Exercice 11.9. Ressort sur tige inclinée

Considérons une masse m accrochée à un ressort (k, ℓ_0) et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (Ox) selon la direction de la tige, avec l'origine O est prise à l'autre extrémité du ressort.



1. Énergie et équilibre

a) Déterminer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de la masse m.
b) En déduire la position d'équilibre stable $x_{éq}$.
c) Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $u = x - x_{éq}$.

2. Oscillations

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.

b) En déduire la période des petites oscillations.

❑ Exercice 11.10. Comment se peser dans une station spatiale ? Résolution de problème

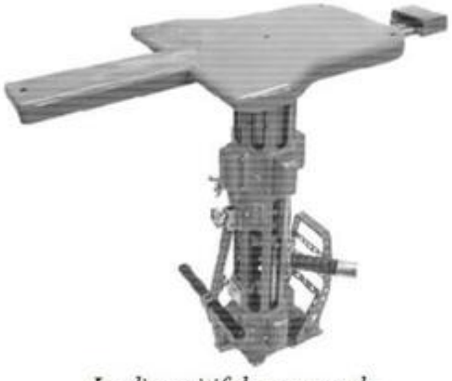
La question posée n'est pas guidée et requiert la mise en œuvre d'une démarche de résolution. Celle-ci doit s'appuyer sur l'analyse des données fournies, et doit être soigneusement détaillée.

Dans une station spatiale, les astronautes sont en impesanteur et il ne leur est donc pas possible d'utiliser un pèse-personne traditionnel. Il leur faut pourtant se peser régulièrement afin de suivre l'évolution de leur forme physique. Le problème a été résolu avec différents appareils : celui utilisé actuellement dans la Station spatiale internationale (ISS), de conception soviétique, ressemble à une sorte de tabouret sur lequel les astronautes s'agrippent. Il est muni d'un ressort qui permet de faire osciller l'ensemble {tabouret + astronaute}.



ISS021E014503

L'astronaute américaine Nicole Stott utilisant le dispositif de mesure de masse lors de la mission ISS-21



Le dispositif de mesure de masse IIM-01M

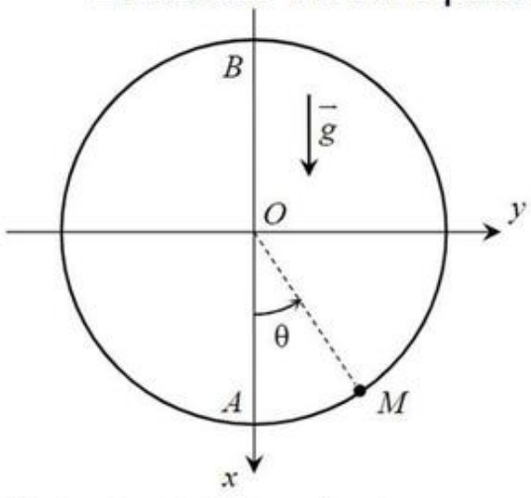
Deux astronautes se pèsent en utilisant cette méthode. Dans un premier temps, ils font osciller le tabouret à vide afin d'étalonner la machine : le tableau d'affichage indique la période des oscillations $T_0 = 0{,}75$ s, et ils règlent manuellement la valeur de la masse sur zéro.

Le premier astronaute se pèse ensuite. Le tableau d'affichage indique la période $T_1 = 2{,}75$ s ainsi que la masse de l'astronaute, calculée par le logiciel : $m_1 = 75{,}0$ kg.

Le deuxième astronaute se pèse et le tableau d'affichage indique la période des oscillations $T_2 = 2{,}87$ s, mais l'affichage de la masse est soudain défectueux.

En attendant que les astronautes réparent le tableau d'affichage, pouvez-vous déterminer la masse du deuxième astronaute ?

❑ Exercice 11.11. Équilibre et mouvement sur un cercle*



Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon r. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point A, point le plus bas du cerceau. On repère sa position au cours de son mouvement par l'angle θ avec la verticale descendante.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de θ.

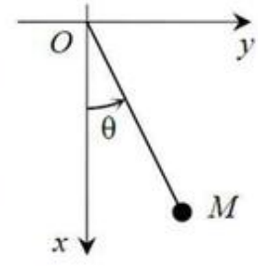
2. Tracer la courbe $E_p(\theta)$ et déterminer les positions d'équilibre de M.

3. On cherche à déterminer le mouvement possible de M selon la vitesse initiale.

a) Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve et donner sa valeur.

b) En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.

❑ Exercice 11.12. Oscillations d'un pendule simple**



Un pendule simple est constitué d'un point matériel M, de masse m, lié à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse nulle, l'autre extrémité étant fixe en un point O. On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical (Oxy), et on repère la position de M avec l'angle polaire θ (voir figure), l'angle θ restant toujours faible. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse depuis un angle θ_0, sans vitesse initiale.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique sous forme instantanée. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$.

2. On résout souvent cette équation en utilisant l'approximation des petits angles : $\sin\theta \approx \theta$. Établir, dans ce cas, l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0, ω_0 et t.

3. On souhaite résoudre numériquement l'équation exacte de la question 1. On écrit donc le code suivant en Python.

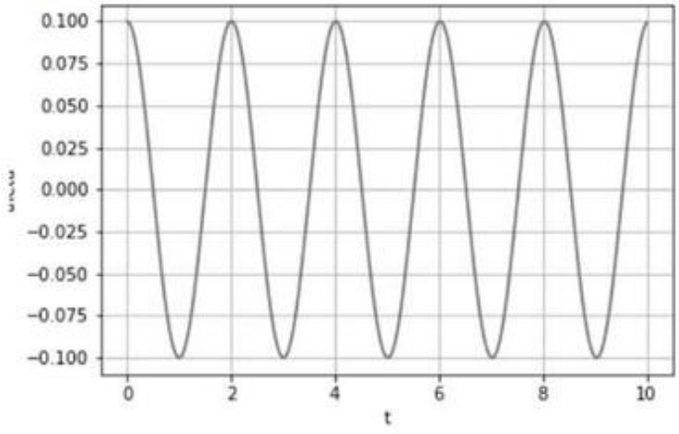
```
import scipy.integrate as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1], -omega_0**2*np.sin(X[0])]

omega_0 = 3.13 # unité S.I.
Y0 = [0.1, 0]   # Conditions initiales
T = np.linspace(0,10,1001) #Nombre de points temporels
Y = sp.odeint(F,Y0,T) # application de la méthode odeint
```

```
plt.plot(T,Y[:,0]) # sélectionne la 1ère composante de chaque vecteur
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('theta')
plt.grid()
plt.show()
```

L'exécution de ce code permet d'obtenir la courbe suivante :



a) Expliquer le principe de la méthode `odeint`.

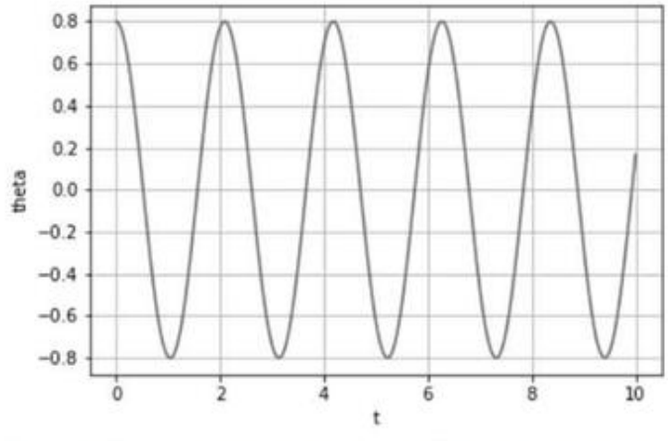
b) Quelle est la valeur du pas de cette méthode numérique ?

c) Quelle est la valeur de L (longueur du pendule) dans cette simulation ?

4. On modifie les conditions initiales de la façon suivante :

```
Y0 = [0.8, 0]   # Conditions initiales
```

Les autres parties du code ne sont pas modifiées. On obtient alors la courbe suivante :



Peut-on dire que la période est indépendante de l'amplitude des oscillations ? Comparer au modèle de l'oscillateur harmonique.

5. On prend à présent en compte les frottements de l'air, que l'on modélise par une force $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M, et α une constante positive.

a) Montrer que $\theta(t)$ vérifie une équation différentielle du type : $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

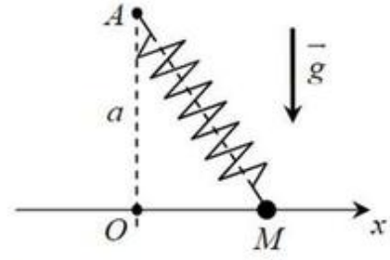
b) On veut obtenir la courbe $\theta(t)$ avec $\lambda = 0{,}10$ unité SI et $\omega_0 = 3{,}13$ unité SI en utilisant la méthode `odeint`. Indiquer les modifications qu'il faut apporter au code de la question **4**.

c) Tracer la courbe.

■ Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

❑ Exercice 11.13. Oscillation le long d'une tige*

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox). Il est relié à un ressort (longueur à vide ℓ_0, raideur k) dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est $AO = a$.



1. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$.

2. Rechercher les différentes positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

3. On étudie alors les oscillations autour de O dans le cas où $a > \ell_0$. Établir l'équation différentielle du mouvement.

4. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en x (c'est-à-dire en négligeant les termes en x^2, x^3...), en déduire la période des petites oscillations.

❑ Exercice 11.14. Molécule diatomique*

Une molécule de monoxyde de carbone (CO) est modélisée par deux masses ponctuelles, m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera ici que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox). On néglige la gravitation.



1. L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse : $V(r) = V_0\left[1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right]^2$ où r est la distance des noyaux des deux atomes et où V_0, β et r_0 sont des constantes positives, avec $\beta r_0 \gg 1$.

a) Tracer un graphe de $V(r)$, en faisant bien apparaître V_0 et r_0.

b) Que représentent physiquement ces deux constantes ? Quelle est la dimension de β ?

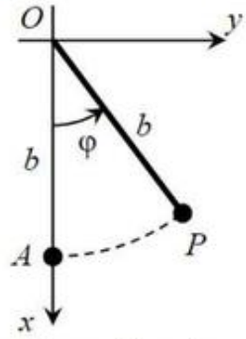
2. Montrer qu'il existe un domaine de distances où l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur k que l'on précisera.

3. Dans le cadre de cette approximation, déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'atome d'oxygène, et en déduire la fréquence des petites oscillations.

❑ Exercice 11.15. Équilibre et oscillations d'un électromètre**

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m ; leur rayon est suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. La boule A est fixe ; l'autre boule P est à l'extrémité d'un fil de longueur b, dont le point de suspension O est à la distance b au-dessus de A. L'axe (Ox) est la verticale descendante du référentiel galiléen d'étude ; l'axe (Oy) est horizontal, et on envisage uniquement des mouvements de P dans le plan (Oxy).

On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme.



Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée, et la boule A porte une charge électrique $2q$. On met alors les deux boules en contact, et la charge se partage entre les deux boules, qui ont désormais la même charge q. Il en résulte une déviation du fil OP par rapport à la verticale.

1. On donne l'expression de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 distantes de r : $E_{pe} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r}$.

a) Exprimer l'énergie potentielle électrostatique E_{pe} de la boule P en fonction de ε_0, q, b et de l'angle φ entre la verticale et le fil OP. Il est conseillé de faire apparaître l'angle $\dfrac{\varphi}{2}$.

b) Exprimer l'énergie potentielle totale E_p de la boule P.

2. Déterminer la valeur φ_e de l'angle φ à l'équilibre.

3. Discuter la stabilité de cet équilibre.

4. Dans le cas d'un équilibre stable, déterminer la période des petites oscillations autour de φ_e. On introduira pour cela la variable $\theta = \varphi - \varphi_e$ telle que $\theta \ll 1$.

D'après ENAC

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 11.4. Pour l'énergie potentielle de pesanteur, faire un troisième schéma dans un plan *vertical*, et utiliser comme intermédiaire de calcul une cote verticale (ou altitude) ; il faut ensuite projeter *deux fois*.

Exercice 11.6. Question 3 : lorsque la distance est minimale, la vitesse est nulle.

Exercice 11.7. Question 4 : pour l'énergie potentielle de pesanteur, introduire comme intermédiaire un axe vertical, puis projeter la cote sur l'axe (Ox).

Exercice 11.10. Analyser la ou les forces exercée(s) sur le système {tabouret + astronaute}, et obtenir une équation de son mouvement avec la conservation de l'énergie mécanique.

Exercice 11.13. Faire un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai

2. Il peut être non nul si la réaction a une composante tangentielle (frottement solide), ou si le support est lui-même en mouvement (par exemple un plateau qui soulève l'objet).

3. Son signe dépend des orientations relatives de la force et de la vitesse.

5. Ce théorème donne directement une équation scalaire.

6. La tension d'un fil, la réaction normale d'un support sont aussi des forces non conservatives, car elles ne dépendent pas que de la position, et il arrive qu'elles travaillent !

8. Une position d'équilibre stable correspond à un *minimum* de l'énergie potentielle.

9. Un point matériel dans un champ de force conservative est dans un état lié si la condition $E_p(x) \leq E_m(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$ limite les valeurs de x vers l'infini.

❑ Les erreurs classiques

– Comme pour le PFD, l'application d'un théorème énergétique nécessite une analyse préalable détaillée des différentes forces et du mouvement : ne pas négliger cette étape !

– Ne pas calculer le travail d'une force avec un simple produit scalaire $\overline{F} \cdot \overline{AB}$ si la force n'est pas un *vecteur constant* : il faut dans ce cas calculer une intégrale.

– Éviter de confondre l'énergie potentielle en un point (que l'on utilise par exemple pour étudier l'équilibre) et la *variation* de l'énergie potentielle entre deux points (que l'on peut utiliser dans le TÉC sous forme intégrale, pour calculer la variation de la norme de la vitesse).

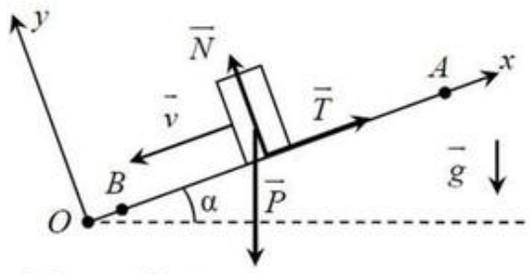
– Attention à l'expression de l'énergie potentielle élastique : il faut bien exprimer l'allongement du ressort $(\ell - \ell_0)$ en fonction des notations de l'énoncé, et ne pas écrire aveuglément $\frac{1}{2}kx^2$ qui est rarement la bonne expression.

– Dans un contact sans frottement, la réaction du support est normale *au support*, mais elle n'est pas forcément normale *au mouvement* puisque le support peut éventuellement se déplacer : dans ce cas, la réaction normale travaille.

Exercice 11.1

1. Le poids est une force connue mais la réaction normale est inconnue *a priori*. Pour calculer son travail il faut tout d'abord la déterminer (et on en déduira la réaction tangentielle).
Pour cela on applique le PFD au skieur dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{N}=m\vec{a}$$



avec $\vec{P}=-mg\sin\alpha\,\vec{e_x}-mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$, $\vec{N}=N\vec{e_y}$ et $\vec{T}=T\vec{e_x}=\mu N\vec{e_x}$. Projection sur l'axe (Oy), orthogonal au mouvement : $-mg\cos\alpha+N=0$ d'où $N=mg\cos\alpha$ et $T=\mu mg\cos\alpha$.
On peut maintenant calculer les travaux de ces trois forces, qui sont toutes constantes.
$W(\vec{P})=\vec{P}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-mg\sin\alpha\,\vec{e_x}-mg\cos\alpha\,\vec{e_y}\right)\cdot\left(-AB\,\vec{e_x}\right)$ soit $\boxed{W(\vec{P})=+mg\sin\alpha\,AB}$. AN $\boxed{W(\vec{P})=+13\text{ kJ}}$. $W(\vec{N})=\vec{N}\cdot\overrightarrow{AB}=+mg\cos\alpha\,\vec{e_y}\cdot\left(-AB\,\vec{e_x}\right)$ soit $\boxed{W(\vec{N})=0}$.
$W(\vec{T})=\vec{T}\cdot\overrightarrow{AB}=+\mu mg\cos\alpha\,\vec{e_x}\cdot\left(-AB\,\vec{e_x}\right)$ soit $\boxed{W(\vec{T})=-\mu mg\cos\alpha\,AB}$. AN $\boxed{W(\vec{T})=-2{,}9\text{ kJ}}$.

2. Théorème de l'énergie cinétique entre les positions A et B :
$\Delta E_c(M)_{\mathcal{R}}=W(\vec{P})+W(\vec{N})+W(\vec{T})$ soit $\frac{1}{2}mv_B^2-0=+mg\sin\alpha\,AB+0-\mu mg\cos\alpha\,AB$ d'où on tire $\boxed{v_B=\sqrt{2g\,AB(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}$. AN $\boxed{v_B=18\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}=65\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 11.1*

Exercice 11.2

1. On étudie le point matériel M (de masse m) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Forces appliquées : poids $\vec{P}=-mg\,\vec{e_y}$; réaction $\vec{R}$ de la rampe, réduite à une seule composante normale car il n'y a pas de frottement. Théorème de l'énergie cinétique entre le point A et le point O : $\frac{1}{2}mv_0^2-0=W(\vec{P})_{A\to O}+W(\vec{R})_{A\to O}$.
$W(\vec{R})_{A\to O}=0$ car cette force est toujours orthogonale au déplacement.
$W(\vec{P})_{A\to O}=\vec{P}\cdot\overrightarrow{AO}=-mg\,\vec{e_y}\cdot\left(-h\,\vec{e_y}-x_A\,\vec{e_x}\right)=+mgh$. Donc $\frac{1}{2}mv_0^2=mgh$ d'où $\boxed{v_0=\sqrt{2gh}}$.

⇨ *Méthode 11.1*

2. TÉC entre A et M : $\frac{1}{2}mv^2-0=W(\vec{P})_{A\to M}+W(\vec{R})_{A\to M}$ avec toujours $W(\vec{R})_{A\to M}=0$

et $W\left(\vec{P}\right)_{A\to M} = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AM} = -mg\,\vec{e_y}\cdot\left(-h\vec{e_y} - x_A\vec{e_x} + a(1-\cos\theta)\vec{e_y}\right) = +mg\,(h+a(\cos\theta-1))$.

On obtient donc $\boxed{v = \sqrt{2g\,(h+a(\cos\theta-1))}}$.

3. PFD : $m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}$. Lorsque M est sur le cylindre, $\vec{a}(M) = -a\dot{\theta}^2\vec{e_r} + a\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$, $\vec{P} = mg\left(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right)$ et $\vec{R} = R_r\vec{e_r}$. La projection du PFD sur $\vec{e_r}$ donne donc : $-ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + R_r$. Or $v^2 = 2g\,(h+a(\cos\theta-1)) = a^2\dot{\theta}^2$ donc on obtient finalement : $R_r = -mg\cos\theta - m\dfrac{2g}{a}(h+a(\cos\theta-1))$ soit $\boxed{\vec{R} = -mg\left(\dfrac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\vec{e_r}}$.

> *Seul le PFD permet de déterminer une force qui ne travaille pas, puisque dans tous les théorèmes énergétiques elle disparaît.*

4. a) Si v s'annule, le patineur s'arrête en un certain point du cylindre et il faut alors distinguer deux cas. Soit il est sur la moitié inférieure du cylindre $\left(\theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$, alors le patineur redescend le long du cylindre et remontera finalement jusqu'au point A (puis oscillera). Soit il est déjà arrivé dans la partie supérieure $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, donc *sous* la piste : alors il va quitter la piste et tomber verticalement jusqu'à un point de la partie inférieure de la piste, et repartira ensuite vers la gauche.

b) Si R s'annule (puis change de sens d'après les calculs), c'est que l'hypothèse du contact (unilatéral) entre le patineur et la piste n'est plus valable, donc que le patineur quitte la piste. Il se retrouve alors en chute libre avec une vitesse initiale non nulle, donc il suivra une trajectoire parabolique jusqu'au moment où il touche à nouveau la piste.

5. Le patineur pourra faire un tour complet si aucun des deux cas précédents ne se présente. Il faut donc que les valeurs de v et R_r restent non nulles jusqu'à $\theta = \pi$: $v_{\min} = \sqrt{2g\,(h-2a)} > 0$ donc $h > 2a$, et $R_{\min} = mg\left(\dfrac{2h}{a} - 5\right) > 0$ donc $\boxed{h > \dfrac{5}{2}a}$ (la seconde inégalité implique la première).

Exercice 11.3

1. Forces appliquées au système {Madame Michu, moto}, de masse $m_{\text{tot}} = m + m'$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen : poids $\vec{P} = -m_{\text{tot}}\,g\,\vec{e_z}$, orthogonal au mouvement ; réaction normale de la route $\vec{R_n} = R_z\vec{e_z}$, orthogonale au mouvement ; force de frottement $\vec{F} = -F\vec{e_x}$.

TÉC (intégral) entre le départ (A) et l'arrêt (B) : $\Delta E_c = W\left(\vec{P}\right) + W\left(\vec{R_n}\right) + W\left(\vec{F}\right)$

$\Leftrightarrow 0 - \dfrac{1}{2}m_{\text{tot}}v_0^2 = 0 + 0 + \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = -Fd$ d'où $\boxed{d = \dfrac{m_{\text{tot}}v_0^2}{2F}}$.

⇨ *Méthode 11.1*

2. TÉC instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\left(\vec{P}\right) + \mathcal{P}\left(\vec{R_n}\right) + \mathcal{P}\left(\vec{F}\right) \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}m_{tot}\dot{x}^2\right) = 0 + 0 + \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\Leftrightarrow m_{tot}\dot{x}\ddot{x} = -F\dot{x}$ d'où $\ddot{x} = -\dfrac{F}{m_{tot}} = \text{cte}$ (en excluant la solution $\dot{x} = 0$, puisque $v_0 \neq 0$).

C'est donc un mouvement rectiligne uniformément retardé : $\boxed{x = -\dfrac{F}{2m_{tot}}t^2 + v_0 t + x_0}$.

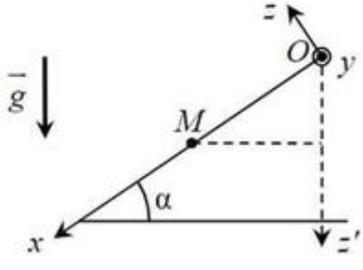
⇨ *Méthode 11.7*

3. On vérifie que, pour chaque moto, le rapport $\dfrac{v_0^2}{d}$ est le même dans les deux expériences (à 3% près pour la Suzuki, moins de 1 % pour la Yamaha). Le calcul donne alors : pour la Suzuki, $\boxed{F = 1900\,\text{N}}$ et $\boxed{|\ddot{x}| = 8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$; pour la Yamaha, $\boxed{F = 2500\,\text{N}}$ et $\boxed{|\ddot{x}| = 9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

Dans les deux cas, $|\ddot{x}| < g$ donc l'organisme peut supporter cette accélération sans problème.

Exercice 11.4

1.



On introduit comme intermédiaire de calcul un axe (Oz') vertical descendant.

Alors $E_{pp} = -mgz' + \text{cte}$ soit $\boxed{E_{pp} = -mgx\sin\alpha + \text{cte}}$.

Autre méthode : $\mathrm{d}E_{pp} = -\vec{P}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$

$= -mg\left(\sin\alpha\,\vec{e_x} - \cos\alpha\,\vec{e_z}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\,\vec{e_x} + \mathrm{d}y\,\vec{e_y}\right)$

$= -mg\sin\alpha\,\mathrm{d}x$ d'où $E_{pp} = -mgx\sin\alpha + \text{cte}$.

⇨ *Méthode 11.3*

Or le schéma dans le plan incliné permet de lire $x = L\cos\theta$, d'où l'expression : $\boxed{E_{pp} = -mgL\cos\theta\sin\alpha + \text{cte}}$.

2.a) Forces exercées sur M : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dérivant de E_{pp} ; tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e_r}$; réaction du plan incliné $\vec{R} = \vec{R_n} + \vec{R_t}$ avec $\vec{R_n} = R_z\vec{e_z}$ (soit $R_n = R_z > 0$ car la liaison est unilatérale) et $\vec{R_t} = R_\theta\vec{e_\theta} = \pm f R_n\vec{e_\theta}$: $\vec{R_t} = +fR_n\vec{e_\theta}$ lorsque θ diminue.

Travail du poids : $W\left(\vec{P}\right) = E_{pp}(\theta_0) - E_{pp}(\theta_1)$ soit $\boxed{W\left(\vec{P}\right) = -mgL\sin\alpha(\cos\theta_0 - \cos\theta_1)}$.

Travail de la tension : $W\left(\vec{T}\right) = 0$ car elle est constamment orthogonale au déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = L\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta}$. Travail de la réaction normale : $\boxed{W\left(\vec{R_n}\right) = 0}$ pour la même raison.

Travail de la réaction tangentielle :

$W\left(\vec{R_t}\right) = \displaystyle\int_{\theta_0\to\theta_1}\vec{R_t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = +\int_{\theta_0\to\theta_1} fR_n\vec{e_\theta}\cdot L\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} = +fL\int_{\theta_0\to\theta_1} R_n\,\mathrm{d}\theta$. Pour calculer cette intégrale il faut déterminer la réaction normale, en projetant le PFD sur $\vec{e_z}$: $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R_n} + \vec{R_t} + \vec{T}$ d'où $0 = -mg\cos\alpha + R_n + 0 + 0$ soit $R_n = mg\cos\alpha$.

Corrigé

Alors $W(\overrightarrow{R_t}) = fLmg\cos\alpha\int_{\theta_0\to\theta_1} \mathrm{d}\theta$ soit $\boxed{W(\overrightarrow{R_t}) = fLmg\cos\alpha(\theta_1-\theta_0)}$ (<0).

⇨ *Méthodes 11.1 et 11.2*

b) Théorème de l'énergie cinétique (intégral) entre les positions θ_0 et θ_1 : $\Delta E_c = W(\overrightarrow{P}) + W(\overrightarrow{T}) + W(\overrightarrow{R_n}) + W(\overrightarrow{R_t})$

$\Leftrightarrow 0 = -mgL\sin\alpha(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) + 0 + 0 + fLmg\cos\alpha(\theta_1-\theta_0)$ d'où $\boxed{f = \tan\alpha\dfrac{\cos\theta_1-\cos\theta_0}{\theta_0-\theta_1}}$.

Exercice 11.5

1. a) Les forces appliquées sur M sont : la force de rappel élastique $\overrightarrow{T} = -k(z-\ell_0)\overrightarrow{e_z}$ et le poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_z}$. Le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit : $m\vec{a}(M) = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P}$. En projection sur $\overrightarrow{e_z}$, on obtient l'équation du mouvement : $m\ddot{z} = -k(z-\ell_0) + mg$ soit $\boxed{\ddot{z} + \dfrac{k}{m}z = \dfrac{k}{m}\ell_0 + g}$.

b) À l'équilibre, on a $z = z_{éq}$ et $\ddot{z} = 0$, d'où $\boxed{z_{éq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}}$.

On trouve bien $z_{éq} > \ell_0$: la longueur à l'équilibre avec une masse accrochée au bout du ressort est supérieure à la longueur du ressort à vide (sans la masse).

c) Si $u(t) = z(t) - z_{éq}$ alors on a $z(t) = u(t) + z_{éq}$ et $\ddot{z} = \ddot{u}$. L'équation du mouvement est ainsi équivalente à $\ddot{u} + \dfrac{k}{m}\left(u + \ell_0 + \dfrac{mg}{k}\right) = \dfrac{k}{m}\ell_0 + g$ soit, après simplifications, $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$. Contrairement à l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la position $z(t)$, celle vérifiée par l'écart à la position d'équilibre $u(t)$ n'a pas de second membre.

d) Les solutions de l'équation du mouvement s'écrivent $u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Pour déterminer les constantes d'intégration A et B, utilisons les conditions initiales : l'objet est lâché à $t = 0$ depuis sa position d'équilibre d'où $u(0) = 0 = A$; il possède en outre une vitesse initiale d'où $\dot{u}(0) = \dot{z}(0) = v_0 = \omega_0 B$. On trouve ainsi l'expression demandée : $\boxed{u(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$.

2. a) Énergie potentielle élastique : $\boxed{E_{pe} = \dfrac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 (+\text{cte})}$ Énergie potentielle de pesanteur : $\boxed{E_{pp} = -mgz\,(+\text{cte})}$, l'axe (Oz) étant orienté vers le bas. On peut prendre les deux constantes nulles, puisqu'elles n'ont pas de signification physique.

b) L'énergie potentielle totale est la somme des deux : $E_p = \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 - mgz$. En introduisant $z(t) = u(t) + z_{éq}$, on obtient $E_p = \frac{1}{2}k(u + z_{éq} - \ell_0)^2 - mg(u + z_{éq})$, soit $E_p = \frac{1}{2}ku^2 + ku(z_{éq} - \ell_0) + \frac{1}{2}k(z_{éq} - \ell_0)^2 - mgu - mgz_{éq}$. Or $ku(z_{éq} - \ell_0) = ku\frac{mg}{k} = mgu$ d'où $E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}k(z_{éq} - \ell_0)^2 - mgz_{éq}$. Les deux derniers termes sont des constantes : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \text{cte}}$ avec $\boxed{\text{cte} = \frac{1}{2}k(z_{éq} - \ell_0)^2 - mgz_{éq}}$.

⇨ *Méthode 11.6*

c) L'énergie cinétique est donnée par $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mu^2$ soit $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t)}$.

D'après la question précédente, l'énergie potentielle s'écrit $E_p = \frac{1}{2}k\frac{v_0}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) + \text{cte}$; elle se simplifie, compte tenu de la relation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, en $\boxed{E_p = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2(\omega_0 t) + \text{cte}}$. On en déduit l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) + \text{cte}$ soit $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \text{cte}}$.

C'est une constante au cours du mouvement ; elle ne dépend que des conditions initiales (vitesse v_0, position d'équilibre) et de l'un des paramètres définissant le système (masse m).

Exercice 11.6

1. La force s'écrit ici : $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\vec{e}_x}{x^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\vec{e}_x$.

Par définition de l'énergie potentielle : $\mathrm{d}E_p = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ avec $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$ donc $\mathrm{d}E_p = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}x\vec{e}_x = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ soit $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}$.

On intègre : $E_p(x) = +\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x} + \text{cte}$. Avec l'origine à l'infini : $E_p(\infty) = 0 = \text{cte}$ donc finalement $\boxed{E_p(x) = +\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}}$.

⇨ *Méthode 11.3*

2. L'énergie cinétique de M est ici $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ donc $\boxed{E_m = +\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$.

Il n'y a aucune force non conservative, donc l'énergie mécanique est constante. Initialement, la particule est « à l'infini » avec une vitesse v_0 : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2}$.

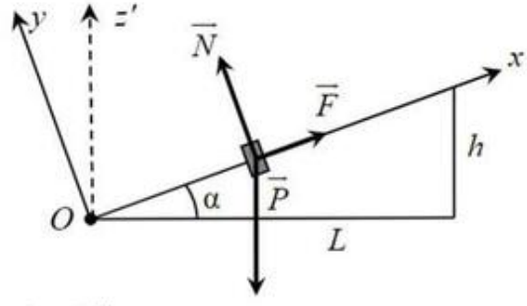
3. La distance minimale d est celle du point où la particule s'arrête : $\dot{x}=0$ donc $\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{d}=E_{\text{m}}=\dfrac{1}{2}mv_0^2$ d'où on tire $\boxed{d=\dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{mv_0^2}}$.

⇨ *Méthode 11.5*

Exercice 11.7

1. L'aimant M de masse m est soumis à trois forces :
- son poids $\vec{P}$, vertical descendant ;
- la force $\vec{F}$ répulsive de l'autre aimant ;
- la réaction $\vec{R}$ du banc, normale en l'absence de frottement.

Le PFD appliqué à M à l'équilibre s'écrit : $\boxed{\vec{P}+\vec{F}+\vec{R}=\vec{0}}$.



2. On projette le PFD sur la direction (Ox) : $-mg\sin\alpha+k\left(\dfrac{x_0}{x_{\text{éq}}}\right)^n+0=0$.

Or $\sin\alpha=\dfrac{h}{\sqrt{L^2+h^2}}\approx\dfrac{h}{L}$ (car $h\ll L$), donc $-mg\dfrac{h}{L}+k\left(\dfrac{x_0}{x_{\text{éq}}}\right)^n=0$ d'où $\boxed{x_{\text{éq}}=x_0\left(\dfrac{kL}{mgh}\right)^{1/n}}$.

3. La relation précédente peut s'écrire : $\ln h=\ln\dfrac{kL}{mg}-n\ln\dfrac{x_{\text{éq}}}{x_0}$.

En effectuant une régression linéaire à partir du tableau on obtient $\ln h=-13{,}56-4{,}06\ln\dfrac{x_{\text{éq}}}{x_0}$.

On en déduit d'une part $\boxed{n=4}$, et d'autre part $k=\dfrac{mg}{L}e^{-13{,}56}$ soit $\boxed{k=2{,}0\cdot10^{-6}\ \text{N}}$.

Ne pas oublier l'unité de k ! Cette constante a la dimension d'une force.

4. Le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, que l'on calcule en introduisant comme intermédiaire un axe vertical ascendant (Oz') : $E_{\text{pp}}=+mg\,z'+\text{cte}$ avec $z'=x\sin\alpha=x\dfrac{h}{L}$.

D'autre part, la force magnétique $\vec{F}$ constitue également un champ de force puisqu'elle ne dépend que de la position x : on peut donc rechercher une énergie potentielle dont elle dérive.

$\text{d}E_{\text{pm}}=-\vec{F}\cdot\text{d}\overrightarrow{OM}$ avec $\text{d}\overrightarrow{OM}=\text{d}x\,\vec{e}_x$ donc $\text{d}E_{\text{pm}}=-k\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^n\vec{e}_x\cdot\text{d}x\,\vec{e}_x=-k\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^n\text{d}x$ soit

$\dfrac{\text{d}E_{\text{pm}}}{\text{d}x}=-kx_0^n\dfrac{1}{x^n}$. On intègre : $E_{\text{pm}}(x)=+kx_0^n\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+\text{cte}$.

⇨ *Méthode 11.3*

L'énergie potentielle est la somme des deux termes : $\boxed{E_{\text{p}}(x)=+\dfrac{mgh}{L}x+kx_0^n\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+\text{cte}}$.

Or $mg\dfrac{h}{L}=k\left(\dfrac{x_0}{x_{éq}}\right)^n$ donc $\boxed{E_p(x)=+k\left(\dfrac{x_0}{x_{éq}}\right)^n x+k\,x_0^n\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}+\text{cte}}$.

5. On peut tout d'abord vérifier que l'énergie potentielle est bien extrémale en $x_{éq}$: $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=k\left(\dfrac{x_0}{x_{éq}}\right)^n-k\,x_0^n\dfrac{1}{x^n}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{éq})=0$. Pour déterminer si c'est un minimum ou un maximum, on peut calculer la dérivée second et trouver son signe en $x_{éq}$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}^2x}=0+k\,x_0^n\dfrac{n}{x^{n+1}}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}^2x}(x_{éq})=k\,x_0^n\dfrac{n}{x_{éq}^{n+1}}>0$: l'énergie potentielle est minimale en $x_{éq}$ donc c'est une position d'équilibre stable.

⇨ *Méthode 11.4*

Exercice 11.8

1. La masse est soumise à son poids $\vec{P}=-mg\vec{e_z}$, à la force de rappel du ressort $\vec{T}=-k(\ell-\ell_0)\vec{e_x}=-k\,x\vec{e_x}$ et à la réaction normale de la tige $\vec{R}=R_y\vec{e_y}+R_z\vec{e_z}$.

Les deux premières sont des forces conservatives, donc dérivent d'une énergie potentielle : celle de pesanteur est $E_{pp}=mgz+\text{cte}=\text{cte}$ et on peut choisir cette constante nulle ; l'énergie potentielle élastique est $E_{pe}=\dfrac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2+\text{cte}=\dfrac{1}{2}kx^2+\text{cte}$ et on prendra cette deuxième constante nulle (origine de E_p au point O). D'autre part l'énergie cinétique de M est ici $E_c=\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$. L'énergie mécanique de M est donc : $\boxed{E_m=\dfrac{1}{2}kx^2+\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2}$.

2. La seule force non conservative est la réaction, mais elle est toujours orthogonale au mouvement donc elle ne travaille pas : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}=\mathcal{P}\left(\vec{R}\right)=0$ donc $\boxed{E_m=\text{cte}}$.

Initialement : $x=X_0$ et $\dot{x}=0$ donc $\boxed{E_m=\dfrac{1}{2}kX_0^2}$.

3. L'énergie mécanique étant constante, sa dérivée temporelle est toujours nulle :

$\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}=0=\dfrac{1}{2}k(2x\dot{x})+\dfrac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x})=\dot{x}(kx+m\ddot{x})$.

Il y a donc deux possibilités : $\dot{x}(t)=0=\text{cte}$, solution particulière qui correspond à l'équilibre, ou bien $kx+m\ddot{x}=0$ soit $\boxed{\ddot{x}+\dfrac{k}{m}x=0}$, qui est l'équation différentielle cherchée.

On peut l'écrire $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ avec $\boxed{\omega_0^2=\dfrac{k}{m}}$.

⇨ *Méthode 11.7*

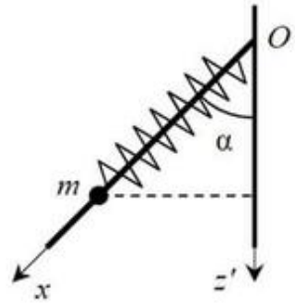
4. Cette équation différentielle admet une solution du type $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, A et φ étant des constantes à déterminer avec les conditions initiales : $\dot{x}(0) = -\omega_0 A\sin\varphi = 0$, donc $\sin\varphi = 0$ et on peut prendre $\varphi = 0$; $x(0) = A\cos\varphi = X_0$ soit $A = X_0$. Donc $\boxed{x(t) = X_0\cos(\omega_0 t)}$.

La période est définie par $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$. AN $\boxed{T_0 = 0{,}70\ \text{s}}$.

5. Au passage en O l'énergie potentielle est nulle, donc la conservation de l'énergie mécanique donne : $E_\text{m} = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}kX_0^2$ d'où $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{k}{m}}X_0 = \omega_0 X_0}$. AN $\boxed{v = 0{,}72\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Exercice 11.9

1. a) La masse m est soumise à deux forces conservatives, son poids et la tension du ressort, et à la réaction normale de la tige qui ne travaille pas. Énergie potentielle élastique : $E_\text{pe} = \dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}$. Énergie potentielle de pesanteur : $E_\text{pp} = -mgz' + \text{cte}$ en utilisant un axe (Oz') vertical descendant ; or $z' = x\cos\alpha$ donc $E_\text{pp} = -mgx\cos\alpha + \text{cte}$.



Finalement : $\boxed{E_\text{p}(x) = \dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - mgx\cos\alpha + \text{cte}}$.

Il faut toujours commencer par une liste complète des forces, puis voir celles qui sont conservatives et celles qui ne travaillent pas au cours du mouvement. Si toutes les forces entrent dans l'une ou l'autre de ces catégories, alors l'évolution est conservative : la méthode avec l'énergie potentielle est utilisable.

b) $x_\text{éq}$ vérifie $\dfrac{\text{d}E_\text{p}}{\text{d}x}(x_\text{éq}) = k(x_\text{éq} - \ell_0) - mg\cos\alpha = 0$ soit $\boxed{x_\text{éq} = \ell_0 + \dfrac{mg\cos\alpha}{k}}$.

Quand on recherche un extremum, on dérive par rapport à la variable spatiale (ici x) et non par rapport au temps t.

c) $E_\text{p} = \dfrac{1}{2}k\left(u + \dfrac{mg\cos\alpha}{k}\right)^2 - mg(u + x_\text{éq})\cos\alpha + \text{cte}$ soit finalement $\boxed{E_\text{p} = \dfrac{1}{2}ku^2 + \text{cte}}$ après simplification et regroupement de toutes les constantes. La constante finale peut être prise nulle.

⇨ *Méthode 11.6*

2. a) La seule force non conservative (la réaction) ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve : $E_\text{m} = E_\text{c} + E_\text{p} = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}ku^2 = \dfrac{1}{2}m\dot{u}^2 + \dfrac{1}{2}ku^2 = \text{cte}$ donc $\dfrac{\text{d}E_\text{m}}{\text{d}t} = m\dot{u}\ddot{u} + ku\dot{u} = 0$, ce qui donne soit $\dot{u} = 0$ (équilibre), soit $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$ en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$.

⇨ *Méthode 11.7*

Cette fois on cherche une équation différentielle donnant l'évolution temporelle, donc on dérive par rapport à t.

b) La solution est de la forme $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$: la période est donc $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$.

Exercice 11.10

On repère la position instantanée de l'astronaute au cours du temps par la variable x, comptée à partir de sa position correspondant à la longueur à vide du ressort.
En négligeant les différents frottements, l'ensemble {tabouret + astronaute}, de masse m, est soumis uniquement à la force de rappel du ressort, de raideur k : il n'y a pas de poids dans l'ISS, et le tabouret et l'astronaute oscillent sans glisser sur un support extérieur donc il n'y a pas de réaction de support.
Le système {tabouret + astronaute} a donc un mouvement conservatif unidimensionnel d'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$. L'application du théorème de l'énergie mécanique permet d'écrire que $\dfrac{dE_m}{dt} = 0$ et donc d'obtenir l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$, que l'on peut mettre sous la forme canonique $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Si on note m_0 la masse du tabouret vide et T_0 la période de ses oscillations, puis m_1 et m_2 les masses des astronautes, T_1 et T_2 les périodes de leurs oscillations, on peut écrire :

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_0}{k}}$, $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_0 + m_1}{k}}$ et $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_0 + m_2}{k}}$.

Dans ces trois relations, les trois grandeurs m_0, k et m_2 sont inconnues : on trouvera m_2 en éliminant les deux autres.

On peut éliminer m_0 en écrivant : $T_1^2 - T_0^2 = 4\pi^2\dfrac{m_1}{k}$ et $T_2^2 - T_0^2 = 4\pi^2\dfrac{m_2}{k}$. On élimine alors k en effectuant le rapport de ces deux expressions : $\boxed{m_2 = m_1\dfrac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}}$. AN $\boxed{m_2 = 82{,}2\ \text{kg}}$.

La période du second astronaute étant supérieure à celle du premier, il est cohérent de trouver une masse supérieure.

Exercice 11.11

1. On étudie le point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Inventaire des forces appliquées à M :

– son poids, force conservative dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x) = -mgx + \text{cte}$;

– la réaction normale du cerceau, toujours orthogonale au mouvement (circulaire) donc ne travaillant pas.

La seule force conservative est le poids, donc l'énergie potentielle est celle de pesanteur, que l'on exprime en fonction de θ avec la relation $x = r\cos\theta$: $\boxed{E_p(x) = -mgr\cos\theta + \text{cte}}$.

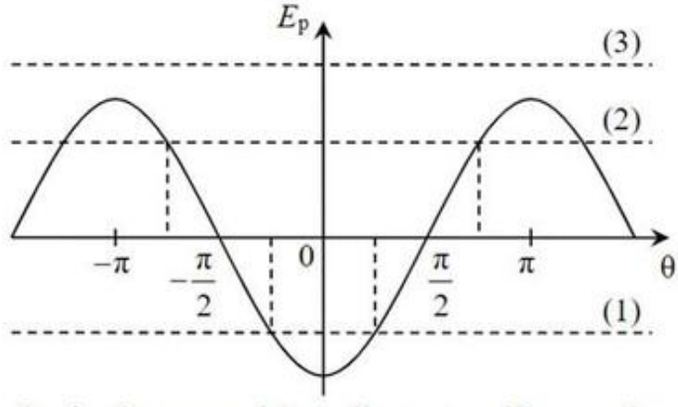
Le choix de la constante est arbitraire, car elle n'a pas de signification physique : on choisit cette constante nulle, soit $\boxed{E_p(x) = -mgr\cos\theta}$.

Cela revient à choisir l'origine au niveau de l'axe (Oy). On peut faire un autre choix, mais dans tous les cas il faut garder la même constante dans toute la suite. En revanche, le choix de cette constante est totalement indépendant des conditions initiales.

2. Sur un intervalle de largeur 2π, décrivant la totalité du cercle, on trouve deux positions d'équilibre.

– $\boxed{\theta = 0}$ est un minimum de l'énergie potentielle, donc une position d'équilibre stable (il s'agit du point A).

– $\boxed{\theta = \pi}$ (ou $\theta = -\pi$) est un maximum de l'énergie potentielle, donc une position d'équilibre instable (c'est le point B, le plus haut du cercle).



3. a) Il n'y a qu'une force non conservative (la réaction normale) et elle ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

À l'instant initial : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgr}$.

b) Sur le graphe précédent on ajoute une droite horizontale à l'ordonnée E_m. $E_p(\theta) = E_m - E_c \leq E_m$ donc les seules valeurs accessibles de θ sont celles pour lesquelles la courbe $E_p(x)$ se trouve au-dessous de la droite E_m. On voit qu'on peut distinguer deux cas.

– Premier cas (droite (1) ou droite (2)) : la droite coupe la courbe de l'énergie potentielle pour deux valeurs de θ opposées. Les valeurs accessibles de θ appartiennent donc à un intervalle $[-\theta_{max}; +\theta_{max}]$, c'est-à-dire que le point M oscille périodiquement de part et d'autre de A.

– Second cas (droite (3)) : la courbe se trouve entièrement au-dessous de la droite, sans point d'intersection. Alors toutes les valeurs de θ sont possibles, et comme $E_p(\theta)$ n'atteint jamais la valeur E_m, l'énergie cinétique ne s'annule jamais : M tourne indéfiniment sur le cercle sans jamais s'arrêter (donc toujours dans le même sens).

La limite entre ces deux cas est la situation où la droite E_m se trouve exactement à la valeur maximale de $E_p(\theta)$: $E_m = E_{p\,max} = E_p(\pi) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgr = +mgr$ d'où on tire $\boxed{v_0 = 2\sqrt{gr}}$.

⇨ *Méthode 11.5*

Exercice 11.12

1. Référentiel $\mathcal{R}$: terrestre supposé galiléen, lié au repère $(Oxyz)$. Forces appliquées : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$; tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e_r}$.

Informations cinématiques : le mouvement est circulaire dans le plan (Oxy), donc $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -L\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$.

TÉC : $\dfrac{\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\vec{F}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{P}\cdot\vec{v} + \vec{T}\cdot\vec{v}$, soit $mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\dot{\theta}\sin\theta = 0$ ou encore $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$. En posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}}$ on obtient la forme demandée.

⇨ *Méthode 11.7*

2. L'équation différentielle devient : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. Solution : $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec A et B deux constantes d'intégration. Conditions initiales : $\theta(0) = A = \theta_0$; $\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$. Donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$.

3. a) `Y` est une liste de vecteurs $\left[y(t), \dot{y}(t)\right]$ qui est renvoyée par la méthode `odeint`. Elle repose sur le fait que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme $\dot{Y} = f(Y)$, f étant la fonction qui à tout vecteur $\left[y_1(t), y_2(t)\right]$ associe le vecteur $\left[y_2(t), -\omega_0^2\, y_1(t)\right]$.

La méthode `odeint` du module `integrate` de la bibliothèque `Scipy` prend en paramètres :
la fonction f ; la condition initiale $Y(0)$, soit ici $\left[y(0) = 0{,}1, \dot{y}(0) = 0\right]$;
la liste `T` des dates pour lesquelles on calcule la fonction $y(t)$.
La méthode renvoie alors la liste `Y`.

Ici $y(t) = \theta(t)$.

b) Il y a 1001 valeurs (en comptant le « 0 ») comprises entre 0 et 10 s, soit un pas de $\boxed{0{,}01\text{ s}}$.

c) On voit dans le code que $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}} = 3{,}13$, donc $L = \dfrac{9{,}81}{3{,}13^2}$ soit $\boxed{L = 1{,}00\text{ m}}$.

4. La condition initiale a entraîné une augmentation de l'amplitude des oscillations. On observe également que la période des oscillations a augmenté. Celle-ci semble donc dépendre de l'amplitude des oscillations, contrairement à celle de l'oscillateur harmonique, qui ne dépend que de ω_0^2.

5. a) Il suffit d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique en prenant en compte la force de frottement : $\dfrac{\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{P}\cdot\vec{v} + \vec{T}\cdot\vec{v} + \vec{F}\cdot\vec{v}$ et on obtient : $mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + +\alpha L\dot{\theta}^2 + mg\dot{\theta}\sin\theta = 0$, qu'on peut mettre sous la forme $\boxed{\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0}$ en posant $\boxed{2\lambda = \dfrac{\alpha}{m}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

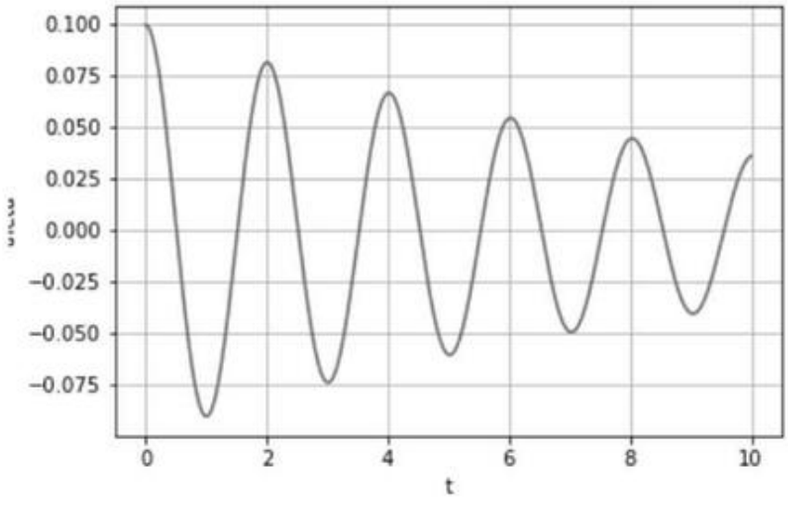
b) L'équation différentielle peut se mettre sous la forme $\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \dfrac{g}{L}\theta$. Il faut donc modifier la fonction F dans le code :

```
def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1],-2*lam*X[1] - omega_0**2*np.sin(X[0])]
```

et ajouter une instruction pour définir la valeur de λ :

```
lam = 0.1
```

c) On obtient la courbe suivante :



Exercice 11.13

1. L'anneau M est soumis à deux forces conservatives, son poids et la tension du ressort, et à la réaction normale de la tige qui ne travaille pas. Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = \text{cte}$ car l'altitude de M est constante (nulle) ; on choisit $E_{pp} = 0$. L'énergie potentielle est alors uniquement élastique : $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$ soit $\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0\right)^2 + \text{cte}}$.

2. Recherche des positions d'équilibre :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{éq}) = k\left(\sqrt{x_{éq}^2 + a^2} - \ell_0\right)\frac{2x_{éq}}{2\sqrt{x_{éq}^2 + a^2}} = k\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x_{éq}^2 + a^2}}\right)x_{éq} = 0\,.$$

Si $a > \ell_0$, la parenthèse est toujours strictement positive donc la seule solution est $\boxed{x_{éq} = 0}$.

De plus $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(0) = k\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) + 0 > 0$ donc $x_{éq} = 0$ est un <u>minimum</u> de E_p, ce qui correspond à une position d'<u>équilibre stable</u>.

Si $a < \ell_0$, la parenthèse peut s'annuler, donc en plus de la solution $x_{éq(1)} = 0$ on a deux autres solutions : $x_{éq(2)} = +\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ et $x_{éq(3)} = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$.

$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(0) = k\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) + 0 < 0$: la position $x_{éq(1)} = 0$ est cette fois une position <u>d'équilibre instable</u>.

Et $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\left(\pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2}\right) = k\left(1 - \frac{a^2}{\ell_0^2}\right) + 0 > 0$: les positions symétriques $x_{éq(2)} = +\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ et $x_{éq(3)} = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ sont des positions <u>d'équilibre stable</u>.

⇨ *Méthode 11.4*

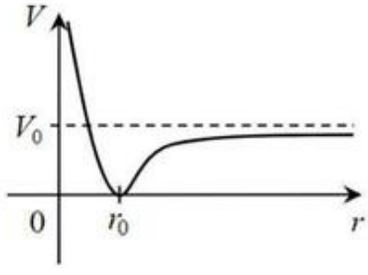
3. L'énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+a^2} - \ell_0\right)^2 = \text{cte}$ donc $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)x\dot{x} = 0$, soit $\dot{x} = 0$ (équilibre) ou $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)x = 0}$.

4. Cette équation différentielle est non linéaire, cependant pour des petites oscillations ($x \ll a$) elle peut être approchée par : $\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)x = 0$. Cela correspond à un oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)}$ donc de période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{k(a-\ell_0)}}}$.

⇨ *Méthode 11.7*

Exercice 11.14

1. a) Limites : pour $r \to \infty$, $V \to V_0$; pour $r \to 0$, $V \to V_0 e^{2\beta r_0} \gg V_0$. Et pour $r = r_0$, $V = 0$ (minimum).



b) r_0 est donc la position d'équilibre stable (distance d'équilibre entre les deux atomes de la molécule).

L'énergie mécanique de l'atome O est $E_m = E_c + V(r)$ avec $E_c \geq 0$, donc $V(r) \leq E_m$: les valeurs de r ne vérifiant pas cette inégalité ne peuvent pas être atteintes.

Donc il faut que $E_m \geq V_0$ pour que l'atome O puisse s'éloigner à l'infini, de l'atome C.

V_0 est donc l'énergie qu'il faut fournir à la molécule, dans son état stable (r_0), pour que les atomes puissent s'éloigner à l'infini : c'est l'énergie de dissociation de la molécule.

Le produit $\beta(r - r_0)$ est sans dimension, donc β est l'inverse d'une longueur.

⇨ *Méthode 11.5*

2. Pour r très proche de r_0 (c'est-à-dire pour $\beta(r - r_0) \ll 1$) : $e^{-\beta(r-r_0)} \approx 1 - \beta(r - r_0)$.

Donc $V(r) \approx V_0\left[\beta(r - r_0)\right]^2$ qu'on peut écrire $V(r) \approx \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$ en posant $\boxed{k = 2V_0\beta^2}$. Cette expression est la même que pour un ressort de longueur à vide r_0 et de raideur k.

⇨ *Méthode 11.6*

3. L'atome O ne subit pas d'autre force que celle exercée par C, donc son énergie mécanique se conserve : $E_m = E_c + V = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 = \text{cte}$ d'où $\frac{dE_m}{dt} = m_2\dot{r}\ddot{r} + k(r - r_0)\dot{r} = 0$, soit en éliminant la solution $\dot{r} = 0$ (équilibre) : $\boxed{\ddot{r} + \frac{k}{m_2}r = \frac{k}{m_2}r_0}$. C'est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{2V_0\beta^2}{m_2}}$ donc de fréquence $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2V_0\beta^2}{m_2}}}$.

⇨ *Méthode 11.7*

Exercice 11.15

1. a) $E_{pe} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{AP}$ avec $AP = 2b\sin\dfrac{\varphi}{2}$ donc $\boxed{E_{pe}(\varphi) = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 b\sin(\varphi/2)}}$.

b) La boule P est soumise aux forces suivantes : force électrostatique dérivant de E_{pe} ; poids dérivant de l'énergie potentielle $E_{pp} = -mgx(+\text{cte}) = -mgb\cos\varphi(+\text{cte})$; tension du fil, orthogonale au déplacement donc ne travaillant pas. L'énergie potentielle totale de P est donc :

$$\boxed{E_p(\varphi) = E_{pe}(\varphi) + E_{pp}(\varphi) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 b\sin(\varphi/2)} - mgb\cos\varphi(+\text{cte})}.$$

2. La position d'équilibre est donnée par $\dfrac{dE_p}{d\varphi} = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{-\cos(\varphi/2)}{2\sin^2(\varphi/2)} + mgb\sin\varphi = 0$, soit

$\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(-\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{1}{\sin^2(\varphi/2)} + 2mgb\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) = 0$. Il y a donc deux possibilités : $\cos\dfrac{\varphi}{2} = 0$, soit $\varphi = \pi$ (a priori impossible, car le fil se détendrait) ou bien $\sin^3\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 b^2 mg}$, soit

$$\boxed{\varphi_e = 2\arcsin\left[\left(\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 b^2 mg}\right)^{1/3}\right]}.$$

⇨ *Méthode 11.4*

3. $\dfrac{d^2E_p}{d\varphi^2} = -\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{-(1/2)\sin^3(\varphi/2) - \cos^2(\varphi/2)\sin(\varphi/2)}{\sin^4(\varphi/2)} + mgb\cos\varphi$

$= \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{1+\cos^2(\varphi/2)}{2\sin^3(\varphi/2)} + mgb\cos\varphi$ donc en utilisant la valeur trouvée précédemment pour φ_e :

$\dfrac{d^2E_p}{d\varphi^2}(\varphi_e) = mgb\left(1+\cos^2\dfrac{\varphi_e}{2}\right) + mgb\cos\varphi_e = \dfrac{3}{2}mgb(1+\cos\varphi_e) > 0$. $E_p(\varphi_e)$ est donc un minimum, ce qui correspond à une position d'équilibre stable.

4. Au voisinage de φ_e : $E_p(\varphi_e + \theta) \approx E_p(\varphi_e) + \dfrac{1}{2}k\theta^2$ avec $k = \dfrac{d^2E_p}{d\varphi^2}(\varphi_e) = \dfrac{3}{2}mgb(1+\cos\varphi_e)$.

$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$ (pas de travail de force non conservative) avec $E_c = \dfrac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2 = \dfrac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$,

donc $\dfrac{dE_m}{dt} = mb^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dfrac{3}{2}mgb(1+\cos\varphi_e)\theta\dot{\theta} = 0$. En excluant $\dot{\theta} = 0$ (équilibre) on obtient :

$\ddot{\theta} + \dfrac{3g}{2b}(1+\cos\varphi_e)\theta = 0$. C'est un oscillateur harmonique de période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2b}{3g(1+\cos\varphi_e)}}}$.

⇨ *Méthode 11.7*

Chapitre 12

Mouvement dans un champ électrique ou magnétique

UN SCIENTIFIQUE



André-Marie Ampère (1775-1836) s'instruit seul et acquiert des connaissances dans de nombreuses matières. Passionné de physique, il transforme son habitation en laboratoire.
Il confirme l'hypothèse de l'origine électrique du magnétisme, ce qui justifie que certains le considèrent comme le père de l'électrodynamique. Ampère exprime ses découvertes dans des formules précises, il est l'un des acteurs de la mathématisation de la physique.

Un peu d'histoire

L'invention de la pile par Volta a permis de nouvelles expérimentations. En 1819 le Danois Hans Ørsted montre qu'une aiguille aimantée est déviée par un courant électrique. Le physicien français André-Marie Ampère comprend alors tout de suite que l'électricité et le magnétisme sont intiment liés. Il introduit alors la notion de courant électrique et lui définit un sens. Il présente ses découvertes dans deux mémoires fondamentaux ; dans le premier il décrit l'action mutuelle de deux courants électriques et compare la Terre à un gigantesque aimant tandis que dans le second, il introduit la formule donnant la valeur de la force en fonction de l'intensité et du champ magnétique. Ses travaux ont permis à Michael Faraday de découvrir l'induction magnétique. Ils justifient pleinement le choix de son nom pour désigner l'unité d'intensité du courant dans le Système international.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La force de Lorentz et sa puissance
- ▷ Des ordres de grandeur de champs électriques ou magnétiques
- ▷ L'énergie potentielle électrostatique
- ▷ Des applications du mouvement d'une particule chargée dans un champ

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Évaluer les ordres de grandeur des forces électriques ou magnétiques et les comparer à ceux des forces gravitationnelles
- ▷ Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique la dévie sans lui fournir d'énergie
- ▷ Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la vitesse acquise par une particule accélérée par une différence de potentiel
- ▷ Déterminer le mouvement d'une particule chargée en présence d'un champ électrostatique uniforme ou d'un champ magnétostatique uniforme
- ▷ Déterminer le rayon de la trajectoire d'une particule dans un champ magnétique et le sens de parcours

■■ Résumé de cours

■ Principes de l'électromagnétisme

❑ Interaction électromagnétique et champs

L'interaction électromagnétique est l'une des quatre interactions fondamentales, qui s'exerce entre les corps dotés de charges électriques. L'étude de l'interaction d'une charge électrique q avec un ensemble S d'autres charges étant complexe, on divise le problème en deux parties :

– l'ensemble S crée en tout point P de l'espace et à tout instant t un champ électromagnétique, constitué du **champ électrique** $\vec{E}(P,t)$ et du **champ magnétique** $\vec{B}(P,t)$, dépendant du référentiel $\mathcal{R}$;

– une charge q placée au point P subit une force exercée par ces deux champs, appelée **force de Lorentz** $\overrightarrow{F_L}$.

Si les champs sont **stationnaires** (indépendants du temps), on parle de champs **électrostatique** $\vec{E}(P)$ et **magnétostatique** $\vec{B}(P)$.

La théorie de l'électromagnétisme repose sur cinq postulats.

❑ Équations de Maxwell

Les quatre premiers postulats sont les équations de Maxwell, qui permettent de déterminer les champs $\vec{E}(P,t)$ et $\vec{B}(P,t)$ en fonction des charges et des courants électriques qui les créent.

Ces équations seront vues dans le cours de 2e année. Dans ce chapitre, on décrira quelques dispositifs créant des champs stationnaires et uniformes (indépendants du point P). Au chapitre **22**, on décrira d'autres dispositifs créant des champs magnétostatiques plus variés.

❑ Force de Lorentz

Le cinquième postulat est l'expression de la force de Lorentz subie par une particule M de charge q, se trouvant à l'instant t en un point P avec une vitesse $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$:

$$\overrightarrow{F_L} = q\left(\vec{E}(P,t) + \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(P,t)\right).$$

Cette force, comme toutes les autres, est indépendante du référentiel.

Dans ce chapitre on se limite à des champs stationnaires et uniformes, l'expression s'écrira donc plus simplement :

$$\boxed{\overrightarrow{F_L} = q\left(\vec{E} + \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}\right)}.$$

❑ Unités et ordre de grandeur

Unité SI du champ électrique $\vec{E}$: le volt par mètre ($\mathrm{V \cdot m^{-1}}$). Valeurs usuelles : 1 à 10^6 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

Unité SI du champ magnétique $\vec{B}$: le tesla (T). Valeurs usuelles : 10^{-6} à 1 T.

Pour des particules chargées à l'échelle atomique (noyaux, électrons, ions…), la force de Lorentz est toujours beaucoup plus intense que les forces gravitationnelles (dont le poids) : on négligera donc celles-ci.

■ Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

Une particule de masse m et de charge q entre avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ dans un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ uniforme, dans le vide : elle est soumise à la seule force électrique $\overrightarrow{F_L} = q\overrightarrow{E}$.
Le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ est celui du laboratoire, considéré comme galiléen.

❑ Mouvement de la particule

Il s'agit d'un mouvement à accélération constante : $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\text{cte}}$.

– Si $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{E}$ ne sont pas colinéaires, la trajectoire est un arc de parabole, d'axe parallèle à $\overrightarrow{E}$, dans le plan $(M_0, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{v_0})$, en notant M_0 la position de la particule à l'instant initial.

– Si $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{E}$ sont colinéaires, le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré si $q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v_0} > 0$ ou bien uniformément retardé si $q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v_0} < 0$.

❑ Aspect énergétique

La force électrique dérive de l'**énergie potentielle électrostatique** : $\boxed{\mathcal{E}_p(M) = qV(M)}\,(+\text{cte})$
où $V(M)$ est le potentiel électrostatique au point M.
Le travail reçu par une particule entre deux points A et B de la trajectoire est donc :
$\boxed{W_{AB} = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{AB} = qU_{AB}}$, U_{AB} étant la différence de potentiel entre les points A et B.

Une particule sans vitesse initiale acquiert ainsi une vitesse $v = \sqrt{\dfrac{2qU_{AB}}{m}}$ si $qU_{AB} > 0$.

⇨ **Méthode 12.1. Calcul de la vitesse acquise par une particule accélérée par une tension**

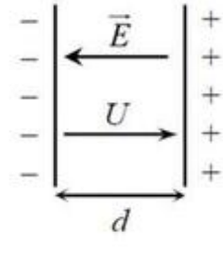
Remarque : limite relativiste

Pour des particules de vitesse proche de celle de la lumière ($c = 3\cdot10^8$ m·s^{-1}), la description relativiste devient nécessaire : $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2$ et $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (>1).

La mécanique classique est une approximation de la mécanique relativiste pour des vitesses faibles devant celle de la lumière : $\dfrac{v^2}{c^2} \ll 1$. Après un calcul classique de vitesse, le calcul de $\dfrac{v^2}{c^2}$ permet donc d'évaluer avec combien de chiffres significatifs la valeur trouvée est valable.

❑ Création d'un champ électrostatique uniforme

Un condensateur plan est constitué de deux plaques conductrices planes parallèles, les *armatures*, séparées d'une distance d et portant des charges opposées $+Q$ et $-Q$ liées à une tension constante U (positive si on l'oriente de l'armature négative vers la positive).
Le champ électrostatique uniforme créé à l'intérieur est orthogonal aux armatures, orienté de l'armature positive vers la négative, et de norme $E = \dfrac{U}{d}$.



■ Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

Une particule de masse m et de charge q entre avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ uniforme, dans le vide : elle est soumise à la seule force magnétique $\overrightarrow{F_L} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ galiléen est celui du laboratoire.

❑ Mouvement de la particule

Les équations du mouvement font apparaître la **pulsation cyclotron** $\boxed{\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}}$.

⇨ **Méthode 12.2. Établissement des équations différentielles cartésiennes du mouvement**

– Lorsque $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux, la particule chargée a un mouvement *circulaire uniforme*, de rayon $\boxed{R = \dfrac{v_0}{\omega_c} = \dfrac{mv_0}{|q|B}}$, dans un plan orthogonal au champ $\overrightarrow{B}$.

– Lorsque $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{B}$ sont colinéaires, la force est toujours nulle et la particule a un mouvement rectiligne uniforme.

⇨ **Méthode 12.3. Résolution des équations différentielles par découplage**

⇨ **Méthode 12.4. Résolution des équations différentielles avec une variable complexe**

⇨ **Méthode 12.5. Obtention de l'équation cartésienne de la trajectoire**

⇨ **Méthode 12.6. Démonstration du mouvement circulaire avec la base de Frenet**

❑ Aspect énergétique

La puissance de la force magnétique est toujours nulle car $\overrightarrow{F_L}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales. Par conséquent *la force magnétique ne travaille pas*.

La force magnétique ne modifie donc pas l'énergie cinétique de la particule, qui reste constante au cours du mouvement : celui-ci est *uniforme*.

⇨ **Méthode 12.7. Démonstration du mouvement uniforme**

❑ Création d'un champ magnétostatique uniforme

Divers dispositifs permettent de créer un champ magnétostatique uniforme dans une région limitée de l'espace, notamment les bobines de Helmholtz ou certaines formes d'aimants (voir chapitre **22**).

■■ Méthodes

■ Comment étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme ?

❑ Méthode 12.1. Calcul de la vitesse acquise par une particule accélérée par une tension

On applique le théorème de l'énergie cinétique à la particule chargée entre l'entrée et la sortie du champ accélérateur.

⇨ Exercices 12.1 à 12.5

Considérons une particule de charge q entrant, en un point A, dans un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E}$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

Le théorème de l'énergie cinétique pour la particule, entre A et un autre point B de la trajectoire, s'écrit : $\Delta E_c = W_{AB} = q\,U_{AB}$, soit $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = q\,U_{AB}$. Donc $v = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m} + v_0^2}$ est la vitesse acquise par la particule au point B. Si la particule est initialement « au repos » (vitesse initiale v_0 négligeable devant la vitesse acquise), alors $\boxed{v = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m}}}$, ce qui nécessite $qU_{AB} > 0$.

■ Comment étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme ?

Dans toutes les méthodes suivantes, on considère une particule de charge q entrant en O, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$, dans un champ magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ avec $qB > 0$.

❑ Méthode 12.2. Établissement des équations différentielles cartésiennes du mouvement

– On applique le PFD à la particule chargée, en calculant la force magnétique avec les composantes cartésiennes des deux vecteurs (vitesse et champ magnétique).
– Les projections sur les axes donnent trois équations différentielles, dont deux sont couplées (celles des composantes orthogonales à la direction du champ).

⇨ Exercices 12.4, 12.6, 12.7

Le PFD pour la particule s'écrit : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. On calcule le produit vectoriel avec les composantes en colonne : $q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix}$ ou bien en utilisant les vecteurs unitaires : $q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\left(v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z}\right) \wedge B\vec{e_z} = -qBv_x\vec{e_y} + qBv_y\vec{e_x}$.

En projetant le PFD sur les axes, on obtient donc :

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = +qBv_y \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -qBv_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \text{ donc en posant } \omega_c = \frac{qB}{m} : \boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = +\omega_c v_y \quad (1) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega_c v_x \quad (2) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (3) \end{cases}}$$

Si $qB < 0$, on posera plutôt $\omega_c = -\dfrac{qB}{m}$ pour avoir toujours une pulsation cyclotron positive.

On peut aussi écrire ces équations avec les coordonnées du point : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = +\omega_c\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad (4) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_c\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad (5) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad (6) \end{cases}}$

Les deux premières équations sont couplées et ne peuvent donc pas être résolues séparément.

❑ Méthode 12.3. Résolution des équations différentielles par découplage

- On résout tout d'abord l'équation non couplée.
- On dérive l'une des équations pour la vitesse, puis on reporte dans l'autre : on obtient ainsi une équation différentielle linéaire du second ordre pour l'une des composantes de la vitesse. Après l'avoir résolue séparément, on en déduira l'autre composante.
- On peut aussi intégrer une fois l'une des équations pour la position, puis reporter dans l'autre : on obtient alors une équation différentielle linéaire du second ordre pour l'une des coordonnées spatiales. Après l'avoir résolue séparément, on en déduira l'autre coordonnée.

⇨ Exercices 12.7

– On intègre deux fois l'équation (3), en tenant compte des conditions initiales : $v_z(t) = \text{cte} = 0$ puis $z(t) = \text{cte} = 0$. Cette équation nous montre que le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).

– On dérive les équations (1) et (2) : $\begin{cases} \dfrac{d^2v_x}{dt^2} = +\omega_c \dfrac{dv_y}{dt} & (1') \\ \dfrac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega_c \dfrac{dv_x}{dt} & (2') \end{cases}$

Puis, en combinant (1′) et (2) : $\dfrac{d^2v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0$; et en combinant (2′) et (1) : $\dfrac{d^2v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = 0$.

v_x et v_y obéissent à la même équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre, de type oscillateur harmonique.

Les solutions sont de la forme : $\begin{cases} v_x(t) = A\cos(\omega_c t) + C\sin(\omega_c t) \\ v_y(t) = D\cos(\omega_c t) + F\sin(\omega_c t) \end{cases}$

où A, C, D et F sont des constantes qu'on détermine à partir des conditions initiales.

$v_x(0) = A = v_0$; $v_y(0) = D = 0$; $\dfrac{dv_x}{dt}(0) = 0 = C\omega_c$ d'où $C = 0$; $\dfrac{dv_y}{dt}(0) = -\omega_c v_0 = F\omega$ d'où $F = -v_0$. Donc $\boxed{v_x(t) = v_0\cos(\omega_c t)}$ et $\boxed{v_y(t) = -v_0\sin(\omega_c t)}$.

Les lois horaires s'écrivent alors, en intégrant les expressions obtenues pour les vitesses :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega_c t) + X \text{ et } y(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega_c t) + Y$$

où X et Y sont les constantes d'intégration qu'on détermine à partir des conditions initiales.

$x(0) = y(0) = 0$ donc $X = 0$ et $Y = -\dfrac{v_0}{\omega_c}$. Attention, ici $Y \neq y(0)$!

Finalement : $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)}$ et $\boxed{y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\left(\cos(\omega_c t) - 1\right)}$.

– On peut aussi intégrer une fois l'une des équations (4) et (5), contenant x et y (en tenant compte des conditions initiales), puis la reporter dans l'autre, ce qui amène à résoudre des équations du second ordre pour x et y : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_c^2 x = 0$ et $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0$.

Leur résolution donne directement les solutions précédentes.
Cette méthode est détaillée dans le corrigé de l'exercice 12.7.

❑ Méthode 12.4. Résolution des équations différentielles avec une variable complexe

– On résout tout d'abord l'équation non couplée.
– Si x et y sont les deux coordonnées vérifiant les équations différentielles couplées, on introduit une variable complexe $u = v_x + iv_y$. La combinaison des deux équations donne alors une unique équation différentielle complexe d'ordre 1 pour u.

– Après résolution de cette équation différentielle, les parties réelle et imaginaire donnent les composantes de la vitesse, que l'on intègre pour obtenir les équations horaires.

⇨ Exercices 12.4, 12.6

– L'équation en z donne toujours $v_z(t) = 0$ puis $z(t) = 0$.

– Pour les deux autres : $i \times (2) \Leftrightarrow i\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + i\omega_c v_x = 0$ (2″) puis en additionnant (1) et (2″) : $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + i\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \omega_c(iv_x - v_y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}(v_x + iv_y)}{\mathrm{d}t} + i\omega_c(v_x + iv_y) = 0$ soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i\omega_c u = 0$ en posant $u = v_x + iv_y$.

La solution de cette équation différentielle d'ordre 1 est de la forme $u(t) = K\exp(-i\omega_c t)$.

K est une constante qu'on détermine à partir des conditions initiales sur la vitesse :
$v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$ donc $u(0) = v_0 = K$. On en déduit : $u(t) = v_0\exp(-i\omega_c t)$.

– En séparant les parties réelle et imaginaire de cette fonction, on obtient les expressions :

$$v_x(t) = v_0\cos(\omega_c t) \text{ et } v_y(t) = -v_0\sin(\omega_c t).$$

On obtient finalement, par intégration et en tenant compte des conditions initiales sur la position, les équations horaires du mouvement : $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)}$ et $\boxed{y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_c}\left(\cos(\omega_c t) - 1\right)}$.

❑ Méthode 12.5. Obtention de l'équation cartésienne de la trajectoire et du sens de parcours

– On a montré que le mouvement est plan, donc il suffit d'une équation cartésienne pour déterminer la forme de la trajectoire.

– Comme on l'a vu en cinématique, il s'agit de relier directement les coordonnées x et y en éliminant la variable t. On utilise pour cela la relation trigonométrique $\cos^2(\omega_c t) + \sin^2(\omega_c t) = 1$: il faut donc isoler les termes en $\cos(\omega_c t)$ et $\sin(\omega_c t)$, les élever au carré et les additionner.

– On obtient une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, dans laquelle on reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle de centre Ω et de rayon R.

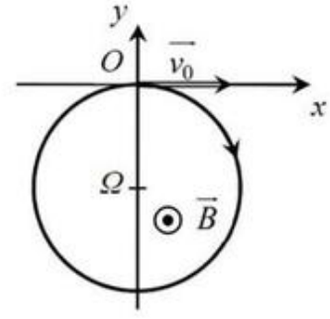
– Le sens de parcours est alors donné par le sens du vecteur vitesse initial. On constate toujours qu'une particule de charge *négative* tourne autour du vecteur champ magnétique dans le sens *positif* défini par celui-ci, et inversement (ce sens positif étant défini par une règle comme celle du tire-bouchon ou celle des doigts de la main droite).

⇨ Exercices 12.4, 12.6

Dans les équations horaires précédentes, x ne comporte qu'un terme en $\sin(\omega_c t)$, tandis que y comporte un terme en $\cos(\omega_c t)$ et un terme constant : ce n'est donc pas y, mais $y+\frac{v_0}{\omega_c}$, qu'il faut élever au carré : $x^2+\left(y+\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2=\left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2\sin^2(\omega_c t)+\left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2\cos^2(\omega_c t)=\left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$

soit $\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2}$, équation d'un cercle de centre $\Omega\left(x_\Omega=0\,;y_\Omega=-\frac{v_0}{\omega_c}\right)$ et de rayon $\boxed{R=\frac{v_0}{\omega_c}=\frac{mv_0}{qB}}$ (cette fraction étant bien positive avec les notations choisies).

Le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ étant orienté vers la droite (car on a supposé $v_0>0$), on voit que la trajectoire circulaire est parcourue dans le sens horaire. La particule, de charge *positive* (puisqu'on a supposé $B>0$ et $qB>0$), tourne autour du vecteur $\overrightarrow{B}$ dans le sens *négatif* défini par celui-ci.



☛ *Puisque la position initiale était le point O, le cercle doit* passer par *O, et ne peut donc pas être de* centre *O !*

❑ Méthode 12.6. Démonstration du mouvement circulaire avec la base de Frenet

On peut démontrer que le mouvement est circulaire sans passer par les équations horaires cartésiennes, mais en utilisant la base de Frenet. Il faut pour cela avoir préalablement montré que le mouvement est plan (en intégrant la projection du PFD sur $\overrightarrow{e_z}$, voir méthode 12.3).

– Projeter le PFD sur la base de Frenet.

– La projection sur le vecteur tangent $\vec{\tau}$ permet de montrer que le mouvement est uniforme.

– La projection sur le vecteur normal $\vec{n}$ permet de montrer que la trajectoire est circulaire, et de calculer son rayon.

⇨ **Exercices 12.5**

Dans la base de Frenet, $\vec{v}=v\vec{\tau}$ et $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\frac{v^2}{R}\vec{n}$. La force de Lorentz magnétique s'écrit : $\overrightarrow{F_L}=q\vec{v}\wedge\overrightarrow{B}=qv\vec{\tau}\wedge B\overrightarrow{e_z}=\pm qvB\vec{n}$ (on ne sait pas de quel côté est courbée la trajectoire). Les projections du PFD sur la base de Frenet sont donc : $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ (1) et $m\frac{v^2}{R}=\pm qvB$ (2).

– D'après (1), $v = \text{cte}$: le mouvement est uniforme. Avec les conditions initiales, $v = v_0$.

– L'équation (2) peut se réécrire $m\dfrac{v_0^2}{R} = |q| v_0 B$ puisque $v = v_0$ et que le premier membre est positif. On en déduit le rayon de courbure de la trajectoire $R = \dfrac{mv_0}{|q|B}$ et on voit qu'il est constant. Or la seule courbe plane ayant un rayon de courbure constant est le cercle : la particule a donc un mouvement circulaire de rayon $\boxed{R = \dfrac{mv_0}{|q|B}}$.

Cette méthode ne nous donne pas le sens de courbure : pour savoir si la particule part vers la droite ou vers la gauche, il faut regarder l'orientation du vecteur force à l'instant initial.
La méthode ne donne pas non plus directement les coordonnées du centre du cercle : si nécessaire, on peut les trouver par des considérations géométriques.

❑ Méthode 12.7. Démonstration du mouvement uniforme

On peut utiliser trois méthodes.
– Si on a déjà effectué tous les calculs de la méthode 12.3 ou 12.4 (équations horaires), on a obtenu au passage les composantes de la vitesse, ce qui permet de calculer sa norme et de montrer qu'elle reste égale à sa valeur initiale.
– Si on a utilisé la base de Frenet (méthode 12.6), on a pu déjà montrer directement que le mouvement est uniforme, en projetant le PFD sur la tangente.
– Sinon, avant tout calcul de trajectoire, on peut aussi appliquer le théorème de l'énergie cinétique, sous forme instantanée ou intégrale, à la particule chargée.

⇨ Exercices 12.5, 12.7

– On a trouvé dans les méthodes 12.3 et 12.4 : $v_x(t) = v_0\cos(\omega_c t)$, $v_y(t) = -v_0\sin(\omega_c t)$, ainsi que $v_z(t) = 0$ puisque le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).
La norme du vecteur vitesse est donc à tout instant :
$v(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2(\omega_c t) + v_0^2\sin^2(\omega_c t)}$ soit $\boxed{v(M)_{\mathcal{R}} = v_0}$. La norme de la vitesse reste bien toujours égale à sa valeur initiale.

– TÉC sous forme instantanée pour la particule, qui n'est soumise qu'à la force de Lorentz magnétique $\overrightarrow{F_L} = q\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$, dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_L}\right)_{\mathcal{R}}$.
Or $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_L}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F_L}\cdot\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$ puisque $\overrightarrow{F_L} \perp \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$. Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = 0$, soit $\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$.
Puisque $\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{2}m\,v(M)_{\mathcal{R}}^2$, on en déduit $\boxed{v(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}}$: le mouvement est uniforme.
Et les conditions initiales donnent $v(M)_{\mathcal{R}} = v_0$.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Pour un électron, l'intensité de la force de Lorentz et de la pesanteur sont du même ordre de grandeur.	☐	☐
2.	Le champ électrique qui s'exerce sur une particule chargée l'accélère dans une direction parallèle à celle du champ.	☐	☐
3.	La force électrique exercée par un champ stationnaire et uniforme est une force conservative.	☐	☐
4.	La trajectoire d'une particule chargée dans un champ électrique peut être une droite.	☐	☐
5.	Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique est uniforme.	☐	☐
6.	Le champ électrique qui s'exerce sur une particule chargée au repos la met en mouvement.	☐	☐
7.	La trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique peut être une droite.	☐	☐
8.	La trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique est plane si sa vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique.	☐	☐
9.	Le champ magnétique qui s'exerce sur une particule chargée au repos la met en mouvement.	☐	☐
10.	Une particule ayant acquis une vitesse de $2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ peut être étudiée au moyen de la mécanique classique.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Mouvement dans un champ électrique

❑ Exercice 12.1. Limites de validité des hypothèses

Un proton de masse m et de charge $q = +e$, ayant une vitesse initiale nulle, est accéléré dans le vide par un champ électrostatique $\vec{E}$. On note U la différence de potentiel entre sa position initiale et sa position finale où la vitesse v a été acquise.

1. On considère que le poids de la particule n'est plus négligeable quand il dépasse le centième de la valeur de la force électrique. Calculer la valeur limite E_{lim} du champ E pour laquelle le poids n'est plus négligeable.
2. On considère la vitesse v de la particule comme relativiste quand elle dépasse le centième de la vitesse c de la lumière. Calculer la valeur limite U_{lim} de la tension pour laquelle le proton acquiert une vitesse relativiste.

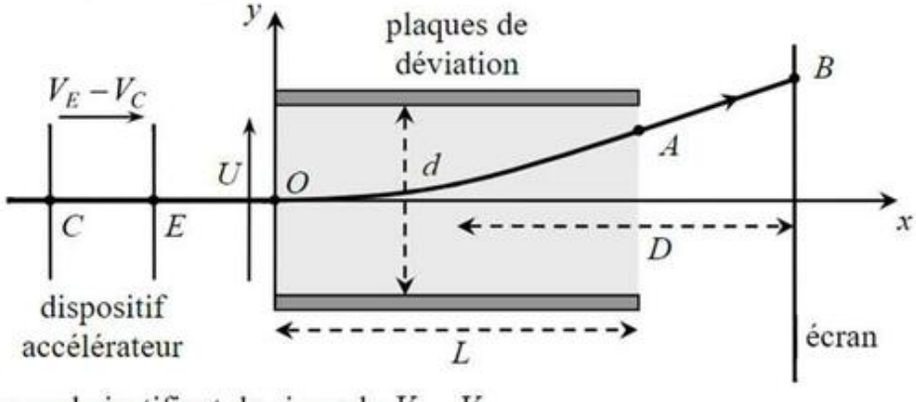
Données : $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $g = 9{,}8$ m · s^{-2} ; $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ m · s^{-1}.

❑ Exercice 12.2. Déviation d'un faisceau d'électrons

Avant la généralisation des oscilloscopes numériques dans les années 2010, on utilisait des oscilloscopes analogiques, contenant un tube cathodique dont on donne ici une description.

Un faisceau d'électrons émis en un point C, avec une vitesse quasi nulle, est accéléré par une tension U_0 entre les points C et E situés sur un axe (Ox). Puis il pénètre en O, avec la vitesse $v_0 \vec{e}_x$, dans le champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme régnant entre deux plaques parallèles métalliques, symétriques par rapport au plan (Oxz), de longueur L et séparées par une distance d. Le champ est créé par une tension U appliquée entre ces plaques.

Le faisceau sort en A de la zone où règne le champ, puis il atteint finalement l'écran de l'oscilloscope en un point B (spot lumineux). L'écran est à la distance D du milieu des plaques.



1. **a)** Indiquer, en le justifiant, le signe de $V_E - V_C$.

b) Calculer, en fonction de $U_0 = |V_E - V_C|$, la norme v_0 de la vitesse au point O d'un électron, de masse m et de charge $-e$.

Données : $U_0 = 1000$ V ; $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron entre O et A. En déduire l'ordonnée y_A du point de sortie A.

3. a) Quel est la nature du mouvement d'un électron entre A et B, où ne règne aucun champ ?

b) Déterminer l'équation de cette trajectoire et montrer que l'ordonnée y_B du spot est proportionnelle à la tension U appliquée entre les plaques.

❑ Exercice 12.3. Expérience de Lenard*

L'une des étapes fondatrices de la mécanique quantique fut l'étude et l'interprétation de l'*effet photoélectrique*. Découvert en 1887 par Heinrich HERTZ et son assistant Wilhelm HALLWACHS, cet effet consiste en une émission d'électrons par un métal lorsqu'il est soumis à un rayonnement électromagnétique, notamment ultraviolet. Les propriétés de ce phénomène ont été étudiées expérimentalement par Philipp LENARD en 1902, ce qui a conduit Albert EINSTEIN à en proposer une interprétation théorique en 1905 ; puis Robert MILLIKAN a publié des mesures supplémentaires en 1916, confortant la théorie d'EINSTEIN.

L'expérience de LENARD consiste à mesurer d'une part la quantité d'électrons émis par le métal, d'autre part leur énergie cinétique maximale, en fonction des caractéristiques du rayonnement.

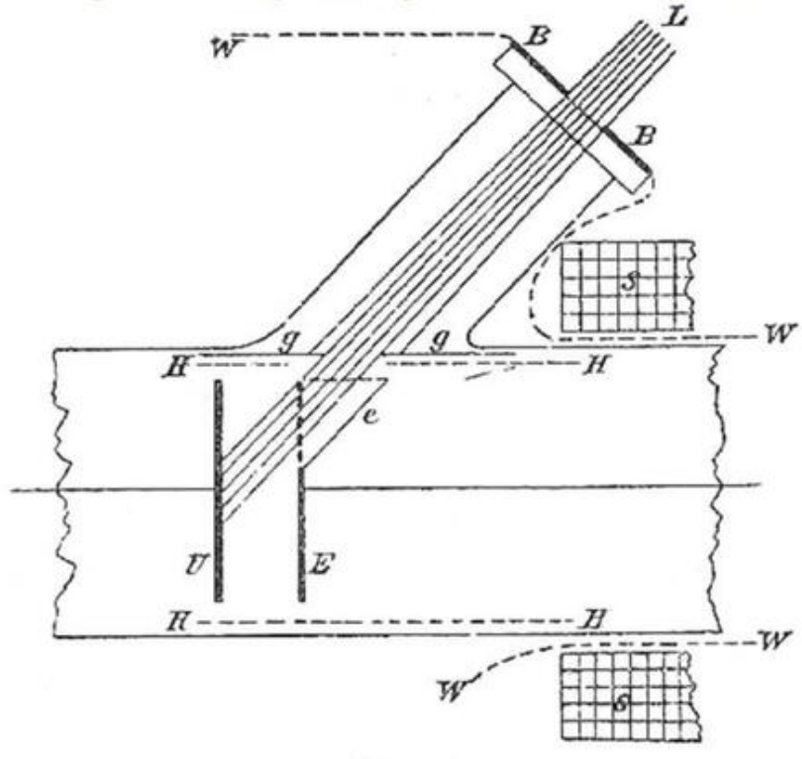


Fig. 1.

Schéma de l'article original de Philipp LENARD, « Über die lichtelektrische Wirkung », *Annalen der Physik*, 4e série, volume 8 (1902)

Dans un tube à vide, le rayonnement issu de la source L frappe la plaque métallique U, qui émet alors des électrons : ceux qui sont reçus par la plaque voisine E créent un courant mesuré par un ampèremètre. Une tension variable X est appliquée entre U et E, ce qui permet de ralentir les électrons, et même de les empêcher d'atteindre E.

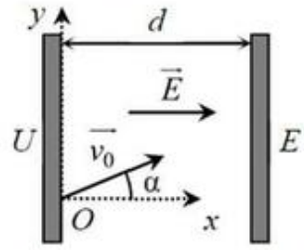
1. Quel doit être le signe de la tension $X = V_U - V_E$ pour ralentir les électrons émis par U ?

Considérons un électron au repos dans le métal de la plaque U. Selon l'interprétation d'EINSTEIN, lorsque cet électron interagit avec le rayonnement de fréquence f, il absorbe un quantum d'énergie (photon) de valeur hf, ce qui revient à recevoir un travail hf. L'électron doit ensuite *fournir* un travail au reste du métal, pour pouvoir en sortir ; la valeur minimale de ce *travail d'extraction*, pour un électron juste à la surface, est notée W (grandeur positive).

2. Déterminer l'énergie cinétique maximale d'un électron lorsqu'il arrive sur la plaque E, en fonction de h, f, W, e (charge élémentaire) et X.

3. On note V la plus petite valeur de la tension X qui annule le courant mesuré. Montrer que V vérifie l'équation d'EINSTEIN (confirmée expérimentalement par MILLIKAN) : $eV = hf - W$.

4. On souhaite décrire précisément le mouvement d'un électron entre U et E, distantes de d, en supposant un champ uniforme $\vec{E} = \frac{X}{d}\vec{e_x}$.



La vitesse initiale de l'électron en O fait un angle α avec le champ, dans le plan (Oxy), et sa norme est $v_0 = \sqrt{\frac{2(hf - W)}{m}}$.

a) Déterminer les équations horaires de la trajectoire, puis son équation cartésienne : de quelle courbe s'agit-il ?

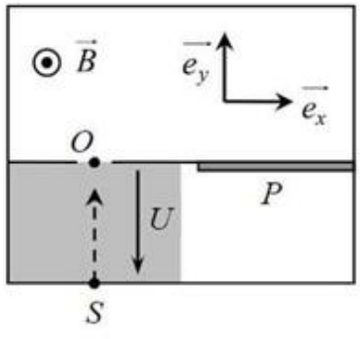
b) Déterminer l'abscisse maximale x_{max} atteinte par l'électron.

c) Dessiner l'allure de la trajectoire dans les cas suivants : $\alpha = 0$ et $0 < X < V$; $\alpha = 0$ et $X = V$; $\alpha = 0$ et $X > V$; $\alpha \neq 0$ et $X > V$. Vérifier la compatibilité avec la question **3**.

■ Mouvement dans un champ magnétique

❑ Exercice 12.4. Spectrographe de masse

Le spectrographe de masse est un appareil permettant, entre autres, de séparer les différents isotopes d'un élément dans un échantillon (pour les compter ou pour en sélectionner un).





Un faisceau de particules chargées est constitué des ions de deux isotopes du mercure : $^{200}_{80}Hg^{2+}$ et $^{202}_{80}Hg^{2+}$ notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau est émis par la source S avec une vitesse quasi nulle, puis accéléré par une tension $U > 0$. Il pénètre alors en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$ uniforme, orthogonal au faisceau incident.

Données : masse d'un nucléon $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg (la masse de l'électron sera négligée devant m) ; $U = 10$ kV ; $B = 0{,}10$ T ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

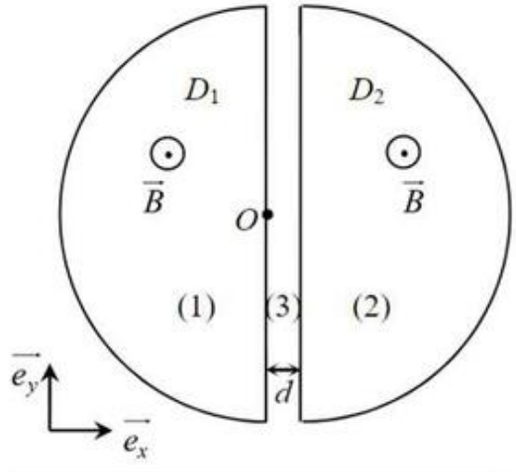
1. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 acquises respectivement par les isotopes (1) et (2) suite à l'accélération par la tension U.

2. Déterminer la trajectoire des ions dans la zone de champ magnétique. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires des isotopes (1) et (2).

3. On recueille les particules sur un détecteur P après qu'elles ont fait demi-tour. Exprimer puis calculer la distance d entre les deux traces observées.

❑ Exercice 12.5. Cyclotron*

Le cyclotron est un accélérateur de particules inventé en 1930 par Ernest LAWRENCE, et ayant permis la découverte de nouveaux noyaux. Il est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 (région (1)) et D_2 (région (2)), appelées *dees* en anglais, dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$; entre ces deux *dees*, une bande étroite de largeur d (région (3)) est plongée dans un champ électrique alternatif de module constant E, mais qui change de sens.





E. LAWRENCE examinant un cyclotron dans son laboratoire de Berkeley en 1935

On introduit au point O (0,0,0) une particule de charge $q > 0$, sans vitesse initiale ; la tension $U_{D_1D_2}$ est alors positive.

1. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3), avant qu'elle ne pénètre dans la région (2) où règne un champ magnétique ? Calculer la vitesse v_1 de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (2).

2. a) Montrer que le mouvement de la particule dans la région (2) est plan et uniforme.

b) Montrer que la trajectoire est circulaire en utilisant la base de Frenet, et déterminer son rayon.

c) Quelle est la vitesse de la particule lorsqu'elle sort de la région (2) ?

3. Pendant que la particule était dans la région (2), le signe de la tension $U_{D_1D_2}$ a changé. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3), avant qu'elle ne pénètre dans la région (1) ? Calculer la vitesse v_2 de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (1).

4. La particule est à nouveau déviée dans la zone (1).

a) Quelle est la nature de sa trajectoire ?

b) Exprimer la durée de cette trajectoire. Montrer que cette durée a la même valeur à chaque passage dans la zone (1), et permet de calculer le rapport $\frac{q}{m}$.

c) En déduire la fréquence de la tension alternative $U_{D_1D_2}$ nécessaire pour accélérer la particule à chacun de ses passages entre les *dees*, en négligeant le temps de passage dans la région (3).

5. a) Après n passages dans la région (3), quelle est la vitesse v_n de la particule ?

b) Quel est l'intérêt du passage de la particule dans la région (3) ?

6. Un cyclotron a un diamètre maximal utile de 52 cm.

a) Calculer, en joules puis en MeV, l'énergie cinétique maximale des protons (de masse m_p) accélérés par ce cyclotron lorsque la fréquence de l'oscillateur électrique qui accélère les protons entre chaque *dee* est de 12 MHz. Quelle est alors la valeur du champ magnétique ?

b) L'amplitude de la tension alternative appliquée entre les deux *dees* est de 200 kV. Calculer le nombre de tours effectués par les protons pour atteindre leur énergie cinétique maximale.

Données : 1 MeV = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J ; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

❑ Exercice 12.6. Particules dans une chambre à bulles* *



La chambre à bulles est un dispositif mis au point en 1952 par Donald Arthur GLASER (prix Nobel 1960), et destiné à visualiser des trajectoires de particules subatomiques. Il s'agit d'une enceinte remplie d'un liquide (généralement du dihydrogène) à une température légèrement supérieure à celle de vaporisation : le passage d'une particule chargée déclenche la vaporisation et les petites bulles formées ainsi matérialisent la trajectoire de la particule.
D'autre part l'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, qui courbe les trajectoires et permet ainsi d'identifier les particules (à partir de leur masse et de leur charge).

On étudie ici une particule P de masse m, de charge q (positive ou négative), introduite à $t = 0$ dans la chambre à bulles où règne le champ $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ (avec $B > 0$). Sa position initiale est l'origine O du repère, et sa vitesse initiale est $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$ (avec $v_0 > 0$).

Le poids de la particule est négligé dans tout le problème. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

Dans un premier temps, on suppose que les frottements du liquide sur la particule P sont négligeables.

1. Établir les équations différentielles du mouvement de P. On posera $\omega = \frac{qB}{m}$.

2. En déduire les équations horaires de P et indiquer *précisément* la nature de sa trajectoire.
Représenter sur un même schéma les trajectoires :
- d'un proton ($q = +e$)
- d'un électron ($q = -e$ et masse beaucoup plus faible que celle du proton).

En fait les frottements du liquide de la chambre à bulles sur les particules sont importants : on les modélise par une force $\vec{F} = -\lambda \vec{v}(P)$ où λ est une constante positive. On posera $\alpha = \dfrac{\lambda}{m}$.

3. Établir les nouvelles équations différentielles du mouvement (avec les paramètres ω et α). Montrer que le mouvement reste plan.

4. Déterminer complètement les équations horaires de P. On pourra poser $u = x + iy$, et déterminer tout d'abord $\dot{u}(t)$.

5. Déterminer les coordonnées du point asymptotique P_∞. Représenter sur un schéma la trajectoire d'un proton.

6. La figure ci-dessous est une photographie prise dans une chambre à bulles.

Les trajectoires quasi rectilignes sont celles des particules à grande vitesse d'un faisceau incident venant du bas de l'image (ce sont des kaons K^-, de charge $-e$ et de masse voisine de celle du proton). En certains points, un kaon subit un choc avec une particule du milieu, ce qui la dévie ou fait apparaître de nouvelles particules, dont on voit alors les trajectoires si ces particules sont chargées (les particules neutres ne laissant pas de trace).

La trajectoire **1** est celle d'un kaon K^- de vitesse plus faible que celle du faisceau incident.

a) Au point marqué **v**, la collision d'un kaon avec un proton produit quatre particules : quels sont les signes de leurs charges respectives ? Justifier.

b) Au point **y**, un kaon subit une collision avec une particule et celle-ci suit alors la petite trajectoire en spirale. Identifier la nature de cette particule parmi les possibilités suivantes : proton, antiproton, électron, antiélectron (positon), neutron. Justifier la réponse.
(On rappelle qu'une antiparticule a la même masse que la particule correspondante, mais une charge opposée).

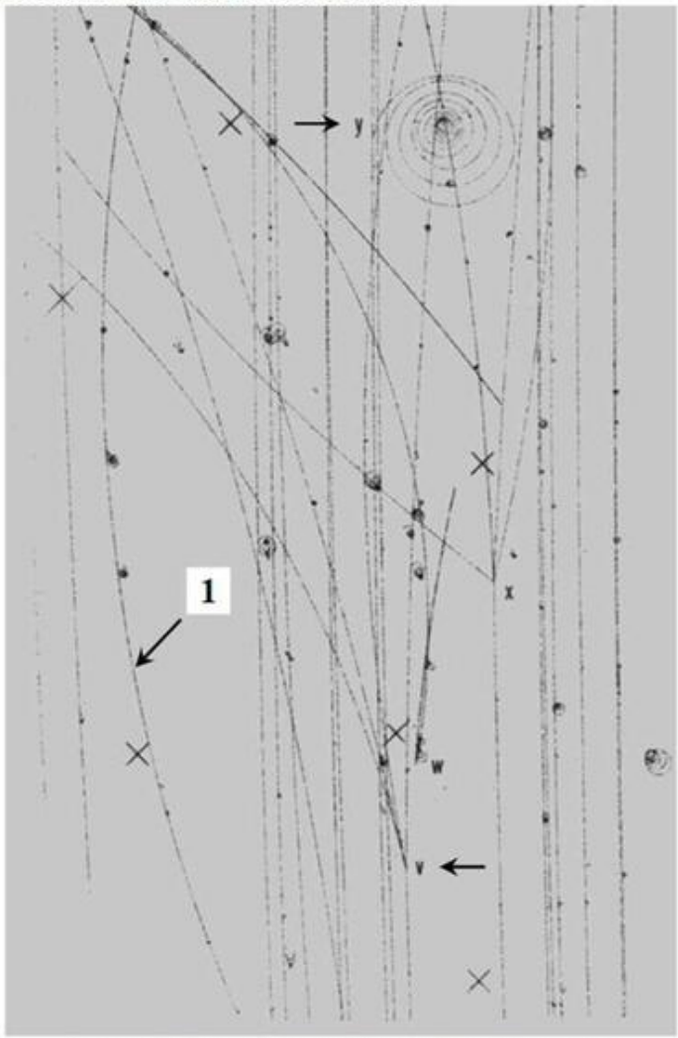


Image de Peter Watkins (Birmingham University) et Tom Adams (Cheltenham College)

■ Mouvement dans un champ électromagnétique

❑ Exercice 12.7. Champs électrique et magnétique orthogonaux**

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ de repère $Oxyz$, on considère une particule de masse m et de charge q, ayant une vitesse nulle et se trouvant au point O à l'instant $t = 0$. On établit à cet instant deux champs uniformes et indépendants du temps : $\vec{B} = B\vec{e_z}$ et $\vec{E} = E\vec{e_y}$.

On pose $\omega = \dfrac{qB}{m}$ et $A = \dfrac{E}{B\omega}$.

1. Établir les équations différentielles régissant le mouvement de la particule.

2. Déterminer les équations horaires du mouvement de la particule.

3. Dessiner l'allure de la trajectoire (elle est appelée *cycloïde*).

4. a) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse $v(t)$.

b) Exprimer la valeur de la vitesse à l'instant $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ en fonction de E et B. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

c) Exprimer la vitesse moyenne de la particule, appelée vitesse de dérive $\overline{v_d}$, en fonction de E et B et du vecteur unitaire adéquat.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 12.1. Question 2 : appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
Exercices 12.4 et 12.6. Utiliser la méthode 12.3 ou 12.4 pour résoudre le système d'équations couplées.
Exercice 12.7. À la question 3, dresser un tableau de valeurs particulières pour connaître l'allure de la trajectoire.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux

1. La force de pesanteur est négligeable.

4. C'est le cas lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ électrique (mouvement rectiligne uniformément accéléré).

5. Le mouvement est toujours accéléré ou retardé, car la force électrique travaille.

7. C'est le cas lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ magnétique (mouvement rectiligne uniforme).

9. Si la vitesse est nulle, la force magnétique est nulle donc il n'y a pas de mouvement.

10. Cela donne $v = \frac{2}{3}c$, soit $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0{,}44$ qui n'est pas du tout négligeable devant 1, donc la mécanique classique ne donne même pas un chiffre significatif.

❑ Les erreurs classiques

– Le produit vectoriel n'est pas commutatif (contrairement au produit scalaire) : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \neq q\vec{B} \wedge \vec{v}$.

– Les champs électrique et magnétique n'ont pas les mêmes dimensions : on ne peut pas les additionner !

– Attention aux ordres de grandeur : le tesla (T) est une « grande » unité, l'intensité d'un champ magnétique étant généralement comprise entre 10^{-6} et 1 T, tandis que le volt par mètre ($V \cdot m^{-1}$) est une « petite » unité, l'intensité d'un champ électrique étant généralement comprise entre 1 et 10^6 $V \cdot m^{-1}$.

Exercice 12.1

1. L'intensité de la force électrique est $F = eE$, celle du poids est $P = mg$.

Le poids dépasse le centième de la force électrique lorsque $P > \dfrac{F}{100}$ soit $\boxed{E < E_{\text{lim}} = \dfrac{100mg}{e}}$.

AN $\boxed{E_{\text{lim}} = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$. C'est une valeur extrêmement faible : le poids est donc négligeable devant toute force électrique usuelle.

2. Théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial et l'état final où la vitesse v a été acquise : $\dfrac{1}{2}mv^2 - 0 = e\left(V_{\text{f}} - V_{\text{i}}\right) = eU$ soit $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$.

⇨ *Méthode 12.1*

La particule est relativiste lorsque $v > \dfrac{c}{100}$ soit $\boxed{U > U_{\text{lim}} = \dfrac{mc^2}{2 \cdot 10^4 e}}$. AN $\boxed{U_{\text{lim}} = 48\ \text{kV}}$.

C'est une tension élevée mais fréquemment atteinte dans les dispositifs d'accélération de particules : on doit dans ce cas utiliser la mécanique relativiste.

Pour un électron, de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$, on trouve $U_{\text{lim}} = 26\ \text{V}$: la mécanique relativiste doit donc toujours être utilisée.

Exercice 12.2

1. a) Théorème de l'énergie cinétique entre C et E : $\dfrac{1}{2}mv_E^2 - 0 = -e(V_C - V_E) > 0$ donc on doit avoir $\boxed{V_E - V_C > 0}$.

⇨ *Méthode 12.1*

b) La vitesse reste constante entre E et O, car il n'y a aucun champ dans cette zone : d'après le calcul précédent, $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m}}}$. AN $\boxed{v_0 = 1{,}9 \cdot 10^7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

2. PFD pour l'électron dans le référentiel terrestre galiléen : $m\vec{a} = -e\vec{E}$. En intégrant on obtient $\vec{v} = -\dfrac{e}{m}\vec{E}t + \vec{v_0}$ puis $\overrightarrow{OM} = -\dfrac{e}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v_0}t$. On projette cette équation vectorielle sur les axes du repère : $x(t) = v_0 t$, $y(t) = \dfrac{eEt^2}{2m}$ et $z(t) = 0$. Le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy), et en remplaçant t par x/v_0 on trouve l'équation cartésienne de la trajectoire : $\boxed{y(x) = \dfrac{eE}{2mv_0^2}x^2}$. À la sortie, $x_A = L$ donc $\boxed{y_A = \dfrac{eE}{2mv_0^2}L^2}$.

3. a) Les électrons ont un mouvement rectiligne et uniforme, car ils ne sont plus soumis à aucune force (leur poids étant toujours négligeable sur cette durée très courte).

b) La pente de la trajectoire au point A est donnée par la dérivée de l'équation de la trajectoire calculée en 2 : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{eEx}{mv_0^2}$, soit $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_A} = \frac{eEL}{mv_0^2}$.

L'équation de la droite tangente à la trajectoire s'écrit à partir de la cote et de la pente : $y(x) = y(x_A) + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_A}(x - x_A) = \frac{eEL^2}{2mv_0^2} + \frac{eEL}{mv_0^2}(x - L)$ d'où $\boxed{y(x) = \frac{eEL}{mv_0^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)}$.

On en déduit $y_B = y\left(\frac{L}{2} + D\right) = \frac{eELD}{mv_0^2}$. La norme du champ entre les armatures étant $E = \frac{U}{d}$, on obtient finalement $\boxed{y_B = \frac{eLD}{mdv_0^2}U}$: cette valeur est proportionnelle à U.

Exercice 12.3

1. Le travail électrique reçu par l'électron entre U et E est $W_{\text{élec}} = -e(V_U - V_E) = -eX$. Pour ralentir l'électron, ce travail doit être négatif, d'où $\boxed{X > 0}$.

Autre argument plus qualitatif : l'électron, chargé négativement, doit être repoussé par la plaque E et attiré par la plaque U, donc E doit être la plaque négative et U la plaque positive, ce qui correspond à $X = V_U - V_E > 0$.

2. Entre sa position initiale à l'intérieur de U et son arrivée sur E, l'électron reçoit un travail hf, puis *fournit* un travail W' (de valeur minimale W), ce qui revient à *recevoir* un travail $-W'$; enfin il reçoit un travail électrique $-eX$. Théorème de l'énergie cinétique : $E_{c,E} - 0 = hf - W' - eX$. Puisque $W' \geq W$, $E_{c,E} \leq hf - W - eX$, soit $\boxed{E_{c,E,\max} = hf - W - eX}$.

3. Le courant mesuré est nul lorsque plus aucun électron ne parvient jusqu'à E. Or pour qu'un électron arrive sur E, il faut que le calcul précédent donne une énergie cinétique positive : $E_{c,E,\max} \geq 0 \Leftrightarrow eX \leq hf - W$. Pour une tension X telle que $eX > hf - W$, aucun électron n'arrive sur E. La tension minimale d'arrêt V est donc donnée par $\boxed{eV = hf - W}$.

4. a) PFD pour l'électron dans le référentiel terrestre galiléen : $m\vec{a} = -e\vec{E}$. En intégrant on obtient $\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}t + \vec{v_0}$ puis $\overrightarrow{OM} = -\frac{e}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v_0}t = -\frac{e}{2m}\frac{X}{d}t^2\vec{e_x} + v_0 t\left(\cos\alpha\,\vec{e_x} + \sin\alpha\,\vec{e_y}\right)$.

Projections : $\boxed{x(t) = -\frac{eX}{2md}t^2 + v_0\cos(\alpha)t}$, $\boxed{y(t) = v_0\sin(\alpha)t}$ et $\boxed{z(t) = 0}$. Le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy). En remplaçant t par $y/v_0\sin\alpha$ on trouve l'équation cartésienne de la trajectoire : $\boxed{x = -\frac{eX}{2mdv_0^2\sin^2\alpha}y^2 + \frac{1}{\tan\alpha}y}$. Il s'agit d'un arc de parabole, d'axe parallèle à (Ox), de concavité tournée vers la gauche (vers les x faibles) car le coefficient de y^2 est négatif.

b) Dérivée de x par rapport à t : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = -\frac{eX}{md}t + v_0\cos\alpha$ (déjà calculée).

x est maximale quand cette dérivée s'annule, soit en $t_1 = \dfrac{md v_0 \cos\alpha}{eX}$.

Alors $x_{max} = -\dfrac{eX}{2md}\left(\dfrac{md v_0 \cos\alpha}{eX}\right)^2 + v_0 \cos\alpha \dfrac{md v_0 \cos\alpha}{eX} = \dfrac{md v_0^2 \cos^2\alpha}{2eX}$. Finalement, on remplace v_0^2 avec l'expression donnée : $\boxed{x_{max} = \dfrac{d(hf - W)\cos^2\alpha}{eX}}$.

c) – Cas 1 : $\alpha = 0$ et $0 < X < V$

Pour $\alpha = 0$, l'expression se simplifie en $x_{max} = \dfrac{d(hf - W)}{eX}$, et la trajectoire est rectiligne (car $y = 0$). V étant donnée par le relation $eV = hf - W (> 0)$, $X < V$ équivaut à $eX < hf - W$, d'où $x_{max} > d$. Les particules ayant cette vitesse initiale maximale parviennent à la plaque E.

– Cas 2 : $\alpha = 0$ et $X = V$

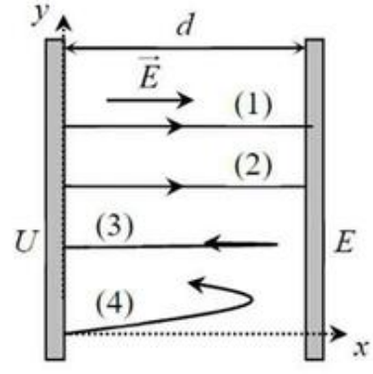
Cette fois on obtient $x_{max} = d$: l'électron atteint tout juste la plaque E.

– Cas 3 : $\alpha = 0$ et $X > V$

Cette fois on obtient $x_{max} < d$: l'électron ne peut plus atteindre la plaque E, il revient en arrière avant d'y arriver.

– Cas 4 : $\alpha \neq 0$ et $X > V$

On trouve maintenant $x_{max} < d\cos^2\alpha < d$, donc un électron ayant une vitesse initiale oblique ne parvient pas non plus à la plaque E.



Ces résultats sont bien compatibles avec ceux de la question **3** : la norme v_0 donnée ici étant la valeur maximale en sortie de la plaque U, on retrouve le fait que V est la valeur limite de la tension X au-delà de laquelle plus aucun électron ne parvient à la plaque E.

Exercice 12.4

1. Théorème de l'énergie cinétique pour un ion entre S et O : $\dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 - 0 = 2eU$ d'où $\boxed{v_1 = \sqrt{\dfrac{4eU}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{4eU}{200m}}}$. De même $\boxed{v_2 = \sqrt{\dfrac{4eU}{m_2}} = \sqrt{\dfrac{4eU}{202m}}}$.

⇨ *Méthode 12.1*

2. PFD : $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ donc $\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = +qBv_y \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = +\omega v_y \quad (1) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \quad (2) \text{ avec } \omega = \dfrac{qB}{m}. \\ \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \quad (3) \end{cases}$

⇨ *Méthode 12.2*

La troisième équation se résout par simple intégration, en tenant compte des conditions initiales : $\boxed{z(t) = 0}$, le mouvement est donc dans le plan (Oxy).

Les deux premières équations sont couplées et ne peuvent donc pas être résolues séparément. Posons $u = v_x + iv_y$: alors (1) + $i \times$ (2) devient $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i\omega u = 0$. En résolvant cette équation avec la condition initiale $\vec{v}(0) = \overline{v_i} = v_i\overline{e_y}$ soit $u(0) = iv_i = K$, on trouve : $u(t) = iv_i \exp(-i\omega t)$. Parties réelle et imaginaire : $v_x(t) = v_i \sin(\omega t)$ et $v_y(t) = v_i \cos(\omega t)$. On intègre à nouveau, avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$: $x(t) = \dfrac{v_i}{\omega}\big(1 - \cos(\omega t)\big)$ et $y(t) = \dfrac{v_i}{\omega}\sin(\omega t)$.

⇨ *Méthode 12.4*

Il s'agit des équations paramétriques d'un cercle de rayon $R_i = \dfrac{v_i}{\omega}$.

On peut obtenir l'équation cartésienne de ce cercle en éliminant t : $\boxed{\left(x - \dfrac{v_i}{\omega}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{v_i}{\omega}\right)^2}$.

On en déduit : $\boxed{R_1 = \dfrac{v_1}{\omega_1} = \dfrac{m_1 v_1}{qB} = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{200mU}{e}}}$ et $\boxed{R_2 = \dfrac{m_2 v_2}{qB} = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{202mU}{e}}}$.

⇨ *Méthode 12.5 ou 12.6*

3. $\boxed{d = 2R_2 - 2R_1 = \dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{mU}{e}}\left(\sqrt{202} - \sqrt{200}\right)}$. AN $\boxed{d = 1{,}4 \text{ cm}}$.

Exercice 12.5

1. PFD pour la particule dans le référentiel $\mathcal{R}$ terrestre galiléen : $m\vec{a} = q\vec{E}$ (on néglige le poids devant la force électrique), donc $\vec{a} = \dfrac{q\vec{E}}{m}$. En intégrant cette équation et en tenant compte des conditions initiales, on trouve : $\vec{v} = \dfrac{q\vec{E}}{m}t = \dfrac{qE}{m}t\overline{e_x}$ (comme $U_{D_1D_2} > 0$, alors $\vec{E} = +E\overline{e_x}$), puis $\boxed{\overrightarrow{OM} = \dfrac{qE}{2m}t^2\overline{e_x}}$. Le mouvement est donc <u>rectiligne uniformément accéléré</u>, selon l'axe (Ox).

Lorsque la particule pénètre dans la région (2) : $x = d$ et donc $t = t_1 = \sqrt{\dfrac{2dm}{qE}}$. La vitesse de la particule est alors $\boxed{v_1 = v(t_1) = \sqrt{\dfrac{2qEd}{m}}}$. Vectoriellement : $\overline{v_1} = \sqrt{\dfrac{2qEd}{m}}\overline{e_x}$.

2. a) PFD dans la zone (2) : $m\vec{a} = \overrightarrow{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Projection sur $\overline{e_z}$: $m\ddot{z} = 0$ donc $\dot{z}(t) = \text{cte}$. Initialement, $\dot{z}(0) = 0$, donc $\dot{z}(t) = 0, \forall t$. On intègre à nouveau : $z(t) = \text{cte}$. Initialement, $z(0) = 0$, donc $z(t) = 0, \forall t$: le mouvement a lieu <u>dans le plan (Oxy)</u>.

Par ailleurs, on peut appliquer à la particule le TÉC : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_L}\right)_{\mathcal{R}}$.

Or $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_L}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F_L} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$ puisque $\overrightarrow{F_L} \perp \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$. Ainsi $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = 0$, soit $\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$.

Puisque $\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v(M)^2_{\mathcal{R}}$, on en déduit $v(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$: le mouvement est uniforme.

⇨ *Méthode 12.7*

b) Utilisons maintenant la base de Frenet (complétée par $\overrightarrow{e_z}$) : $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$ et $\vec{v} = v\vec{\tau}$ donc $\overrightarrow{F_L} = qv\vec{\tau} \wedge B\overrightarrow{e_z} = \pm qvB\vec{n}$ (on ne sait pas de quel côté est courbée la trajectoire). La projection du PFD sur $\vec{n}$ est donc : $m\frac{v^2}{R} = \pm qvB$, qui peut se réécrire $m\frac{v_1^2}{R} = qv_1B$ puisque $v = v_1$ et que le premier membre est positif. On en déduit le rayon de courbure de la trajectoire $R = \frac{mv_1}{qB}$ et on voit qu'il est constant. Or la seule courbe plane ayant un rayon de courbure constant est le cercle : la particule a donc un mouvement circulaire de rayon $\boxed{R_1 = \frac{mv_1}{qB}}$.

⇨ *Méthode 12.6*

c) La norme de la vitesse étant constante au cours de son mouvement dans la région (2), lorsque la particule sort de la région (2) la norme de sa vitesse est toujours égale à v_1. Mais cette fois le vecteur vitesse est $\overrightarrow{v_1'} = -\overrightarrow{v_1} = -\sqrt{\frac{2qEd}{m}}\overrightarrow{e_x}$.

3. Dans la région (3), le mouvement de la particule est à nouveau rectiligne uniformément accéléré. Pour connaître la vitesse v_2 on applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie de la particule dans la région (3) :

$\frac{1}{2}m_1v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = qEd$ d'où $\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}}}$.

⇨ *Méthode 12.1*

4. a) La particule effectue de nouveau un mouvement circulaire (un demi-tour), à vitesse constante ; comme précédemment, le rayon du cercle est $\boxed{R_2 = \frac{mv_2}{qB}}$.

b) La période du mouvement circulaire uniforme est : $T_c = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$. La durée d'un demi-tour est donc indépendante de la vitesse de la particule : elle est égale à $\boxed{\tau = \frac{T_c}{2} = \frac{\pi m}{qB}}$ et reste constante au cours du mouvement : en la mesurant, on peut donc remonter au rapport $\frac{q}{m} = \frac{\pi}{\tau B}$.

c) Pour qu'il y ait accélération à chaque demi-tour, le vecteur $\vec{E}$ doit changer de sens à chaque passage de la particule. Il faut donc que la fréquence de la tension alternative appliquée dans la région (3) soit la fréquence de rotation des particules : $\boxed{f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{qB}{2\pi m}}$ (fréquence cyclotron).

5. a) À chaque passage dans la région (3), l'énergie cinétique de la particule augmente de la quantité $W = qEd$, de sorte qu'après n passages : $\frac{1}{2}mv_n^2 = n \times W$, donc $\boxed{v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}}$.

b) Le passage de la particule dans la région (3) permet d'augmenter son énergie cinétique, et donc sa vitesse : c'est le but d'un accélérateur de particules.

6. a) $v_{max} = R_{max}\omega_c = R_{max}\frac{qB}{m} = 2\pi R_{max} f_c$. On en déduit l'énergie cinétique maximale du proton : $\boxed{E_{c\,max} = \frac{1}{2}mv_{max} = \frac{1}{2}m(2\pi R_{max} f_c)^2}$. AN $\boxed{E_{c\,max} = 3{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 2{,}0\ \text{MeV}}$ (avec $R_{max} = 26\ \text{cm}$). Et $\boxed{B = \frac{2\pi m f_c}{e}}$. AN $\boxed{B = 0{,}79\ \text{T}}$.

b) À chaque accélération, le proton acquiert une énergie cinétique $W = eEd = eU$. Or il subit deux accélérations par tour. L'énergie cinétique maximale sera donc obtenue au bout d'un nombre N de tours tel que : $E_{c\,max} = N \times 2eU$, d'où $\boxed{N = \frac{E_{c\,max}}{2eU}}$. AN $\boxed{N = 5}$.

Exercice 12.6

1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule P est soumise uniquement à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v}(P) \wedge \vec{B}$. Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a}(P) = q\vec{v}(P) \wedge \vec{B}$.

Projections : $\begin{cases} m\ddot{x} = +qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = +\omega\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}}$

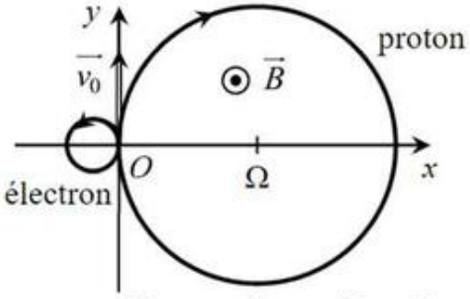
2. La troisième donne par intégration $\dot{z} = \text{cte} = 0$ puis $\boxed{z = \text{cte} = 0}$: le mouvement a lieu dans le plan (Oxy). On pose alors $u = x + iy$: $(1) + i(2) \Leftrightarrow \ddot{u} + i\omega\dot{u} = 0$. Solution : $\dot{u}(t) = A\exp(-i\omega t)$. Conditions initiales : $\dot{u}(0) = 0 + iv_0 = A$, d'où $\dot{u}(t) = iv_0\exp(-i\omega t)$. On intègre encore une fois :

$u(t) = -\frac{v_0}{\omega}\exp(-i\omega t) + C$. $u(0) = 0 = -\frac{v_0}{\omega} + C$ d'où $u(t) = \frac{v_0}{\omega}[1 - \exp(-i\omega t)]$. Finalement : $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}[1 - \cos(\omega t)]}$ et $\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$.

⇨ *Méthode 12.4*

L'équation cartésienne est $\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}$, ce qui correspond à un cercle de centre $\Omega\left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right)$ et de rayon $\boxed{R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B}}$.

⇨ *Méthode 12.5*



Proton : $\dfrac{v_0}{\omega}=\dfrac{mv_0}{qB}>0$ donc la trajectoire est à droite.

Électron : la trajectoire est à gauche et le rayon (proportionnel à m) beaucoup plus petit.

3. PFD : $m\vec{a}(P)=q\vec{v}(P)\wedge\vec{B}-\lambda\vec{v}(P)$.

Projections : $\begin{cases} m\ddot{x}=+qB\dot{y}-\lambda\dot{x} \\ m\ddot{y}=-qB\dot{x}-\lambda\dot{y} \\ m\ddot{z}=-\lambda\dot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x}=+\omega\dot{y}-\alpha\dot{x} & (1') \\ \ddot{y}=-\omega\dot{x}-\alpha\dot{y} & (2') \\ \ddot{z}=-\alpha\dot{z} & (3') \end{cases}}$

Solution de $(3')$: $\dot{z}(t)=D\exp(-\alpha t)$. $\dot{z}(0)=0=D$ donc $\dot{z}(t)=0$. On intègre : $\boxed{z=\text{cte}=0}$ donc le mouvement a toujours lieu dans le plan (Oxy).

4. En posant à nouveau $u=x+iy$: $(1')+i(2')\Leftrightarrow\ddot{u}+(\alpha+i\omega)\dot{u}=0$. Dans la solution précédente il suffit donc de remplacer $i\omega$ par $\alpha+i\omega$:

$$u(t)=\frac{iv_0}{\alpha+i\omega}[1-\exp(-\alpha t-i\omega t)]=\frac{iv_0\alpha+v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}[1-\exp(-\alpha t)\exp(-i\omega t)].$$

On obtient donc finalement :

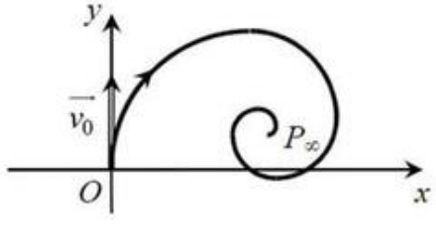
$$\boxed{x(t)=\frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}[1-\exp(-\alpha t)\cos(\omega t)]-\frac{v_0\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\exp(-\alpha t)\sin(\omega t)}$$

et $$\boxed{y(t)=\frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2}\exp(-\alpha t)\sin(\omega t)+\frac{v_0\alpha}{\alpha^2+\omega^2}[1-\exp(-\alpha t)\cos(\omega t)]}.$$

⇨ *Méthode 12.4*

5. Pour $t\to\infty$, le point asymptote est :

$$\boxed{P_\infty\left(\frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2},\frac{v_0\alpha}{\alpha^2+\omega^2},0\right)}.$$



La particule tourne toujours (facteurs sinusoïdaux) mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale, tournant toujours vers la droite pour un proton, et s'enroulant autour du point P_∞.

6. a) Deux des quatre trajectoires tournent vers la droite, comme celle du kaon, et les deux autres tournent vers la gauche : il y a donc deux particules positives et deux négatives.

b) La particule tourne vers la droite, donc elle est chargée négativement. De plus son rayon de courbure est beaucoup plus faible que les autres, donc sa masse également : il s'agit d'un électron.

Exercice 12.7

1. On néglige le poids devant la force de Lorentz. PFD : $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Projections :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\left(\begin{pmatrix}0\\ E\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix}\right), \text{ d'où : } \begin{cases}\ddot{x} = \dfrac{q}{m}(0 + B\dot{y})\\ \ddot{y} = \dfrac{q}{m}(E - B\dot{x})\\ \ddot{z} = 0\end{cases}$$

En posant $\omega = \dfrac{qB}{m}$, on obtient le système d'équation différentielles : $\boxed{\begin{cases}\ddot{x} = \omega\dot{y} \quad (1)\\ \ddot{y} = \dfrac{qE}{m} - \omega\dot{x} \quad (2)\\ \ddot{z} = 0 \quad (3)\end{cases}}$

2. La troisième équation se résout par simple intégration, en tenant compte des conditions initiales : $\boxed{z(t) = 0}$, le mouvement est donc dans le plan (Oxy).

Les deux premières équations sont couplées et ne peuvent donc pas être résolues séparément :

On intègre (1) : $\dot{x} = \omega y$ (comme $v_x(0) = 0$), et on la reporte dans (2) : $\ddot{y} + \omega^2 y = \dfrac{qE}{m}$.

La solution de cette équation est de la forme : $y(t) = A + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$ avec $A = \dfrac{qE}{m\omega^2} = \dfrac{E}{B\omega}$. C et D sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales : $y(0) = A + C = 0$ d'où $C = -A$; $\dot{y}(0) = D\omega = 0$ d'où $D = 0$.

Donc finalement : $\boxed{y(t) = A(1 - \cos\omega t)}$.

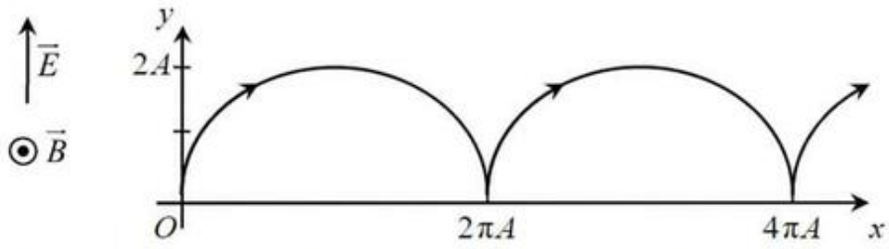
Comme $\dot{x} = \omega y = A\omega(1 - \cos\omega t)$, on obtient en intégrant : $\boxed{x = A(\omega t - \sin\omega t)}$ (en tenant compte de la condition initiale $x(0) = 0$).

⇨ *Méthode 12.3*

3. Pour déterminer l'allure de la trajectoire, on dresse un tableau de valeurs :

ωt	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\dfrac{A}{2}(\pi - 2)$	πA	$\dfrac{A}{2}(3\pi + 2)$	$2\pi A$
y	0	A	$2A$	A	0

On limite l'étude à l'intervalle $[0,2\pi]$ compte tenu de la périodicité des fonctions cosinus et sinus. La trajectoire obtenue est appelée *cycloïde*.



Cette trajectoire est la même que celle d'un point d'un cercle roulant sur une droite à vitesse constante.

4. a) Norme du vecteur vitesse : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, avec $v_x = A\omega(1-\cos\omega t) = \dfrac{E}{B}(1-\cos\omega t)$ et $v_y = \dfrac{E}{B}\sin\omega t$, donc : $\boxed{v(t) = \dfrac{E}{B}\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = \left|2\dfrac{E}{B}\sin\dfrac{\omega t}{2}\right|}$ $\left(\text{avec } \sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right)$.

b) D'après cette expression, $\boxed{v\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right) = 2\dfrac{E}{B}}$.

Théorème de l'énergie cinétique entre les dates $t = 0$, où la particule est au point O avec une vitesse nulle, et $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ où la particule est au point M avec la vitesse v :

$\dfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \displaystyle\int_O^M q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_O^M q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_O^M qE\,\mathrm{d}y$ donc finalement, comme $y\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right) = 2A$: $\dfrac{1}{2}mv^2 = 2AqE = 2qE\dfrac{E}{B\omega} = 2m\dfrac{E^2}{B^2}$ d'où $v = 2\dfrac{E}{B}$.

On retrouve bien le même résultat.

c) $\langle\dot{x}\rangle = \dfrac{E}{B}$, $\langle\dot{y}\rangle = 0$ et $\langle\dot{z}\rangle = 0$ donc $\boxed{\overline{v_\mathrm{d}} = \dfrac{E}{B}\overline{e_x}}$.

On constate en effet, d'après le schéma de la trajectoire, que la particule a tendance à dériver vers la droite selon l'axe (Ox).

Corrigé

Chapitre 13

État et évolution d'un système chimique

UN SCIENTIFIQUE



Le scientifique norvégien **Cato Guldberg** (1836-1902) suit une formation universitaire en mathématiques et physique à Christiania (actuelle Oslo), où il enseigne par la suite. Son beau-frère, le chimiste Peter Waage, le motive pour travailler avec lui sur les équilibres chimiques. Les deux hommes publient leurs recherches en 1864 en norvégien, puis en 1867 en français, sous le titre *Études sur les affinités chimiques*, ouvrage dans lequel est énoncée la loi d'action des masses.

Un peu d'histoire

Les travaux de recherche des deux mathématiciens et chimistes norvégiens Cato Guldberg et Peter Waage ont permis de concilier les approches cinétique et thermodynamique de l'équilibre chimique, en proposant la loi d'action des masses. Dans sa formulation cinétique, cette loi établit que la vitesse d'une réaction élémentaire est proportionnelle aux concentrations des espèces réactives. Dans sa formulation thermodynamique, elle donne l'expression de la constante d'équilibre associée à une équation de réaction.

Ces deux aspects, complémentaires, mettent en lumière la notion d'équilibre dynamique. Cette loi n'attira que peu d'attention de la part de la communauté scientifique, jusqu'à ce que Jacobus van 't Hoff parvienne à une relation similaire et démontre expérimentalement sa validité, et que Gibbs en fournisse une démonstration fondée sur les principes de la thermodynamique.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les grandeurs physiques permettant de décrire l'état d'un système physico-chimique
- L'expression de l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange
- L'expression du quotient réactionnel associé à une équation donnée
- Le critère d'évolution spontanée d'un système en transformation

Ce qu'il faut savoir faire

- Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système
- Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes
- Reconnaître le caractère extensif ou intensif d'une variable
- Écrire l'équation de la réaction qui modélise une transformation chimique
- Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique
- Identifier un état d'équilibre chimique
- Déterminer la composition d'un système dans l'état final d'une transformation chimique
- Identifier les paramètres d'influence d'un état d'équilibre et déterminer leur sens d'évolution pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable

■■ Résumé de cours

■ Description d'un système physico-chimique

❑ Système physico-chimique

Une **espèce** (ou un **constituant**) physico-chimique est une substance caractérisée par sa formule chimique et son état physico-chimique (solide, liquide, gaz, ou soluté). Un **système physico-chimique** peut être constitué d'une seule espèce chimique (**corps pur**) ou de plusieurs espèces chimiques (**mélange**). Un **état** de ce système est caractérisé par la donnée de certaines grandeurs physiques, pouvant être extensives ou intensives.

❑ Grandeurs intensives et extensives

Une grandeur **extensive** est relative à un système entier, elle constitue un stock contenu dans le système. Elle est additive lors de la réunion de deux systèmes. Exemples : quantité de matière, masse, volume, énergie…

Une grandeur **intensive** est définie en chaque point d'un système, elle décrit une propriété locale. Un système dans lequel les grandeurs intensives ont même valeur en tout point est qualifié d'**homogène**. Le rapport de deux grandeurs extensives est une grandeur intensive. Exemples : température, pression, masse volumique, concentration en quantité de matière…

⇨ Méthode 13.1. Reconnaître le caractère extensif ou intensif d'une variable

❑ Composition d'un système

Elle peut être décrite par les quantités de matière n_{A_i} (en mol) des constituants A_i du système.

Espèce dissoute

La dissolution d'un soluté dans le solvant eau conduit à une solution aqueuse. Les constituants de cette solution (sauf l'eau) sont des **espèces dissoutes**.

La **concentration en quantité de matière** d'une espèce dissoute A_i (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) est $\boxed{[A_i] = \dfrac{n_{A_i}}{V_{sol}}}$ où V_{sol} est le volume de la solution (en L). Sa **concentration en masse** est $\boxed{c_{m,A_i} = \dfrac{m_{A_i}}{V_{sol}}}$ (en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) où m_{A_i} est la masse du constituant (en g).

Systèmes gazeux

En chimie, on considère généralement que les gaz se comportent comme des **gaz parfaits**. Dans ce modèle, on admet que les molécules de gaz sont ponctuelles et n'interagissent pas entre elles. Les grandeurs pression, volume, température et quantité de matière totale d'un système gazeux sont reliées par l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{PV = n_{tot,gaz} RT}$.

P s'exprime en pascals (Pa), V en mètres cubes (m^3), $n_{tot,gaz}$ en moles (mol), T en kelvins (K) ; $R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits.

La **pression partielle** P_i d'un constituant gazeux A_i du système est définie comme la pression qu'aurait ce gaz s'il occupait seul le volume total V du système à la température T considérée.
Dans le modèle du gaz parfait : $\boxed{P_i V = n_{A_i} RT}$.
On définit la **fraction molaire** x_i d'un constituant gazeux A_i dans un mélange gazeux par la relation : $\boxed{x_i = \dfrac{n_{A_i}}{n_{tot,gaz}}}$. On obtient alors : $P_i = x_i \times P$.

■ Évolution d'un système chimique

❑ Transformation chimique

Un système physico-chimique pris dans un état initial est susceptible d'évoluer vers un état final dépendant des conditions expérimentales imposées, selon une **transformation chimique**.
La **réaction chimique** est un modèle qui rend compte de l'évolution macroscopique du système lors de la transformation chimique (passage des **réactifs** aux **produits**), et qui donne lieu à une écriture symbolique appelée **équation de réaction**, que l'on peut mettre sous la forme :

$\sum_i \nu_i A_i = 0$ où ν_i est le **nombre stœchiométrique algébrique** du constituant A_i, positif pour un produit, négatif pour un réactif.

On peut signaler en indice l'état physico-chimique des espèces intervenant : (g) pour un constituant gazeux, (s) pour un solide, (l) pour un liquide et (aq) pour un soluté en solution aqueuse (dans le solvant eau).

❑ Quotient de réaction

Pour un système chimique siège d'une réaction d'équation $\sum_i \nu_i A_i = 0$, le **quotient de réaction** Q_r est une grandeur sans dimension caractérisant l'état du système :

$$\boxed{Q_r = \prod_i a(A_i)^{\nu_i}}$$

où les $a(A_i)$ sont les **activités** des diverses espèces chimiques à l'instant considéré.

Expressions des activités

- Pour un constituant A_i sous forme de solide ou de liquide pur : $a(A_i) = 1$.
- Pour le solvant (l'eau pour les solutions aqueuses) : $a(A_i) = 1$.
- Pour un soluté en solution très diluée : $a(A_i) = \dfrac{[A_i]}{c^\circ}$ où $[A_i]$ est la concentration molaire de A_i et $c^\circ = 1\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. C'est donc la valeur numérique de $[A_i]$ en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
- Pour un gaz parfait dans un mélange gazeux : $a(A_i) = \dfrac{P_i}{P^\circ}$ où P_i est la pression partielle de A_i et $P^\circ = 1$ bar. C'est donc la valeur numérique de P_i en bar.

Par abus de notation, on omet parfois d'écrire c° ou P° dans les calculs.

❑ Évolution spontanée d'un système

Lors de l'évolution spontanée du système, le quotient de réaction Q_r tend vers la **constante d'équilibre** $K°(T)$, caractéristique de l'équation de réaction, et qui ne dépend que de la température. Ceci constitue la **loi de Guldberg et Waage** (ou **loi d'action des masses**), dont l'expression mathématique est donc : $\boxed{K°(T) = \prod_i a(\mathrm{A}_i)_{\text{éq}}^{\nu_i}}$.

⇨ **Méthode 13.2. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système**

❑ Avancement d'une transformation chimique

L'**avancement** (noté ξ et exprimé en mol) permet de décrire l'état du système au cours de la transformation chimique. Il est nul dans l'état initial et évolue jusqu'à une valeur finale ξ_f (lorsque le système n'évolue plus macroscopiquement). Un tableau d'avancement permet de faire un bilan de matière de la transformation chimique.

La quantité de matière d'un constituant quelconque A_i, de nombre stœchiométrique algébrique ν_i, vaut à un instant quelconque : $n_{\mathrm{A}_i}(t) = n_{\mathrm{A}_i}(t=0) + \nu_i \cdot \xi(t)$.

⇨ **Méthode 13.3. Établir le tableau d'avancement d'une transformation**

❑ État final d'un système chimique

L'état final du système est atteint lorsque le système n'évolue plus à l'échelle macroscopique.

La transformation est **totale** si elle s'achève lorsque l'on a consommation totale d'un des réactifs (appelé **réactif limitant**). L'avancement ξ augmente jusqu'à atteindre la valeur maximale ξ_{max} permise par les quantités introduites.

Une transformation est **limitée** (non totale) lorsque l'avancement final ξ_f n'atteint pas la valeur maximale ξ_{max}. L'évolution macroscopique du système s'arrête alors qu'aucun des réactifs n'a totalement disparu. L'état final est un état d'**équilibre chimique**, où réactifs et produits coexistent : $\xi_f = \xi_{éq}$.

Le caractère total ou limité d'une transformation chimique dépend de la composition initiale du système, de la stœchiométrie de la réaction et de la valeur de la constante d'équilibre associée à l'équation de réaction.

⇨ **Méthode 13.4. Déterminer la composition d'un système dans l'état final**

■■ Méthodes

■ Comment décrire l'évolution d'un système chimique ?

❑ Méthode 13.1. Reconnaître le caractère extensif ou intensif d'une variable

Soit Y une variable descriptive d'un système physico-chimique.
Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-systèmes identiques, tels que $Y(\Sigma_1) = Y(\Sigma_2)$.
– Si, lorsqu'on réunit Σ_1 et Σ_2, on a $Y(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = Y(\Sigma_1) + Y(\Sigma_2)$, Y est une grandeur extensive.
– Si, lorsqu'on réunit Σ_1 et Σ_2, on a $Y(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = Y(\Sigma_1) = Y(\Sigma_2)$, Y est une grandeur intensive.
Par ailleurs, une variable définie comme le rapport de deux grandeurs extensives est intensive.

⇨ Exercice 13.1

Considérons deux sous-systèmes identiques Σ_1 et Σ_2 contenant chacun un volume $V = 1$ L d'eau liquide. Lorsqu'on rassemble ces deux sous-systèmes, le volume vaut $V(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = V + V = 2V = 2$ L. Le volume est donc une grandeur extensive.
Considérons deux salles identiques, chacune à la pression $P = 1{,}013$ bar. La réunion de ces deux salles sera elle aussi caractérisée par une pression $P = 1{,}013$ bar. La pression est donc une grandeur intensive.
La concentration en quantité de matière d'une espèce dissoute est définie par : $[\mathrm{A}_i] = \dfrac{n_{\mathrm{A}_i}}{V_{\mathrm{sol}}}$. La quantité de matière et le volume étant deux grandeurs extensives, la concentration en quantité de matière est une grandeur intensive.

❑ Méthode 13.2. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système

Calculer le quotient de réaction à l'instant considéré.
– Si $Q_r < K°(T)$, le système évolue dans le sens direct de l'équation de réaction (de la gauche vers la droite) ;
– Si $Q_r > K°(T)$, le système évolue dans le sens indirect de l'équation de réaction (de la droite vers la gauche) ;
– Si $Q_r = K°(T)$, le système est à l'équilibre.

⇨ Exercices 13.6 à 13.11

On donne (à 25 °C) la valeur de la constante d'équilibre associée à l'équation de réaction suivante : $CH_3COOH(aq) + NH_3(aq) = CH_3COO^-(aq) + NH_4^+(aq)$ $K°(25\ °C) = 2{,}5 \cdot 10^4$.

On souhaite prévoir le sens d'évolution du système lorsqu'on mélange :
- un volume $V_1 = 15$ mL d'une solution S_1 d'acide éthanoïque CH_3COOH
- un volume $V_2 = 5{,}0$ mL d'une solution S_2 de chlorure d'ammonium ($NH_4^+ + Cl^-$)
- un volume $V_3 = 10$ mL d'une solution S_3 d'éthanoate de sodium ($Na^+ + CH_3COO^-$)
- un volume $V_4 = 10$ mL d'une solution S_4 d'ammoniac NH_3

Les solutions S_1, S_2, S_3 et S_4 ont la même concentration molaire $c = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Calculons le quotient de réaction dans l'état initial.

$$Q_{r,i} = \frac{a(CH_3COO^-)_i \cdot a(NH_4^+)_i}{a(CH_3COOH)_i \cdot a(NH_3)_i} = \frac{[CH_3COO^-]_i \cdot [NH_4^+]_i}{[CH_3COOH]_i \cdot [NH_3]_i}$$

En tenant compte de la dilution lors du mélange des quatre solutions :

$$[CH_3COO^-]_i = \frac{cV_3}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}\ ;\ [NH_4^+]_i = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}\ ;$$

$[CH_3COOH]_i = 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[NH_3]_i = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On calcule alors $Q_{r,i} = 0{,}33 < K°(25\ °C)$. Le système évolue donc dans le sens direct de l'équation de réaction.

❑ Méthode 13.3. Établir le tableau d'avancement d'une transformation

Calculer les quantités de matière des espèces présentes dans l'état initial.
Dans un tableau faisant apparaître l'équation de la réaction :
- indiquer sur une première ligne la composition du système dans l'état initial ;
- exprimer les quantités de matière en fonction de l'avancement à un instant quelconque de la transformation, avec $n_{A_i}(t) = n_{A_i}(t=0) + \nu_i \cdot \xi(t)$;
- exprimer les quantités de matière en fonction de l'avancement final dans l'état final de la transformation.

Le tableau d'avancement peut être établi sous forme littérale ou numérique.

⇨ Exercices 13.3 à 13.8, 13.10 à 13.11

Établissons le tableau d'avancement de la transformation sur l'exemple précédent. Comme l'évolution du système se fait dans le sens direct de l'équation, ce sens est conservé dans le tableau d'avancement.

Avec les notations précédentes, les quantités initiales sont : $n_{CH_3COOH,i} = n_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ mol ; $n_{NH_3,i} = n_4 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol ; $n_{CH_3COO^-,i} = n_3 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol et $n_{NH_4^+,i} = n_2 = 5{,}0 \cdot 10^{-5}$ mol.

Le tableau d'avancement s'écrit alors :

mol	$CH_3COOH(aq)$	$+ NH_3(aq)$	$=$	$CH_3COO^-(aq)$	$+ NH_4^+(aq)$
$t = 0$	n_1	n_4		n_3	n_2
t	$n_1 - \xi$	$n_4 - \xi$		$n_3 + \xi$	$n_2 + \xi$
t_f	$n_1 - \xi_f$	$n_4 - \xi_f$		$n_3 + \xi_f$	$n_2 + \xi_f$

Remarques

– Pour les réactions en solution aqueuse, lorsque le volume ne varie pas, il est possible d'établir un tableau d'avancement en concentrations. Les concentrations aux instants $t = 0$, t et t_f devront alors apparaître, et la variable « avancement » sera l'avancement volumique, noté x, en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

– On omet parfois une des deux dernières lignes du tableau d'avancement par souci de rapidité. L'instant quelconque envisagé peut alors ou non désigner l'état final de la transformation.

❑ Méthode 13.4. Déterminer la composition d'un système dans l'état final

– Si la transformation est totale (en général on en fait l'hypothèse si $K°(T) > 10^4$), déterminer le réactif limitant de la transformation. Pour cela, calculer la valeur de ξ qui annule la quantité de matière finale de chacun des réactifs : l'avancement maximal ξ_{max} est la plus petite de ces valeurs. En déduire alors les quantités de matière finales de tous les constituants du système. On peut finalement vérifier la cohérence des résultats avec l'hypothèse d'une transformation totale.

– Si la transformation n'est pas totale, exprimer la constante d'équilibre associée à l'équation de réaction en fonction des activités des réactifs et produits à l'équilibre puis en fonction de ξ_f. Résoudre l'équation correspondante pour déterminer la valeur de ξ_f. En déduire alors les quantités de matière finales de tous les constituants du système.

⇨ Exercices 13.3 à 13.9

Reprenons l'exemple précédent.

Pour l'équation : $\text{CH}_3\text{COOH(aq)} + \text{NH}_3\text{(aq)} = \text{CH}_3\text{COO}^-\text{(aq)} + \text{NH}_4^+\text{(aq)}$

la constante d'équilibre est $K°(25\ °\text{C}) = 2{,}5 \cdot 10^4 > 10^4$.

Considérons la transformation comme totale.

Si CH_3COOH est le réactif limitant, $\xi_{max,1} = n_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ mol.

Si NH_3 est le réactif limitant, $\xi_{max,2} = n_4 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol. $\xi_{max,2} < \xi_{max,1}$ donc NH_3 est le réactif limitant et $\xi_{max} = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol.

On en déduit la composition du système dans l'état final :

mol	$\text{CH}_3\text{COOH(aq)}$	$+ \text{NH}_3\text{(aq)}$	$=$ $\text{CH}_3\text{COO}^-\text{(aq)}$	$+ \text{NH}_4^+\text{(aq)}$
$t = 0$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	$5{,}0 \cdot 10^{-5}$
t_f	$5{,}0 \cdot 10^{-5}$	/	$2{,}0 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$

Les concentrations valent dans l'état final : $[\text{CH}_3\text{COOH}]_{éq} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{éq} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $[\text{NH}_4^+]_{éq} = 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

La concentration résiduelle en ammoniac peut être calculée à partir de l'expression de la constante d'équilibre :

$$K^\circ = \frac{[CH_3COO^-]_{éq} \cdot [NH_4^+]_{éq}}{[CH_3COOH]_{éq} \cdot [NH_3]_{éq}} \Leftrightarrow [NH_3]_{éq} = \frac{[CH_3COO^-]_{éq} \cdot [NH_4^+]_{éq}}{[CH_3COOH]_{éq} \cdot K^\circ}.$$

On trouve : $[NH_3]_{éq} = 6{,}0 \cdot 10^{-7}\ mol \cdot L^{-1}$. Cette concentration est négligeable devant la concentration initiale en ammoniac, ce qui est bien cohérent avec le fait de considérer la transformation comme totale.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La pression partielle d'un gaz est une grandeur intensive.	☐	☐
2.	La pression partielle d'un gaz est proportionnelle à la pression totale.	☐	☐
3.	Un système évolue dans le sens direct si $K^\circ > 1$.	☐	☐
4.	La valeur de K° dépend des conditions initiales.	☐	☐
5.	À l'équilibre, le quotient de réaction est égal à K°.	☐	☐
6.	L'activité d'un constituant est une grandeur sans dimension.	☐	☐
7.	L'activité du solvant est égale à 1.	☐	☐
8.	L'avancement d'une transformation est une grandeur sans dimension.	☐	☐
9.	L'avancement d'une transformation est nul dans l'état initial.	☐	☐
10.	Le réactif limitant d'une transformation est celui dont on a introduit la plus petite quantité de matière initialement.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Système physico-chimique et transformations chimiques

❑ Exercice 13.1. Grandeurs intensives et extensives



L'eau oxygénée est une solution aqueuse de peroxyde d'hydrogène H_2O_2. Elle est notamment utilisée pour ses propriétés antiseptiques ou décolorantes, grâce au fort pouvoir oxydant de H_2O_2. Le peroxyde d'hydrogène se décompose en eau liquide et en dioxygène gazeux selon une réaction lente. Le *titre*, exprimé en « volumes », d'une solution d'eau oxygénée est défini comme le volume de dioxygène, en litres, libéré par la décomposition d'un litre d'eau oxygénée à 0 °C et sous une pression de 1,013 bar. Dans ces conditions, le volume molaire des gaz est égal à $22{,}4\ \text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$.

On peut vérifier le titre d'une solution commerciale d'eau oxygénée par un titrage de la solution par une solution acidifiée de permanganate de potassium de concentration connue. La détermination du volume à l'équivalence permet de calculer la concentration de la solution titrée, puis le titre de cette solution grâce à un bilan de matière, en reliant les différentes quantités de matière à l'avancement de la réaction de décomposition.

1. Écrire l'équation de la réaction modélisant la décomposition du peroxyde d'hydrogène.

2. Dans le texte ci-dessus, identifier les variables physico-chimiques citées, leur attribuer un symbole, et indiquer si elles sont intensives ou extensives.

3. Calculer la concentration en peroxyde d'hydrogène d'une eau oxygénée à 10 volumes.

Donnée : constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 13.2. Piles à combustible

Une pile à combustible (PAC) est un générateur dans lequel la production d'électricité se fait grâce à la réduction d'un comburant et à l'oxydation d'un combustible, tous deux étant fournis au fur et à mesure de leur consommation : la pile peut alors fonctionner indéfiniment pourvu que l'approvisionnement soit assuré. Le comburant est du dioxygène gazeux. Dans les questions suivantes, en l'absence de précisions supplémentaires, l'eau est obtenue à l'état liquide.



1. Le combustible est le plus souvent du dihydrogène. Ce combustible, gazeux à température ambiante et inflammable, pose des problèmes de stockage, mais l'intérêt de cette PAC est la formation d'eau, non polluante.

Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique mise en jeu dans la PAC à dihydrogène.

2. Un autre combustible possible est le méthanol. Ce combustible est certes toxique, mais liquide à température ambiante : on se dispense ainsi du problème de stockage du dihydrogène. Une telle pile à combustible est appelée DMFC *(direct methanol fuel cell)*. Le méthanol est principalement produit à partir de gaz naturel.
Le fonctionnement de la PAC met en jeu la transformation du méthanol en dioxyde de carbone gazeux, tandis que le dioxygène gazeux est transformé en eau.



Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique mise en jeu dans la pile DMFC.

3. Le méthane CH_4 gazeux peut lui aussi être utilisé comme combustible primaire dans les PAC. L'obtention d'un bon rendement nécessite au préalable la transformation du méthane en dihydrogène, dans un reformeur, réacteur qui vient se mettre en amont de la PAC.

a) Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique entre le méthane et la vapeur d'eau, conduisant à la formation de dihydrogène et de monoxyde de carbone gazeux.

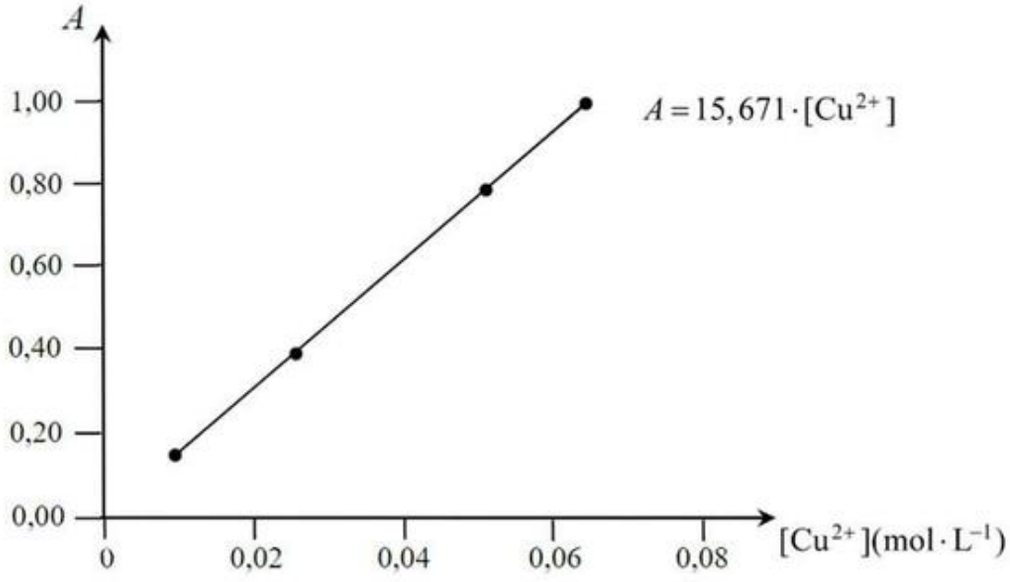
b) Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique mise en jeu dans la PAC au méthane, le comburant étant toujours le dioxygène.

❑ Exercice 13.3. Composition d'un laiton

Le laiton est un alliage métallique contenant du zinc et du cuivre. On considère un laiton de formule Zn_xCu_y, avec $x + y = 1$, dont on cherche à déterminer la composition. Pour cela, le laiton est oxydé par une solution d'acide nitrique en ions Cu^{2+} et Zn^{2+} selon une transformation chimique totale.
La réaction a pour équation :

$$3\,Zn_xCu_{y(s)} + 2\,NO^-_{3(aq)} + 8\,H_3O^+_{(aq)} = 3x\,Zn^{2+}_{(aq)} + 3y\,Cu^{2+}_{(aq)} + 2\,NO_{(g)} + 12\,H_2O_{(l)}$$

Le dosage des ions cuivre(II) dans la solution obtenue permettra de déterminer la composition du laiton.
On verse, à 25 °C, V_0 = 5,00 mL de solution d'acide nitrique à 65 % en masse dans un bécher contenant m = 1,5484 g de laiton. Après réaction on introduit lentement la solution dans une fiole jaugée de volume V = 0,500 L contenant de l'eau, puis on ajuste au trait de jauge avec de l'eau. L'acide nitrique est en excès par rapport au laiton. On observe le dégagement gazeux du monoxyde d'azote NO qui s'oxyde en NO_2 au contact de l'air.
Les ions cuivre(II) présents dans la solution obtenue sont dosés par spectrophotométrie visible en mesurant l'absorbance A de la solution. On a préalablement tracé la droite d'étalonnage $A = f([Cu^{2+}])$.



1. L'absorbance de la solution obtenue lors de l'oxydation du laiton est $A = 0,486$. En déduire le pourcentage massique de cuivre dans le laiton.

2. Calculer la valeur numérique de x dans la formule du laiton Zn_xCu_y.

3. Vérifier que l'acide nitrique était bien en excès par rapport au laiton.

Données

Masses molaires : $M_{Zn} = 65,390\ g \cdot mol^{-1}$; $M_{Cu} = 63,546\ g \cdot mol^{-1}$; $M_{HNO_3} = 63,013\ g \cdot mol^{-1}$.

Masse volumique à 25 °C de la solution d'acide nitrique à 65 % en masse : $\rho = 1,40\ g \cdot mL^{-1}$.

L'acide nitrique est un acide fort dans l'eau, totalement dissocié en ions $H_3O^+_{(aq)}$ et $NO^-_{3(aq)}$.

D'après CCINP

■ État final d'un système chimique en transformation

❑ Exercice 13.4. Transformation totale ?

On cherche à évaluer l'influence de plusieurs facteurs sur le taux d'avancement final de plusieurs transformations acido-basiques.

1. Considérons la transformation chimique décrite par l'équation :

$$HSO^-_{4(aq)} + H_2O_{(l)} = SO^{2-}_{4(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \qquad K°(25\ °C) = 10^{-2}$$

a) Initialement, les ions hydrogénosulfate HSO^-_4 sont introduits à la concentration $c = 1,00 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot L^{-1}$. Calculer le taux d'avancement final de la transformation, défini comme le rapport de l'avancement final sur l'avancement maximal de la transformation. Commenter.

b) Même question si $c = 1,00 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot L^{-1}$. Conclure.

2. Considérons à présent la transformation chimique décrite par l'équation :

$$HCOOH_{(aq)} + HSO^-_{3(aq)} = HCOO^-_{(aq)} + H_2SO_{3(aq)} \qquad K°(25\ °C) = 10^{2}$$

a) Initialement, les deux réactifs sont introduits à la même concentration $c = 1{,}00 \cdot 10^{-1}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Calculer le taux d'avancement final de la transformation.

b) Même question si la concentration initiale de l'acide méthanoïque est $c = 1{,}00 \cdot 10^{-1}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et que la concentration initiale des ions hydrogénosulfite est égale à $10c$. Conclure.

3. Que montrent les résultats précédents ?

❑ Exercice 13.5. Dissolution de l'hydroxyapatite

L'hydroxyapatite phosphocalcique, appelée plus simplement l'hydroxyapatite, de formule $Ca_5(PO_4)_3OH$, est le constituant chimique principal de la partie minérale de l'os. Sa synthèse permet la production d'os artificiel.

On effectue la synthèse de l'hydroxyapatite en dissolvant dans l'eau, en milieu basique, du nitrate de calcium $Ca(NO_3)_2$ et de l'hydrogénophosphate d'ammonium $(NH_4)_2HPO_4$ solides. La transformation chimique est totale. Elle peut être modélisée par la réaction d'équation :

$$5\,Ca^{2+}_{(aq)} + 3\,HPO^{2-}_{4(aq)} + 4\,NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} = Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)} + 4\,NH^{+}_{4(aq)}$$

1. Quelles masses de nitrate de calcium et d'hydrogénophosphate d'ammonium faut-il utiliser pour préparer une quantité d'hydroxyapatite égale à 0,010 mol ?

2. Écrire l'équation de la réaction de dissolution de l'hydroxyapatite en ions $Ca^{2+}_{(aq)}$, $PO^{3-}_{4(aq)}$ et $HO^{-}_{(aq)}$.

3. En réalité, l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique observée lorsqu'on introduit l'hydroxyapatite dans l'eau s'écrit :

$$Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)} + 3\,H_2O_{(l)} = 5\,Ca^{2+}_{(aq)} + 3\,HPO^{2-}_{4(aq)} + 4\,HO^{-}_{(aq)}$$

La constante d'équilibre associée à cette équation est $K^\circ = 10^{-62,7}$ à 25 °C.

Calculer la solubilité s de l'hydroxyapatite dans l'eau à 25 °C, définie comme la concentration des ions calcium dans la solution à l'équilibre, à partir d'un excès de solide introduit.

Données : $M_{Ca(NO_3)_2} = 164\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{(NH_4)_2HPO_4} = 132\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

D'après Mines-Ponts

❑ Exercice 13.6. Transformation d'oxydo-réduction

Dans un bécher, on mélange un volume V_1 = 20 mL d'une solution de nitrate d'argent $(Ag^+ + NO_3^-)$ de concentration $c_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol · L^{-1} et un volume V_2 = 20 mL d'une solution de nitrate de cuivre $(Cu^{2+} + 2\,NO_3^-)$ de concentration $c_2 = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1}. On plonge ensuite dans le bécher un fil de cuivre de masse m_{Cu} = 1,0 g et un fil d'argent de masse m_{Ag} = 0,50 g bien décapés.

1. Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique entre les ions Ag^+ et le cuivre solide, avec les nombres stœchiométriques entiers les plus petits possibles. On donne la constante d'équilibre associée à cette équation à 25 °C : $K^\circ = 2{,}2 \cdot 10^{15}$.

2. Calculer la valeur du quotient de réaction associé à l'équation précédente dans l'état initial du système. En déduire le sens de l'évolution spontanée du système.

3. Déterminer la composition du système dans l'état final de la transformation.

Données : $M_{Cu} = 63{,}5\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_{Ag} = 108\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 13.7. Équilibre de dimérisation

On étudie, en phase gazeuse, l'équilibre de dimérisation du perchlorure de fer $FeCl_3$, de constante $K_1^\circ(T)$ à température donnée.

$$(1) \quad 2\,FeCl_{3(g)} = Fe_2Cl_{6(g)}$$

La réaction se déroule sous une pression totale constante $P_{tot} = 2$ bar.

À la température $T_1 = 650$ K, la constante d'équilibre vaut $K_1^\circ(T_1) = 175{,}5$ et à la température $T_2 = 750$ K, elle vaut $K_1^\circ(T_2) = 20{,}8$. Initialement, le système, maintenu à la température T_2, contient n_1 moles de $FeCl_3$ et n_1 moles de Fe_2Cl_6. Soit n_{tot} la quantité de matière totale d'espèces gazeuses dans le système.

1. Donner l'expression littérale de la constante d'équilibre en fonction des pressions partielles des constituants à l'équilibre et de P°.

2. Exprimer le quotient de réaction Q_r en fonction de la quantité de matière de chacun des constituants, de la pression totale P_{tot}, de P° et de n_{tot}. Déterminer la valeur $Q_{r,i}$ à l'instant initial.

3. Initialement, le système est-il à l'équilibre thermodynamique ? Justifier la réponse. Si ce n'est pas le cas, donner, en le justifiant, le sens de l'évolution spontanée du système.

D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 13.8. Transport du dioxygène dans le sang

Dans l'organisme, l'hémoglobine du sang permet le transport du dioxygène des poumons vers les organes. On étudie par la suite un modèle simplifié des transformations chimiques liées à ce transport. Le sang est assimilé à une solution aqueuse. Une sous-unité constitutive de l'hémoglobine sera notée $Hb_{(aq)}$ et le dioxygène dissous dans le sang $O_{2(aq)}$.

Au niveau des poumons, une sous-unité d'hémoglobine fixe une molécule de dioxygène pour donner une sous-unité d'oxyhémoglobine. L'équation de la réaction associée à la transformation chimique est : $Hb_{(aq)} + O_{2(aq)} = HbO_{2(aq)}$ **(1)** avec $K_1 = 3{,}0 \cdot 10^5$ à la température d'étude.

1. À l'état initial, on suppose qu'un volume $V = 100$ mL de sang contient une masse $m = 15$ g de sous-unités d'hémoglobine et une concentration initiale en dioxygène dissous égale à $[O_2]_i = 9{,}2 \cdot 10^{-3}$ mol · L^{-1}.

Calculer la concentration finale en sous-unités d'oxyhémoglobine dans le sang.

2. Ce volume V de sang arrive au niveau des tissus des organes. À ce stade une partie du dioxygène dissous est absorbée par les tissus, faisant ainsi chuter la concentration en dioxygène dans le sang jusqu'à une valeur $[O_2] = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ mol · L^{-1}. Les autres concentrations sont supposées inchangées. Dans quel sens évolue le système ?

3. Au cours d'un effort, du dioxyde de carbone est formé au niveau des muscles et se dissout dans le sang.

a) Écrire l'équation, notée **(2)**, de la réaction associée à la transformation entre le dioxyde de carbone dissous et l'eau.

b) Pourquoi la dissolution du dioxyde de carbone provoque-t-elle une diminution du pH sanguin en l'absence d'autres réactions ?

c) Chez l'être humain, le pH du sang est compris dans des limites très étroites : 7,36 à 7,42. D'autre part, l'oxyhémoglobine peut réagir avec les ions oxonium selon l'équation :

$$HbO_{2(aq)} + H_3O^+_{(aq)} = O_{2(aq)} + HbH^+_{(aq)} + H_2O \quad \textbf{(3)}$$

Montrer que les ions H_3O^+ produits par la réaction d'équation **(2)** permettent la libération du dioxygène nécessaire à l'effort musculaire tout en limitant la variation de pH liée à la dissolution de CO_2.

4. La combustion d'une substance contenant du carbone produit du monoxyde de carbone dans certaines conditions, par exemple dans les poêles ou fourneaux mal aérés, ou dans la fumée de cigarettes. L'équation associée à la réaction entre le monoxyde de carbone et une sous-unité d'hémoglobine s'écrit : $Hb_{(aq)} + CO_{(aq)} = HbCO_{(aq)}$ **(4)** avec $K_4 = 7,5 \cdot 10^7$.

Le tableau suivant donne les effets sur l'organisme associés aux valeurs du rapport des concentrations à l'équilibre : $\dfrac{[HbCO]_{éq}}{[Hb]_{éq}}$.

$\dfrac{[HbCO]_{éq}}{[Hb]_{éq}}$	de $1,1 \cdot 10^4$ à $2,6 \cdot 10^4$	de $2,6 \cdot 10^4$ à $2,6 \cdot 10^5$	supérieur à $2,6 \cdot 10^5$
Effets	maux de tête	intoxication grave	mort rapide

L'analyse du sang d'une personne ayant respiré de l'air pollué par du monoxyde de carbone a révélé une concentration en monoxyde de carbone dissous dans le sang égale à $2,0 \cdot 10^{-4}$ mol · L^{-1}. Quels sont les effets ressentis par la personne ?

5. Au sein de l'organisme il y a donc compétition entre le dioxygène et le monoxyde de carbone pour se fixer sur l'hémoglobine (équations **(1)** et **(4)**). On atteint un état d'équilibre correspondant à l'équation :

$$HbO_{2(aq)} + CO_{(aq)} = HbCO_{(aq)} + O_{2(aq)} \quad \textbf{(5)}$$

Donner l'expression de la constante d'équilibre K_5 associée à l'équation **(5)** en fonction de K_1 et K_4 et calculer sa valeur.

6. Une personne empoisonnée au monoxyde de carbone est placée dans un caisson hyperbare dans lequel on impose une concentration élevée en dioxygène permettant ainsi d'augmenter la concentration de dioxygène dissous dans le sang. Expliquer qualitativement l'action du caisson hyperbare.

Donnée : $M(Hb) = 1,6 \cdot 10^4$ g · mol^{-1}

Couple acide/base du dioxyde de carbone dissous : $CO_2,H_2O_{(aq)} / HCO^-_{3(aq)}$

❑ Exercice 13.9. Synthèse d'un ester

On réalise la synthèse de l'éthanoate de butyle en faisant réagir l'acide éthanoïque CH_3COOH sur le butan-1-ol. On donne l'équation de la réaction et la constante d'équilibre associée :

$$CH_3COOH_{(l)} + CH_3CH_2CH_2CH_2OH_{(l)} = CH_3COOC_4H_{9(l)} + H_2O_{(l)} \qquad K^\circ = 4$$

Cette transformation se déroule en phase liquide (les liquides étant supposés tous miscibles). On admet que l'activité de chaque liquide est égale à sa fraction molaire dans le mélange.

Dans un ballon, on introduit 58,0 mL d'acide éthanoïque pur, 92,0 mL de butan-1-ol et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré.

On chauffe à reflux le mélange réactionnel. L'avancement de la réaction est suivi de la façon suivante : à intervalles réguliers, on prélève quelques mL du mélange réactionnel, que l'on plonge dans un bain eau-glace, et on dose l'acide restant par une solution aqueuse de soude.

1. Calculer les quantités de matière initiales des deux réactifs.

2. À la date $t = 30$ min, il reste 0,762 mol d'acide éthanoïque dans le milieu réactionnel. Calculer le quotient de réaction à la date $t = 30$ min. Le système est-il à l'équilibre ?

3. Calculer le rendement final de la synthèse.

Données : masses molaires $M_{CH_3COOH} = 60{,}1\ g \cdot mol^{-1}$, $M_{C_4H_9OH} = 74{,}1\ g \cdot mol^{-1}$;
masses volumiques $\rho_{CH_3COOH} = 1{,}05\ g \cdot mL^{-1}$, $\rho_{C_4H_9OH} = 0{,}810\ g \cdot mL^{-1}$.

❑ Exercice 13.10. Synthèse du dihydrogène

Le reformage du méthane à la vapeur d'eau (procédé appelé *vaporeformage*) est la réaction la plus employée à l'échelle industrielle pour la production de dihydrogène (ce procédé représente 95 % de la production de dihydrogène).
L'équation de la réaction mise en jeu s'écrit :

$$CH_{4(g)} + H_2O_{(g)} = CO_{(g)} + 3H_{2(g)}$$

On donne les valeurs de la constante d'équilibre à 1073 K et à 1223 K :
$K°(1073\ K) = 14$ et $K°(1223\ K) = 2{,}4 \cdot 10^2$.



Unité de vaporeformage de l'entreprise Air Liquide à Dormagen, Allemagne

On met en œuvre la réaction dans un réacteur maintenu à 1073 K, sous une pression totale constante $P_{tot} = 10$ bar, à partir d'un mélange équimolaire de méthane et de vapeur d'eau.

1. Établir l'expression du quotient réactionnel associé à l'équation de la réaction en fonction de la quantité initiale de méthane notée n_0, de l'avancement ξ, de la pression totale P_{tot} et de $P°$.

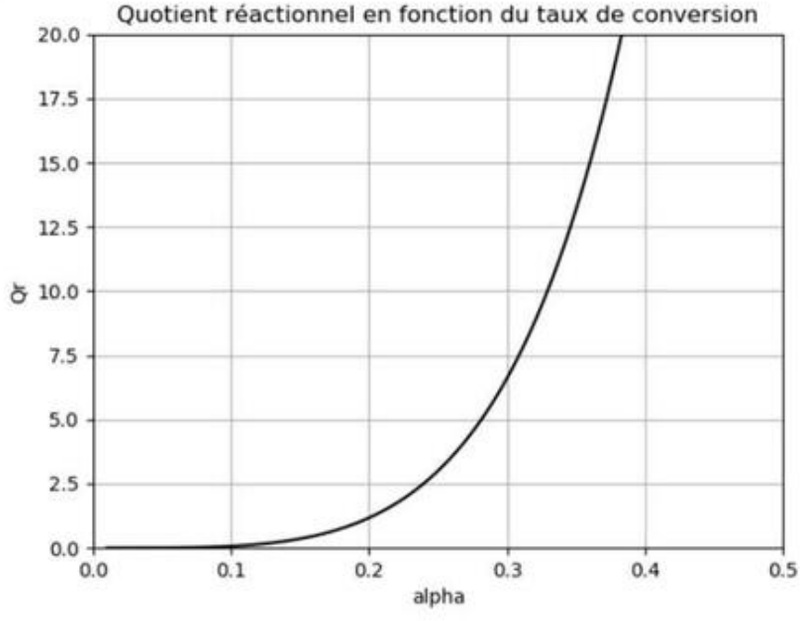
2. Le taux de conversion du méthane est défini par $\alpha = \dfrac{n_{CH_4,\text{transformé}}}{n_{CH_4,\text{initial}}}$. Exprimer le quotient réactionnel de la question précédente en fonction de α, de P_{tot} et de $P°$.

3. On fournit ci-dessous le script Python permettant de tracer la courbe $Q_r = f(\alpha)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}5]$, ainsi que le graphe correspondant. Proposer une méthode de détermination graphique de α à l'équilibre, en justifiant le tracé effectué.

```
import matplotlib.pyplot as plt #importation du module matplotlib.pyplot
import numpy as np #importation du module numpy

def Qr(a): #expression du quotient réactionnel
    return(27*a**4/(4*(1-a**2)**2)*100)

alpha=np.linspace(0.01,0.99,1000) #tableau des abscisses
quotient=[Qr(a) for a in alpha]  #tableau des ordonnées
plt.plot(alpha,quotient, 'k-')  #tracé de la courbe
plt.title('Quotient réactionnel en fonction du taux de conversion')
plt.xlabel('alpha')
plt.ylabel('Qr')
plt.grid()
plt.xlim(0,0.5)  #Limites
plt.ylim(0,20)
plt.show()
```



4. Proposer un script Python de quelques lignes, utilisant la fonction `fsolve` du module `scipy.optimize`, pour retrouver la valeur de α à l'équilibre.

Données

La fonction `fsolve` du module `scipy.optimize` permet la résolution d'une équation de la forme $f(x)=0$. Elle nécessite l'importation du module correspondant. La fonction f doit être définie au préalable et la valeur initiale x_0 de l'algorithme doit être précisée.

```
import scipy.optimize as resol
resol.fsolve(f,x0)
```

❑ Exercice 13.11. Étude de l'équilibre de Deacon

Le dichlore est obtenu essentiellement par électrolyse du chlorure de sodium. Cependant, on en obtient aussi (environ 5 % de la production totale) à partir du chlorure d'hydrogène récupéré

comme sous-produit des réactions de chloration organique. Industriellement, on effectue alors cette conversion par l'équilibre de Deacon, d'équation : $4\,HCl_{(g)} + O_{2(g)} = 2\,Cl_{2(g)} + 2\,H_2O_{(g)}$

On donne $K°(350\ °C) = 9{,}1 \cdot 10^2$.

Dans l'état initial, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. On note n_0 la quantité de matière de dioxygène dans l'état initial.

Tout au long de la transformation, le système est maintenu à une température de 350 °C et à une pression constante $P = 2{,}0$ bar.

1. Le coefficient de dissociation du chlorure d'hydrogène est défini par $\alpha = \dfrac{n_{HCl,transformé}}{n_{HCl,initial}}$.

Exprimer le quotient réactionnel associé à l'équation de réaction en fonction de α, P et $P°$.

2. Déterminer la valeur du coefficient de dissociation de HCl à l'équilibre $\alpha_{éq}$.

3. En déduire les valeurs des fractions molaires de tous les constituants dans l'état final.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 13.1. Question 3 : faire un tableau d'avancement pour la réaction de décomposition du peroxyde d'hydrogène et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.

Exercice 13.2. Question 3.b : les produits sont $CO_{2(g)}$ et $H_2O_{(\ell)}$.

Exercice 13.3. Question 2 : exprimer le pourcentage massique de cuivre en fonction de x.

Exercice 13.6. Question 3 : on peut considérer la transformation comme totale, puis calculer la concentration résiduelle du réactif limitant dans l'état final.

Exercice 13.7. Question 2 : utiliser la relation $P_i = x_i \cdot P_{tot}$ pour exprimer les pressions partielles.

Exercice 13.8. Question 6 : utiliser le critère d'évolution spontanée.

Exercice 13.9. Question 3 : le rendement final se calcule à partir de l'avancement à l'équilibre de la transformation.

Exercice 13.10. Question 3 : utiliser la condition d'équilibre reliant Q_r et $K°$ pour déterminer α à l'équilibre.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux

3. Un système évolue dans le sens direct si $Q_r < K^\circ$.

4. La constante K° est une grandeur thermodynamique caractéristique d'une réaction, qui ne dépend que de la température.

8. L'avancement a la dimension d'une quantité de matière (en moles).

10. Le réactif limitant d'une transformation est celui qui est associé à la plus petite valeur de ξ_{max}, qui dépend de la quantité de matière initiale mais aussi du nombre stœchiométrique du constituant dans l'équation. Il se peut donc que le réactif limitant soit celui dont on a introduit la plus grande quantité de matière initialement.

❑ Les erreurs classiques

– L'activité d'un solide pur, d'un liquide pur, d'un solvant est égale à 1. Ne pas écrire de « concentration d'un solide » ou de « concentration du solvant » !
– C'est la comparaison de Q_r et de K° qui permet de prévoir le sens d'évolution du système, et non seulement la valeur de K°.
– Toutes les transformations ne sont pas totales. En général, au contraire, un état d'équilibre final est atteint : dans ce cas, ξ_f (avancement final effectivement obtenu) est inférieur à ξ_{max} (avancement maximal envisageable d'après les quantités de réactifs introduites).

Exercice 13.1

1. La décomposition du peroxyde d'hydrogène conduit à la formation d'eau liquide et de dioxygène gazeux. On en déduit l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique :

$$2\ H_2O_{2(aq)} = 2\ H_2O_{(l)} + O_{2(g)}$$

2. On peut classer les grandeurs citées selon leur caractère intensif ou extensif :
Les grandeurs intensives sont :
- la température θ ;
- la pression P ;
- le volume molaire $V_m = \dfrac{V}{n}$, défini comme le rapport de deux grandeurs extensives ;
- la concentration molaire $c = \dfrac{n}{V_{sol}}$, définie comme le rapport de deux grandeurs extensives.

Les grandeurs extensives sont :
- le volume à l'équivalence du titrage $V_{éq}$;
- les quantités de matière n_i ;
- l'avancement de la transformation ξ.

⇨ *Méthode 13.1*

3. D'après la définition fournie par l'énoncé, la décomposition d'un litre d'une eau oxygénée à 10 volumes libère 10 litres de dioxygène.
Établissons un tableau d'avancement pour déterminer la concentration apportée en peroxyde d'hydrogène de la solution.

mol	$2\ H_2O_{2(aq)}$	$= 2\ H_2O_{(l)}$	$+ O_{2(g)}$
$t = 0$	n	excès	0
t	$n - \xi$	excès	ξ

D'après l'équation d'état des gaz parfaits : $n_{O_2} = \xi = \dfrac{PV_{O_2}}{RT}$. La transformation étant totale, on en déduit la quantité de matière initiale de peroxyde d'hydrogène : $n - \xi_f = 0 \Rightarrow n = \xi_f = \dfrac{PV_{O_2}}{RT}$. On en déduit la concentration initiale en peroxyde d'hydrogène : $c = \dfrac{n}{V_{sol}}$ soit $\boxed{c = \dfrac{PV_{O_2}}{RTV_{sol}}}$.

AN $c = \dfrac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{8{,}314 \cdot 273{,}15 \cdot 1}$ soit $\boxed{c = 0{,}45\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Exercice 13.2

1. La transformation chimique mise en jeu dans la PAC décrite fait intervenir le comburant $O_{2(g)}$ et le combustible $H_{2(g)}$ et conduit à la formation d'eau liquide.
On en déduit l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique :

$$O_{2(g)} + 2\ H_{2(g)} = 2\ H_2O_{(l)}$$

2. La transformation chimique mise en jeu dans la DMFC fait intervenir le comburant $O_{2(g)}$ et le combustible $CH_3OH_{(l)}$ et conduit à la formation de $CO_{2(g)}$ et $H_2O_{(l)}$.
On en déduit l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique :

$$CH_3OH_{(l)} + \frac{3}{2}O_{2(g)} = CO_{2(g)} + 2\ H_2O_{(l)}$$

Pour ajuster l'équation de la réaction, on ajuste successivement les nombres stœchiométriques relatifs à C, H puis O.

3. a) L'équation de la réaction s'écrit : $CH_{4(g)} + H_2O_{(g)} = CO_{(g)} + 3\ H_{2(g)}$

b) Par analogie avec la question **2**, on considère que la combustion du méthane gazeux dans le dioxygène conduit à la formation de dioxyde de carbone gazeux et d'eau liquide. L'équation de la réaction s'écrit : $CH_{4(g)} + 2\ O_{2(g)} = CO_{2(g)} + 2\ H_2O_{(l)}$

Exercice 13.3

1. On utilise la droite d'étalonnage $A = f([Cu^{2+}])$ pour déterminer la concentration des ions Cu^{2+} dans la solution obtenue. L'équation de la droite est : $A = 15,671 \cdot [Cu^{2+}]$, d'où $[Cu^{2+}] = \dfrac{A}{15,671}$. AN $[Cu^{2+}] = 3,10 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.

Le pourcentage massique de cuivre dans le laiton s'exprime selon : $p_{Cu} = \dfrac{m_{Cu}}{m_{Zn_xCu_y}} = \dfrac{n_{Cu} M_{Cu}}{m_{Zn_xCu_y}}$.

Or l'acide nitrique étant en excès dans la transformation chimique d'oxydation du laiton, la totalité du cuivre présent dans l'alliage a été transformée en ions Cu^{2+}. Donc $n_{Cu} = n_{Cu^{2+},\text{formés}}$ et $p_{Cu} = \dfrac{[Cu^{2+}] \cdot V \cdot M_{Cu}}{m_{Zn_xCu_y}}$. AN (application numérique) $p_{Cu} = \dfrac{3,10 \cdot 10^{-2} \cdot 0,500 \cdot 63,546}{1,5484}$ soit $\boxed{63,6\ \%\ \text{en masse}}$.

2. On peut aussi exprimer le pourcentage massique de cuivre dans le laiton en fonction de x :

$$p_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{m_{Zn_xCu_y}} = \frac{yM_{Cu}}{xM_{Zn} + yM_{Cu}} = \frac{(1-x)M_{Cu}}{xM_{Zn} + (1-x)M_{Cu}}, \text{ d'où } x = \frac{M_{Cu} - p_{Cu}M_{Cu}}{p_{Cu}(M_{Zn} - M_{Cu}) + M_{Cu}}.$$

AN $\boxed{x = 0,357}$ et $\boxed{y = 0,643}$: l'alliage étudié a pour formule $\boxed{Zn_{0,357}\,Cu_{0,643}}$.

3. Calculons la quantité de matière initiale d'acide nitrique :

$$n_{HNO_3} = \frac{m_{HNO_3}}{M_{HNO_3}} = \frac{p_{HNO_3} m_{solution}}{M_{HNO_3}} = \frac{p_{HNO_3} \rho_{solution} V_0}{M_{HNO_3}}.\ \text{AN}\ n_{HNO_3} = 7,22 \cdot 10^{-2}\ mol.$$

L'acide nitrique est un acide fort, totalement dissocié en solution aqueuse. La solution contient donc initialement : $n_{H_3O^+} = 7,22 \cdot 10^{-2}$ mol et $n_{NO_3^-} = 7,22 \cdot 10^{-2}$ mol.

La quantité de matière initiale de laiton vaut : $n_{Zn_xCu_y} = \dfrac{m_{Zn_xCu_y}}{M_{Zn_xCu_y}}$. AN $n_{Zn_xCu_y} = 2,41 \cdot 10^{-2}$ mol.

Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique.

mol	$3\,Zn_xCu_{y(s)}$	$+\,2\,NO_{3(aq)}^-$	$+\,8H_3O_{(aq)}^+ =$	$3x\,Zn_{(aq)}^{2+}$	$+3y\,Cu_{(aq)}^{2+}$	$+2\,NO_{(g)}$	$+12H_2O_{(l)}$
$t = 0$	$2,41 \cdot 10^{-2}$	$7,22 \cdot 10^{-2}$	$7,22 \cdot 10^{-2}$	0	0	0	excès
t_f	$2,41 \cdot 10^{-2} - 3\xi$	$7,22 \cdot 10^{-2} - 2\xi$	$7,22 \cdot 10^{-2} - 8\xi$	$3x\xi$	$3y\xi$	2ξ	excès

La transformation est totale. Identifions le réactif limitant.
Si le laiton est le réactif limitant, $\xi_{max,1} = 8,03 \cdot 10^{-3}$ mol.

Si NO_3^- est le réactif limitant, $\xi_{max,2} = 3,61 \cdot 10^{-2}$ mol.

Si H_3O^+ est le réactif limitant, $\xi_{max,3} = 9,03 \cdot 10^{-3}$ mol.

$\xi_{max,1} < \xi_{max,3} < \xi_{max,2}$ donc le laiton est le réactif limitant, l'acide nitrique a bien été introduit en excès.

⇨ *Méthodes 13.3 et 13.4*

Exercice 13.4

1. a) Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique en concentrations. On note x l'avancement volumique de la transformation.

$mol \cdot L^{-1}$	$HSO_{4(aq)}^-$	$+\,H_2O$	$= SO_{4(aq)}^{2-}$	$+\,H_3O_{(aq)}^+$
$t = 0$	c	excès	0	0
t_f	$c - x_f$	excès	x_f	x_f

Dans l'état final d'équilibre : $K^\circ = \dfrac{[SO_4^{2-}]_{éq}[H_3O^+]_{éq}}{[HSO_4^-]_{éq} \cdot c^\circ} = \dfrac{x_f^2}{(c - x_f) \cdot c^\circ}$. La résolution de cette équation à l'aide du solveur de la calculatrice, avec $K^\circ(25\ °C) = 10^{-2}$ et $c = 1,00 \cdot 10^{-3}$ mol $\cdot$ L^{-1}, conduit à : $x_f = 9,16 \cdot 10^{-4}$ mol $\cdot$ L^{-1}. D'autre part, $x_{max} = c = 1,00 \cdot 10^{-3}$ mol $\cdot$ L^{-1}.

Alors $\tau_f = \dfrac{x_f}{x_{max}}$. AN $\boxed{\tau_f = 0,916}$. $\tau_f < 1$ donc la transformation chimique n'est pas totale, elle est limitée.

⇨ *Méthodes 13.3 et 13.4*

b) La résolution de l'équation $K^\circ = \dfrac{x_f^2}{(c - x_f) \cdot c^\circ}$ avec $c = 1{,}00 \cdot 10^{-4}$ mol · L^{-1} conduit à :

$x_f = 9{,}90 \cdot 10^{-5}$ mol · L^{-1}, donc à $\boxed{\tau_f = 0{,}990}$. Dans ce cas, on peut considérer la transformation chimique comme totale. On constate que pour une même valeur de la constante d'équilibre, la concentration initiale en ions hydrogénosulfate a une influence sur l'avancement final de la transformation.

Plus généralement, pour une même valeur de K°, la dissociation d'un acide dans l'eau est d'autant plus importante que la concentration initiale en acide est faible : ceci constitue la loi de dilution d'Ostwald.

2. a) Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique en concentrations.

mol · L^{-1}	$HCOOH_{(aq)}$	$+ HSO_{3(aq)}^-$	$= HCOO_{(aq)}^-$	$+ H_2SO_{3(aq)}$
$t = 0$	c	c	0	0
t_f	$c - x_f$	$c - x_f$	x_f	x_f

Dans l'état final d'équilibre : $K^\circ = \dfrac{[HCOO^-]_{éq}[H_2SO_3]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}[HSO_3^-]_{éq}} = \dfrac{x_f^2}{(c - x_f)^2}$. La résolution de cette équation à l'aide du solveur de la calculatrice, avec $K^\circ(25\ °C) = 10^2$ et $c = 1{,}00 \cdot 10^{-1}$ mol · L^{-1} conduit à : $x_f = 9{,}09 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1}. D'autre part, $x_{max} = c = 1{,}00 \cdot 10^{-1}$ mol · L^{-1}. Finalement : $\boxed{\tau_f = 0{,}909}$. $\tau_f < 1$ donc la transformation chimique est limitée.

b) On résout à présent l'équation : $K^\circ = \dfrac{x_f^2}{(c - x_f)(10c - x_f)}$. On trouve $x_f = 9{,}99 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1} et $\boxed{\tau_f = 0{,}999}$. La transformation chimique est totale.

On voit ici qu'un excès de l'un des réactifs favorise la transformation chimique.

3. Les résultats précédents mettent en évidence l'influence non négligeable de la composition initiale du système sur l'avancement final d'une transformation chimique. Ainsi, la valeur de la constante d'équilibre K° associée à une équation de réaction n'est pas un critère suffisant pour prévoir le caractère total ou limité d'une transformation chimique.

Exercice 13.5

1. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique. On note respectivement n_0, n_1 et n_2 les quantités de matière initiales d'ions $Ca_{(aq)}^{2+}$, d'ions $HPO_{4(aq)}^{2-}$ et d'ammoniac NH_3.

mol	$5\ Ca_{(aq)}^{2+}$	$+ 3\ HPO_{4(aq)}^{2-}$	$+ 4\ NH_{3(aq)}$	$+ H_2O_{(l)}$	$= Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)}$	$+ 4\ NH_{4(aq)}^+$
$t = 0$	n_0	n_1	n_2	excès	0	$2n_1$
t_f	$n_0 - 5\xi$	$n_1 - 3\xi$	$n_2 - 4\xi$	excès	ξ	$2n_1 + 4\xi$

⇨ *Méthode 13.3*

On souhaite préparer une quantité d'hydroxyapatite égale à 0,010 mol, soit : $\xi_f = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol.
La transformation chimique étant totale, il faut introduire au minimum :
$n_0 = 5\xi_f = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol d'ions $Ca^{2+}_{(aq)}$ et $n_1 = 3\xi_f = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol d'ions $HPO^{2-}_{4(aq)}$.
Les masses de solides nécessaires sont : $m_{Ca(NO_3)_2} = n_{Ca^{2+}} \cdot M_{Ca(NO_3)_2}$ et
$m_{(NH_4)_2HPO_4} = n_{HPO_4^{2-}} \cdot M_{(NH_4)_2HPO_4}$. AN $\boxed{m_{Ca(NO_3)_2} = 8{,}2 \text{ g}}$ et $\boxed{m_{(NH_4)_2HPO_4} = 4{,}0 \text{ g}}$.

2. $Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)} = 5\,Ca^{2+}_{(aq)} + 3\,PO^{3-}_{4(aq)} + HO^-_{(aq)}$

3. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique en concentrations. Un excès de solide est initialement introduit dans de l'eau. On note x l'avancement volumique de la transformation.

$mol \cdot L^{-1}$	$Ca_5(PO_4)_3OH_{(s)}$	$+ 3\,H_2O_{(l)}$	$= 5\,Ca^{2+}_{(aq)}$	$+ 3\,HPO^{2-}_{4(aq)}$	$+ 4\,HO^-_{(aq)}$
$t = 0$	excès	excès	0	0	0
t_f	excès	excès	$5x_f$	$3x_f$	$4x_f$

Dans l'état final d'équilibre :
$$K^\circ = \frac{[Ca^{2+}]_{éq}^5 [HPO_4^{2-}]_{éq}^3 [HO^-]_{éq}^4}{(c^\circ)^{12}} = \frac{(5x_f)^5 (3x_f)^3 (4x_f)^4}{(c^\circ)^{12}} = 2{,}16 \cdot 10^7 \frac{x_f^{12}}{(c^\circ)^{12}}$$
d'où $x_f = c^\circ \left(\frac{K^\circ}{2{,}16 \cdot 10^7} \right)^{1/12}$. La solubilité est donc : $s = [Ca^{2+}]_{éq} = 5x_f = 5c^\circ \left(\frac{K^\circ}{2{,}16 \cdot 10^7} \right)^{1/12}$.
AN $\boxed{s = 7{,}29 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

On peut ici donner trois chiffres significatifs.

⇨ *Méthodes 13.3 et 13.4*

Exercice 13.6

1. La transformation chimique étudiée est une transformation d'oxydo-réduction, qui peut être modélisée par l'équation de réaction : $\boxed{2\,Ag^+_{(aq)} + Cu_{(s)} = 2\,Ag_{(s)} + Cu^{2+}_{(aq)}}$

2. Dans l'état initial du système, $Q_{r,i} = \frac{a(Ag)_i^2 \cdot a(Cu^{2+})_i}{a(Ag^+)_i^2 \cdot a(Cu)_i} = \frac{[Cu^{2+}]_i \cdot c^\circ}{[Ag^+]_i^2}$.
Calculons les concentrations initiales des ions Ag^+ et Cu^{2+} dans la solution :
$[Cu^{2+}]_i = \frac{c_2 V_2}{V_1 + V_2}$ et $[Ag^+]_i = \frac{c_1 V_1}{V_1 + V_2}$, soit $[Cu^{2+}]_i = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1} et $[Ag^+]_i = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1}. On en déduit : $Q_{r,i} = 10 < K^\circ$. D'après le critère d'évolution spontanée, le système évolue dans le sens direct de l'équation de réaction.

⇨ *Méthode 13.2*

3. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique.

mol	$2\,Ag^+_{(aq)}$	$+\,Cu_{(s)}$	$=2\,Ag_{(s)}$	$+\,Cu^{2+}_{(aq)}$
$t=0$	n_1	n_{Cu}	n_{Ag}	n_2
t_f	$n_1-2\xi_f$	$n_{Cu}-\xi_f$	$n_{Ag}+2\xi_f$	$n_2+\xi_f$

Les quantités de matière présentes dans l'état initial valent : $n_1 = 2{,}0\cdot10^{-3}$ mol ; $n_{Cu} = \dfrac{m_{Cu}}{M_{Cu}} = 1{,}6\cdot10^{-2}$ mol ; $n_{Ag} = \dfrac{m_{Ag}}{M_{Ag}} = 4{,}6\cdot10^{-3}$ mol et $n_2 = 1{,}0\cdot10^{-3}$ mol.

Pour l'équation étudiée, $K^\circ = 2{,}2\cdot10^{15} > 10^4$. Considérons la transformation comme totale.

Ag^+ est le réactif limitant et $\xi_{max} = \dfrac{n_1}{2} = 1{,}0\cdot10^{-3}$ mol. On en déduit : $\boxed{n_{Cu,f} = 1{,}5\cdot10^{-2}\ \text{mol}}$;

$\boxed{n_{Ag,f} = 6{,}6\cdot10^{-3}\ \text{mol}}$ et $\boxed{n_{Cu^{2+},f} = 2{,}0\cdot10^{-3}\ \text{mol}}$, soit $[Cu^{2+}]_f = 5{,}0\cdot10^{-2}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

La concentration résiduelle en ions argent peut être calculée à partir de l'expression de la constante d'équilibre :

$K^\circ = \dfrac{[Cu^{2+}]_f\cdot c^\circ}{[Ag^+]_f^2} \Leftrightarrow [Ag^+]_f = \sqrt{\dfrac{[Cu^{2+}]_f\cdot c^\circ}{K^\circ}}$. AN $[Ag^+]_f = 4{,}8\cdot10^{-9}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Cette concentration est négligeable devant la concentration initiale en ions argent dans la solution. Il était donc cohérent de considérer la transformation comme totale.

La quantité de matière d'ions argent dans l'état final vaut : $\boxed{n_{Ag^+,f} = 1{,}9\cdot10^{-10}\ \text{mol}}$.

⇨ *Méthodes 13.3 et 13.4*

Exercice 13.7

1. Par définition : $\boxed{K^\circ = \dfrac{a(Fe_2Cl_6)_{éq}}{a(FeCl_3)^2_{éq}} = \dfrac{P_{Fe_2Cl_6,éq}\cdot P^\circ}{P^2_{FeCl_3,éq}}}$.

2. Le quotient de réaction Q_r à un instant quelconque de la transformation vaut :

$$Q_r = \frac{P_{Fe_2Cl_6}\cdot P^\circ}{P^2_{FeCl_3}} = \frac{x_{Fe_2Cl_6}\cdot P_{tot}\cdot P^\circ}{\left(x_{FeCl_3}\cdot P_{tot}\right)^2} = \frac{\dfrac{n_{Fe_2Cl_6}}{n_{tot}}}{\left(\dfrac{n_{FeCl_3}}{n_{tot}}\right)^2}\frac{P^\circ}{P_{tot}}$$

. AN $\boxed{Q_r = \dfrac{n_{Fe_2Cl_6}\cdot n_{tot}}{n^2_{FeCl_3}}\dfrac{P^\circ}{P_{tot}}}$.

À l'instant initial : $n_{Fe_2Cl_6,i} = n_{FeCl_3,i} = n_1$, $n_{tot,i} = 2n_1$ et $P_{tot} = 2$ bar . AN $\boxed{Q_{r,i} = 1}$.

3. $Q_{r,i} \neq K^\circ_1(T_2)$ donc initialement le système n'est pas à l'équilibre thermodynamique. De plus, comme $Q_{r,i} < K^\circ_1(T_2) = 20{,}8$, le système évolue spontanément dans le sens direct de l'équation de réaction.

⇨ *Méthode 13.2*

Exercice 13.8

1. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique en concentrations.

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$\text{Hb}_{(aq)}$	$+ \text{O}_{2(aq)}$	$= \text{HbO}_{2(aq)}$
$t = 0$	c	$[\text{O}_2]_i$	0
t_f	$c - x_f$	$[\text{O}_2]_i - x_f$	x_f

La concentration molaire initiale des sous-unités d'hémoglobine dans le sang est égale à : $c = \dfrac{m}{M(\text{Hb}) \cdot V}$, soit $c = 9{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Dans l'état final d'équilibre, on a : $K_1 = \dfrac{[\text{HbO}_2]_f \cdot c^\circ}{[\text{Hb}]_f \cdot [\text{O}_2]_f} = \dfrac{x_f \cdot c^\circ}{(c - x_f)([\text{O}_2]_i - x_f)}$. La résolution de cette équation à l'aide du solveur de la calculatrice donne : $x_f = 9{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, soit une concentration finale en sous-unités d'oxyhémoglobine égale à $\boxed{[\text{HbO}_2]_f = 9{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$ dans le sang.

⇨ *Méthodes 13.3 et 13.4*

2. Calculons le quotient de réaction associé à l'équation **(1)** après la chute de la concentration en dioxygène dans le sang. $Q_r = \dfrac{[\text{HbO}_2] \cdot c^\circ}{[\text{Hb}] \cdot [\text{O}_2]} = \dfrac{9{,}1 \cdot 10^{-3}}{2{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-5}}$, soit $Q_r = 9{,}0 \cdot 10^5 > K_1$.

D'après le critère d'évolution spontanée, le système évolue dans le sens indirect de l'équation de réaction, c'est-à-dire dans le sens de la libération de dioxygène par l'oxyhémoglobine.

⇨ *Méthode 13.7*

Le calcul de Q_r n'était pas indispensable. Comme seule la concentration en dioxygène dissous a diminué, à partir d'un état d'équilibre, il est évident que $Q_r > K_1$ après cette diminution d'après l'expression de Q_r.

3. a) Il s'agit d'une transformation acido-basique, modélisée par la réaction d'équation :

$$\text{CO}_2\text{,H}_2\text{O}_{(aq)} + \text{H}_2\text{O}_{(l)} = \text{HCO}_{3(aq)}^- + \text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+ \qquad \textbf{(2)}$$

b) La dissolution du dioxyde de carbone dans le sang libère des ions oxonium $\text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+$ d'après l'équation précédente. Donc $[\text{H}_3\text{O}^+]$ augmente dans le sang, et $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ diminue.

c) Les ions H_3O^+ libérés par la réaction d'équation **(2)** peuvent réagir sur l'oxyhémoglobine HbO_2 selon l'équation **(3)**. La transformation modélisée par la réaction d'équation **(3)** est ainsi favorisée : les ions H_3O^+ permettent la libération du dioxygène nécessaire à l'effort musculaire. Comme les ions H_3O^+ sont consommés par cette transformation, la diminution du pH sanguin liée à la dissolution de CO_2 est limitée.

4. La constante d'équilibre associée à l'équation **(4)** a pour expression :

$$K_4 = \frac{[\text{HbCO}]_{éq} \cdot c^\circ}{[\text{Hb}]_{éq}[\text{CO}]_{éq}} \Leftrightarrow \frac{[\text{HbCO}]_{éq}}{[\text{Hb}]_{éq}} = K_4 \frac{[\text{CO}]_{éq}}{c^\circ}. \text{ AN } \boxed{\frac{[\text{HbCO}]_{éq}}{[\text{Hb}]_{éq}} = 1{,}5 \cdot 10^4}.$$

Cette valeur est comprise entre $1{,}1 \cdot 10^4$ et $2{,}6 \cdot 10^4$, la personne ayant respiré l'air pollué doit ressentir des maux de tête.

5. $K_5 = \dfrac{[\text{HbCO}]_{éq} \cdot [\text{O}_2]_{éq}}{[\text{HbO}_2]_{éq}[\text{CO}]_{éq}}$. Comme $K_1 = \dfrac{[\text{HbO}_2]_{éq} \cdot c^\circ}{[\text{Hb}]_{éq} \cdot [\text{O}_2]_{éq}}$ et $K_4 = \dfrac{[\text{HbCO}]_{éq} \cdot c^\circ}{[\text{Hb}]_{éq}[\text{CO}]_{éq}}$, on en déduit $\boxed{K_5 = \dfrac{K_4}{K_1}}$. AN $\boxed{K_5 = 2{,}5 \cdot 10^2}$.

6. Considérons l'équilibre **(5)** établi pour la personne empoisonnée au monoxyde de carbone. Le caisson hyperbare a pour effet d'augmenter la concentration de dioxygène dissous dans le sang. Dans ces conditions, le quotient de réaction $Q_{r,5}$ augmente et devient supérieur à K_5. D'après le critère d'évolution spontanée, le système évolue donc dans le sens indirect de l'équation **(5)**, ce qui permet la libération du monoxyde de carbone par l'hémoglobine au profit du transport de dioxygène dans le sang.

⇨ *Méthode 13.2*

Exercice 13.9

1. Les quantités de matière des réactifs valent, dans l'état initial :

$$n_{\text{CH}_3\text{COOH,i}} = \frac{\rho_{\text{CH}_3\text{COOH}} \cdot V_{\text{CH}_3\text{COOH}}}{M_{\text{CH}_3\text{COOH}}} \text{ et } n_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O,i}} = \frac{\rho_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}} \cdot V_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}}}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}}}.$$

AN $\boxed{n_{\text{CH}_3\text{COOH,i}} = 1{,}01 \text{ mol}}$; $\boxed{n_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O,i}} = 1{,}01 \text{ mol}}$.

Les deux réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques.

2. Le quotient de réaction associé à l'équation d'estérification a pour expression : $Q_r = \dfrac{x_{\text{ester}} \cdot x_{\text{eau}}}{x_{\text{CH}_3\text{COOH}} \cdot x_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}}}$ avec pour chaque constituant liquide $x_i = \dfrac{n_i}{n_{\text{tot,liquide}}}$ où $n_{\text{tot,liquide}}$ est la quantité de matière totale en phase liquide. Ainsi, $Q_r = \dfrac{n_{\text{ester}} \cdot n_{\text{eau}}}{n_{\text{CH}_3\text{COOH}} \cdot n_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}}}$. À la date $t = 30$ min, les quantités de matière des différentes espèces chimiques sont : $n_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 0{,}762$ mol ; $n_{\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}} = 0{,}762$ mol ; $n_{\text{ester}} = n_{\text{eau}} = 0{,}248$ mol.

AN $\boxed{Q_r = 0{,}11}$. Comme $Q_r \neq K^\circ = 4$, le système n'a pas encore atteint un état d'équilibre après 30 min de transformation.

3. Si on laisse la transformation se poursuivre jusqu'à ce que le système atteigne l'état d'équilibre, on a dans l'état final :

$$K^\circ = \frac{n_{\text{ester,f}} \cdot n_{\text{eau,f}}}{n_{CH_3COOH,f} \cdot n_{C_4H_{10}O,f}} = \frac{\xi_f^2}{(n_0 - \xi_f)^2} \Leftrightarrow \xi_f = \frac{n_0 \cdot \sqrt{K^\circ}}{1+\sqrt{K^\circ}}.\ \text{AN}\ \xi_f = 0,673\ \text{mol}.$$

Si la réaction était totale, on aurait : $\xi_{max} = n_0 = 1,01$ mol. Le rendement final est donc égal à :

$$\boxed{r = \frac{\xi_f}{\xi_{max}} = 0,667}.$$

⇨ *Méthode 13.4*

Exercice 13.10

1. Le quotient réactionnel Q_r à un instant quelconque de la transformation vaut :

$$Q_r = \frac{P_{CO} \cdot P_{H_2}^3}{P_{CH_4} \cdot P_{H_2O} \cdot (P^\circ)^2} = \frac{x_{CO} \cdot x_{H_2}^3 \cdot P_{tot}^2}{x_{CH_4} \cdot x_{H_2O} \cdot (P^\circ)^2} = \frac{n_{CO} \cdot n_{H_2}^3}{n_{CH_4} \cdot n_{H_2O} \cdot n_{tot,gaz}^2} \left(\frac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

Établissons un tableau d'avancement de la transformation pour exprimer les quantités de matière des différents constituants en fonction de l'avancement, à la date t considérée.

mol	$CH_{4(g)}$	$+H_2O_{(g)}$	$=CO_{(g)}$	$+3H_{2(g)}$	$n_{tot,gaz}$
$t = 0$	n_0	n_0	0	0	$2n_0$
t	$n_0 - \xi$	$n_0 - \xi$	ξ	3ξ	$2(n_0 + \xi)$

⇨ *Méthode 13.3*

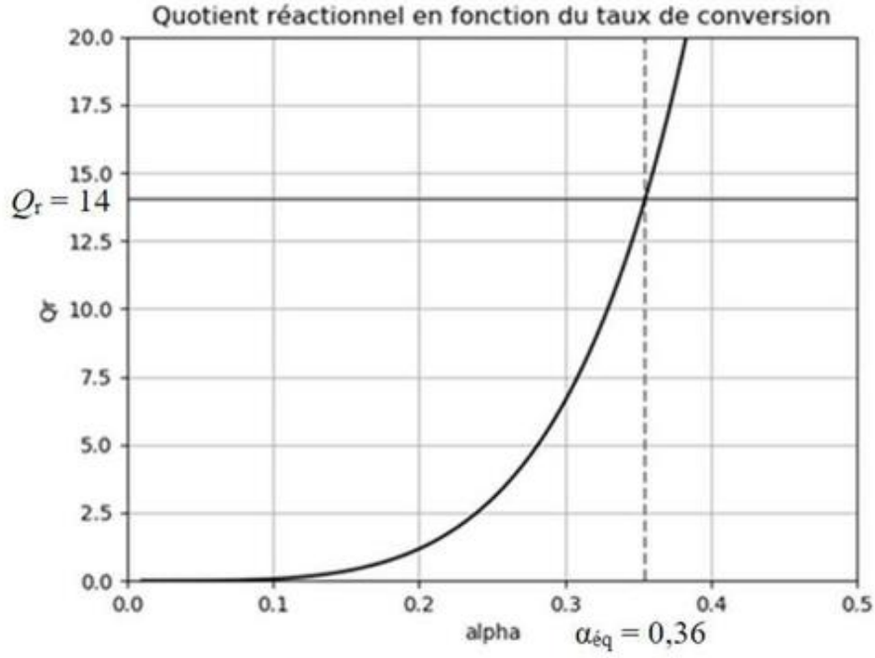
On peut alors exprimer : $Q_r = \dfrac{27\xi^4}{4(n_0-\xi)^2(n_0+\xi)^2}\left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$ soit $\boxed{Q_r = \dfrac{27\xi^4}{4(n_0^2-\xi^2)^2}\left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2}$.

2. D'après le tableau d'avancement et la définition du taux de conversion, $\alpha = \dfrac{\xi}{n_0} \Leftrightarrow \xi = \alpha n_0$. En injectant cette expression de l'avancement dans Q_r, on obtient : $\boxed{Q_r = \dfrac{27\alpha^4}{4(1-\alpha^2)^2}\left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2}$.

3. La condition d'équilibre s'écrit : $Q_{r,éq} = K^\circ$, avec $K^\circ(1073\ \text{K}) = 14$.

La valeur de α à l'équilibre est donc l'abscisse du point d'intersection entre la courbe représentative de $Q_r = f(\alpha)$ et la droite horizontale d'équation : $Q_r = 14$ (voir le tracé ci-après).

On trouve : $\boxed{\alpha_{éq} = 0,36}$.



4. On cherche la valeur de $\alpha_{éq}$ telle que $Q_r(\alpha_{éq}) = K^\circ$. On cherche donc à résoudre l'équation $f(x) = 0$ en définissant : $f : x \mapsto Q_r(x) - 14$. Dans le script Python, il faut donc définir la fonction f puis appeler la fonction `fsolve` du module `scipy.optimize`.

```
import scipy.optimize as resol #importation du module

def Qr(a): #expression du quotient réactionnel
    return(27*a**4/(4*(1-a**2)**2)*100)

def f(x):  #définition de la fonction f
    return(Qr(x)-14)

a_eq=resol.fsolve(f,0) #on choisit comme valeur initiale 0
print(a_eq)
```

Après exécution du programme, on obtient $\alpha_{éq} = 0{,}35480516$, en accord avec la valeur obtenue par lecture graphique.

Exercice 13.11

1. Le quotient réactionnel Q_r à un instant quelconque de la transformation vaut :

$$Q_r = \frac{P_{Cl_2}^2 \cdot P_{H_2O}^2 \cdot P^\circ}{P_{HCl}^4 \cdot P_{O_2}} = \frac{x_{Cl_2}^2 \cdot x_{H_2O}^2 \cdot P^\circ}{x_{HCl}^4 \cdot x_{O_2} \cdot P} = \frac{n_{Cl_2}^2 \cdot n_{H_2O}^2 \cdot n_{tot,gaz}}{n_{HCl}^4 \cdot n_{O_2}} \left(\frac{P^\circ}{P}\right).$$

Établissons un tableau d'avancement de la transformation pour exprimer les quantités de matière des différents constituants à la date t considérée en fonction de l'avancement, puis du coefficient de dissociation de HCl.

mol	$4\ HCl_{(g)}$	$+O_{2(g)}$	$=2\ Cl_{2(g)}$	$+2H_2O_{(g)}$	$n_{tot,gaz}$
$t=0$	$4n_0$	n_0	0	0	$5n_0$
t	$4(n_0-\xi)$ $=4n_0(1-\alpha)$	$n_0-\xi$ $=n_0(1-\alpha)$	2ξ $=2n_0\alpha$	2ξ $=2n_0\alpha$	$5n_0-\xi$ $=n_0(5-\alpha)$

⇨ *Méthode 13.3*

Pour compléter la dernière ligne du tableau, on a utilisé la définition du coefficient de dissociation, avec $\alpha=\dfrac{4\xi}{4n_0}=\dfrac{\xi}{n_0}\Leftrightarrow\xi=\alpha n_0$.

On peut alors exprimer Q_r en fonction de α : $Q_r=\dfrac{2^4\cdot\alpha^4\cdot(5-\alpha)}{4^4\cdot(1-\alpha)^5}\left(\dfrac{P^\circ}{P}\right)=\dfrac{\alpha^4\cdot(5-\alpha)}{16\cdot(1-\alpha)^5}\left(\dfrac{P^\circ}{P}\right)$.

2. La condition d'équilibre s'écrit : $Q_{r,eq}=K^\circ$, avec $K^\circ(350°C)=9{,}1\cdot10^2$.

La résolution de cette équation (avec P = 2,0 bar) peut se faire à l'aide d'une calculatrice ou du logiciel Python (voir exercice précédent), et conduit à la valeur du coefficient de dissociation de HCl à l'équilibre $\boxed{\alpha_{éq}=0{,}85}$ (afin que l'algorithme employé par la fonction `fsolve` converge, on choisira une valeur initiale supérieure à 0,7).

3. On calcule les valeurs des fractions molaires de tous les constituants dans l'état final, à l'aide du tableau d'avancement et de la valeur de $\alpha_{éq}$:

$x_{Cl_2,éq}=x_{H_2O,éq}=\dfrac{2\alpha_{éq}}{5-\alpha_{éq}}$; $x_{O_2,éq}=\dfrac{1-\alpha_{éq}}{5-\alpha_{éq}}$; $x_{HCl,éq}=4x_{O_2,éq}=\dfrac{4(1-\alpha_{éq})}{5-\alpha_{éq}}$.

AN $\boxed{x_{Cl_2,éq}=x_{H_2O,éq}=0{,}41}$; $\boxed{x_{O_2,éq}=0{,}036}$; $\boxed{x_{HCl,éq}=0{,}14}$.

Corrigé

Chapitre 14

Cinétique chimique

UN SCIENTIFIQUE



Homme de culture, le chimiste suédois **Svante Arrhenius** (1859-1927) s'est intéressé à tous les domaines de la science comme la géologie, l'astronomie ou la météorologie. Il obtient son doctorat à l'université d'Uppsala, ville où il enseigne avant de terminer sa carrière à Stockholm. En 1883, Svante Arrhenius se fait connaître au monde scientifique en contredisant l'hypothèse de Faraday selon laquelle les électrolytes ne se dissocient qu'au passage d'un courant électrique.

Un peu d'histoire

Le phénomène d'absorbance joue un rôle important dans l'étude de la cinétique des transformations chimiques. Le savant français Pierre Bouguer en fait une première étude publiée en 1729 dans son *Essai d'optique sur la gradation de la lumière*. Ce thème est repris par le mathématicien Johann-Heinrich Lambert en 1760 puis par August Beer qui définit en 1852 le coefficient d'absorption.

Le génial chimiste hollandais Jacobus van 't Hoff est le véritable fondateur de la cinétique chimique. Il en énonce les principes en 1884 dans son traité Études de dynamique chimique. Il introduit le concept de vitesse de réaction et établit des relations sur ce thème.

Dans un article paru en 1884, Henry Le Chatelier énonce un principe plus général. Très intéressé par les travaux de Van 't Hoff, Svante Arrhenius établit en 1889 une loi empirique qui donne la vitesse de réaction en fonction de la température.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- La définition des vitesses de consommation, de formation, de réaction
- La loi d'Arrhenius
- La définition du temps de demi-vie d'un réactif, du temps de demi-réaction
- La notion d'ordre d'une réaction
- L'influence des facteurs cinétiques concentration et température en stratégie de synthèse ou d'analyse

Ce qu'il faut savoir faire

- Relier la vitesse de réaction à la vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit
- Exprimer la loi de vitesse si la réaction admet un ordre
- Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique
- Reconnaître, dans un protocole, des opérations visant à augmenter ou diminuer une vitesse de réaction
- Déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée
- Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures
- Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle, à l'aide des temps de demi-réaction, ou par la méthode intégrale
- Se ramener à une loi de vitesse d'ordre 0, 1 ou 2 par rapport à un unique réactif par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stoechiométriques

■■ Résumé de cours

■ Vitesses dans une réaction

On restreint l'étude au cas d'un réacteur fermé parfaitement agité, de composition uniforme.

❑ Vitesse de consommation, de formation

La **vitesse (volumique) de consommation**, ou **vitesse (volumique) de disparition**, d'un réactif A_i est définie par : $\boxed{v_{d,A_i} = -\frac{d[A_i]}{dt}}$.

La **vitesse (volumique) de formation** d'un produit A_i est définie par : $\boxed{v_{f,A_i} = \frac{d[A_i]}{dt}}$.

❑ Vitesse volumique de la réaction

Considérons une transformation chimique modélisée par une réaction unique d'équation $\sum_i \nu_i A_i = 0$ (ν_i étant le nombre stœchiométrique algébrique du constituant A_i). Si aucun intermédiaire réactionnel ne s'accumule dans le milieu, les quantités de produits formés et celles des réactifs consommés peuvent être liées par l'avancement.

La **vitesse (volumique) de la réaction** est alors définie par : $\boxed{v = \frac{1}{V}\frac{d\xi}{dt}}$ (en $mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$) où ξ est l'avancement de la transformation et V le volume du système.

On a alors pour chaque constituant A_i : $v = \frac{1}{\nu_i}\frac{1}{V}\frac{dn_{A_i}}{dt}$. Si le système est isochore (de volume V constant), cette relation devient : $\boxed{v = \frac{1}{\nu_i}\frac{d[A_i]}{dt}}$.

⇨ Méthode 14.1. Détermination graphique de la vitesse de réaction
⇨ Méthode 14.2. Détermination numérique de la vitesse de réaction

■ Facteurs cinétiques

❑ Concentrations

De façon générale, la vitesse de la réaction augmente avec la concentration des réactifs.

– Si la réaction admet un **ordre**, la vitesse de réaction s'écrit sous la forme :

$$v = k \times \prod_{i,\text{réactifs}} [A_i]^{\alpha_i} .$$

α_i est appelé **ordre partiel** de la réaction par rapport à A_i : c'est un nombre déterminé expérimentalement (à ne pas confondre avec le nombre stœchiométrique).

La somme des ordres partiels $\sum_i \alpha_i$ constitue l'**ordre global** de la réaction.

k est la **constante de vitesse** de la réaction, dont la dimension dépend de l'ordre global de la réaction.

– Si la réaction n'admet pas d'ordre, on peut écrire $v = k \times f([A_i])$ où $f([A_i])$ est une fonction quelconque des concentrations, qui ne s'exprime pas comme un monôme.

Remarque

Une réaction qui ne possède pas d'ordre courant (à chaque instant t de la transformation) peut posséder un ordre initial (à $t = 0$).

❑ Température

De façon générale, la vitesse de la réaction augmente avec la température.

La constante de vitesse k de la réaction ne dépend que de la température selon la loi empirique d'Arrhenius : $\boxed{k = A\exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)}$ ou sous forme différentielle $\frac{d(\ln k)}{dT} = \frac{E_a}{RT^2}$

avec A le facteur préexponentiel, de même dimension que k

E_a l'**énergie** (molaire) **d'activation** de la réaction (en $J \cdot mol^{-1}$).

⇨ **Méthode 14.3. Calcul de l'énergie d'activation d'une réaction**
⇨ **Méthode 14.4. Détermination graphique d'une énergie d'activation**

■ Lois de vitesse

❑ Réactions d'ordre simple

Réaction d'équation $|\nu_A|A = \text{produits}$

– Ordre 0 : $-\frac{1}{|\nu_A|}\frac{d[A]}{dt} = k$ d'où $[A] = [A]_0 - |\nu_A| k t$.

– Ordre 1 : $-\frac{1}{|\nu_A|}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$ d'où $\ln[A] = \ln[A]_0 - |\nu_A| k t$ ou $[A] = [A]_0 \times e^{-|\nu_A| k t}$.

– Ordre 2 : $-\frac{1}{|\nu_A|}\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$ d'où $\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = |\nu_A| k t$.

Réaction d'équation $|\nu_A|A + |\nu_B|B = \text{produits}$

– Si la réaction admet des ordres partiels par rapport à A et à B : $-\frac{1}{|\nu_A|}\frac{d[A]}{dt} = k[A]^\alpha [B]^\beta$.

Dans certaines conditions initiales, l'expression de la loi de vitesse peut se simplifier.

⇨ **Méthode 14.5. Cas de réactifs introduits dans les proportions stœchiométriques**
⇨ **Méthode 14.6. Cas de dégénérescence de l'ordre**

❑ Temps de demi-vie d'un réactif et temps de demi-réaction

Le **temps de demi-vie** d'un réactif est défini comme le temps au bout duquel la concentration de ce réactif est égale à la moitié de sa concentration initiale.

Le **temps de demi-réaction** est le temps $t_{1/2}$ au bout duquel la moitié de l'avancement final est atteint. Il s'identifie au temps de demi-vie du réactif limitant pour une transformation totale.

Pour une réaction totale d'équation $|\nu_A|A = \text{produits}$, la dépendance de $t_{1/2}$ par rapport à la concentration initiale est caractéristique de l'ordre de la réaction.

- Ordre 0 : $t_{1/2} = \dfrac{[A]_0}{2|\nu_A|k}$ (proportionnel à $[A]_0$).
- Ordre 1 : $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{|\nu_A|k}$ (indépendant de $[A]_0$).
- Ordre 2 : $t_{1/2} = \dfrac{1}{|\nu_A|k[A]_0}$ (inversement proportionnel à $[A]_0$).

■ Méthodes expérimentales de suivi cinétique

❑ Classification des méthodes

L'objectif en cinétique est généralement de déterminer les ordres d'une réaction à partir de relevés expérimentaux.

⇨ Méthode 14.7. Méthode différentielle
⇨ Méthode 14.8. Méthode intégrale
⇨ Méthode 14.9. Méthode des temps de demi-réaction

Le suivi expérimental de la cinétique d'une réaction peut s'effectuer par deux types de méthodes.

– Les *méthodes chimiques* consistent à suivre la concentration d'une espèce chimique du mélange réactionnel par prélèvements successifs et titrages.

– Les *méthodes physiques* consistent à suivre la concentration d'une espèce chimique du mélange réactionnel en continu, à partir de la mesure d'une grandeur physique : spectrophotométrie, conductimétrie, pH-métrie, mesure de pression, etc.

❑ Spectrophotométrie

Lorsque le mélange réactionnel contient une espèce qui absorbe la lumière dans le domaine de longueurs d'onde considéré, on peut suivre l'évolution de sa concentration au cours du temps grâce à un suivi de l'absorbance A à une longueur d'onde donnée.

La longueur d'onde choisie est généralement la longueur d'onde du maximum d'absorption de l'espèce étudiée.



Loi de Beer–Lambert

L'**absorbance** de l'échantillon (sans dimension) est : $\boxed{A = \varepsilon_{\lambda,T} \times l \times c}$

où $\varepsilon_{\lambda,T}$ est le **coefficient d'absorption molaire** ou coefficient d'extinction molaire (à la température T et à la longueur d'onde λ) de l'espèce qui absorbe (en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$), l la longueur de la cuve du spectrophotomètre (en m), c la concentration molaire de l'espèce qui absorbe dans l'échantillon (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

Si plusieurs espèces i absorbent à cette longueur d'onde, l'absorbance est : $A = \sum_i \varepsilon_{\lambda,T,i} \times l \times c_i$.

❑ Conductimétrie

Lorsque le mélange réactionnel contient des espèces ioniques et que la concentration d'au moins un ion varie, on peut suivre l'évolution de l'avancement de la transformation chimique grâce à un suivi de la **conductance** G (en siemens S) ou de la **conductivité** σ (en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) de la solution électrolytique.

La conductivité de la solution s'écrit : $\boxed{\sigma = \sum_{i,\text{ions}} \lambda_i \times c_i}$

où λ_i est la conductivité ionique molaire de l'ion i (en $\text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$) et c_i la concentration molaire de l'ion i en solution (en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$).

G et σ sont reliées par $G = k_{\text{cell}} \times \sigma$, où k_{cell} est la **constante de cellule** de la sonde du conductimètre (en m).



⇨ **Méthode 14.10. Établissement de l'équation horaire pour la grandeur mesurée**

■ Comment exploiter des données expérimentales pour déterminer une vitesse de réaction ?

❑ Méthode 14.1. Détermination graphique de la vitesse de réaction

– Tracer la courbe $[A_i] = f(t)$, où $[A_i]$ est la concentration du réactif ou du produit dont on a fait le suivi expérimental.

– Tracer la tangente à la courbe $[A_i] = f(t)$ à la date t_n considérée.

– Calculer le coefficient directeur de la tangente : $\left.\frac{d[A_i]}{dt}\right|_{t_n} = \frac{\Delta[A_i]}{\Delta t}$.

– En déduire la vitesse de réaction $v = \frac{1}{\nu_i}\frac{d[A_i]}{dt}$.

⇨ Exercices 14.6, 14.7

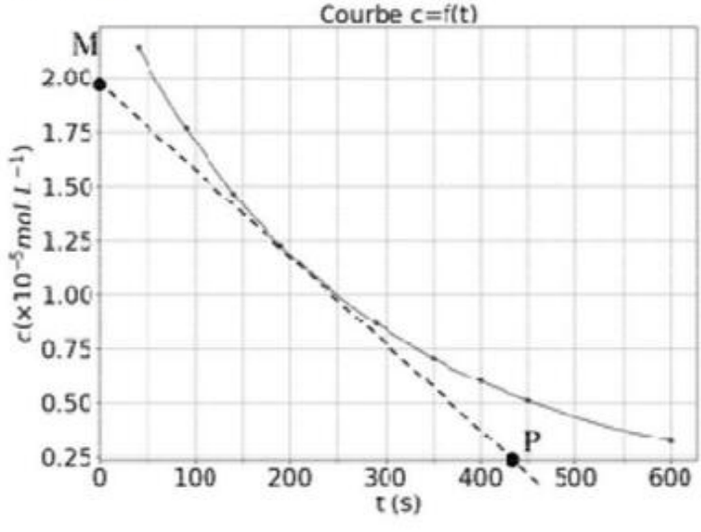
On étudie la cinétique de la décoloration en milieu basique d'un colorant, le violet cristallisé (noté V^+). L'équation de la réaction modélisant la transformation s'écrit :

$$V^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = VOH_{(aq)}$$

Une expérience a permis d'obtenir les résultats suivants.

t (s)	40	90	140	190	240	290	350	400	450	600
$[V^+]$ ($\times 10^{-5}$ mol·L^{-1})	2,14	1,77	1,47	1,23	1,03	0,87	0,71	0,60	0,51	0,33

Traçons la courbe $[V^+] = f(t)$.



Par définition, la vitesse de la réaction s'écrit : $v = -\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{V}^+]}{\mathrm{d}t}$.

Pour déterminer la vitesse de la réaction à la date $t = 200$ s, on trace la tangente à la courbe à cette date. Les points $M(0\text{ s} ;\ 2{,}00\cdot10^{-5}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$ et $P(430\text{ s} ;\ 0{,}25\cdot10^{-5}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$ appartiennent à cette droite. On peut ainsi calculer la vitesse de la réaction :

$$v(200\text{ s}) = -\frac{2{,}00\cdot10^{-5} - 0{,}25\cdot10^{-5}}{-430} = 4{,}1\cdot10^{-8}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}.$$

❑ Méthode 14.2. Détermination numérique de la vitesse de réaction

– Récupérer les données expérimentales relatives au suivi d'une concentration d'un réactif ou d'un produit au cours du temps (ou au suivi d'une grandeur reliée à cette concentration).

– Si on souhaite tracer l'évolution temporelle de la concentration d'un réactif ou d'un produit à partir des données à l'aide d'un langage de programmation, écrire le script permettant de tracer la courbe $[\mathrm{A}_i] = f(t)$.

– Exprimer la vitesse de réaction en fonction de la concentration du réactif ou du produit A_i dont a fait le suivi expérimental et calculer des valeurs approchées des vitesses aux différentes dates selon : $v(t_n) \approx \dfrac{1}{\nu_i}\dfrac{[\mathrm{A}_i]_{t_{n+1}} - [\mathrm{A}_i]_{t_{n-1}}}{t_{n+1} - t_{n-1}}$.

– Si on le souhaite, écrire le script permettant de tracer la courbe $v = f(t)$.

⇨ Exercice 14.7

On étudie toujours la cinétique de la décoloration en milieu basique du violet cristallisé :

$$\mathrm{V}^+_{(aq)} + \mathrm{HO}^-_{(aq)} = \mathrm{VOH}_{(aq)}$$

Le suivi cinétique a été réalisé par spectrophotométrie, en mesurant l'absorbance du mélange réactionnel à $\lambda = 580$ nm au cours du temps. À cette longueur d'onde, seule l'espèce V^+ absorbe, avec un coefficient d'extinction molaire $\varepsilon = 8{,}7\cdot10^4\ \text{L}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}$. Le fichier `'C:\abs.txt'` contient les résultats expérimentaux sous forme de deux colonnes, la première contenant les valeurs des dates (en s), la seconde contenant les valeurs de l'absorbance.

Le script Python suivant permet de calculer les valeurs de la vitesse de réaction à différentes dates et de tracer l'évolution temporelle de la vitesse de réaction.

```
#Importation des modules nécessaires
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

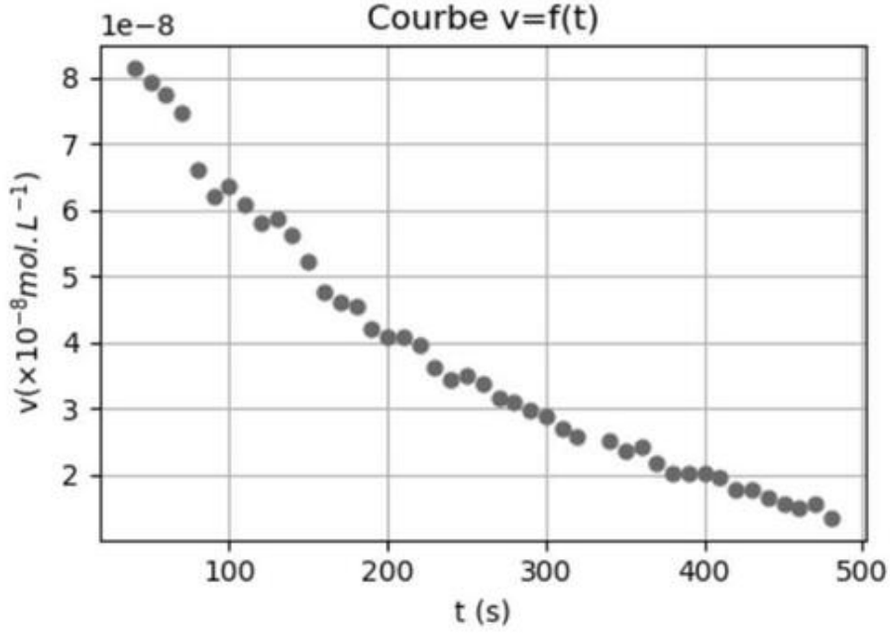
#Récupération des données
res = np.loadtxt('C:\abs.txt') #chargement des données du fichier abs.txt
t = res[:,0] # le tableau t contient les données de la première colonne
A = res[:,1] # le tableau A contient les données de la deuxième colonne

epsilon=8.7e4 #coefficient d'extinction molaire
L=1 #largeur de la cuve
c=A/(epsilon*L) # le tableau c contient les valeurs de concentrations
```

```
#Création de la liste des vitesses
#Création d'une liste des temps de même taille
vitesse=[]
temps=[]
for i in range(1,len(t)-1):
    vitesse.append(-(c[i+1]-c[i-1])/(t[i+1]-t[i-1]))
    temps.append(t[i])

plt.plot(temps,vitesse, linestyle = 'none', marker = 'o', markersize = 5)

plt.title('Courbe v=f(t)')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('v'+ r'$(\times 10^{-8} mol.L^{-1})$')
plt.grid()
plt.show()
```



■ Comment utiliser la loi d'Arrhenius ?

❑ Méthode 14.3. Calcul de l'énergie d'activation d'une réaction

Si on dispose de deux couples de valeurs (T_1,k_1) et (T_2,k_2) correspondant aux valeurs de la constante de vitesse d'une réaction à deux températures différentes, la loi d'Arrhenius nous permet d'écrire (le facteur préexponentiel étant constant) :

$k_1 = A\exp\left(-\frac{E_a}{RT_1}\right)$ et $k_2 = A\exp\left(-\frac{E_a}{RT_2}\right)$. Le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ permet de calculer l'énergie d'activation de la réaction.

⇨ Exercice 14.9

On dispose des valeurs suivantes pour la constante de vitesse associée à la décomposition du peroxyde d'hydrogène $H_2O_{2(aq)}$, à deux températures différentes : $k_1(25\ °C) = 7{,}3\cdot10^{-4}\ s^{-1}$ et $k_2(25\ °C) = 7{,}6\cdot10^{-3}\ s^{-1}$.

D'après la loi d'Arrhenius, en notant $T_1 = 273+25 = 298\ K$ et $T_2 = 273+50 = 323\ K$:

$k_1 = A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT_1}\right)$ et $k_2 = A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT_2}\right)$.

On en déduit : $\dfrac{k_1}{k_2} = \exp\left(-\dfrac{E_a}{R}\left(\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_2}\right)\right) \Leftrightarrow E_a = -R\dfrac{\ln\dfrac{k_1}{k_2}}{\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_2}}$. AN $\boxed{E_a = 75\ kJ\cdot mol^{-1}}$.

❑ Méthode 14.4. Détermination graphique d'une énergie d'activation

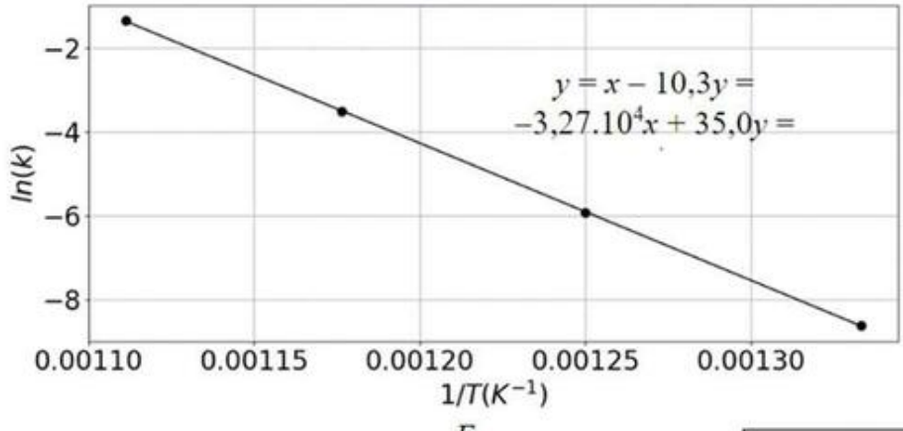
Si l'énergie d'activation est indépendante de la température, on a à partir de la loi d'Arrhenius : $\ln k = -\dfrac{E_a}{RT} + \ln A$. On trace donc la courbe $\ln k = f\left(\dfrac{1}{T}\right)$, à partir de plusieurs couples de valeurs (T,k) obtenus expérimentalement : le coefficient directeur de la droite obtenue est égal à $-\dfrac{E_a}{R}$.

⇨ Exercices 14.4, 14.5

On dispose des données suivantes pour la réaction de conversion du cyclopropane en propène.

T (K)	750	800	850	900
k (s^{-1})	$1{,}8\cdot10^{-4}$	$2{,}7\cdot10^{-3}$	$3{,}0\cdot10^{-2}$	$2{,}6\cdot10^{-1}$

Faisons une régression linéaire de $\ln k = f\left(\dfrac{1}{T}\right)$ à partir des valeurs du tableau.



On obtient une droite de coefficient directeur $-\dfrac{E_a}{R} = -32700\ K$ d'où $\boxed{E_a = 272\ kJ\cdot mol^{-1}}$.

■ Comment exploiter les conditions initiales pour simplifier une loi de vitesse ?

❑ Méthode 14.5. Cas de réactifs introduits dans les proportions stœchiométriques

– Vérifier que les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques à partir des valeurs des concentrations initiales ; en déduire la relation qui lie ces concentrations à chaque instant.
– Faire apparaître dans l'expression de la vitesse une seule des concentrations : l'ordre global doit alors apparaître en exposant de cette concentration.

⇨ Exercices 14.7, 14.8, 14.10

On suppose que la réaction de substitution de l'iodoéthane par les ions hydroxyde, d'équation :

$$C_2H_5I + HO^- = C_2H_5OH + I^-$$

admet des ordres partiels par rapport à chacun des réactifs. La vitesse est donc de la forme :

$$v = k \cdot [C_2H_5I]^{\alpha}[HO^-]^{\beta}.$$

Considérons une expérience où C_2H_5I et HO^- ont été introduits à la même concentration initiale c_0 : alors $[C_2H_5I]_0 = [HO^-]_0 = c_0$, et à chaque instant, d'après le tableau d'avancement, $[C_2H_5I] = [HO^-]$. L'expression de v devient dans ces conditions : $v = k \times [C_2H_5I]^{\alpha+\beta}$.
On peut alors déterminer $\alpha + \beta$ à l'aide des méthodes 14.7 à 14.9.

❑ Méthode 14.6. Cas de dégénérescence de l'ordre

– Vérifier que l'un des réactifs a été introduit en large excès dans le mélange réactionnel à partir des valeurs des concentrations initiales : on peut alors considérer que sa concentration reste à peu près constante au cours du temps.
– Faire apparaître dans l'expression de la vitesse une constante de vitesse apparente k_{app} contenant la (ou les) concentration(s) qui ne varie(nt) pas. On se ramène alors à la détermination d'un seul ordre partiel.

⇨ Exercices 14.6, 14.8, 14.10

On étudie la même réaction qu'à la méthode 14.5. Considérons une expérience où le mélange réactionnel contient initialement des ions hydroxyde à la concentration $[HO^-]_0 = 0{,}35\ mol \cdot L^{-1}$ et de l'iodoéthane à la concentration $[C_2H_5I]_0 = 0{,}010\ mol \cdot L^{-1}$.
On constate que $[HO^-]_0 \gg [C_2H_5I]_0$: les ions hydroxyde ont été introduits en large excès par rapport à l'iodoéthane. Alors leur concentration variera peu au cours de la transformation et $[HO^-] \approx [HO^-]_0$, il y a dégénérescence de l'ordre par rapport aux ions hydroxyde.
L'expression de v devient dans ces conditions : $v = k_{app} \cdot [C_2H_5I]^{\alpha}$ avec $k_{app} = k \cdot [HO^-]_0^{\beta}$.
On peut alors déterminer α à l'aide des méthodes 14.7 à 14.9.

■ Comment déterminer un ordre partiel ou global ?

On considère la réaction d'équation : $|\nu_A| A = \text{produits}$, dont la vitesse s'écrit : $v = k \cdot [A]^\alpha$.

❑ Méthode 14.7. Méthode différentielle

La loi de vitesse peut être linéarisée sous la forme : $\ln v = \ln k + \alpha \ln[A]$.
À partir de plusieurs couples de valeurs $([A], v)$ obtenus expérimentalement, tracer la courbe $\ln v = f(\ln[A])$ (on pourra utiliser une régression linéaire) : le coefficient directeur de la droite obtenue est égal à α.

⇨ Exercices 14.6, 14.7

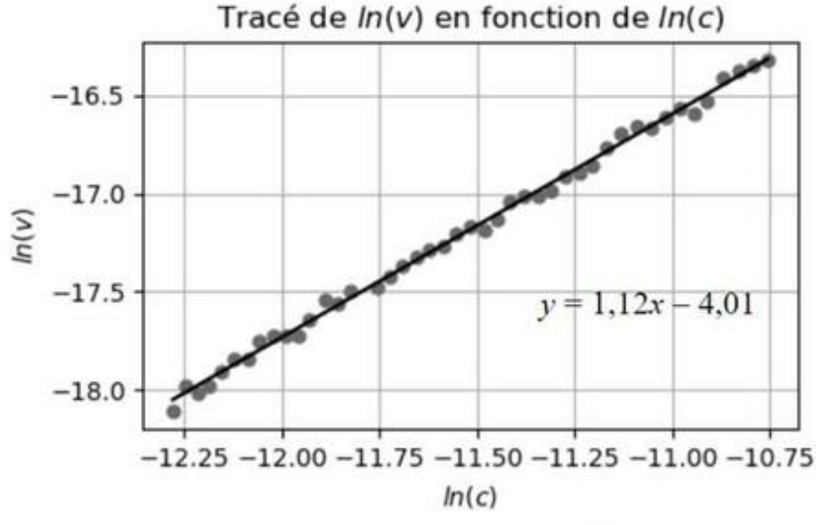
Reprenons le suivi cinétique de la décoloration en milieu basique du violet cristallisé (V^+), étudié dans la méthode 14.1 : $V^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = VOH_{(aq)}$

On indique que les résultats expérimentaux ont été obtenus en réalisant la transformation en présence d'un large excès de soude. Nous avons pu calculer à partir des données expérimentales la concentration de V^+ à différentes dates, ainsi que la vitesse de réaction. Nous souhaitons déterminer l'ordre partiel de la réaction par rapport à V^+. Cet ordre est supposé entier.
D'après la méthode 14.6, la loi de vitesse peut s'écrire sous la forme : $v = k_{app} \cdot [V^+]^\alpha$ avec $k_{app} = k \cdot [HO^-]^\alpha$. On peut alors linéariser la loi de vitesse selon $\ln v = \ln k_{app} + \alpha \ln[V^+]$.

On donne dans le tableau ci-dessous quelques couples de valeurs obtenus.

$[V^+]$ ($\times 10^{-5}$ mol·L^{-1})	2,14	1,98	1,83	1,70	1,58	1,47	1,36	1,27	1,19	1,10
v ($\times 10^{-8}$ mol·L^{-1}·s^{-1})	8,16	7,76	6,60	6,38	5,80	5,63	4,77	4,54	4,08	3,62

On réalise le tracé de la courbe $\ln v = f(\ln[V^+])$, ainsi qu'une régression linéaire (à l'aide de la fonction `polyfit` de la bibliothèque `numpy` de Python) à partir des valeurs expérimentales.



D'après l'équation de la droite obtenue, il est raisonnable de considérer, si α est entier : $\boxed{\alpha = 1}$.

❑ Méthode 14.8. Méthode intégrale

– Écrire la loi de vitesse correspondant à l'ordre de réaction que l'on souhaite vérifier (0, 1 ou 2).
– Intégrer la loi de vitesse.
– Identifier la fonction de [A] qui est une fonction affine du temps.
– Tracer la courbe correspondante à partir de plusieurs couples de valeurs $(t,[\mathrm{A}])$ obtenus expérimentalement. Si c'est une droite, l'hypothèse sur l'ordre est vérifiée.
– La valeur de la constante de vitesse de la réaction peut être déterminée à partir du coefficient directeur de la droite.

⇨ Exercices 14.5, 14.8, 14.11

Reprenons une fois de plus le suivi cinétique de la décoloration en milieu basique du violet cristallisé. Utilisons la méthode intégrale pour confirmer la valeur de l'ordre partiel de la réaction par rapport à V^+.

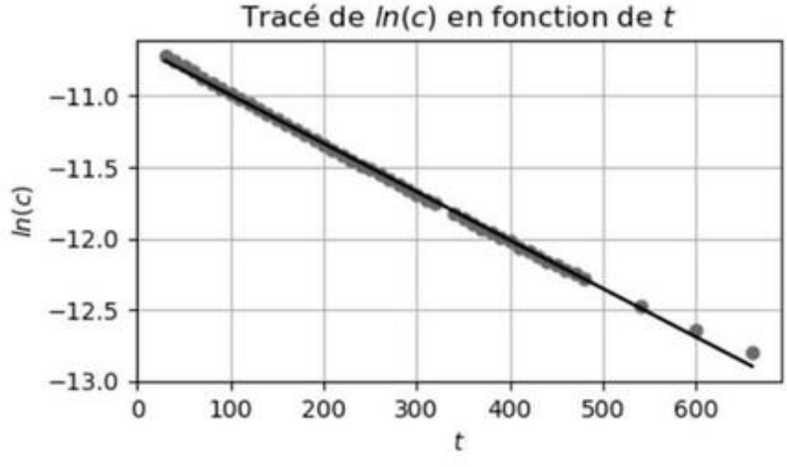
Si la réaction est d'ordre 1, la vitesse s'écrit : $v = k_{\mathrm{app}} \cdot [\mathrm{V}^+]$.

Intégrons la loi de vitesse :

$$v = -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{V}^+]}{\mathrm{d}t} = k_{\mathrm{app}} \cdot [\mathrm{V}^+] \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{V}^+]}{[\mathrm{V}^+]} = k_{\mathrm{app}}\,\mathrm{d}t \text{ d'où } -\int_{[\mathrm{V}^+]_0}^{[\mathrm{V}^+]} \frac{\mathrm{d}[\mathrm{V}^+]}{[\mathrm{V}^+]} = k_{\mathrm{app}} \int_0^t \mathrm{d}t$$

soit $\ln[\mathrm{V}^+] = -k_{\mathrm{app}} \cdot t + \ln[\mathrm{V}^+]_0$.

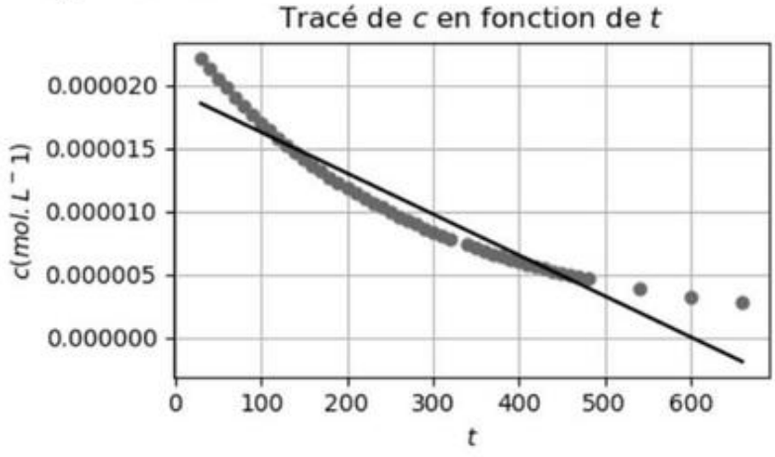
On réalise le tracé de la courbe $\ln[\mathrm{V}^+] = f(t)$, ainsi qu'une régression linéaire (à l'aide de la fonction `polyfit` de la bibliothèque `numpy` de Python) à partir des valeurs expérimentales.



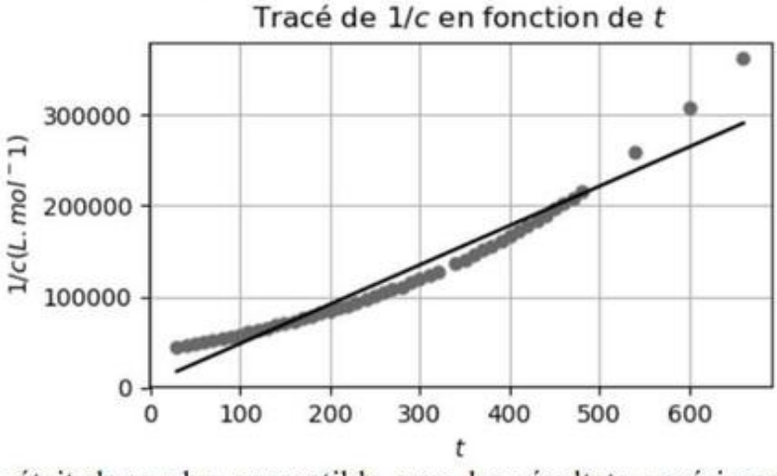
La prise en compte des incertitudes (principalement liées ici à la mesure de l'absorbance, dont on a tiré les valeurs de concentrations), par exemple par le tracé des résidus normalisés, serait un plus pour conclure sur l'adéquation entre les valeurs expérimentales et le modèle affine.

Si on avait supposé un ordre $\alpha = 0$ ou un ordre $\alpha = 2$, on aurait obtenu les équations horaires et les courbes suivantes.

– Ordre 0 : $[V^+] = -k_{app} \cdot t + [V^+]_0$



– Ordre 2 : $\frac{1}{[V^+]} = k_{app} \cdot t + \frac{1}{[V^+]_0}$



Le premier modèle était donc plus compatible avec les résultats expérimentaux que ces deux modèles-ci. Dans le cadre du programme, on considèrera donc ici : $\boxed{\alpha = 1}$.

❑ Méthode 14.9. Méthode des temps de demi-réaction

Si le temps de demi-réaction est indépendant de $[A]_0$, on a directement $\alpha = 1$.
S'il dépend de $[A]_0$ on procède de la façon suivante.

– Faire une hypothèse sur l'ordre de la réaction (0 ou 2 en général).
– Obtenir l'expression de $t_{1/2}$ en fonction de $[A]_0$.
– Vérifier la dépendance du temps de demi-réaction $t_{1/2}$ par rapport à la concentration initiale en réactif $[A]_0$ à partir de plusieurs couples de valeurs $([A]_0, t_{1/2})$, et conclure sur l'ordre de la réaction. Cette vérification peut être numérique ou graphique.

⇨ **Exercices 14.9, 14.10**

On suppose que la réaction de décomposition du dioxyde d'azote NO_2, d'équation :

$$NO_{2(g)} = NO_{(g)} + \frac{1}{2}O_{2(g)}$$

admet un ordre. La vitesse s'écrit donc : $v = k \cdot [NO_2]^{\alpha}$.

Plusieurs expériences, menées à 300 °C, ont permis d'obtenir les résultats suivants :

$[NO_2]_0$ ($\times 10^{-3}$ mol·L^{-1})	2,0	5,0	8,0	12	15
$t_{1/2}$ (s)	480	190	120	81	64

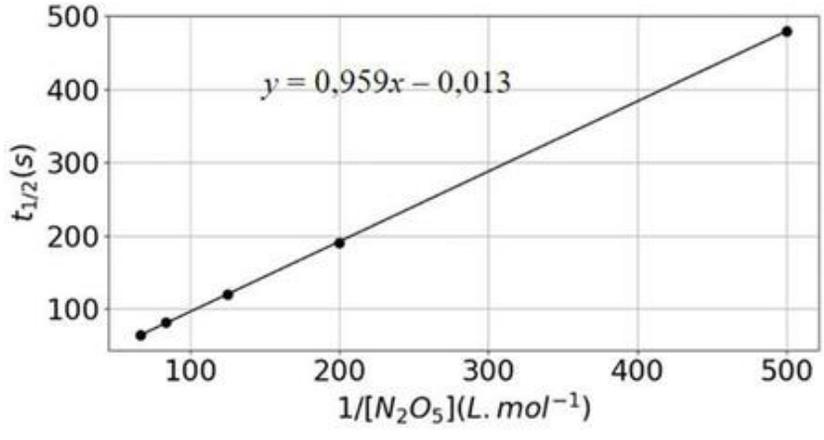
On constate que la valeur du temps de demi-réaction dépend de $[NO_2]_0$.

Supposons que $\alpha = 2$. On montre à partir de la loi de vitesse : $t_{1/2} = \frac{1}{k \times [A]_0}$, le temps de demi-réaction est inversement proportionnel à la concentration initiale. Vérifions que les résultats expérimentaux sont en accord avec cette dépendance, en calculant $k = \frac{1}{t_{1/2} \times [A]_0}$ pour toutes les expériences.

$[NO_2]_0$ ($\times 10^{-3}$ mol·L^{-1})	2,0	5,0	8,0	12	15
k (L·mol^{-1}·s^{-1})	1,04	1,05	1,04	1,03	1,04

La valeur trouvée est quasiment constante, on peut considérer que $\alpha = 2$. La moyenne des valeurs de k conduit à $k = 1{,}04$ L·mol^{-1}·s^{-1}.

Une autre méthode consiste à faire une régression linéaire de $t_{1/2} = f\left(\frac{1}{[NO_2]_0}\right)$ à partir des valeurs du tableau.



Le modèle semble compatible avec les données, on peut considérer que l'hypothèse sur l'ordre 2 est vérifiée.

Dans les deux méthodes utilisées, la connaissance de l'incertitude-type sur les valeurs des concentrations et des temps de demi-réaction serait nécessaire pour valider le modèle et exprimer k avec l'incertitude-type associée. La plupart des exercices ne contenant pas ces données, nous retiendrons un critère visuel pour vérifier l'accord entre les données et le modèle.

Si on dispose expérimentalement de la courbe $[NO_2] = f(t)$, on peut déterminer les valeurs de $t_{1/2}$ à partir de différents instants de la réaction, ce qui revient à avoir différentes valeurs de concentrations initiales. La méthode précédente peut alors être appliquée (attention, la loi de vitesse doit au préalable avoir été mise sous la forme $v = k_{app} \cdot [A]^{\alpha}$).

■ Comment exploiter des relevés expérimentaux (absorbance, conductivité) pour vérifier une loi de vitesse ?

❑ Méthode 14.10. Établissement de l'équation horaire pour la grandeur mesurée

– Relier la grandeur étudiée aux concentrations des espèces présentes dans le milieu réactionnel ou à l'avancement volumique de la réaction.
– Donner l'expression de la grandeur à différents instants : à la date $t = 0$, à la date t, au bout d'un temps infini.
– Exprimer l'équation horaire en fonction de la grandeur expérimentale. On peut alors exploiter les relevés expérimentaux.

⇨ Exercices 14.5, 14.8, 14.11, 14.12

La vitesse de la réaction d'hydrolyse du chlorure de tertiobutyle, d'équation :

$$(CH_3)_3CCl + H_2O = (CH_3)_3COH + H^+ + Cl^-$$

peut s'écrire : $v = k \times [(CH_3)_3CCl]$.

L'intégration de la loi de vitesse entre les dates $t = 0$ et t conduit à : $\ln \dfrac{[(CH_3)_3CCl]}{[(CH_3)_3CCl]_0} = -k \times t$.

À $t = 0$, on introduit quelques millilitres de chlorure de tertiobutyle dans un grand volume d'eau ; la concentration initiale en chlorure de tertiobutyle dans la solution est notée c_0.

	$(CH_3)_3CCl$	$+ H_2O$	$\rightarrow (CH_3)_3COH$	$+ H^+$	$+ Cl^-$
$t = 0$	c_0	excès	0	0	0
t	$c_0 - x$	excès	x	x	x
$t \rightarrow \infty$	0	excès	c_0	c_0	c_0

L'équation horaire devient : $\ln \dfrac{c_0 - x}{c_0} = -k \times t$.

En négligeant la contribution des ions HO^- à la conductivité de la solution, on peut écrire :

$\sigma(t) = \lambda_{H^+} \times x + \lambda_{Cl^-} \times x = (\lambda_{H^+} + \lambda_{Cl^-}) \times x$ et

$\sigma_\infty = \lambda_{H^+} \times c_0 + \lambda_{Cl^-} \times c_0 = (\lambda_{H^+} + \lambda_{Cl^-}) \times c_0$.

On constate que $\dfrac{\sigma_\infty - \sigma(t)}{\sigma_\infty} = \dfrac{c_0 - x}{c_0}$, d'où $\boxed{\ln \dfrac{\sigma_\infty - \sigma(t)}{\sigma_\infty} = -k \times t}$.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Pour une réaction donnée, les vitesses de disparition des différents réactifs sont toujours égales.	☐	☐
2.	L'unité de la vitesse de réaction dépend de l'ordre de la réaction.	☐	☐
3.	Pour une réaction d'équation $A = \text{produits}$, d'ordre 1 par rapport à A, la vitesse de la réaction est divisée par 2 lorsque la concentration en A est divisée par 2.	☐	☐
4.	La constante de vitesse d'une réaction d'ordre 2 peut s'exprimer en $L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$.	☐	☐
5.	Une réaction sans ordre courant peut posséder un ordre initial.	☐	☐
6.	Le temps de demi-réaction d'une réaction d'équation A = B d'ordre 1 est indépendant de la concentration initiale de A.	☐	☐
7.	Pour la réaction d'équation $A = \text{produits}$, d'ordre 2 par rapport à A, la concentration en A à la date $t = 2t_{1/2}$ est égale à $[A]_0/4$.	☐	☐
8.	Pour une réaction se déroulant en phase gazeuse, le temps de demi-réaction est le temps au bout duquel la pression totale est divisée par 2.	☐	☐
9.	L'utilisation de la méthode intégrale pour déterminer l'ordre partiel de la réaction d'équation $A = \text{produits}$ nécessite la connaissance des valeurs des vitesses à différents instants de la réaction.	☐	☐
10.	Pour une réaction d'équation $A + B = \text{produits}$ d'ordre 1 par rapport à chaque réactif, l'introduction de A en grand excès permet d'écrire $v = k \times [A]$ en négligeant [B].	☐	☐

■ Exploitation de la loi de vitesse

❑ Exercice 14.1. Dégradation photochimique de pesticides

Le thiabendazole, le diazinon et le diméthoate sont des pesticides très utilisés dans l'agriculture en Côte d'Ivoire. Pour limiter la pollution des eaux naturelles par ces composés, des processus de dégradation par voie photochimique ont été étudiés notamment dans la thèse de Donafologo SORO (2012). L'étude cinétique de la photolyse de ces trois polluants a été menée à $\lambda = 254$ nm, à 25 °C. Le processus de dégradation de chaque pesticide suit une cinétique d'ordre apparent 1, dont la constante de vitesse à 25 °C est donnée ci-dessous.



	k_{app} (min^{-1})
thiabendazole	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$
diazinon	$9{,}4 \cdot 10^{-3}$
diméthoate	$6{,}9 \cdot 10^{-2}$

1. Établir l'équation horaire $\frac{c}{c_0} = f(t)$, où c_0 et c sont respectivement les concentrations du pesticide à l'instant $t = 0$ et à l'instant t.

2. Compléter le script Python ci-après, permettant de tracer la courbe $\frac{c}{c_0} = f(t)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

kapp1,kapp2,kapp3 = ................

t = np.linspace(0,400,50)
c_sur_c0_1 = ................
c_sur_c0_2 = ................
c_sur_c0_3 = ................

plt.plot(................)
plt.plot(................)
plt.plot(................)
plt.title('Tracé de  $c/c_0=f(t)$')
plt.xlabel(.........)
plt.ylabel(.........)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

3. Déterminer graphiquement, puis par le calcul, le temps de demi-vie de chaque pesticide. Commenter.

❑ Exercice 14.2. Dismutation des ions hypobromite

La réaction d'équation $3\ BrO^-_{(aq)} = BrO^-_{3\,(aq)} + 2\ Br^-_{(aq)}$ admet un ordre, et a une constante de vitesse égale à $5{,}61 \cdot 10^{-2}\ L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$ à 25 °C.

1. Exprimer les vitesses de formation des produits de la réaction et la vitesse de disparition du réactif. Quel est le lien entre la vitesse volumique de la réaction et ces vitesses ?

2. Quel est l'ordre de la réaction par rapport aux ions hypobromite BrO^- ? Écrire la loi de vitesse correspondante.

3. On part d'une solution contenant les ions BrO^- à la concentration $5{,}00 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.

a) Calculer le temps de demi-réaction.

b) Déterminer la composition du mélange réactionnel à la date $t = 3$ min.

c) À quelle date 75 % des ions hypobromite auront-ils été consommés ?

❑ Exercice 14.3. Décomposition de l'acide hypofluoreux*

L'acide hypofluoreux HOF gazeux, très instable, se décompose à température ambiante selon l'équation :

$$HOF_{(g)} = HF_{(g)} + \frac{1}{2}\ O_{2(g)}$$

La réaction est d'ordre 1 par rapport à HOF. Le temps de demi-réaction est égal à 30 min à 25 °C.

On introduit de l'acide hypofluoreux gazeux dans un récipient indéformable de volume $V = 1$ L maintenu à 25 °C. La pression initiale est égale à 0,100 bar.

1. Déterminer la pression partielle en HOF dans le récipient à la date $t = 45$ min.

2. Déterminer la pression totale dans le récipient à la même date.

■ Détermination de l'énergie d'activation d'une réaction

❑ Exercice 14.4. Réaction en phase gazeuse

La constante de vitesse de la réaction du dioxyde d'azote avec le monoxyde de carbone gazeux, d'équation : $NO_{2(g)} + CO_{(g)} = CO_{2(g)} + NO_{(g)}$, est déterminée à différentes températures.

T (K)	600	650	700	750	800
k ($L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$)	0,028	0,22	1,3	6,0	23

1. Déterminer l'énergie d'activation de la réaction, supposée indépendante de la température.

2. Calculer la constante de vitesse de la réaction à 685 K.

■ Détermination de l'ordre d'une réaction

❑ Exercice 14.5. Décomposition de la nitramide*

La réaction de décomposition de la nitramide en solution aqueuse, d'équation :

$NO_2NH_{2(aq)} = N_2O_{(g)} + H_2O_{(l)}$, admet une loi de vitesse de la forme : $v = k \times \dfrac{[NO_2NH_2]}{[H_3O^+]}$.

Elle est supposée totale.
On étudie la cinétique de la réaction à la température T, en partant d'une solution de nitramide tamponnée, en mesurant le volume de gaz N_2O – insoluble dans l'eau – libéré au cours du temps sous une pression constante $P = 1$ bar. Les résultats obtenus sont les suivants.

t (min)	0	5	10	15	20	25
V (mL)	0	3,35	6,13	8,45	10,4	12,0

Au bout d'un temps très long, le volume se stabilise à la valeur $V_\infty = 20{,}0$ mL.

1. Vérifier que les résultats expérimentaux sont en accord avec la loi de vitesse proposée.

2. En déduire la valeur de $\dfrac{k}{[H_3O^+]}$ à la température T.

3. Des expériences à différentes températures permettent de tracer le graphe $\ln(k) = f\left(\dfrac{1}{T}\right)$.

C'est une droite de pente $-1{,}3 \cdot 10^4$ K. Quelle grandeur peut-on en déduire ? La calculer.

Donnée : constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 14.6. Dégradation du méthylglucopyranoside*

La dégradation du méthyl-β-D-glucopyranoside (noté G) en milieu basique en présence de dioxygène suit une loi de vitesse de la forme : $v = -\dfrac{d[G]}{dt} = k[G]^\alpha[O_2]^\beta[HO^-]^\gamma$.

On réalise une expérience à 120 °C en maintenant la pression partielle en dioxygène constante $P = 3$ bar, avec les conditions initiales suivantes :
$[G]_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $[HO^-]_0 = 1{,}25\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
On détermine la vitesse de réaction et la concentration en G à différentes dates. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

$10^3 \times [G]\ (\text{mol}\cdot\text{L}^{-1})$	10,0	9,25	8,75	8,27	7,75	7,16	6,49	5,98
$10^3 \times v\ (\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{h}^{-1})$	9,62	9,28	8,74	8,34	7,76	7,22	6,64	5,82

1. Comment peut-on déterminer la vitesse de réaction à la date t, si l'on dispose de la courbe $[G] = f(t)$?

2. Déterminer l'ordre de la réaction par rapport à G, supposé entier.

❑ Exercice 14.7. Transformation d'oxydo-réduction*

On étudie la transformation chimique qui se déroule entre les ions Fe^{3+} et les ions iodure I^-, modélisée par la réaction d'équation : $2\ Fe^{3+}_{(aq)} + 2\ I^-_{(aq)} = 2\ Fe^{2+}_{(aq)} + I_{2(aq)}$

La réaction admet un ordre. L'expérience est menée dans un réacteur fermé maintenu à 25 °C. Les deux réactifs sont introduits à la même concentration initiale $c_0 = 2{,}20 \cdot 10^{-4}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

À intervalles de temps réguliers, on prélève quelques mL du mélange réactionnel, que l'on plonge dans un bain eau-glace, et on titre le diiode formé. La concentration en diiode aux instants considérés est donnée dans le tableau ci-après.

t (h)	0	5	10	20	30	60	90
$[I_2]$ ($\times 10^{-6}$ mol·L^{-1})	0	1,67	3,26	6,25	9,00	16,1	21,9

Les tracés et calculs relatifs aux questions suivantes pourront être réalisés à l'aide d'un tableur-grapheur, d'une calculatrice graphique ou d'un langage de programmation.

1. Quel facteur cinétique est mis en jeu dans le protocole d'analyse des échantillons ?
2. Tracer la courbe $[I_2] = f(t)$.
3. Déterminer graphiquement (ou numériquement) la valeur de la vitesse de la réaction aux différentes dates indiquées dans le tableau.
4. Écrire la loi de vitesse de la réaction. Comment se simplifie la loi de vitesse dans les conditions expérimentales choisies ?
5. Déterminer l'ordre global de la réaction (supposé entier) à l'aide de la méthode différentielle.

❑ Exercice 14.8. Saponification d'un ester* *

On cherche à déterminer l'ordre global de la réaction de saponification de l'acétate d'éthyle, ainsi que les ordres partiels par rapport à chacun des deux réactifs. La réaction étudiée a pour équation : $CH_3COOC_2H_5 + HO^- = CH_3COO^- + C_2H_5OH$

On mélange une solution de soude ($Na^+ + HO^-$) et une solution d'ester. Les concentrations initiales en ions hydroxyde et en ester dans le mélange réactionnel sont notées $[HO^-]_0$ et $[\text{ester}]_0$. On effectue deux manipulations avec des conditions initiales différentes. La réaction est suivie par conductimétrie pendant une dizaine de minutes, puis le mélange réactionel est chauffé à reflux pendant 30 min, puis refroidi pour mesurer la conductance finale G_∞. Les résultats expérimentaux sont indiqués ci-après.

Expérience 1 : $[\text{ester}]_0 = [HO^-]_0 = c_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1} ; $\theta = 20$ °C

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	∞
G (mS)	5,81	4,95	4,42	4,04	3,79	3,59	3,44	3,31	2,12

Expérience 2 : $[\text{ester}]_0 = c_0' = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1} ; $[HO^-]_0 = c_0 = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol·L^{-1} ; $\theta = 20$ °C

t (min)	0	2	4	6	8	10	∞
G (mS)	1,15	0,629	0,494	0,449	0,431	0,424	0,420

1. Justifier le protocole suivi pour accéder à la valeur de G_∞.
2. Donner l'expression de la loi de vitesse de la réaction. On notera respectivement α et β les ordres partiels de la réaction par rapport à l'ester et aux ions hydroxyde.
3. On note respectivement G_0, G et G_∞ la conductance du mélange réactionnel à l'instant initial, à un instant quelconque de la transformation et au bout d'un temps infini (on supposera la réaction totale). Montrer que $\dfrac{G - G_\infty}{G_0 - G_\infty} = \dfrac{c_0 - x}{c_0}$, où x est l'avancement volumique de la transformation et c_0 la concentration initiale en ions hydroxyde.
4. Montrer à partir des résultats de l'expérience 1 que l'ordre global de la réaction est égal à 2. En déduire la valeur de la constante de vitesse k à la température d'étude.

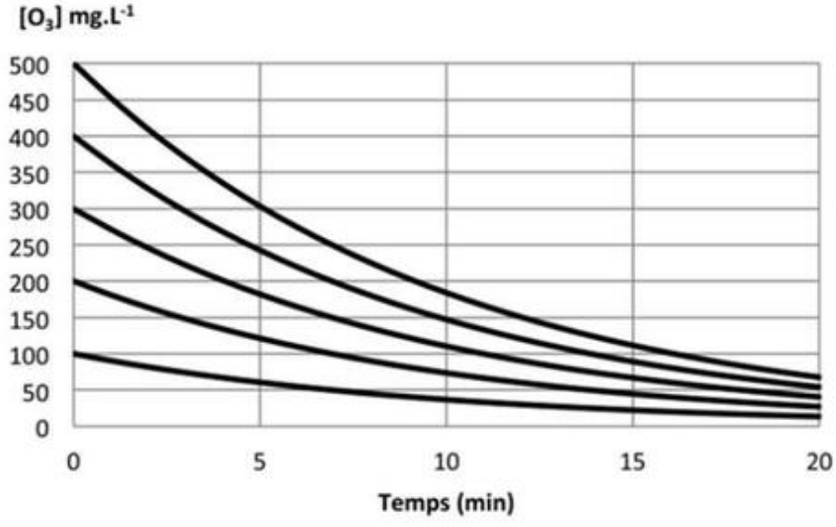
5. À partir des résultats de l'expérience 2, déterminer l'ordre partiel de la réaction par rapport aux ions hydroxyde.
6. Déduire des résultats précédents l'ordre partiel de la réaction par rapport à l'acétate d'éthyle.

❑ Exercice 14.9. Décomposition de l'ozone en solution aqueuse

Lors de la préparation d'eau potable, l'ozone O_3 joue le rôle de désinfectant et dégrade les substances organiques, ce qui leur confère une meilleure biodégradabilité.



La cinétique de la décomposition de l'ozone selon l'équation $O_{3(aq)} = \frac{3}{2} O_{2(aq)}$ est très sensible aux conditions opératoires et l'ordre de la réaction fait encore l'objet d'études. Les résultats suivants sont obtenus (à 20 °C et à pH 7,0) pour diverses concentrations initiales en ozone dissous en présence de charbon actif :



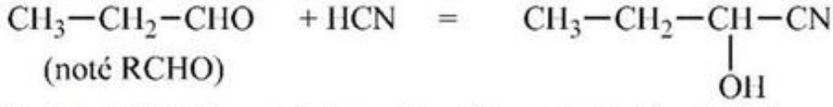
1. Retrouver l'expression du temps de demi-réaction $t_{1/2}$ dans le cas d'une réaction d'ordre 1.
2. À partir de la figure, déterminer l'ordre de la réaction. En déduire la valeur de la constante de vitesse à 20 °C en présence de charbon actif.
3. À 30 °C et pH 7,0, en présence de charbon actif, la constante de vitesse vaut 0,18 min^{-1}. En déduire l'énergie d'activation de la réaction.

Donnée : constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$.

D'après Banque PT

❑ Exercice 14.10. Synthèse d'une cyanhydrine* *

On étudie la cinétique de la réaction entre l'acide cyanhydrique HCN et le propanal CH_3CH_2CHO (noté RCHO par la suite), pour conduire à un composé organique appelé cyanhydrine. L'équation de la réaction est donnée ci-dessous :



La réaction est effectuée à 25 °C en maintenant le pH constant et égal à 4,2.

Six expériences ont été réalisées, pour des valeurs différentes des concentrations initiales en acide cyanhydrique et en propanal. La concentration initiale en acide cyanhydrique HCN est notée c_0 et la concentration initiale en propanal est notée c_1. Pour chaque expérience, on a mesuré le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant.

Expérience n°	1	2	3	4	5	6
c_0 (mol · L^{-1})	0,20	0,20	0,10	0,05	0,10	0,10
c_1 (mol · L^{-1})	0,20	0,01	0,10	0,05	0,005	0,001
$t_{1/2}$ (s)	950	660	1900	3800	1320	1320

On note α et β les ordres partiels respectifs de la réaction par rapport à HCN et au propanal. La vitesse de la réaction admet donc une expression de la forme : $v = k_{obs} \times [HCN]^{\alpha} \times [RCHO]^{\beta}$, où k_{obs} est la constante de vitesse observée dans les conditions expérimentales précisées ci-dessus.

1. Parmi les six expériences réalisées, lesquelles permettent de déterminer l'ordre global de la réaction ? Justifier.

2. Montrer que l'ordre global de la réaction est égal à 2.

3. Dans quelles conditions expérimentales doit-on se placer pour déterminer séparément la valeur de l'un des ordres partiels, α ou β ? Expliquer brièvement pourquoi.

4. Montrer qu'à partir de certains résultats du tableau on peut déterminer les valeurs de α et β. Montrer que $\alpha = \beta = 1$.

5. Déterminer la valeur de la constante de vitesse k_{obs} à 25 °C.

D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 14.11. Décomposition thermique de l'éthanal* *

La décomposition thermique de l'éthanal fournit du méthane et du monoxyde de carbone selon la réaction totale suivante, en phase gazeuse : $CH_3CHO_{(g)} = CH_{4(g)} + CO_{(g)}$

Afin d'étudier la cinétique de cette décomposition, on introduit initialement de l'éthanal pur dans un réacteur de volume constant V = 82,0 L. La température du milieu réactionnel est maintenue à 477 °C. L'évolution de la décomposition est suivie par mesure de la pression totale du mélange gazeux en fonction du temps. On obtient les résultats suivants.

t (min)	0	4	9	14	20	26,5	34
P (hPa)	283	297	312	326	340	354	368

1. Calculer la quantité de matière d'éthanal présente initialement.

2. Déterminer la pression totale finale P_∞.

3. Montrer que la pression partielle de l'éthanal $P_{éth}$ à la date t s'écrit en fonction de la pression initiale P_0 et de la pression totale P à la date t selon : $P_{éth} = 2P_0 - P$.

4. On souhaite vérifier que la réaction est d'ordre 2. On note k la constante de vitesse de la réaction. Écrire la loi de vitesse relative à la concentration en éthanal, puis à la pression partielle en éthanal $P_{éth}$.

5. Intégrer cette loi de vitesse et en déduire une relation entre P (pression totale à la date t), P_0, t, k, R (constante des gaz parfaits) et T.

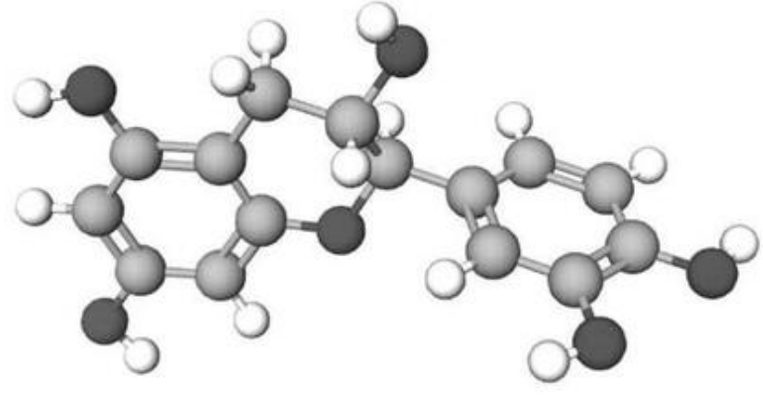
6. Vérifier que la réaction est bien d'ordre 2. Déterminer la valeur de sa constante de vitesse k.

Les gaz sont supposés parfaits, la constante des gaz parfaits vaut $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 14.12. Propriétés anti-oxydantes d'un flavonoïde * *

La catéchine (notée par la suite ΦOH), présente dans le thé vert, fait partie de la famille des flavonoïdes, notamment caractérisés par leur aptitude à réagir, en tant que réducteurs, avec les radicaux libres, oxydants puissants formés dans l'organisme par la dégradation de molécules telles que les protéines, l'ADN ou les phospholipides constituant les membranes lipidiques.

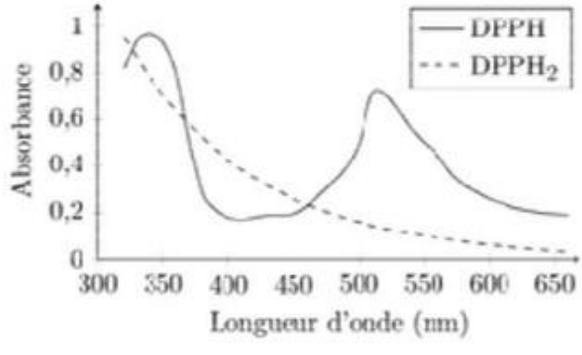


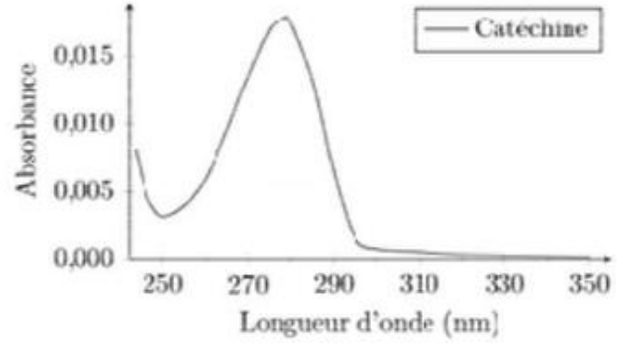


L'activité anti-oxydante de la catéchine peut être étudiée en utilisant le test au 2,2-diphenyl-1-picrylhydrazyl (noté DPPH) au cours duquel ce radical, relativement stable, est réduit en $DPPH_2$ suivant la réaction d'équation :

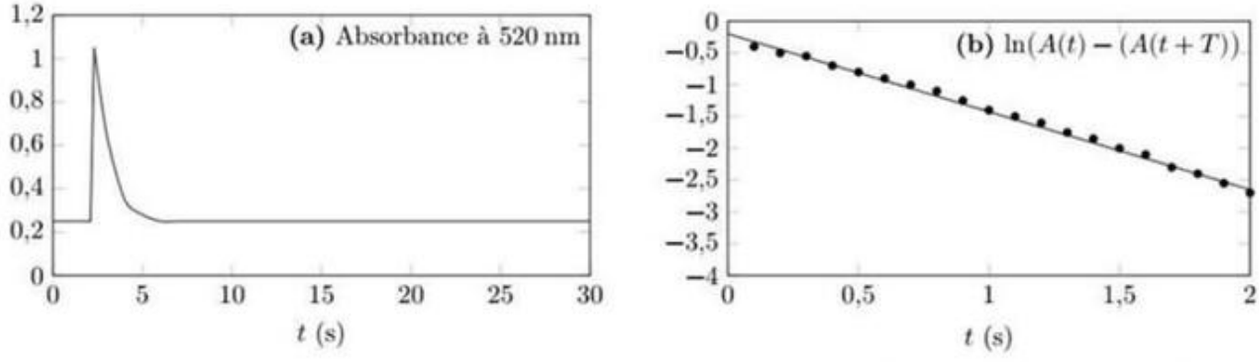
$$DPPH + \Phi OH = DPPH_2 + \Phi O^{\bullet}$$

On étudie, par suivi spectrophotométrique, la cinétique de cette réaction. À cet effet, on réalise, dans un premier temps, les spectres des formes oxydée et réduite du DPPH et de la catéchine.





L'étude de l'absorbance à 520 nm d'une solution de concentrations initiales $[\text{DPPH}]_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ mol·L^{-1} et $[\text{catéchine}]_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1} fournit les graphes ci-après.



(a) évolution temporelle de l'absorbance à 520 nm **(b)** transformée de Guggenheim : T est l'intervalle de temps constant entre deux mesures d'absorbance

1. Analyser les conditions expérimentales choisies. Conclure.
2. Dans l'hypothèse où la réaction admet un ordre 1 par rapport à chacun des réactifs, écrire l'expression de la loi de vitesse de la réaction dans le cadre des conditions expérimentales choisies.
3. Proposer une valeur pour la constante de vitesse de la réaction dans les conditions expérimentales choisies et dans le cadre de l'hypothèse proposée.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 14.2. Observer l'unité de la constante de vitesse.
Exercice 14.3. Question 2 : faire un tableau d'avancement et exprimer les pressions partielles et la pression totale en fonction de l'avancement.
Exercice 14.9. Déterminer le temps de demi-réaction pour chaque expérience.
Exercice 14.10. Question 2 : déterminer dans quelle expérience les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques.
Exercice 14.11. Faire un tableau d'avancement et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Exercice 14.12. Question 1 : justifier le choix de la longueur d'onde d'étude et des concentrations initiales. Question 3 : exprimer l'absorbance aux dates t et $t + T$ pour exploiter la figure fournie.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux	faux	faux

1. Prenons comme contre-exemple la réaction d'équation $2\,A + B = C + D$

La vitesse globale de la réaction vaut : $v = -\frac{1}{2}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$ d'où $v_{d,B} = \frac{1}{2}v_{d,A}$.

2. La vitesse de réaction s'exprime en $mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$. Par contre, l'unité de la constante de vitesse dépend de l'ordre de la réaction.

6. On montre $t_{1/2} = \ln 2/k$.

7. L'intégration de la loi de vitesse conduit à $\frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} = kt$. Le temps de demi-réaction vaut : $t_{1/2} = \frac{1}{k[A]_0}$. À la date $t = 2t_{1/2}$ on trouve alors $[A] = \frac{[A]_0}{3}$.

8. La valeur de la pression totale à la date $t_{1/2}$ dépend de la quantité de matière *totale* de gaz présente à cette date dans le mélange réactionnel, et non seulement de celle des réactifs. Dans le cas général, la pression totale à la date $t_{1/2}$ est donc différente de $P_0/2$.

9. L'utilisation de la méthode intégrale nécessite la connaissance des valeurs de [A] à différents instants de la réaction.

10. On ne néglige jamais une grandeur devant une autre dans un *produit* ! Ici ce qu'on peut dire est que [A] reste constante, et peut donc être incluse dans une constante de vitesse apparente ; ainsi, c'est la concentration [B], et non [A], qui « reste » dans la loi $v = k_{app} \times [B]$.

❑ Les erreurs classiques

– Attention aux erreurs de signe et à l'oubli des nombres stœchiométriques dans l'expression de la vitesse volumique de la réaction.
– Ne pas confondre l'ordre partiel par rapport à un réactif et le nombre stœchiométrique de ce réactif dans l'équation de réaction.
– Ne pas se tromper dans les unités SI à utiliser dans la loi des gaz parfaits et la loi d'Arrhenius. En particulier, l'énergie d'activation de la réaction est en fait une énergie *molaire* : elle s'exprime en $J \cdot mol^{-1}$ et non en J.

Exercice 14.1

1. Le processus de dégradation photochimique de chaque polluant suit une cinétique d'ordre apparent 1, la loi de vitesse peut donc s'écrire : $-\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_{\text{app}}\,c$, en notant c la concentration du pesticide à l'instant t. On sépare les variables et on intègre :

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} = -k_{\text{app}}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \int_{c_0}^{c}\frac{\mathrm{d}c}{c} = -k_{\text{app}}\int_0^t \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{c}{c_0} = -k_{\text{app}}t \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{c}{c_0} = e^{-k_{\text{app}}t}}.$$

2. Le script complété est fourni ci-dessous.

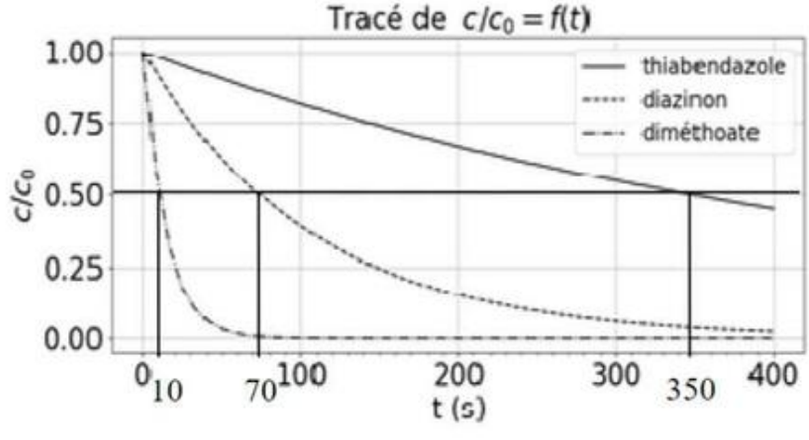
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Valeurs des constantes de vitesse
kapp1,kapp2,kapp3 = 2e-3,9.4e-3,6.9e-2

t = np.linspace(0,400,50) #Tableau des abscisses
c_sur_c0_1 = np.exp(-kapp1*t)  #Tableau des ordonnées pour chaque pesticide
c_sur_c0_2 = np.exp(-kapp2*t)
c_sur_c0_3 = np.exp(-kapp3*t)

plt.plot(t,c_sur_c0_1,label='thiabendazole') #Tracé de chaque courbe
plt.plot(t,c_sur_c0_2,label='diazinon')
plt.plot(t,c_sur_c0_3,label='diméthoate')
plt.title('Tracé de  $c/c_0=f(t)$')
plt.xlabel('t (s)')  #Légende axe des abscisses
plt.ylabel('$c/c_0$')   #Légende axe des ordonnées
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

3. Par définition, le temps de demi-vie du pesticide est la durée au bout de laquelle la concentration du pesticide est égale à la moitié de sa valeur initiale. On a donc $\dfrac{c(t_{1/2})}{c_0} = 0{,}5$.



On lit graphiquement les temps de demi-vie suivants.

	$t_{1/2}$ (min) lecture graphique	$t_{1/2}$ (min) calcul
thiabendazole	$3{,}5\cdot10^{2}$	$3{,}5\cdot10^{2}$
diazinon	70	74
diméthoate	10	10

En utilisant l'équation horaire : $\dfrac{c(t_{1/2})}{c_0}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=e^{-k_{app}t_{1/2}}\Leftrightarrow t_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{k_{app}}$. Les valeurs calculées ont été reportées dans le tableau ci-dessus et sont en adéquation avec celles lues graphiquement.

Exercice 14.2

1. Par définition, la vitesse de disparition des ions hypobromite est : $v_{d,BrO^-}=-\dfrac{d[BrO^-]}{dt}$.

La vitesse de formation vaut pour chacun des produits : $v_{f,BrO_3^-}=\dfrac{d[BrO_3^-]}{dt}$ et $v_{f,Br^-}=\dfrac{d[Br^-]}{dt}$.

La vitesse volumique de la réaction a pour expression :

$v=-\dfrac{1}{3}\dfrac{d[BrO^-]}{dt}=\dfrac{d[BrO_3^-]}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d[Br^-]}{dt}$. On en déduit : $\boxed{v=\dfrac{1}{3}v_{d,BrO^-}=v_{f,BrO_3^-}=\dfrac{1}{2}v_{f,Br^-}}$.

2. Effectuons une analyse dimensionnelle de la loi de vitesse, écrite sous la forme $v=k[BrO^-]^{\alpha}$ avec α l'ordre de la réaction. $[v]=[k][c]^{\alpha}$, soit $\left[\dfrac{N}{L^3\cdot T}\right]=\left[\dfrac{L^3}{N\cdot T}\left(\dfrac{N}{L^3}\right)^{\alpha}\right]$, d'où $\left[\left(\dfrac{N}{L^3}\right)^{\alpha}\right]=\left[\left(\dfrac{N}{L^3}\right)^{2}\right]$. On en déduit $\alpha = 2$: l'unité de cette constante de vitesse ($L\cdot mol^{-1}\cdot s^{-1}$) est caractéristique d'une réaction d'ordre 2. La loi de vitesse s'écrit : $\boxed{-\dfrac{1}{3}\dfrac{d[BrO^-]}{dt}=k[BrO^-]^2}$.

> *Le nombre stœchiométrique relatif au réactif est égal à 3, ne pas oublier d'en tenir compte dans l'expression de v.*

3. a) Pour résoudre l'équation différentielle, on sépare les variables et on intègre :

$-\dfrac{d[BrO^-]}{[BrO^-]^2}=3k\,dt\Rightarrow-\displaystyle\int_{[BrO^-]_0}^{[BrO^-]}\dfrac{d[BrO^-]}{[BrO^-]^2}=3k\int_0^t dt\Rightarrow\dfrac{1}{[BrO^-]}-\dfrac{1}{[BrO^-]_0}=3kt$.

Pour $t=t_{1/2}$, $[BrO^-]=\dfrac{[BrO^-]_0}{2}$ d'où $t_{1/2}=\dfrac{1}{3k[BrO^-]_0}$. AN $t_{1/2}=\dfrac{1}{3\times5{,}61\cdot10^{-2}\times5{,}0\cdot10^{-2}}$ soit $\boxed{t_{1/2}=119\text{ s}}$.

b) À la date $t = 3$ min, on a : $\frac{1}{[BrO^-]} = 3kt + \frac{1}{[BrO^-]_0}$ d'où $\boxed{[BrO^-] = \frac{1}{3kt + \frac{1}{[BrO^-]_0}}}$.

AN $\boxed{[BrO^-] = 1{,}99 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

c) Lorsque 75 % des ions hypobromite ont été consommés, la concentration des ions BrO^- en solution vaut : $[BrO^-] = \frac{[BrO^-]_0}{4}$. Alors $3kt = \frac{4}{[BrO^-]_0} - \frac{1}{[BrO^-]_0} = \frac{3}{[BrO^-]_0}$ d'où $\boxed{t = \frac{1}{k \times [BrO^-]_0}}$. AN $\boxed{t = 357 \text{ s}}$.

Exercice 14.3

On établit au préalable un tableau d'avancement de la transformation :

mol	$HOF_{(g)}$	$= HF_{(g)}$	$+ \frac{1}{2} O_{2(g)}$
à $t = 0$	n_0	0	0
à t	$n_0 - \xi$	ξ	$\frac{1}{2}\xi$

1. La concentration en HOF suit la loi de vitesse suivante : $-\frac{d[HOF]}{dt} = k[HOF]$.

On sépare les variables et on intègre :

$$\frac{d[HOF]}{[HOF]} = -k\,dt \Rightarrow \int_{[HOF]_0}^{[HOF]} \frac{d[HOF]}{[HOF]} = -k\int_0^t dt \Rightarrow [HOF] = [HOF]_0\, e^{-kt}.$$

La constante de vitesse de cette réaction d'ordre 1 est reliée au temps de demi-réaction par : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$. Donc $[HOF] = [HOF]_0 \exp\left(-\ln 2 \frac{t}{t_{1/2}}\right)$. La loi des gaz parfaits appliquée à HOF donne $[HOF] = \frac{P_{HOF}}{RT}$ (où P_{HOF} est la pression partielle en HOF à la date t) et $[HOF]_0 = \frac{P_0}{RT}$ (car seul HOF est présent initialement), d'où : $\boxed{P_{HOF} = P_0 \exp\left(-\ln 2 \frac{t}{t_{1/2}}\right)}$.

À la date $t = 45$ min, $\boxed{P_{HOF} = 3{,}54.10^{-2} \text{ bar}}$.

2. On peut relier la pression totale dans le récipient à la pression partielle en HOF. À une date t quelconque : $P_{tot} = \frac{n_{tot,gaz} \cdot RT}{V} = \left(n_0 + \frac{1}{2}\xi\right)\frac{RT}{V} = \left(\frac{3}{2}n_0 - \frac{1}{2}(n_0 - \xi)\right)\frac{RT}{V}$ donc $\boxed{P_{tot} = \frac{3}{2}P_0 - \frac{1}{2}P_{HOF}}$. À la date $t = 45$ min, $\boxed{P_{tot} = 1{,}32 \cdot 10^{-1} \text{ bar}}$.

Corrigé

Exercice 14.4

1. D'après la loi d'Arrhenius : $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}$, d'où $\ln k = -\dfrac{E_a}{RT} + \ln A$. Afin de déterminer l'énergie d'activation de la réaction en exploitant l'ensemble des valeurs du tableau, on trace la courbe $\ln k = f\left(\dfrac{1}{T}\right)$. Une régression linéaire donne une droite d'équation $\ln k = -1{,}61\cdot10^4 \cdot \dfrac{1}{T} + 23{,}2$. On en déduit $E_a = 1{,}61\cdot10^4 \cdot 8{,}314$, soit $\boxed{E_a = 1{,}34\cdot10^5\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}}$.

2. La valeur de k à 685 K peut être calculée à partir de l'expression de k écrite précédemment. On trouve : $\boxed{k(685\ \text{K}) = 7{,}4\cdot10^{-1}\ \text{L}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 14.4*

Exercice 14.5

1. La solution de nitramide est tamponnée, ce qui signifie que la réaction est menée à pH constant. La concentration en ions oxonium $[H_3O^+]$ est donc maintenue constante au cours de la réaction. Si on note $k' = \dfrac{k}{[H_3O^+]}$, il faut donc vérifier que la loi de vitesse est de la forme $v = k'[NO_2NH_2]$ (où k' est une constante) donc que la réaction est d'ordre 1 par rapport à la nitramide. Pour vérifier l'ordre de la réaction, on utilise la méthode intégrale. La loi de vitesse s'écrit : $-\dfrac{\text{d}[NO_2NH_2]}{\text{d}t} = k'\cdot[NO_2NH_2]$.

On sépare les variables et on intègre :

$$-\frac{\text{d}[NO_2NH_2]}{[NO_2NH_2]} = k'\cdot\text{d}t \Rightarrow -\int_{[NO_2NH_2]_0}^{[NO_2NH_2]}\frac{\text{d}[NO_2NH_2]}{[NO_2NH_2]} = k'\cdot\int_0^t \text{d}t \Rightarrow \ln\frac{[NO_2NH_2]}{[NO_2NH_2]_0} = -k'\cdot t.$$

Expérimentalement, on mesure le volume de gaz N_2O libéré par la réaction. Il s'agit donc de relier $[NO_2NH_2]$ et $[NO_2NH_2]_0$ à V et V_∞. Pour cela, on établit le tableau d'avancement de la transformation.

mol	$NO_2NH_{2(aq)}$	$= N_2O_{(g)}$	$+ H_2O_{(l)}$
à $t = 0$	n_0	0	excès
à t	$n_0 - \xi$	ξ	excès

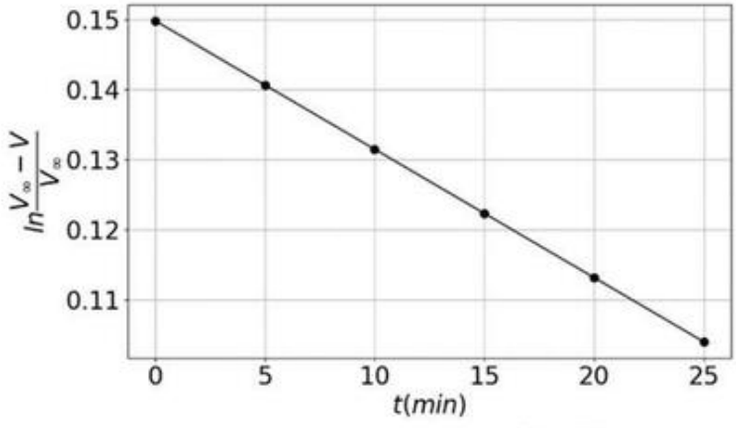
En considérant N_2O comme un gaz parfait : $V = \dfrac{\xi RT}{P}$ à un instant t quelconque, et $V_\infty = \dfrac{n_{N_2O,\infty}RT}{P} = \dfrac{n_0RT}{P}$ au bout d'un temps infini.

On en déduit $\dfrac{V_\infty - V}{V_\infty} = \dfrac{n_0 - \xi}{n_0} = \dfrac{[NO_2NH_2]}{[NO_2NH_2]_0}$. La loi de vitesse devient donc : $\ln\dfrac{V_\infty - V}{V_\infty} = -k't$.

⇨ *Méthode 14.10*

Si le tracé de la courbe $\ln\dfrac{V_\infty - V}{V_\infty} = f(t)$ donne une droite, alors la réaction est bien d'ordre 1 et la pente de la droite est égale à $-k'$.

t (min)	0	5	10	15	20	25
$\ln\dfrac{V_\infty - V}{V_\infty}$	0	–0,183	–0,366	–0,549	–0,734	–0,916



Une régression linéaire conduit à une droite d'équation $\ln\dfrac{V_\infty - V}{V_\infty} = -1{,}83\cdot10^{-3}t + 0{,}15$.

Le modèle semble compatible avec les données, on considère donc que la réaction est bien d'ordre 1. Les résultats sont en accord avec la loi de vitesse proposée.

⇨ *Méthode 14.8*

2. La pente de la droite est égale à $-k' = -3{,}67\cdot10^{-2}$ min^{-1} d'où $\boxed{\dfrac{k}{[H_3O^+]} = 3{,}67\cdot10^{-2}\ \text{min}^{-1}}$.

3. D'après la loi d'Arrhenius, $k = A\,e^{-\frac{E_a}{RT}}$, d'où : $\ln k = -\dfrac{E_a}{RT} + \ln A$. La courbe $\ln k = f\left(\dfrac{1}{T}\right)$ est donc une droite de pente $-\dfrac{E_a}{R} = -1{,}3\cdot10^4$ K. On en déduit $\boxed{E_a = 1{,}1\cdot10^5\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 14.4*

Exercice 14.6

1. Par définition, $v = -\dfrac{d[G]}{dt}$. Si l'on dispose de la courbe $[G] = f(t)$, la valeur de la vitesse de réaction à une date t est égale à l'opposé du coefficient directeur de la tangente à la courbe $[G] = f(t)$ à la date considérée.

2. La pression partielle en dioxygène est maintenue constante au cours de l'expérience, donc $[O_2] = \text{cte}$.

De plus, on constate que les ions hydroxyde sont introduits en large excès par rapport à G dans le mélange réactionnel ($[HO^-]_0 \gg [G]_0$). On peut donc considérer que la concentration en ions hydroxyde reste constante au cours de la réaction et égale à la concentration initiale :

$[HO^-] \approx [HO^-]_0$. La loi de vitesse peut donc se mettre sous la forme suivante : $v = k_{app}[G]^{\alpha}$ avec $k_{app} = k[O_2]^{\beta}[HO^-]^{\gamma}$ la constante apparente de vitesse. Pour déterminer l'ordre partiel de la réaction par rapport à G, on utilise la méthode différentielle. D'après la loi de vitesse, on a $\ln v = \alpha \times \ln([G]) + \ln k_{app}$. Le tracé de $\ln v = f(\ln([G]))$ nous permettra de déterminer α, égal au coefficient directeur de la droite obtenue.

ln([G])	–4,61	–4,68	–4,74	–4,80	–4,86	–4,94	–5,04	–5,12
$\ln v$	–4,64	–4,68	–4,74	–4,79	–4,86	–4,93	–5,01	–5,15

Une régression linéaire conduit à une droite d'équation $\ln v = 0{,}9713 \cdot \ln([G]) - 0{,}1420$.

En supposant que l'ordre partiel α est entier, on en déduit $\boxed{\alpha = 1}$.

⇨ *Méthodes 14.6 et 14.7*

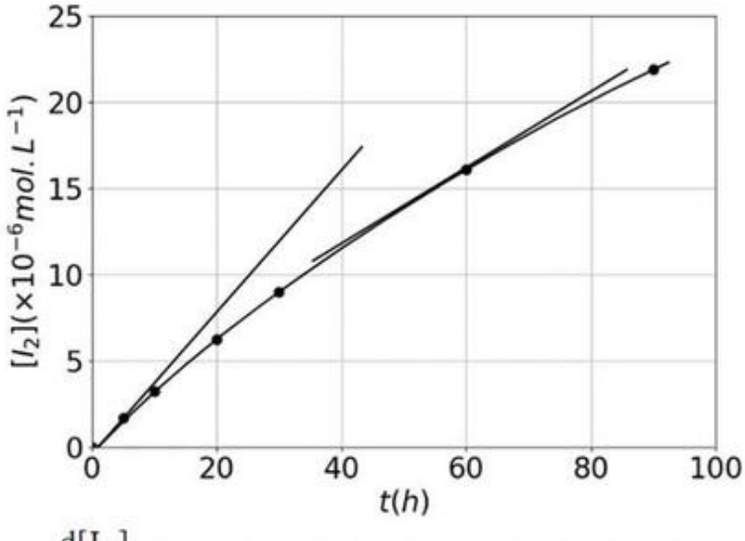
Une valeur approchée de k_{app} pourrait être obtenue à partir de l'ordonnée à l'origine de la droite.

Exercice 14.7

1. À chaque prélèvement réalisé, l'échantillon est plongé dans un bain eau-glace : on joue sur le facteur cinétique température. En abaissant la température, on ralentit la réaction dans l'échantillon. Le titrage permet ainsi de déterminer la concentration en diiode à l'instant du prélèvement.

Cette opération est appelée trempe.

2. Les valeurs du tableau conduisent à la courbe $[I_2] = f(t)$ suivante :



3. Par définition, $v = \dfrac{d[I_2]}{dt}$. La valeur de la vitesse de réaction à une date t est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe $[I_2] = f(t)$ à la date considérée. On a par

exemple tracé sur le graphe précédent les tangentes à la courbe en $t = 0$ et en $t = 60$ h, dont on pourrait déterminer manuellement la pente.

⇨ *Méthode 14.1*

Afin d'obtenir plus de précision, les différentes valeurs de v ont été calculées à l'aide d'un tableur. Elles sont reportées dans le tableau ci-dessous.

t (min)	0	5	10	20	30	60	90
v ($\times 10^{-7}$ mol · L^{-1} · h^{-1})	3,38	3,25	3,13	2,89	2,65	2,16	1,66

⇨ *Méthode 14.2*

4. La loi de vitesse est de la forme : $v = k[Fe^{3+}]^{\alpha}[I^-]^{\beta}$ puisque la réaction admet un ordre. Dans l'expérience, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques, donc à chaque instant : $[Fe^{3+}] = [I^-]$. L'expression de v devient $\boxed{v = k[Fe^{3+}]^{\alpha+\beta}}$.

⇨ *Méthode 14.5*

5. D'après la loi de vitesse, $\ln v = (\alpha + \beta) \times \ln([Fe^{3+}]) + \ln k$. Le tracé de $\ln v = f(\ln([Fe^{3+}]))$ doit conduire à une droite, dont le coefficient directeur nous donnera l'ordre global $\alpha + \beta$. Il faut donc au préalable calculer $[Fe^{3+}]$ aux différentes dates à partir des valeurs de $[I_2]$ selon la formule : $[Fe^{3+}] = c_0 - 2[I_2]$. Les différentes valeurs de $[Fe^{3+}]$, $\ln([Fe^{3+}])$ et $\ln v$ sont reportées dans le tableau ci-après.

$[Fe^{3+}]$ ($\cdot 10^{-4}$ mol · L^{-1})	2,20	2,17	2,13	2,08	2,02	1,88	1,76
$\ln([Fe^{3+}])$	– 8,42	– 8,44	– 8,45	– 8,48	– 8,51	– 8,58	– 8,64
$\ln v$	– 14,90	– 14,94	– 14,98	– 15,06	– 15,14	– 15,35	– 15,61

Une régression linéaire de $\ln v = f(\ln([Fe^{3+}]))$ conduit à une droite dont le coefficient directeur est égal à 3,15. L'ordre étant supposé entier, l'ordre global de la réaction $\alpha + \beta$ est donc égal à 3.

⇨ *Méthode 14.7*

À cause de l'imprécision de la détermination de la vitesse à partir des valeurs des concentrations, la méthode différentielle ne permet qu'une estimation d'un ordre. Celui-ci peut ensuite être vérifié à l'aide de la méthode intégrale.

Exercice 14.8

1. L'état final de la transformation n'est pas atteint après une dizaine de minutes. Le chauffage à reflux du mélange réactionnel pendant 30 minutes permet de jouer sur le facteur cinétique température pour accélérer la réaction et atteindre l'état final plus rapidement, afin d'accéder à la valeur de G_∞.

En supposant la réaction totale, on pourrait aussi préparer une solution contenant les produits de la réaction (éthanol C_2H_5OH et ions éthanoate $CH3COO^-$) à la même concentration c_0 ou c_0', simulant l'état final de la transformation. La conductance de ce mélange serait G_∞.

2. La loi de vitesse est de la forme : $\boxed{v = k[\text{ester}]^{\alpha}[\text{HO}^-]^{\beta}}$.

3. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique, en notant c_0 la concentration initiale en ions hydroxyde et c_0' la concentration initiale en ester (on remarque que dans l'expérience 1, $c_0' = c_0$).

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$CH_3COOC_2H_5$	$+ HO^-$	$= CH_3COO^-$	$+ C_2H_5OH$
à $t = 0$	c_0'	c_0	0	x
à t	$c_0' - x$	$c_0 - x$	x	x

La conductance de la solution s'exprime en fonction de la conductivité σ selon $G = k_{\text{cell}} \times \sigma$, où k_{cell} est la constante de cellule du conductimètre. La conductivité s'exprime en fonction des concentrations des espèces ioniques selon : $\sigma = \sum_{i,\text{ions}} \lambda_i \times c_i$, où λ_i est la conductivité ionique molaire de l'ion i et c_i la concentration de l'ion i en solution. On peut ainsi exprimer la conductivité et la conductance de la solution aux instants $t = 0$ et t :

$$\sigma_0 = \lambda_{HO^-} \times c_0 + \lambda_{Na^+} \times c_0 = (\lambda_{HO^-} + \lambda_{Na^+}) \times c_0 \quad \text{et} \quad G_0 = k_{\text{cell}} \times \sigma_0 \ ;$$
$$\sigma = \lambda_{HO^-} \times (c_0 - x) + \lambda_{CH_3COO^-} \times x + \lambda_{Na^+} \times c_0 \quad \text{et} \quad G = k_{\text{cell}} \times \sigma \, .$$

> *Ne pas oublier la contribution des ions spectateurs à la conductivité de la solution !*

La réaction est supposée totale. Dans l'expérience 1, l'ester et les ions hydroxyde ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. Dans l'expérience 2, les ions hydroxyde constituent le réactif limitant. Dans les deux cas, on a donc au bout d'un temps infini : $\sigma_\infty = \lambda_{CH_3COO^-} \times c_0 + \lambda_{Na^+} \times c_0$ et $G_\infty = k_{\text{cell}} \times \sigma_\infty$.

À partir des expressions obtenues, on montre :

$$\frac{G - G_\infty}{G_0 - G_\infty} = \frac{\sigma - \sigma_\infty}{\sigma_0 - \sigma_\infty} = \frac{(\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}) \times (c_0 - x)}{(\lambda_{HO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}) \times c_0} = \frac{c_0 - x}{c_0} \, .$$

⇨ *Méthode 14.10*

4. Dans l'expérience 1, l'ester et les ions hydroxyde ont été introduits dans les proportions stœchiométriques ($c_0' = c_0$). À chaque instant, on a donc $[\text{ester}] = [HO^-]$. L'expression de la vitesse se simplifie selon : $v = k[HO^-]^{\alpha+\beta}$.

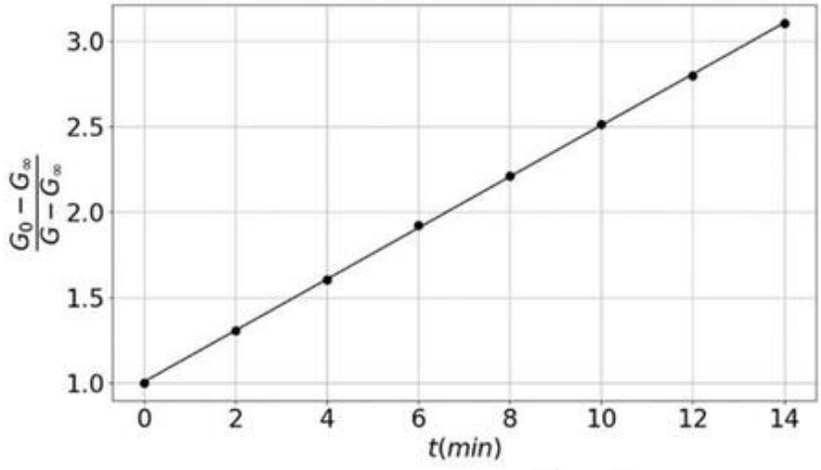
⇨ *Méthodes 14.5 et 14.8*

Montrons que l'ordre global de la réaction α + β est égal à 2 à l'aide de la méthode intégrale. Si $\alpha + \beta = 2$, $v = -\dfrac{d[HO^-]}{dt} = k[HO^-]^2$. En séparant les variables puis en intégrant entre les dates $t = 0$ et t :

$$-\frac{d[HO^-]}{[HO^-]^2} = k\,dt \Rightarrow -\int_{[HO^-]_0}^{[HO^-]} \frac{d[HO^-]}{[HO^-]^2} = k\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{[HO^-]} - \frac{1}{[HO^-]_0} = kt \, .$$

Ceci s'écrit encore $\frac{1}{c_0 - x} - \frac{1}{c_0} = kt \Rightarrow \frac{c_0}{c_0 - x} - 1 = c_0 kt$. En utilisant le résultat de la question précédente : $\frac{G_0 - G_\infty}{G - G_\infty} = c_0 kt + 1$. Si la courbe $\frac{G_0 - G_\infty}{G - G_\infty} = f(t)$, tracée à partir des résultats expérimentaux, est une droite, alors l'hypothèse de l'ordre 2 est bien vérifiée.

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14
$\frac{G_0 - G_\infty}{G - G_\infty}$	1,00	1,30	1,60	1,92	2,21	2,51	2,80	3,10



Une régression linéaire conduit à une droite d'équation : $\frac{G_0 - G_\infty}{G - G_\infty} = 1{,}48 \cdot 10^{-1} t + 1{,}01$.

Le modèle semble compatible avec les points expérimentaux : on considère que l'ordre global de la réaction est égal à 2. D'autre part, la pente de la courbe est égale à :
$c_0 k = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$ min^{-1} d'où $\boxed{k = 5{,}9 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}}$.

5. Dans l'expérience 2, l'ester a été introduit en large excès dans le mélange réactionnel. On peut donc considérer qu'à chaque instant $[\text{ester}] \approx [\text{ester}]_0$, d'où : $v = k_{app}[HO^-]^\beta$ avec $k_{app} = k[\text{ester}]_0^\alpha$. Il y a dégénérescence de l'ordre par rapport à l'ester. On détermine alors l'ordre partiel β en utilisant la méthode intégrale.

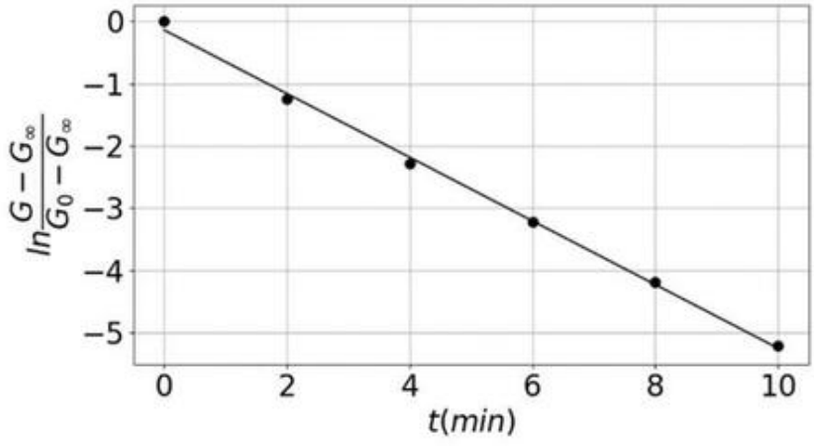
⇨ *Méthodes 14.6 et 14.8*

On suppose β = 1. Alors $-\frac{d[HO^-]}{dt} = k_{app}[HO^-]$. En séparant les variables puis en intégrant entre $t = 0$ et t : $-\frac{d[HO^-]}{[HO^-]} = k_{app}\,dt \Rightarrow -\int_{[HO^-]_0}^{[HO^-]} \frac{d[HO^-]}{[HO^-]} = k_{app}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{[HO^-]}{[HO^-]_0} = -k_{app}\,t$.

Donc $\ln\frac{c_0 - x}{c_0} = -k_{app}\,t$, soit $\ln\frac{G - G_\infty}{G_0 - G_\infty} = -k_{app}\,t$ en utilisant le résultat de la question **2**.

Si le tracé de la courbe $\ln\dfrac{G-G_\infty}{G_0-G_\infty} = f(t)$ donne une droite, l'hypothèse sur l'ordre est vérifiée.

t (min)	0	2	4	6	8	10
$\ln\dfrac{G-G_\infty}{G_0-G_\infty}$	0	–1,25	–2,29	–3,23	–4,20	–5,21



La droite modèle semble compatible avec les points expérimentaux. L'ordre partiel de la réaction par rapport aux ions hydroxyde est donc égal à 1.

6. L'ordre partiel de la réaction par rapport à l'ester est donc égal à $\boxed{\alpha = 2-\beta = 1}$. La loi de vitesse s'écrit : $\boxed{v = k[\text{ester}][HO^-]}$.

Exercice 14.9

1. Si la réaction est d'ordre 1, la loi de vitesse s'écrit : $-\dfrac{d[O_3]}{dt} = k\cdot[O_3]$.

La solution est : $[O_3] = [O_3]_0\cdot e^{-kt}$. À la date $t_{1/2}$, $[O_3] = \dfrac{[O_3]_0}{2} \Leftrightarrow e^{-kt_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$ d'où $\boxed{t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{k}}$.

2. Grâce aux courbes obtenues pour différentes concentrations initiales en ozone dissous, on peut déterminer les valeurs suivantes du temps de demi-réaction :

$[O_3]_0$ (mg·L^{-1})	500	400	300	200	100
$t_{1/2}$ (min)	7	7	7	7	7

De ces observations, on peut déduire que le temps de demi-réaction est indépendant de la concentration initiale en ozone, ce qui est caractéristique d'une réaction d'ordre 1.
On peut donc en conclure que la réaction de décomposition de l'ozone est d'ordre 1.

⇨ *Méthode 14.9*

Le temps de demi-réaction vaut $t_{1/2} = 7$ min. Alors $k = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ soit $\boxed{k = 1\cdot10^{-1}\ \text{min}^{-1}}$ à 20 °C.

3. On dispose de deux couples de valeurs (T,k), on peut donc déterminer l'énergie d'activation de la réaction. En notant $T_1 = 273+20 = 293$ K et $T_2 = 273+30 = 303$ K :

$k_1 = A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT_1}\right)$ et $k_2 = A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT_2}\right)$.

On en déduit : $\dfrac{k_1}{k_2} = \exp\left(-\dfrac{E_a}{R}\left(\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_2}\right)\right) \Leftrightarrow \boxed{E_a = -R\dfrac{\ln\dfrac{k_1}{k_2}}{\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_2}}}$. AN $\boxed{E_a = 4\cdot10^1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 14.3*

Exercice 14.10

1. On constate que dans les expériences n^{os} 1, 3 et 4, les concentrations initiales des deux réactifs sont égales. Les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques dans ces expériences, et à chaque instant : $[HCN] = [RCHO]$. La vitesse de la réaction s'écrit donc : $v = k_{obs}\cdot[HCN]^{\alpha+\beta}$. Dans ces conditions, la loi de vitesse s'exprime :

$-\dfrac{d[HCN]}{dt} = k_{obs}\cdot[HCN]^{\alpha+\beta}$ et l'ordre global de la réaction peut être déterminé à l'aide d'une des méthodes usuelles.

⇨ *Méthode 14.5*

2. Dans l'hypothèse d'un ordre global égal à 2, $-\dfrac{d[HCN]}{dt} = k_{obs}\times[HCN]^2$, soit en séparant les variables : $-\dfrac{d[HCN]}{[HCN]^2} = k_{obs}\times dt$. On intègre entre $t = 0$ et t : $-\displaystyle\int_{c_0}^{[HCN]}\frac{d[HCN]}{[HCN]^2} = k_{obs}\times\int_0^t dt$

soit $\dfrac{1}{[HCN]}-\dfrac{1}{c_0} = k_{obs}\times t$. À la date $t_{1/2}$, $[HCN] = \dfrac{c_0}{2}$ d'où $t_{1/2} = \dfrac{1}{k_{obs}\times c_0} \Leftrightarrow k_{obs} = \dfrac{1}{t_{1/2}\times c_0}$.

Le calcul de k_{obs} pour les couples de valeurs les expériences 1, 3 et 4 donne :

c_0 (mol·L^{-1})	0,20	0,10	0,05
k_{obs} (L·mol^{-1}·s^{-1})	$5{,}3\cdot10^{-3}$	$5{,}3\cdot10^{-3}$	$5{,}3\cdot10^{-3}$

Cette valeur, constante, valide bien l'hypothèse sur l'ordre 2.

⇨ *Méthode 14.9*

3. Pour déterminer séparément α et β, on peut introduire l'un des deux réactifs en large excès par rapport à l'autre, ainsi sa concentration variera peu au cours de la transformation et il y aura dégénérescence de l'ordre par rapport à ce réactif. On pourra ainsi déterminer un seul ordre partiel par cette méthode.

⇨ *Méthode 14.6*

4. On constate que dans les expériences n^{os} 5 et 6 l'acide cyanhydrique a été introduit en large excès par rapport au propanal.

Donc $[\text{HCN}] \approx [\text{HCN}]_0$ et $v = -\dfrac{\text{d}[\text{RCHO}]}{\text{d}t} = (k_{\text{obs}} \times [\text{HCN}]_0^{\alpha}) \times [\text{RCHO}]^{\beta}$.

On constate aussi dans ces deux expériences que la valeur du temps de demi-réaction est la même, indépendamment de la concentration initiale en propanal. On en déduit que l'ordre partiel par rapport au propanal est égal à 1. Donc $\boxed{\alpha = \beta = 1}$.

5. En utilisant les résultats de la question 2, on trouve : $\boxed{k_{\text{obs}} = 5{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Exercice 14.11

1. Établissons tout d'abord un tableau d'avancement relatif à la transformation :

mol	$CH_3CHO_{(g)}$	$= CH_{4(g)}$	$+ CO_{(g)}$
à $t = 0$	n_0	0	0
à t	$n_0 - \xi$	ξ	ξ
à t_∞	0	n_0	n_0

À t = 0, le système contient uniquement de l'éthanal, la pression totale est donc égale à la pression partielle en éthanal. D'après la loi des gaz parfaits, $\boxed{n_0 = \dfrac{P_0 V}{RT}}$. AN $\boxed{n_0 = 3{,}72 \cdot 10^{-1}\ \text{mol}}$.

Attention aux unités !

2. À t_∞, la réaction étant totale, on a $P_\infty = \dfrac{2 n_0 RT}{V}$, d'où $\boxed{P_\infty = 2P_0}$. AN $\boxed{P_\infty = 566\ \text{hPa}}$.

3. À une date t quelconque, d'après le tableau d'avancement : $P_{\text{éth}} = (n_0 - \xi)\dfrac{RT}{V} = P_0 - \xi\dfrac{RT}{V}$.

D'autre part, $P = (n_0 + \xi)\dfrac{RT}{V} = P_0 + \xi\dfrac{RT}{V} \Leftrightarrow \xi\dfrac{RT}{V} = P - P_0$. En injectant cette relation dans l'expression de $P_{\text{éth}}$ on obtient : $\boxed{P_{\text{éth}} = P_0 - (P - P_0) = 2P_0 - P}$.

4. La loi de vitesse de la réaction s'écrit : $v = -\dfrac{\text{d}[\text{éth}]}{\text{d}t} = k \cdot [\text{éth}]^2$, en notant [éth] la concentration en éthanal dans le système à un instant quelconque.

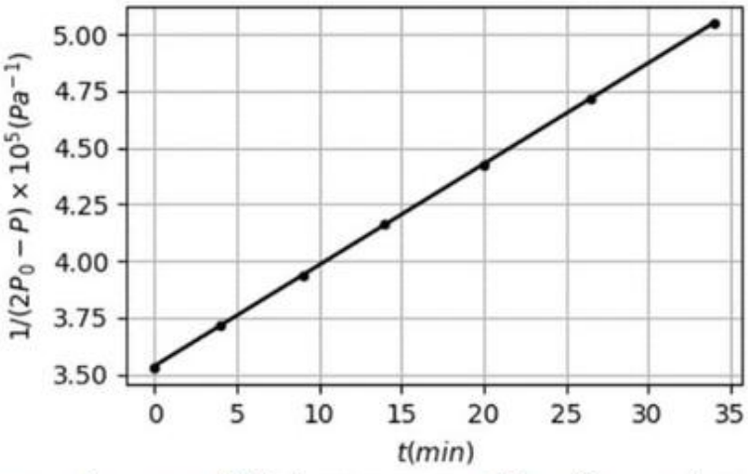
En utilisant la relation $[\text{éth}] = \dfrac{P_{\text{éth}}}{RT}$, on a : $-\dfrac{1}{RT}\dfrac{\text{d}P_{\text{éth}}}{\text{d}t} = k \cdot \dfrac{P_{\text{éth}}^2}{(RT)^2} \Leftrightarrow \boxed{-\dfrac{\text{d}P_{\text{éth}}}{\text{d}t} = \dfrac{k}{RT} P_{\text{éth}}^2}$.

⇨ *Méthode 14.10*

5. Intégrons la loi de vitesse entre $t = 0$ et t :

$$-\int_{P_0}^{P_{\text{éth}}} \frac{\text{d}P_{\text{éth}}}{P_{\text{éth}}^2} = \frac{k}{RT}\int_0^t \text{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{P_{\text{éth}}} - \frac{1}{P_0} = \frac{k}{RT}t \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2P_0 - P} - \frac{1}{P_0} = \frac{k}{RT}t}.$$

6. On utilise la méthode intégrale. Pour vérifier que l'ordre de la réaction est bien égal à 2, on trace la courbe $\dfrac{1}{2P_0 - P} = f(t)$.



Le tracé semble montrer la compatibilité entre un modèle affine et les valeurs fournies. La réaction est bien d'ordre 2. Une régression linéaire donne une droite de pente $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ $\text{Pa}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$: on en déduit $\dfrac{k}{RT} = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ $\text{Pa}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ d'où $k = 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ ou encore $\boxed{k = 2{,}8 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}}$.

Attention aux unités !

⇨ *Méthode 14.8*

Exercice 14.12

1. Le suivi cinétique de la réaction est réalisé par spectrophotométrie, à λ = 520 nm. À cette longueur d'onde, on voit sur les spectres fournis que la catéchine n'absorbe pas, et que l'absorbance du DPPH est très supérieure à celle de $DPPH_2$. On pourra donc en première approximation considérer que l'absorbance de la solution s'écrit : $A = \varepsilon_{DPPH}\, l\, [\text{DPPH}]$, d'après la loi de Beer–Lambert.

D'autre part, les conditions initiales choisies ($[\text{DPPH}]_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{catéchine}]_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) montrent que la catéchine a été introduite en large excès par rapport au DPPH. Il y a donc dégénérescence de l'ordre, et la loi de vitesse peut s'écrire : $v = k \cdot [\text{catéchine}]^{\alpha} \cdot [\text{DPPH}]^{\beta}$ avec $[\text{catéchine}] \approx [\text{catéchine}]_0$ d'où : $\boxed{v = k_{app} \cdot [\text{DPPH}]^{\beta}}$ en posant $k_{app} = k[\text{catéchine}]_0^{\alpha}$.

2. Avec l'hypothèse sur les ordres partiels, on peut réécrire la loi de vitesse :

$$\boxed{v = -\frac{\text{d}[\text{DPPH}]}{\text{d}t} = k_{app} \cdot [\text{DPPH}]}.$$

3. Afin d'exploiter le tracé (b) de $\ln(A(t) - A(t+T)) = f(t)$, on établit l'équation horaire : $[\text{DPPH}] = [\text{DPPH}]_0\, e^{-k_{app} t}$. En utilisant la loi de Beer–Lambert, on a donc : $A(t) = A_0\, e^{-k_{app} t}$.

⇨ *Méthode 14.10*

Alors $A(t+T) = A_0\, e^{-k_{app}(t+T)}$ d'où $A(t) - A(t+T) = A_0 e^{-k_{app}t} - A_0 e^{-k_{app}(t+T)} = A_0 e^{-k_{app}t}\left(1 - e^{-k_{app}T}\right)$

$\Leftrightarrow \ln(A(t) - A(t+T)) = \ln\left(A_0\, e^{-k_{app}t}\left(1 - e^{-k_{app}T}\right)\right) = \ln\left(A_0\left(1 - e^{-k_{app}T}\right)\right) - k_{app}t$

où $\ln\left(A_0\left(1 - e^{-k_{app}T}\right)\right)$ est une constante (car les mesures d'absorbance ont été effectuées à intervalles de temps T constants). C'est bien l'équation d'une droite. Le tracé (b) valide donc l'ordre 1 par rapport au DPPH, et la constante de vitesse apparente est égale à l'opposé de la pente de la droite, que l'on peut estimer par lecture graphique : $k_{app} = -\dfrac{-0,5+2,5}{0,2-1,9}$ soit $\boxed{k_{app} = 1,2\ \text{s}^{-1}}$. Comme $k_{app} = k[\text{catéchine}]_0$, on peut en déduire la valeur de la constante de vitesse de la réaction : $k = \dfrac{k_{app}}{[\text{catéchine}]_0}$. AN $\boxed{k = 1,1 \cdot 10^2\ \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Chapitre 15
Molécules et ions

UN SCIENTIFIQUE



Gilbert Lewis (1875-1946) est un physicien et un chimiste américain. Il passe sa thèse de doctorat sur les potentiels électrochimiques. Après un voyage en Europe il enseigne d'abord à Harvard puis à Berkeley à partir de 1908. Dans ses premiers travaux il introduit les concepts de la thermodynamique dans l'analyse de la chimie moléculaire. Il reste célèbre pour sa théorie sur les liaisons chimiques, dans laquelle il introduit la notion de covalence qu'il énonce en 1916.

Un peu d'histoire

Lorsque Johannes van der Waals effectue ses travaux sur les fluides et les gaz, dans les années 1870, la nature microscopique de la matière n'est pas encore connue. Il met cependant en évidence des forces de cohésions entre les molécules. En 1897, Joseph Thomson prouve l'existence de l'électron. Deux ans plus tard, Ernest Rutherford, en étudiant la radioactivité découverte par Becquerel en 1896, met en évidence les rayonnements alpha et bêta, ce qui lui permet d'établir les lois des transformations radioactives. En 1911, il découvre le noyau atomique chargé positivement, mais le proton seulement en 1919 ; on doit attendre 1932 pour que James Chadwick identifie le neutron. Les liaisons ioniques étaient comprises lorsqu'en 1916 Gilbert Lewis montre que la cohésion des molécules s'explique par une mise en commun d'électrons, ce qu'on appelle désormais la liaison de covalence.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes
- ▷ La règle de l'octet et les écarts à cette règle
- ▷ La notion de charge formelle
- ▷ Les notions d'électronégativité et de liaison polarisée
- ▷ Les forces de Van der Waals et la liaison hydrogène
- ▷ Les grandeurs caractéristiques et propriétés d'un solvant

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Déterminer le nombre d'électrons de valence d'un atome du bloc s ou p à partir de sa position dans le tableau périodique
- ▷ Établir un ou des schéma(s) de Lewis pour une molécule ou un ion
- ▷ Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de leurs positions dans le tableau périodique, et prévoir la polarisation d'une liaison entre ces atomes
- ▷ Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire à la géométrie d'une molécule et déterminer la direction et le sens du vecteur moment dipolaire
- ▷ Lier qualitativement l'intensité des forces intermoléculaires à la polarité et à la polarisabilité des molécules
- ▷ Prévoir ou interpréter les propriétés physiques de corps purs par l'existence de forces intermoléculaires
- ▷ Justifier ou proposer le choix d'un solvant

■■ Résumé de cours

■ Liaison covalente

❑ Électrons de valence d'un atome

Dans un atome, les électrons se répartissent en couches (repérées par un entier n de 1 à 7) et en sous-couches (1s, 2s, 2p…). Les **électrons de valence** sont les électrons de la couche de nombre n le plus élevé et ceux des sous-couches en cours de remplissage. Ce sont les électrons les plus faiblement liés au noyau, qui participent aux liaisons et aux réactions chimiques.

⇨ Méthode 15.1. Déterminer le nombre d'électrons de valence d'un atome

❑ Liaison covalente et propriétés

Une **liaison covalente** résulte de la mise en commun de deux électrons de valence (un **doublet liant**) par deux atomes. Ces électrons appartiennent alors indifféremment aux deux atomes.

La **longueur de liaison** d_{A-B} d'une liaison covalente $A-B$ est la distance entre les noyaux des deux atomes A et B. Elle est de l'ordre d'une centaine de picomètres (soit 10^{-10} m).

L'**énergie de liaison** $E_l(A-B)$ est l'énergie qu'il faut fournir pour dissocier la liaison $A-B$ en ses atomes isolés à l'état gazeux à 0 K. Elle est de l'ordre de 150 à 800 $kJ \cdot mol^{-1}$.

■ Schéma de Lewis des édifices polyatomiques

❑ Règle de l'octet

Dans une molécule ou un ion, les atomes de la deuxième ligne du tableau périodique tendent à s'associer de façon à ce que chacun d'entre eux soit entouré de *huit électrons de valence*.
L'atome d'hydrogène obéit à la **règle du duet** en s'entourant de *deux électrons de valence*.

Dans le **modèle de Lewis**, les électrons de valence d'un édifice sont *localisés* entre les atomes (doublets liants) ou sur les atomes (**doublets non liants**, ne participant pas aux liaisons).

⇨ Méthode 15.2. Placer les doublets du schéma de Lewis d'une entité

❑ Charges formelles

La formation de liaisons covalentes par un atome peut se traduire par une perte ou un gain d'électrons par rapport à l'atome isolé, que l'on représente par une **charge formelle** localisée sur l'atome dans le schéma de Lewis de l'édifice polyatomique considéré. La somme des charges formelles portées par les atomes de l'édifice est égale à la charge globale de l'édifice.

La charge formelle c_f d'un atome est définie par : $\boxed{c_f = n_v - n_{v,\text{édifice}}}$

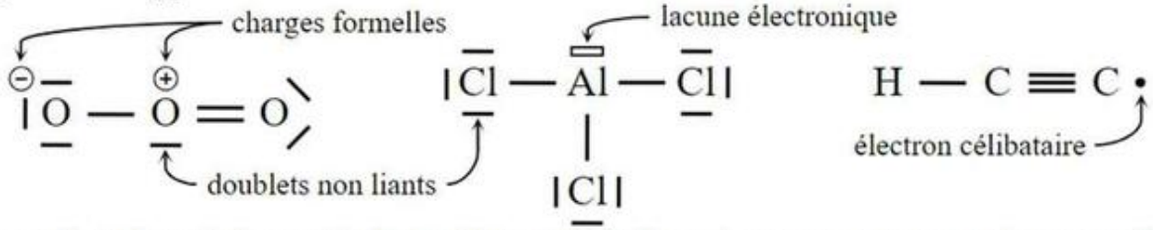
où n_v est le nombre d'électrons de valence de l'atome isolé, et $n_{v,\text{édifice}}$ le nombre d'électrons de valence attribués à l'atome dans l'édifice.

⇨ Méthode 15.3. Calculer la charge formelle d'un atome

❑ Exceptions à la règle de l'octet

– Certains composés sont déficients en électrons : lorsqu'il manque un doublet autour d'un atome pour qu'il respecte la règle de l'octet, on place une **lacune électronique** sur cet atome.

– Certains composés font apparaître un **électron non apparié**, ou **électron célibataire**. Ces composés sont appelés **radicaux**.



– À partir de la troisième période du tableau périodique, les atomes peuvent s'entourer de plus de huit électrons : les composés correspondants sont dits **hypervalents**.

❑ Acides et bases de Lewis

Un **acide de Lewis** est une espèce chimique possédant au moins une lacune électronique.
Une **base de Lewis** est une espèce chimique possédant au moins un doublet non liant.

■ Moment dipolaire

❑ Électronégativité

L'électronégativité traduit l'aptitude d'un atome à attirer vers lui les électrons d'une liaison covalente. C'est une grandeur sans dimension strictement positive, notée χ. Dans l'échelle de Pauling, l'électronégativité est reliée aux énergies de liaison.

Dans une période (ligne) du tableau périodique, l'électronégativité χ augmente lorsque le numéro atomique Z augmente. Dans une colonne, χ diminue lorsque Z augmente.

❑ Moment dipolaire de liaison

Lorsque deux atomes A et B d'électronégativité différente sont liés par une liaison covalente, il apparaît une charge partielle négative $-\delta \cdot e$ (avec $0 < \delta < 1$) sur l'atome le plus électronégatif A et une charge partielle positive $+\delta \cdot e$ sur l'atome le moins électronégatif B.

$$-\delta \cdot e \quad +\delta \cdot e$$
$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$$
$$\vec{\mu}_{A-B}$$

La liaison est dite **polarisée**. Elle possède un **moment dipolaire**, représenté par un vecteur $\vec{\mu}_{A-B}$ dirigé selon l'axe internucléaire, orienté de A vers B et de norme $\mu_{A-B} = \delta \cdot e \cdot d_{A-B}$.

Unité SI de moment dipolaire : le coulomb-mètre (C·m).
Unité usuelle pour les liaisons chimiques : le debye (D), $1\ \mathrm{D} = 3{,}336 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$.

❑ Moment dipolaire d'une molécule

En première approximation, le moment dipolaire d'une molécule est la somme vectorielle des moments dipolaires de liaison (on néglige la contribution des doublets non liants).
Pour un ion il n'y a pas lieu de rechercher un moment dipolaire, car un édifice globalement chargé ne se comporte jamais comme un dipôle électrostatique.

⇨ **Méthode 15.4. Déterminer si une molécule est polaire**

■ Forces intermoléculaires

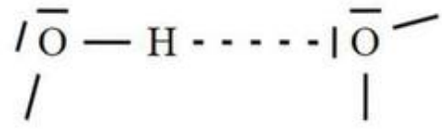
❑ Forces de Van der Waals

Les **forces de Van der Waals** sont des interactions attractives électrostatiques à courte distance (quelques centaines de pm). Leur énergie est de l'ordre de 0,5 à 25 $kJ \cdot mol^{-1}$. On distingue :
– les **interactions de Keesom** (dipôle permanent/dipôle permanent) entre deux molécules ou parties de molécule polaires ;
– les **interactions de Debye** (dipôle permanent/dipôle induit) entre une molécule polaire et une molécule apolaire polarisable ;
– les **interactions de London** (dipôle instantané/dipôle induit) entre deux édifices apolaires, du fait de l'existence d'un moment dipolaire instantané lié à la distribution électronique à un instant donné.

Aux interactions attractives de Van de Waals s'ajoutent des interactions répulsives entre molécules à très courte distance : il existe donc une distance d'équilibre entre molécules, correspondant à la longueur de la **liaison de Van der Waals** entre molécules.

❑ Liaison hydrogène

La **liaison hydrogène** est une interaction attractive entre un atome d'hydrogène, lié à un atome très électronégatif, et un autre atome très électronégatif porteur d'un doublet non liant. Les trois atomes tendent à s'aligner.



Cette liaison met en jeu une énergie de l'ordre de 10 à 40 $kJ \cdot mol^{-1}$.

Une liaison hydrogène **intramoléculaire** peut s'établir entre différentes parties d'une même molécule si la géométrie le permet.

❑ Conséquences

Les forces intermoléculaires sont à l'origine de la cohésion de certains assemblages moléculaires, et permettent d'interpréter l'évolution de certaines propriétés physico-chimiques (températures de fusion et d'ébullition, solubilité…). En particulier, plus les forces intermoléculaires sont importantes, plus les températures de changement d'état sont élevées.

➪ **Méthode 15.5. Interpréter les propriétés de corps purs à partir des forces intermoléculaires**

■ Solvants moléculaires

❑ Soluté et solvant

La mise en solution d'une espèce chimique, le **soluté**, dans un **solvant** met en jeu des forces d'interaction entre soluté et solvant, qui dépendent des caractéristiques physico-chimiques du soluté (ionique ou moléculaire) et du solvant (moment dipolaire, permittivité relative, caractère protique ou aprotique). Le choix du solvant est essentiel pour les réactions en chimie organique.

❑ Caractéristiques physico-chimiques d'un solvant

Moment dipolaire

Le **pouvoir ionisant** d'un solvant, qui est sa capacité à transformer un soluté ionique ou un composé moléculaire ionisable en une paire d'ions, augmente avec son moment dipolaire.

Permittivité diélectrique relative

Le **pouvoir dissociant** d'un solvant, qui est sa capacité à dissocier une paire d'ions (en affaiblissant l'interaction électrostatique entre les ions), augmente avec sa permittivité diélectrique relative ε_r.

Caractère protique (ou protogène)

Un solvant est dit **protique** ou **protogène** s'il possède un atome d'hydrogène lié à un atome électronégatif, et peut donc établir des liaisons hydrogène avec un soluté.

❑ Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique

Processus de mise en solution

La mise en solution d'une espèce chimique met en jeu le processus de **solvatation**, qui correspond à l'établissement d'interactions attractives entre soluté et solvant : interactions ion/dipôle, forces de Van der Waals, liaisons hydrogène.

Dans le cas d'un solide ionique, deux autres étapes précèdent la solvatation :

$$CA_{(s)} \xrightarrow{\text{ionisation}} \underbrace{(C^{n+}, A^{n-})}_{\text{paire d'ions}} \xrightarrow{\text{dissociation}} C^{n+} + A^{n-} \xrightarrow{\text{solvatation}} C^{n+}_{(solv)} + A^{n-}_{(solv)}$$

Classification des solvants

– Les solvants **polaires protiques** (eau, ammoniac, alcools…) solvatent fortement les anions de petite taille.

– Les solvants **polaires aprotiques** (propanone, diméthylsulfoxyde [DMSO], diméthylformamide [DMF]…) solvatent fortement les cations.

– Les solvants **apolaires aprotiques** (cyclohexane, tétrachlorométhane, benzène…) solvatent bien les composés apolaires.

■■ Méthodes

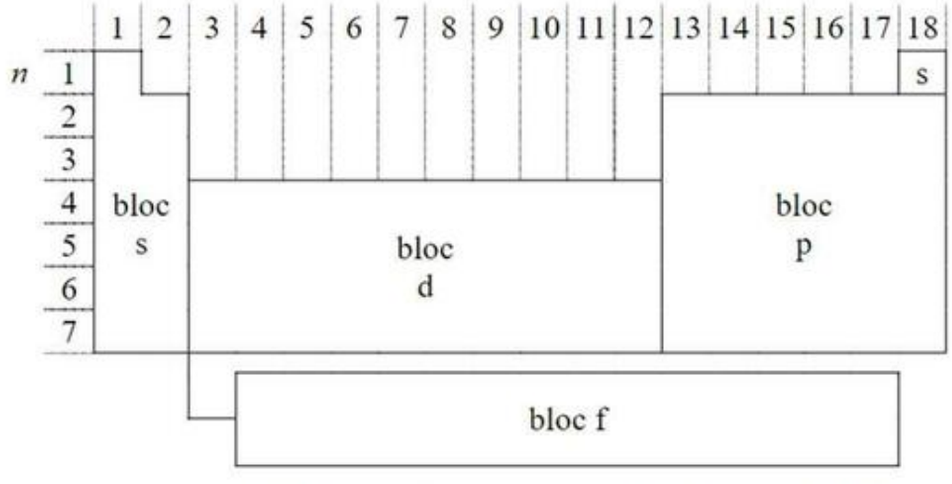
■ Comment établir le schéma de Lewis d'une entité ?

❑ Méthode 15.1. Déterminer le nombre d'électrons de valence d'un atome

La position d'un élément dans le tableau périodique permet de déterminer le nombre d'électrons de valence de l'atome correspondant.
Les atomes des éléments d'une même colonne possèdent le même nombre d'électrons de valence.

⇨ Exercices 15.1 à 15.6

Chaque ligne (ou *période*) du tableau périodique correspond au début du remplissage d'une nouvelle couche électronique, caractérisée par la valeur de l'entier n. Le tableau est divisé en blocs notés s, p, d, f en fonction des sous-couches électroniques. On se limitera aux blocs s et p.



On donne ci-dessous le nombre d'électrons de valence pour les éléments des blocs s et p.

Colonne du tableau périodique	1	2	13	14	15	16	17	18
Bloc	s		p					
Nombre d'électrons de valence	1	2	3	4	5	6	7	8

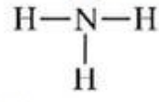
Par exemple, l'élément carbone C appartient à la 14^{e} colonne du tableau périodique, qui est la 2^{e} colonne du bloc p ; l'atome de carbone possède donc 4 électrons de valence.
Autre exemple : l'élément oxygène O appartient à la 16^{e} colonne du tableau périodique, qui est la 4^{e} colonne du bloc p ; l'atome d'oxygène possède donc 6 électrons de valence.
L'élément hélium He est placé dans la 18^{e} colonne du tableau périodique (celle des gaz nobles), car ses propriétés sont celles d'un gaz noble ; cependant il possède 2 électrons de valence.

❑ Méthode 15.2. Placer les doublets du schéma de Lewis d'une entité

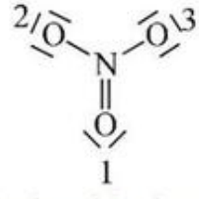
– Déterminer le nombre N_v d'électrons de valence de l'édifice, et en déduire le nombre P_v de paires électroniques de valence de l'édifice.
– Faire une hypothèse sur l'enchaînement des atomes si celui-ci n'est pas précisé.
– Répartir les paires électroniques (liaisons simples, multiples, doublets non liants) de façon à respecter la règle de l'octet pour le maximum d'atomes de la deuxième période du tableau périodique. Un doublet liant est représenté par un trait joignant deux atomes ; un doublet non liant est représenté par deux points (recommandation de l'IUPAC) ou par un trait (usage courant) à côté de l'atome.
– Faire apparaître les éventuelles lacunes électroniques.

➪ Exercices 15.1 à 15.6

– Établissons un schéma de Lewis de la molécule d'ammoniac NH_3.
La représentation de Lewis de NH_3 fait intervenir $N_v = 5 + 3 \times 1 = 8$ électrons de valence, soit $P_v = 4$ paires électroniques. L'atome central de l'édifice est N. On répartit les doublets de sorte que l'atome d'azote respecte la règle de l'octet, et que les atomes d'hydrogène respectent la règle du duet. Cela nous conduit au schéma de Lewis suivant :



– Considérons maintenant l'ion nitrate NO_3^-.
La représentation de Lewis de NO_3^- fait intervenir $N_v = 5 + 3 \times 6 + 1 = 24$ électrons de valence, soit $P_v = 12$ paires électroniques. L'atome central de l'édifice est N. On répartit les doublets de sorte que tous les atomes de l'édifice respectent la règle de l'octet, ce qui conduit à la disposition suivante :



Il reste à calculer les charges formelles (voir méthode suivante).

❑ Méthode 15.3. Calculer la charge formelle d'un atome

– Déterminer le nombre d'électrons de valence de l'atome isolé n_v.
– Déterminer le nombre d'électrons de valence de l'atome dans la molécule $n_{v,m}$ avec les règles suivantes : on attribue à l'atome chaque électron célibataire porté par l'atome, deux électrons par doublet non liant porté par l'atome, et un électron par doublet liant établi par l'atome.
– Calculer la charge formelle portée par l'atome : $c_f = n_v - n_{v,m}$.

➪ Exercices 15.1 à 15.5

Reprenons l'exemple de l'ion nitrate NO_3^-.

– Charge formelle de l'atome d'azote

La configuration électronique de l'atome d'azote ($Z = 7$) dans son état fondamental est $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$, donc l'atome d'azote isolé possède cinq électrons de valence : $n_v = 5$.

Dans l'édifice, N établit quatre liaisons covalentes, donc, d'après les conventions de calcul, il possède quatre électrons de valence dans la molécule : $n_{v,m} = 4$.

On en déduit : $c_f(N) = 5 - 4 = 1$. On indique cette charge formelle par le symbole $\oplus$ dans le schéma de Lewis.

– Charge formelle de l'atome d'oxygène noté O^1

L'atome d'oxygène isolé possède six électrons de valence : $n_v = 6$.

Dans l'édifice, O^1 établit une liaison covalente double (soit deux doublets liants) et porte deux doublets non liants, donc d'après les conventions de calcul, il possède $2 \times 1 + 2 \times 2 = 6$ électrons de valence dans la molécule : $n_{v,m} = 6$. On en déduit : $c_f(O^1) = 6 - 6 = 0$.

– De la même façon, on détermine : $c_f(O^2) = c_f(O^3) = 6 - 7 = -1$.

On représente alors le schéma de Lewis de l'ion nitrate en faisant apparaître les charges formelles des différents atomes :



■ Comment mettre en évidence l'existence d'un moment dipolaire ?

❑ Méthode 15.4. Déterminer si une molécule est polaire

On utilise une représentation spatiale de la molécule (la connaissance de la structure géométrique est nécessaire).

– Représenter le vecteur moment dipolaire de chaque liaison polarisée, dirigé selon l'axe internucléaire et orienté de l'atome le plus électronégatif vers l'atome le moins électronégatif de la liaison.

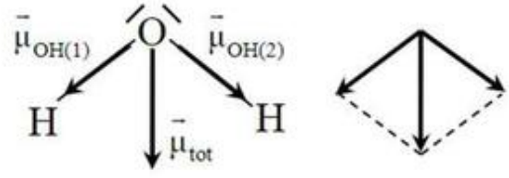
– Faire la somme des vecteurs moments dipolaires des liaisons.

– Si la somme vectorielle est nulle, la molécule est apolaire. Si la somme vectorielle est non nulle, la molécule est polaire ; représenter alors le vecteur moment dipolaire total de la molécule.

⇨ **Exercices 15.6, 15.7, 15.8, 15.13**

La molécule d'eau H_2O possède une géométrie coudée, avec un angle de liaison $\widehat{HOH}$ égal à 104,5°. Représentons le vecteur moment dipolaire total de la molécule.

Chaque liaison O–H est polarisée, O étant plus électronégatif que H. Chaque liaison possède donc un moment dipolaire, représenté par un vecteur $\vec{\mu}_{OH}$ porté par la liaison O–H et orienté de O vers H. On en déduit alors $\vec{\mu}_{tot} = \vec{\mu}_{OH(1)} + \vec{\mu}_{OH(2)}$. La molécule d'eau est polaire car $\vec{\mu}_{tot} \neq \vec{0}$. Le vecteur $\vec{\mu}_{tot}$ est orienté selon la bissectrice de l'angle $\widehat{HOH}$.



■ Comment relier des propriétés physico-chimiques à l'existence de forces intermoléculaires ?

❑ Méthode 15.5. Interpréter les propriétés de corps purs à partir des forces intermoléculaires

– À partir du schéma de Lewis et de la structure géométrique des molécules étudiées, déterminer si les molécules sont polaires ou non. Comparer la polarisabilité des molécules (elle est d'autant plus élevée que la masse molaire moléculaire est importante). Il est alors possible de comparer les forces de Van der Waals mises en jeu dans les corps purs correspondants.
– Identifier les molécules susceptibles d'établir des liaisons hydrogène intermoléculaires.
– De façon générale, les températures de changement d'état d'un corps pur sont d'autant plus élevées que les forces intermoléculaires sont importantes.
– La solubilité d'une espèce chimique dans un solvant dépend des forces intermoléculaires mises en jeu entre soluté et solvant par comparaison avec celles mises en jeu dans les corps purs séparés.

⇨ Exercices 15.8 à 15.13

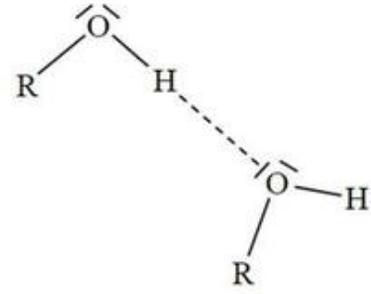
On donne dans le tableau ci-dessous les températures d'ébullition, sous une pression de 1 bar, des alcanes C_nH_{2n+2} avec $n = 1$ à 3, et des alcools linéaires correspondants.

Composé	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	CH_3OH	C_2H_5OH	C_3H_7OH
$\theta_{éb}$ (°C)	– 164	– 93	– 45	66	78	98

On constate que lorsque la longueur de la chaîne carbonée des alcanes augmente, la température d'ébullition augmente. Les alcanes sont apolaires et interagissent selon des forces de Van der Waals (forces de London entre molécules apolaires). Lorsque la longueur de la chaîne carbonée augmente, ces forces sont plus importantes et la température d'ébullition augmente (il faut fournir davantage d'énergie pour vaincre les interactions attractives entre molécules).

On constate aussi que l'alcool linéaire de chaîne carbonée de longueur n possède une température d'ébullition plus élevée que l'alcane correspondant. Les molécules d'alcool possèdent un moment dipolaire non nul, et interagissent aussi selon des forces de Van der Waals (forces de Keesom, Debye et London).

D'autre part, la présence d'un groupe fonctionnel –OH permet l'établissement de liaisons hydrogène intermoléculaires entre molécules d'alcool (voir schéma ci-contre), qu'il faut vaincre pour vaporiser l'alcool correspondant. La température d'ébullition des alcools est donc particulièrement élevée.



■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	L'atome C (situé dans la 14^{e} colonne du tableau périodique) peut établir jusqu'à 5 liaisons covalentes dans certains édifices.	☐	☐
2.	L'atome P (situé dans la 13^{e} colonne du tableau périodique) peut établir jusqu'à 5 liaisons covalentes dans certains édifices.	☐	☐
3.	Si le nombre d'électrons de valence d'un édifice est impair, son schéma de Lewis fera apparaître un électron célibataire.	☐	☐
4.	La somme des charges formelles portées par les atomes dans la représentation de Lewis d'un édifice est toujours nulle.	☐	☐
5.	Le moment dipolaire est une grandeur vectorielle permettant de décrire les interactions électrostatiques entre molécules.	☐	☐
6.	La molécule de dioxyde de carbone, de géométrie linéaire, est polaire.	☐	☐
7.	Le fluorure d'hydrogène HF peut établir des liaisons hydrogène.	☐	☐
8.	Les molécules apolaires ne peuvent pas établir des liaisons de Van der Waals entre elles.	☐	☐
9.	L'acide éthanoïque CH_3COOH est un solvant protique.	☐	☐
10.	Un ion est bien solvaté par un solvant polaire.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

L'extrait du tableau périodique ci-dessous (éléments des quatre premières périodes des blocs s et p) peut être utilisé dans les différents exercices.

H								He
Li	Be		B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg		Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	bloc d	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr

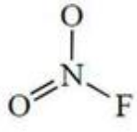
■ Schéma de Lewis des molécules

❑ Exercice 15.1. Schémas de Lewis incomplets

Compléter le schéma de Lewis des composés ci-dessous, en faisant apparaître les éventuels doublets non liants et les charges formelles portées par les atomes.

a) NO_2^- $O=N-O$

b) NO_2F



c) N_3^- $N=N=N$

d) NO_2^+ $O=N=O$

e) NOF_3



❑ Exercice 15.2. Espèces carbonées

1. Proposer un schéma de Lewis pour chacune des espèces suivantes : CO_2, CH_3OH, CO_3^{2-}.
2. Proposer un schéma de Lewis pour l'espèce CO, ne faisant pas apparaître de charge formelle. Pourquoi cette structure n'est-elle pas satisfaisante ?
3. En déduire le schéma de Lewis de l'espèce CO. Est-il en accord avec l'électronégativité des atomes ?

❑ Exercice 15.3. Espèces phosphorées*

1. Écrire un schéma de Lewis pour les espèces chimiques suivantes : $POCl_3$, PO_4^{3-}.
2. En déduire le schéma de Lewis de l'acide orthophosphorique H_3PO_4.
3. Proposer deux schémas de Lewis envisageables pour l'acide phosphoreux H_3PO_3 (P est l'atome central).
4. Sachant que l'acide phosphoreux H_3PO_3 est un diacide, en déduire le schéma de Lewis correct de cet acide.

D'après Mines-Ponts

❑ Exercice 15.4. Différents enchaînements des atomes C, N et O*

Dans les ions cyanate NCO^- et fulminate CNO^-, l'enchaînement des atomes n'est pas le même.

1. Proposer un schéma de Lewis, le plus représentatif possible, pour chacune de ces deux espèces (la formule doit refléter l'enchaînement des atomes).
2. Alors que l'ion cyanate forme des composés ioniques stables avec de nombreux cations métalliques, l'ion fulminate forme des composés instables, dont certains sont explosifs. Proposer une explication.
3. L'ion CON^- n'existe pas… Proposer une explication.

❑ Exercice 15.5. Quelques composés azotés*

L'élément azote se trouve dans les engrais sous des formes très diverses. On le rencontre notamment sous forme d'ions nitrate et ammonium dans le nitrate d'ammonium NH_4NO_3.



1. Le nitrate d'ammonium est préparé par réaction entre l'acide nitrique HNO_3 et l'ammoniac NH_3.

a) Écrire l'équation de cette réaction.

b) Écrire les schémas de Lewis de l'acide nitrique et de l'ammoniac.

c) Calculer le pourcentage en masse de l'élément azote du nitrate d'ammonium pur.

2. Le protoxyde d'azote N_2O, connu pour ses propriétés enivrantes (d'où son appellation de « gaz hilarant »), est obtenu par décomposition thermique du nitrate d'ammonium. Proposer un schéma de Lewis pour N_2O.
3. La synthèse de l'acide nitrique fait intervenir les espèces chimiques suivantes : NO, NO_2, N_2O_4, HNO_2.

a) Nommer ces espèces chimiques.

b) Proposer un schéma de Lewis pour chaque espèce, sachant qu'aucune ne fait intervenir de liaison O–O.

c) NO et NO_2 ont une particularité qui les rend très réactives : laquelle ?

d) L'anhydride nitreux N_2O_3 est un composé instable : à température ambiante, il se décompose totalement en NO et NO_2. En déduire un schéma de Lewis de N_2O_3.

Données : $M(N) = 14\ g \cdot mol^{-1}$; $M(O) = 16\ g \cdot mol^{-1}$; $M(H) = 1{,}0\ g \cdot mol^{-1}$.

D'après G2E

■ Géométrie des molécules et moment dipolaire

❑ Exercice 15.6. Le chlorure stanneux

Le chlorure d'étain(II) $SnCl_2$ est utilisé en tant qu'agent réducteur en chimie organique.

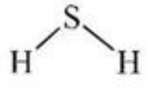
1. Proposer un schéma de Lewis de la molécule de chlorure d'étain(II) ne faisant pas apparaître de charge formelle.
2. Peut-on qualifier $SnCl_2$ d'acide de Lewis ? de base de Lewis ? Justifier.

3. La molécule de $SnCl_2$ est coudée, l'angle $Cl-Sn-Cl$ étant égal à 95°. La molécule possède-t-elle un moment dipolaire permanent ? Si oui, le représenter sur un schéma.

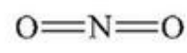
Donnée : l'élément Sn appartient à la même colonne du tableau périodique que C.

❑ Exercice 15.7. Polaire ou apolaire ?

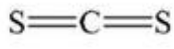
On a schématisé ci-dessous la géométrie de certains édifices moléculaires et ioniques (on a seulement fait apparaître les doublets de liaison, en omettant les éventuels doublets non liants et lacunes électroniques).
Pour chacun de ces composés, indiquer si l'édifice est polaire. Si c'est le cas, représenter le vecteur moment dipolaire correspondant.

a) H_2S 

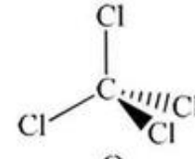


b) NO_2^+ 

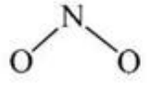


c) CS_2 

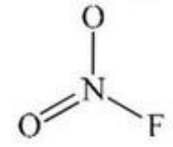


d) CCl_4 

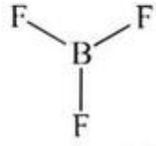


e) NO_2^- 



f) NO_2F 



g) BF_3 



Données : électronégativité dans l'échelle de Pauling $\chi(F) = 4,0$; $\chi(O) = 3,4$; $\chi(Cl) = 3,2$; $\chi(N) = 3,0$; $\chi(S) = 2,58 (\approx 2,6)$; $\chi(C) = 2,55 (\approx 2,6)$; $\chi(H) = 2,2$; $\chi(B) = 2,0$.

■ Forces intermoléculaires

❑ Exercice 15.8. Températures de changement d'état

On a représenté (page suivante) l'évolution des températures d'ébullition sous une pression de 1 bar des composés hydrogénés des éléments des colonnes 14 et 17 de la classification périodique en fonction de la masse molaire moléculaire du composé.

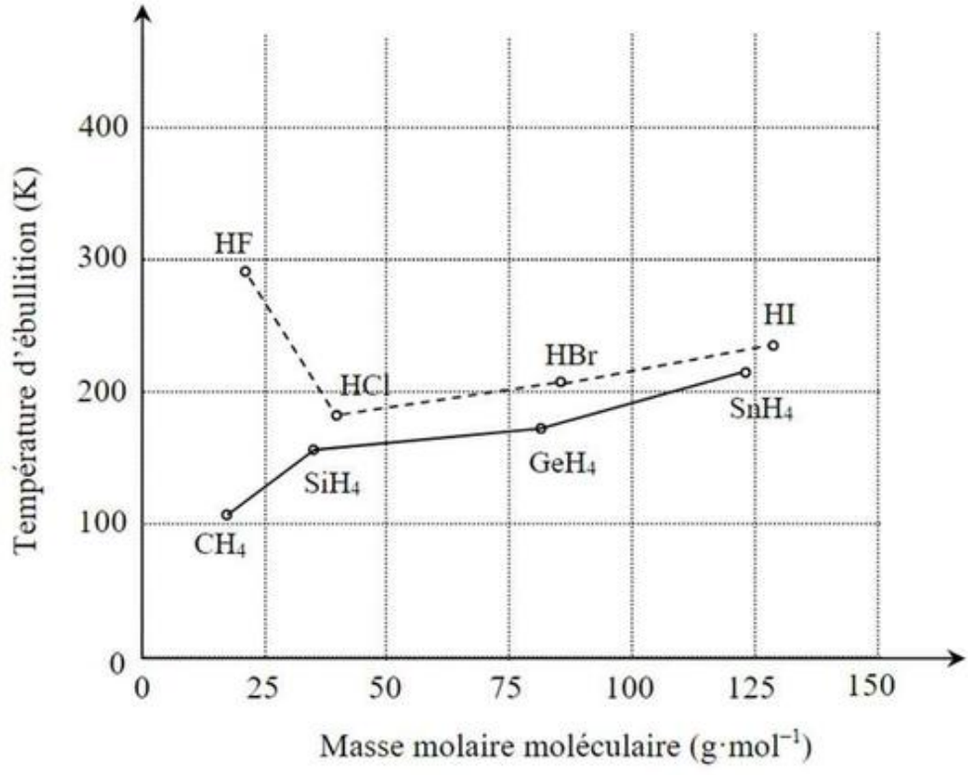
1. Pourquoi les composés hydrogénés des éléments de la colonne 14 ont-ils des températures d'ébullition plus basses que celles des composés hydrogénés des éléments de la colonne 17 ?

2. Pourquoi la température d'ébullition augmente-t-elle de HCl à HI ?

3. Interpréter l'anomalie apparente observée pour HF.

Donnée : les composés AH_4 des éléments de la colonne 14 sont de géométrie tétraédrique.

D'après Centrale-Supélec



❑ Exercice 15.9. Caractère hydrophile ou lipophile

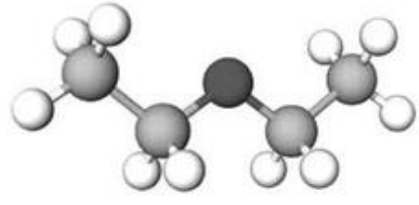
La valeur de la constante de partage P d'une espèce chimique entre l'octan-1-ol et l'eau, liquides non miscibles, est désormais couramment utilisée pour estimer le caractère hydrophile ou lipophile d'une espèce donnée, essentiel dans le domaine des médicaments. Sa définition est $P = \frac{c_{oct}}{c_{eau}}$ où c_{oct} et c_{eau} sont les concentrations respectives de l'espèce considérée dans l'octan-1-ol et dans l'eau à l'équilibre entre les deux solvants.

On donne ci-dessous un extrait d'une table donnant le logarithme décimal de P.

Espèce	méthanol	éthanol	propan-1-ol	butan-1-ol	pentan-1-ol	éthoxyéthane
log P	– 0,77	– 0,31	+ 0,25	+ 0,88	+ 1,51	+ 0,83

On donne la formule semi-développée de l'éthoxyéthane et sa représentation en modèle moléculaire :

$C_2H_5-O-C_2H_5$



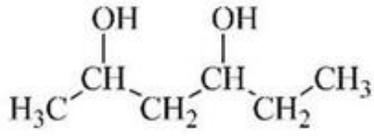
1. Donner les formules semi-développées de l'éthanol et de l'octan-1-ol.
2. Définir le caractère hydrophile ou lipophile d'une espèce, et indiquer, parmi les espèces du tableau, celle qui est la plus lipophile.

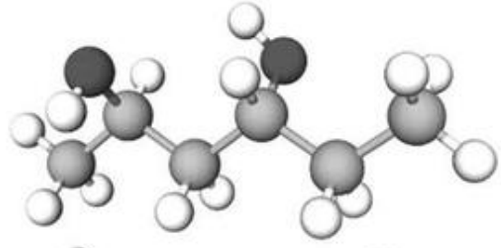
3. Commenter les valeurs de log$P$ données dans le tableau, en insistant notamment sur la nature des interactions mises en jeu.

❑ Exercice 15.10. Isomères de position

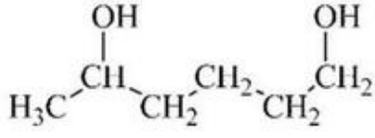
On donne les températures d'ébullition (sous 1 bar) de deux isomères de position : l'hexane-2,4-diol et l'hexane-1,5-diol. Proposer une interprétation pour expliquer les différences observées.

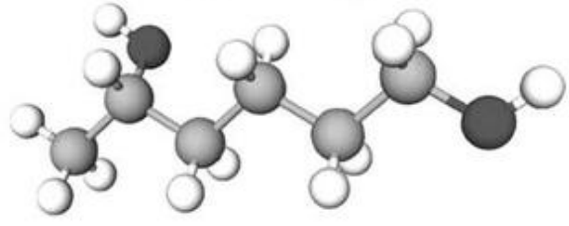
Hexane-2,4-diol :
$\theta_{éb} = 188$ °C





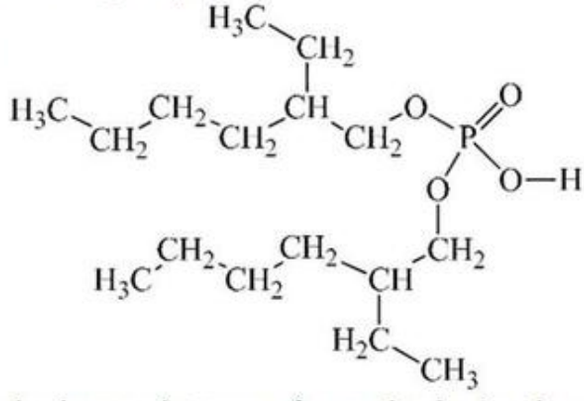
Hexane-1,5-diol :
$\theta_{éb} = 238$ °C





❑ Exercice 15.11. Dimérisation d'acides organiques

Lors du traitement hydrométallurgique d'un minerai de nickel, les cations métalliques sont extraits de la phase aqueuse en plusieurs étapes d'extraction. La solution utilisée pour l'extraction est constituée d'un hydrocarbure comme solvant, contenant de l'acide di(2-éthylhexyl)phosphorique, représenté ci-contre.



Expliquer pourquoi l'acide di(2-éthylhexyl)phosphorique existe sous forme de *dimère* dans le solvant organique, et représenter la structure du dimère en notant R– le groupe 2-éthylhexyle.

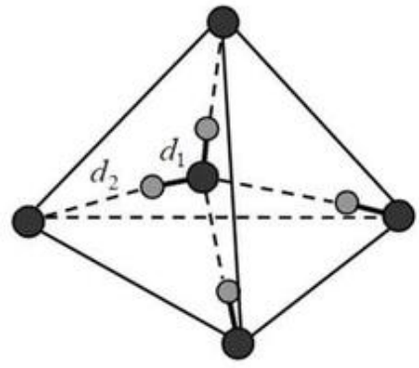
❑ Exercice 15.12. Structure cristalline de la glace

Quand deux molécules d'eau sont en présence, elles ont tendance à s'unir par une liaison de nature électrostatique, appelée liaison hydrogène.

1. Préciser la condition d'existence d'une telle liaison, ainsi que son champ d'action et sa directionnalité. Citer des propriétés chimiques et physiques qui en découlent.

L'eau solide se présente, selon les conditions de température et de pression, sous de nombreuses structures cristallines (pas moins de treize). Certaines d'entre elles ne se rencontrent que dans des conditions extrêmes régnant à la surface d'autres planètes ou satellites du système solaire.

La glace, quelle que soit sa structure cristallographique, est formée d'un assemblage régulier de molécules d'eau qui utilisent, chacune, toutes leurs possibilités d'établir des liaisons hydrogène. Chaque atome d'oxygène, pris individuellement, se trouve localisé au centre d'un tétraèdre dont les sommets sont occupés par les atomes d'oxygène de quatre autres molécules d'eau, comme l'illustre la figure ci-contre, introduite par Pauling en 1935. Les distances séparant les atomes d'oxygène et d'hydrogène sont respectivement référencées d_1 et d_2.

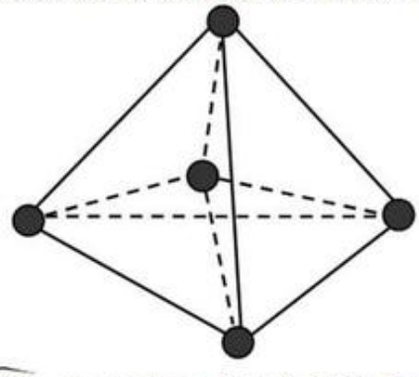


2. Expliquer la signification des deux distances d_1 et d_2. Le tétraèdre est-il régulier ?

3. Déterminer le nombre moyen de liaisons hydrogène développées par chaque molécule H_2O.

L'observation approfondie de la figure précédente induit qu'il existe six arrangements possibles des atomes d'hydrogène sur les quatre liaisons autour de chaque atome d'oxygène.

4. Représenter ces six arrangements sur un schéma semblable à celui représenté ci-après.



Données : l'angle de liaison $\widehat{HOH}$ est environ égal à 105° dans la molécule d'eau ; les angles au centre d'un tétraèdre régulier sont environ égaux à 109,5°.

D'après E3A-Polytech

❑ Exercice 15.13. Extraction liquide-liquide

On a indiqué dans le tableau ci-dessous les propriétés de quelques solvants.

Solvant	eau	éthanol	éther	chloroforme	cyclohexane
Formule	H_2O	CH_3CH_2OH	$C_2H_5OC_2H_5$	$CHCl_3$	C_6H_{12}
Miscibilité avec l'eau	oui	oui	non	non	non
Solubilité de $I_{2(s)}$ ($g \cdot L^{-1}$)	0,30	214	250	47	28
Densité	1	0,79	0,71	1,48	0,78
$\theta_{éb}$ (°C) sous 1 bar	100	79	35	62	81
Remarques particulières	-	-	inflammable 	très toxique 	-

1. Pour chaque solvant, indiquer s'il est polaire et/ou protique.
2. Proposer une interprétation au fait que l'eau et l'éthanol soient miscibles.
3. On souhaite extraire le diiode d'une solution aqueuse.
a) À l'aide du tableau, proposer quelques critères pouvant orienter le choix du solvant.
b) Proposer un protocole opératoire pour réaliser cette extraction, à partir du matériel suivant, des solvants cités précédemment et de 100 mL d'une solution aqueuse de diiode.
Matériel : ampoule à décanter avec bouchon, support, bécher, éprouvette graduée, gants, lunettes.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 15.3. Question 3 : l'atome central est lié à trois atomes dans l'une des formules et à quatre atomes dans l'autre.
Exercice 15.4. Question 2 : commenter la répartition des charges dans l'édifice.
Exercice 15.8. Question 1 : discuter de la polarité des composés pour identifier les forces de Van der Waals mises en jeu.
Exercice 15.9. Question 3 : comparer l'importance des forces de Van der Waals et des liaisons hydrogène lorsque la chaîne carbonée s'allonge.
Exercice 15.10. Penser à des liaisons hydrogène intramoléculaires.

■■ Corrigé des vrai/faux

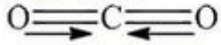
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai

1. Les atomes de la deuxième période du tableau périodique ne peuvent pas s'entourer de plus de quatre doublets d'électrons.

2. L'atome de phosphore appartient à la troisième période du tableau périodique, et possède cinq électrons de valence : il peut être hypervalent et établir jusqu'à cinq liaisons covalentes, dans la molécule de pentachlorure de phosphore PCl_5 par exemple.

4. Elle est égale à la charge globale de l'édifice, qui peut être positive (pour un cation polyatomique), négative (anion) ou nulle (molécule).

6. Représentons la structure géométrique de CO_2 :



Chaque liaison C=O est polarisée, et chaque vecteur moment dipolaire de liaison est dirigé selon la liaison C=O et orienté de O vers C. Les deux vecteurs sont opposés donc leur somme vectorielle est nulle. La molécule est apolaire.

8. Les molécules apolaires peuvent interagir selon des forces de London (dipôle instantané/dipôle induit).

❑ Les erreurs classiques

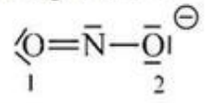
– Dans le décompte des électrons de valence d'un édifice, ne pas oublier de tenir compte de la charge de l'édifice s'il s'agit d'un ion polyatomique.
– Une fois le schéma de Lewis de l'entité établi, penser à vérifier que les atomes C, N, O et F sont entourés au maximum de quatre doublets d'électrons.
– La somme des vecteurs moments dipolaires de liaison d'une molécule ne peut se faire que sur une représentation tridimensionnelle, et non sur un schéma de Lewis.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 15.1

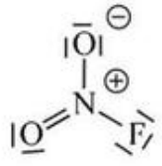
a) D'après leur position dans le tableau périodique, les atomes d'azote et d'oxygène possèdent respectivement 5 et 6 électrons de valence.

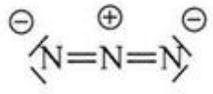
Le schéma de Lewis de NO_2^- fait intervenir $N_v = 5 + 2\times 6 + 1 = 18$ électrons de valence, soit $P_v = 9$ paires électroniques. Il manque six doublets sur le schéma de Lewis proposé, que l'on répartit sur les atomes N et O afin qu'ils respectent la règle de l'octet.

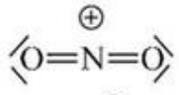
On peut proposer la formule de Lewis suivante : 

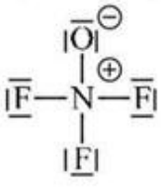
Le calcul des charges formelles est : $c_f(N) = 5 - 5 = 0$; $c_f(O^1) = 6 - 6 = 0$; $c_f(O^2) = 6 - 7 = -1$.

b) L'atome de fluor appartient à la 17^e colonne du tableau périodique, il possède donc 7 électrons de valence. Pour NO_2F, $N_v = 5 + 2\times 6 + 7 = 24$ électrons de valence, soit $P_v = 12$ paires électroniques.

Il manque 8 doublets sur la formule de Lewis donnée. On peut proposer : 

c) Pour N_3^-, $N_v = 3\times 5 + 1 = 16$ soit $P_v = 8$. On en déduit de même : 

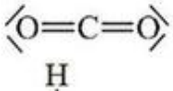
d) Pour NO_2^+, $N_v = 5 + 2\times 6 - 1 = 16$ soit $P_v = 8$. On en déduit de même : 

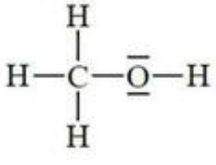
e) Pour NOF_3, $N_v = 5 + 6 + 3\times 7 = 32$ soit $P_v = 16$. On en déduit de même : 

⇨ *Méthodes 15.1, 15.2 et 15.3*

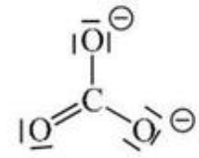
Exercice 15.2

1. H, C et O possèdent respectivement 1, 4 et 6 électrons de valence d'après leur position dans le tableau périodique.

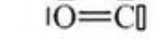
Pour CO_2 : $N_v = 4 + 2\times 6 = 16$ d'où $P_v = 8$ 

Pour CH_3OH : $N_v = 4 + 6 + 4\times 1 = 14$ d'où $P_v = 7$ 

Pour CO_3^{2-} : $N_v = 4+3\times6+2=24$ d'où $P_v = 12$

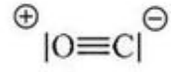


2. Pour CO, $N_v = 4+6=10$ d'où $P_v = 5$. Dans le schéma de Lewis suivant, aucune charge formelle n'apparaît sur les atomes :



Cependant, l'atome de carbone n'est entouré que de trois doublets dans ce schéma de Lewis : il ne respecte pas la règle de l'octet. Cette structure n'est donc pas satisfaisante.

3. On peut donc proposer le schéma de Lewis suivant, dans lequel les deux atomes respectent la règle de l'octet :



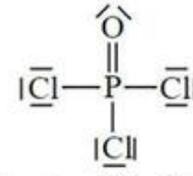
Elle fait intervenir des charges formelles sur les atomes. Comme O est plus électronégatif que C, les charges formelles sont en désaccord avec l'électronégativité des atomes. C'est cependant le schéma de Lewis le plus représentatif du monoxyde de carbone.

⇨ *Méthodes 15.1, 15.2 et 15.3*

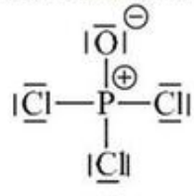
Exercice 15.3

1. P, O et Cl possèdent respectivement 5, 6 et 7 électrons de valence d'après leur position dans le tableau périodique.

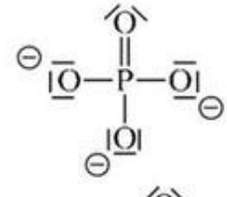
Pour $POCl_3$: $N_v = 5+6+3\times7=32$ d'où $P_v = 16$



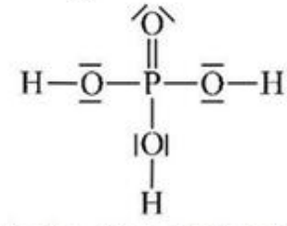
Pour un atome central d'un élément de la 3e période, il est préférable d'écrire une structure où l'atome central est hypervalent plutôt que de faire apparaître de nombreuses charges formelles. On évite donc ici le schéma suivant :



Pour PO_4^{3-} : $N_v = 5+4\times6+3=32$ d'où $P_v = 16$



2. L'acide orthophosphorique H_3PO_4 est le triacide conjugué de l'ion phosphate PO_4^{3-}, on peut donc en déduire directement son schéma de Lewis :



⇨ *Méthodes 15.1, 15.2 et 15.3*

3. Pour l'acide phosphoreux H_3PO_3 : $N_v = 3\times1+5+3\times6 = 26$ d'où $P_v = 13$.

On peut proposer les deux schémas de Lewis ci-dessous, dans lesquels les atomes d'oxygène respectent la règle de l'octet et les atomes d'hydrogène la règle du duet.



et

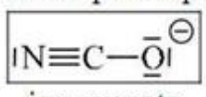
Dans le premier schéma de Lewis, l'atome de phosphore est entouré d'un octet d'électrons, tandis que dans la seconde, P est entouré de cinq doublets : il est hypervalent.

4. H_3PO_3 est un diacide. Les atomes d'hydrogène acides sont liés aux atomes d'oxygène dans la molécule. Seul le deuxième schéma de Lewis est en accord avec cette observation, puisqu'il correspond à un diacide contrairement à la première formule dans laquelle H_3PO_3 présenterait *trois* acidités.

Exercice 15.4

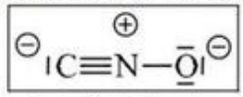
1. Pour les deux ions NCO^- et CNO^-, $N_v = 5+4+6+1 = 16$ et $P_v = 8$.

Les schémas de Lewis les plus représentatifs pour ces deux ions sont les suivants :



ion cyanate

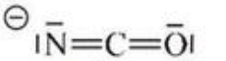
et



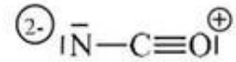
ion fulminate

Les schémas de Lewis suivants pourraient être envisagés mais sont moins représentatifs, pour les raisons indiquées sous chaque structure.

– Ion cyanate :

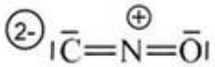


charge formelle – portée par l'atome d'azote, moins électronégatif que l'oxygène



charge formelle trop élevée (en valeur absolue) sur l'atome d'azote et charge positive sur O

– Ion fulminate :



charge formelle trop élevée (en valeur absolue) sur l'atome de carbone

⇨ *Méthodes 15.1, 15.2 et 15.3*

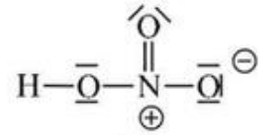
2. Le schéma de Lewis le plus représentatif de l'ion fulminate fait intervenir une séparation de charges importante (une charge formelle sur chaque atome). De plus, l'atome de carbone possède une charge formelle négative et l'atome d'azote une charge formelle positive, en désaccord avec leurs électronégativités respectives. Ces observations permettent d'interpréter la relative instabilité de l'ion fulminate.

3. On ne peut trouver aucun schéma de Lewis pour l'ion CON^- dans lequel les trois atomes respectent la règle de l'octet et possèdent tous des charges formelles inférieures à 2 en valeur absolue. Cet ion n'existe pas.

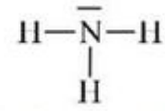
Exercice 15.5

1.a) $\boxed{HNO_3 + NH_3 = NH_4NO_3}$

b) Pour HNO_3 : $N_v = 1+5+3\times6 = 24$ et $P_v = 12$



Pour NH_3 : $N_v = 5+3 = 8$ et $P_v = 4$

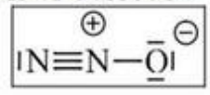


⇨ *Méthodes 15.1, 15.2 et 15.3*

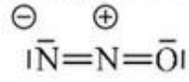
c) Le pourcentage en masse de l'élément azote est égal à :

$\%_N = \dfrac{2\times M_N}{M_{NH_4NO_3}} \times 100$, avec $M_{NH_4NO_3} = 14\times2+4+3\times16 = 80$ g·mol^{-1} d'où $\boxed{\%_N = 35}$.

2. Pour N_2O, $N_v = 2\times5+6 = 16$ et $P_v = 8$. L'enchaînement des atomes dans ce composé est N–N–O. On en déduit le schéma de Lewis ci-dessous :



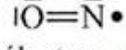
Le schéma de Lewis proposé est plus représentatif que le schéma suivant car la charge négative est portée par O, *plus électronégatif que* N *:*



3. a) NO : monoxyde d'azote ; NO_2 : dioxyde d'azote ; N_2O_4 : tétraoxyde d'azote (ou de diazote) ; HNO_2 : acide nitreux.

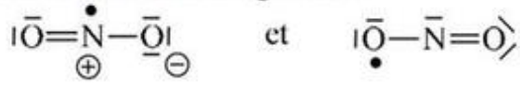
b) Pour NO, $N_v = 5+6 = 11$ donc $P_v = 5$ et il reste 1 électron célibataire.

On en déduit le schéma de Lewis ci-dessous :

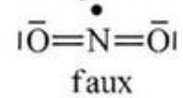


Pour NO_2, $N_v = 5+2\times6 = 17$ et $P_v = 8+1$ électron célibataire . N est l'atome central.

On en déduit les deux schémas de Lewis envisageables :

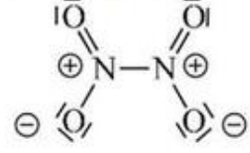


Il serait incorrect d'envisager le schéma de Lewis ci-dessous, dans lequel l'atome d'azote est entouré de neuf électrons et ne respecte pas la règle de l'octet !

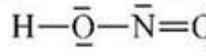


faux

À partir du schéma de Lewis de NO_2, on peut en déduire celui de N_2O_4 (qui est obtenu par dimérisation du dioxyde d'azote et ne contient pas de liaison O–O) :

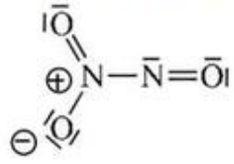


Pour HNO_2, $N_v = 1+5+2\times6 = 18$ et $P_v = 9$. On en peut déduire le schéma de Lewis de HNO_2 :



c) Les molécules NO et NO_2 possèdent un électron célibataire, ce qui rend les deux espèces particulièrement réactives.

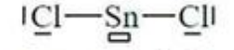
d) On peut écrire le schéma de Lewis de N_2O_3 en considérant la mise en commun par NO et NO_2 de leur électron célibataire pour conduire à une liaison covalente :



⇨ *Méthodes 15.1, 15.2 et 15.3*

Exercice 15.6

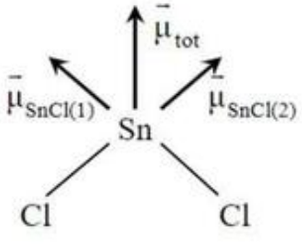
1. L'élément Sn appartient à la même colonne du tableau périodique que C, l'atome d'étain possède donc 4 électrons de valence. Cl possède quant à lui 7 électrons de valence.
On a donc pour $SnCl_2$: $N_v = 4+2\times7 = 18$ et $P_v = 9$. Sn est l'atome central. On en déduit le schéma de Lewis ci-dessous :



L'absence d'un doublet d'électrons par rapport à l'octet pour Sn se traduit par une lacune électronique sur l'atome.

⇨ *Méthodes 15.1 et 15.2*

2. $SnCl_2$ peut être qualifié d'acide de Lewis car il possède une lacune électronique. Il peut aussi être qualifié de base de Lewis du fait de la présence d'un doublet non liant sur l'atome d'étain.
3. D'après l'énoncé, $SnCl_2$ possède une géométrie coudée. Le chlore étant plus électronégatif que l'étain, chaque liaison Sn–Cl est polarisée. Le vecteur moment dipolaire associé à chaque liaison est porté par la liaison Sn–Cl et orienté de Cl vers Sn (pour plus de visibilité on choisit comme origine commune de ces vecteurs l'atome d'étain). On en déduit alors $\vec{\mu}_{tot} = \vec{\mu}_{SnCl(1)} + \vec{\mu}_{SnCl(2)}$. La molécule est polaire car $\vec{\mu}_{tot} \neq \vec{0}$. Le vecteur $\vec{\mu}_{tot}$ est orienté selon la bissectrice de l'angle Cl–Sn–Cl.



⇨ *Méthode 15.4*

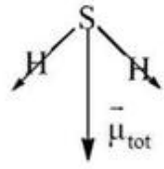
Exercice 15.7

Pour chacun des édifices, on représente le vecteur moment dipolaire de chaque liaison, en comparant les électronégativités des deux éléments mis en jeu.
En faisant la somme (vectorielle) des moments dipolaires de liaison (on néglige la contribution

des doublets non liants), on représente le moment dipolaire total, s'il est non nul. On peut ainsi conclure si l'édifice est ou non polaire.

⇨ *Méthode 15.4*

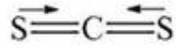
a) H_2S



$\vec{\mu}_{tot} \neq \vec{0}$
Édifice polaire

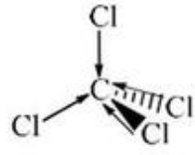
b) NO_2^+ Édifice globalement chargé, recherche de moment dipolaire sans objet

c) CS_2



$\vec{\mu}_{tot} = \vec{0}$
Édifice apolaire

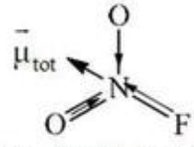
d) CCl_4



$\vec{\mu}_{tot} = \vec{0}$
Édifice apolaire

e) NO_2^- Édifice globalement chargé, recherche de moment dipolaire sans objet

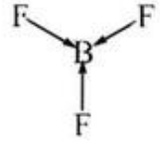
f) NO_2F



$\vec{\mu}_{tot} \neq \vec{0}$
Édifice polaire

Moments dipolaires des liaisons N–O moins grands que celui de N–F, d'où une résultante non nulle

g) BF_3



$\vec{\mu}_{tot} = \vec{0}$
Édifice apolaire

Exercice 15.8

1. Les différences entre les températures d'ébullition des composés étudiés sont dues à la nature des forces intermoléculaires mises en jeu. Les composés hydrogénés des éléments de la colonne 14 sont apolaires ; en effet, du fait de la géométrie tétraédrique de la molécule, la somme des moments dipolaires des liaisons A–H est nulle. Les composés AH_4 sont donc liés uniquement par des forces de Van der Waals de London (dipôle instantané/dipôle induit). Les composés hydrogénés des éléments de la colonne 17 sont polaires et mettent en jeu les trois types de forces de Van der Waals (Keesom, Debye et London) ; l'« anomalie » observée pour HF sera traitée à la question **3**.

⇨ *Méthode 15.4*

Or, plus les forces intermoléculaires sont importantes, plus la température d'ébullition du corps pur est élevée. C'est pourquoi les composés hydrogénés des éléments de la colonne 14 ont des températures d'ébullition plus basses que celles des composés hydrogénés des éléments de la colonne 17.

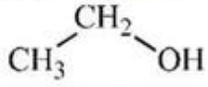
2. Les éléments Cl, Br et I sont des halogènes. De Cl à I, le rayon atomique augmente, donc les molécules sont de plus en plus polarisables et les interactions de Van der Waals augmentent. Ceci explique l'augmentation de la température d'ébullition pour la série de HCl à HI.

3. L'anomalie apparente observée pour HF est due au fait que l'atome de fluor est petit et très électronégatif, ce qui permet la formation de liaisons hydrogène intermoléculaires (énergie de 10 à 30 $kJ \cdot mol^{-1}$ environ), prépondérantes par rapport aux forces de Van der Waals. Les forces intermoléculaires sont donc plus importantes que pour les autres composés HX (X étant Cl, Br ou I), d'où la température d'ébullition particulièrement élevée.

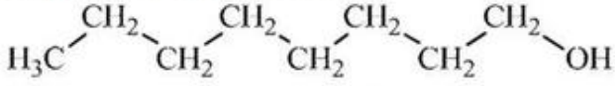
⇨ *Méthode 15.5*

Exercice 15.9

1. On représente la formule semi-développée des deux composés.

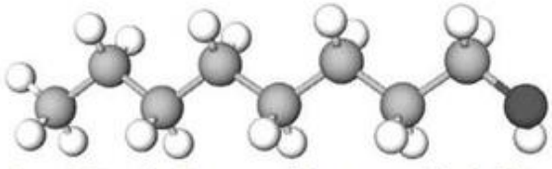


éthanol



octan-1-ol





2. Une espèce possède un caractère hydrophile si elle possède une affinité importante pour l'eau et tend à y être soluble. Une espèce possède un caractère lipophile si elle est soluble dans un corps gras, et insoluble dans l'eau (elle est alors hydrophobe).
D'après la définition du coefficient de partage P, P est d'autant plus élevé que la concentration de l'espèce dans l'octan-1-ol est plus élevée et que la concentration de l'espèce dans l'eau est plus faible. L'espèce la plus lipophile est donc caractérisée par la plus faible valeur de c_{eau}, donc la valeur maximale de log P. Il s'agit donc du pentan-1-ol, pour lequel log $P = +\,1{,}51$.

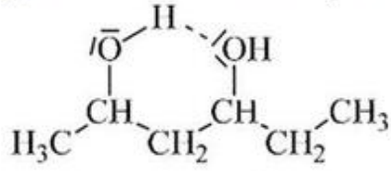
3. Comparons les affinités relatives des alcools linéaires de formule $C_nH_{2n+1}OH$ (n = 1 à 5) pour l'eau. Les alcools peuvent s'associer avec l'eau et l'octan-1-ol par des liaisons hydrogène intermoléculaires. Cependant, lorsque la taille de la chaîne carbonée augmente, l'affinité de l'alcool pour l'octan-1-ol augmente car les forces de Van der Waals entre ces deux composés deviennent prépondérantes : on observe une augmentation de log P dans la série des alcools.
Quant à l'éthoxyéthane, il s'agit d'un isomère de fonction du butan-1-ol. Il ne peut pas établir de liaison hydrogène avec l'eau ou avec l'octan-1-ol, et possède donc une affinité bien plus importante pour le solvant organique, avec lequel il peut interagir selon des forces de Van der Waals. On voit que la valeur de log P pour l'éthoxyéthane est voisine de celle du butan-1-ol, ce qui vient confirmer que les forces de Van der Waals entre le butan-1-ol et l'octan-1-ol sont plus importantes que les liaisons hydrogène, expliquant le caractère lipophile du composé.

⇨ *Méthode 15.5*

Exercice 15.10

On constate que $\theta_{éb}$(hexane-1,5-diol) > $\theta_{éb}$(hexane-2,4-diol), ce qui suggère des forces intermoléculaires plus importantes dans le cas de l'isomère 1,5.
Les deux isomères portent deux fonctions alcool, et seule la position relative de ces fonctions change d'un isomère à l'autre. Les forces intermoléculaires qui assurent la cohésion de ces composés à l'état liquide sont les forces de Van der Waals et les liaisons hydrogène. Discutons de la nature de ces forces pour les deux isomères. Les deux alcools sont des molécules polaires,

et les forces de Van der Waals de Keesom, Debye et London sont donc équivalentes pour les deux composés, dont la masse molaire moléculaire est identique.
De même, les deux isomères établissent des liaisons hydrogène intermoléculaires.
La différence s'explique par la possibilité pour les molécules d'hexane-2,4-diol d'établir des liaisons hydrogène intramoléculaires en plus des liaisons hydrogène intermoléculaires. Ces liaisons *intra*moléculaires tendent à individualiser les molécules, qui établissent donc en moyenne moins de liaisons hydrogène *inter*moléculaires que l'hexane-1,5-diol.

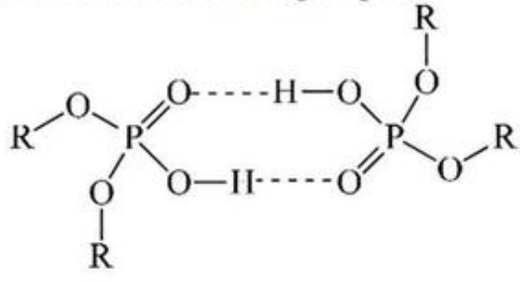


Dans l'hexane-1,5-diol, les groupes –OH sont trop éloignés et ne peuvent pas établir de liaison hydrogène intramoléculaire, ils sont donc davantage disponibles pour former des liaisons hydrogène intermoléculaires, ce qui augmente la cohésion du corps pur à l'état liquide.
La température d'ébullition de l'isomère 1,5 est donc plus élevée que celle de l'isomère 2,4.

⇨ *Méthode 15.5*

Exercice 15.11

L'acide di(2-éthylhexyl)phosphorique est un composé polaire, qui peut établir des liaisons hydrogène intermoléculaires. Dans un solvant organique apolaire (tel que l'hydrocarbure utilisé pour l'extraction des cations métalliques), l'acide possède peu d'affinité pour le solvant et est peu soluble sous sa forme monomère : il peut en effet interagir avec le solvant par des forces de Van der Waals du fait de ses chaînes carbonées 2-éthylhexyle, mais la partie phosphatée est hydrophile et est peu soluble dans le solvant. Cependant, deux molécules d'acide di(2-éthylhexyl)phosphorique peuvent établir des liaisons hydrogène intermoléculaires de façon à former un dimère stable, soluble dans le solvant organique.



⇨ *Méthode 15.5*

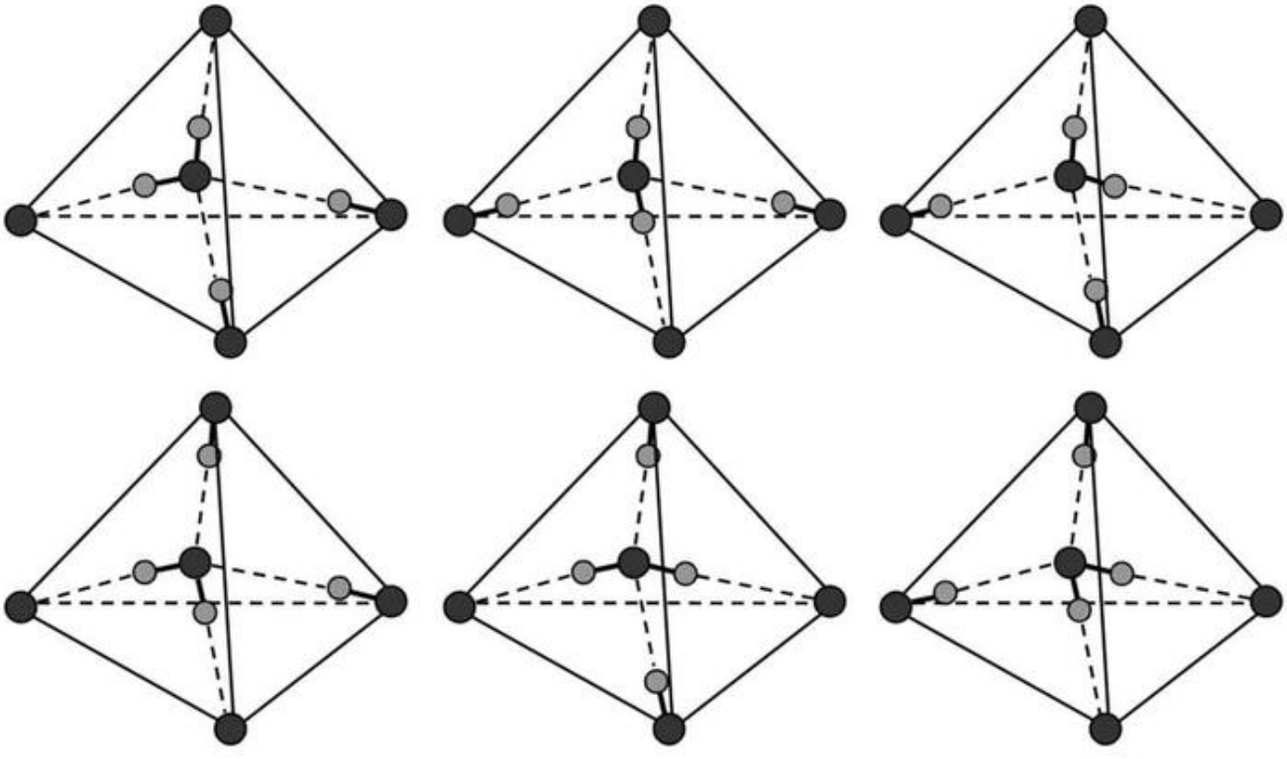
Exercice 15.12

1. Une liaison hydrogène peut s'établir lorsqu'un atome d'hydrogène lié à un atome petit et électronégatif (tel que F, O, N) interagit avec un atome très électronégatif porteur d'un doublet non liant. Il s'agit d'une interaction à courte distance, directionnelle (la force d'interaction est maximale lorsque les trois atomes engagés dans la liaison H sont alignés).
Les températures d'ébullition « anormalement » élevées de H_2O et HF par rapport à leurs analogues hydrogénés, la miscibilité des alcools à courte chaîne carbonée avec l'eau, ou la formation de dimères d'acides carboxyliques, ont leur origine dans la formation de liaisons hydrogène inter- ou intramoléculaires.

2. La distance d_1 représente la longueur de la liaison covalente O–H de l'eau. La distance d_2 représente la longueur de la liaison hydrogène qui s'établit entre deux molécules d'eau (distance entre l'atome H d'une molécule d'eau et l'atome O de la molécule d'eau voisine).
Les angles au centre du tétraèdre sont différents du fait de la géométrie de la molécule d'eau ($\widehat{HOH} \approx 105° \neq 109{,}5°$), il ne s'agit donc pas d'un tétraèdre régulier.

3. Chaque molécule d'eau se comporte à la fois comme un donneur de deux liaisons hydrogène (par ses deux atomes d'hydrogène), et un accepteur de deux liaisons hydrogène (par les deux doublets non liants de O). En moyenne chaque molécule d'eau s'entoure donc de quatre liaisons hydrogène.

4. Selon la disposition de la molécule d'eau au centre du tétraèdre, on peut envisager les six arrangements suivants.



Exercice 15.13

1. Un solvant est polaire s'il possède un moment dipolaire relativement élevé, ce qui est le cas de l'eau, de l'éthanol, de l'éther et du chloroforme (dans ces composés, les liaisons C–O ou C–Cl sont fortement polarisées). Un solvant est protique s'il possède un atome d'hydrogène acide qui lui permet d'établir des liaisons hydrogène. Seuls l'eau et l'éthanol, grâce à la présence d'un atome d'hydrogène lié à un atome d'oxygène, sont protiques.

Solvant	eau	éthanol	éther	chloroforme	cyclohexane
Propriétés	polaire protique	polaire protique	polaire aprotique	polaire aprotique	apolaire aprotique

2. L'eau et l'éthanol sont protiques, et peuvent donc s'associer par des liaisons hydrogène intermoléculaires. Comme la chaîne carbonée de l'éthanol est courte, c'est le caractère hydrophile de l'éthanol qui est prépondérant et les deux solvants sont miscibles.

⇨ *Méthode 15.5*

3. a) Le diiode est initialement dissous en phase aqueuse. Pour l'extraire de ce solvant, il est donc nécessaire d'utiliser un solvant non miscible à l'eau dans lequel le diiode est plus soluble. On a donc le choix entre l'éther, le chloroforme et le cyclohexane. Il est préférable d'utiliser un solvant le moins toxique possible, ce qui exclut le chloroforme. L'éther possède une faible température d'ébullition, sa volatilité permet de l'éliminer facilement suite à une extraction ; cependant il est de ce fait inflammable, et il est donc préférable d'utiliser le cyclohexane.

b) On peut proposer le protocole opératoire suivant.

– Se munir de gants et de lunettes pour la manipulation.

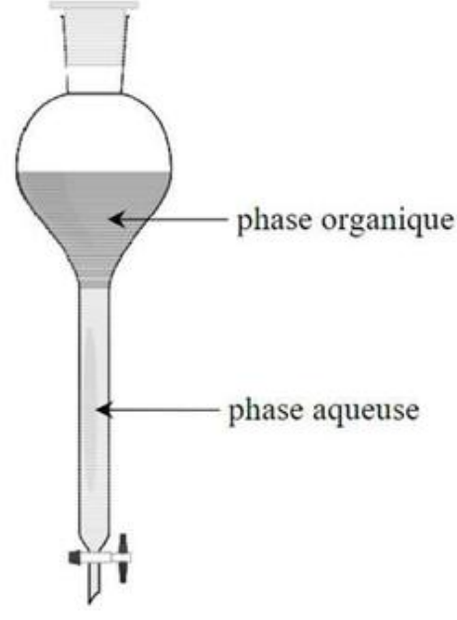
– Introduire la solution aqueuse à extraire dans une ampoule à décanter placée sur un support.

– Prélever environ 20 mL de cyclohexane à l'aide de l'éprouvette graduée et introduire le solvant dans l'ampoule à décanter.

– Fermer l'ampoule à décanter, agiter et effectuer plusieurs dégazages.

– Laisser décanter après avoir enlevé le bouchon. Mettre la phase aqueuse (phase inférieure, plus dense) de côté et récupérer la phase organique (phase supérieure, moins dense).

– L'extraction peut être répétée à partir de la phase aqueuse récupérée, de façon à augmenter le rendement de l'extraction.



La phase organique pourra ensuite être séchée avec un desséchant, puis filtrée.

Chapitre 16

Moment cinétique Force centrale

UN SCIENTIFIQUE



Dans chaque domaine qu'il aborde, **Christiaan Huygens** (1629-1695) est capable d'élaborer une théorie physique, de développer les éléments mathématiques pour l'étudier et de concevoir des instruments pour étayer ses hypothèses. Il étudie le mouvement du pendule, ce qui l'amène à construire des horloges ; il conçoit des instruments d'optique, avec lesquels il découvre les anneaux de Saturne et détermine avec précision les dimensions des planètes et leur distance. Il développe aussi le calcul des probabilités.

Un peu d'histoire

Dans un Moyen-Âge où les sciences étaient peu en vogue, Jean Buridan (env. 1300-1358) fait exception. Il s'intéresse à la chute des corps et introduit la notion d'*impetus* qui préfigure celle d'inertie. Le concept de quantité de mouvement est étudié par Descartes, mais c'est le savant hollandais Christiaan Huygens qui en explique la nature : il s'intéresse aux collisions élastiques et se rend compte que la conservation de la quantité de mouvement doit se comprendre globalement et vectoriellement. Les lois de la dynamique, publiées par Newton en 1687, permettent d'étayer ces propriétés. Celle de la gravitation universelle, introduite dans le même ouvrage, permet de démontrer les lois du mouvement des planètes, qui avaient été énoncées empiriquement par Johannes Kepler en 1621, après une longue analyse des observations extrêmement précises de l'astronome danois Tycho Brahe.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les définitions du moment cinétique par rapport à un point, à un axe orienté
- Les définitions du moment d'une force par rapport à un point, à un axe orienté
- Le théorème du moment cinétique sous ses différentes formes
- Les notions de force centrale et de mouvement à force centrale
- Les expressions des deux forces newtoniennes et des énergies potentielles dont elles dérivent
- Les trois lois de Kepler

Ce qu'il faut savoir faire

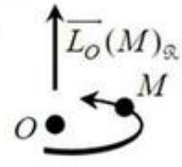
- Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement
- Étudier le mouvement d'un point matériel avec le théorème du moment cinétique
- Démontrer les lois du mouvement à force centrale : conservation du moment cinétique, planéité, loi des aires
- Définir une énergie potentielle effective, et l'utiliser pour déterminer les limites du mouvement radial
- Établir l'expression de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique
- Étudier un mouvement circulaire à force centrale gravitationnelle
- Différencier les orbites des satellites en fonction de leurs missions, et établir celle d'un satellite géostationnaire

■■ Résumé de cours

■ Moment cinétique

❑ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

Le moment cinétique d'un point matériel M de masse m, par rapport à un point O, dans le référentiel $\mathcal{R}$, est le vecteur : $\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}(M)_{\mathcal{R}}}$.
Sa direction indique un axe de rotation instantané de M autour de O.



❑ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique de M par rapport à un axe Δ, passant par O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$, dans $\mathcal{R}$, est la projection de $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$ sur Δ : $\boxed{L_\Delta(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}\cdot\overrightarrow{e_\Delta} = \left[m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}\right]\cdot\overrightarrow{e_\Delta}}$.
Il ne dépend pas du choix du point O sur l'axe Δ.
Son signe est positif si M tourne autour de l'axe dans le sens positif (règle du tire-bouchon…).

❑ Moment cinétique d'un système de points matériels

C'est la somme des moments cinétiques de tous les points du système.

■ Moment d'une force

❑ Moment (vectoriel) d'une force par rapport à un point

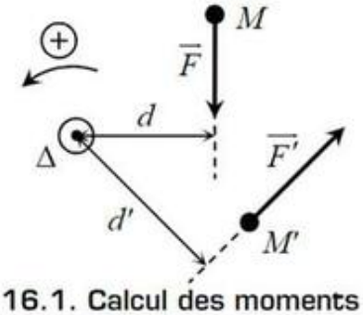
Le moment par rapport à O d'une force $\vec{F}$ s'exerçant en M est le vecteur : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}}$.

❑ Moment (scalaire) d'une force par rapport à un axe orienté

Le moment d'une force $\vec{F}$ s'exerçant en M, par rapport à un axe Δ passant par O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$, est la projection de $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ sur Δ : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\cdot\overrightarrow{e_\Delta} = \left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}\right]\cdot\overrightarrow{e_\Delta}}$.
Il ne dépend pas du choix du point O sur l'axe Δ.

– Une force a un moment nul par rapport à Δ si elle est parallèle à l'axe Δ, ou si son support (droite passant par M et dirigée par $\vec{F}$) coupe Δ.

– Pour une force dans un plan orthogonal à Δ, cette formule est équivalente à $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d\,F}$ où F est la norme de $\vec{F}$ et d le **bras de levier**, distance entre le support de la force et l'axe Δ.
Le signe de ce moment est positif si cette force tend à faire tourner M dans le sens positif autour de l'axe, il est négatif sinon.
Sur ce schéma : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F'}) > 0$.



⇨ **Méthode 16.1. Calcul des moments**

■ Théorème du moment cinétique (TMC)

❑ Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Par rapport à un point O fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})}$.

Par rapport à un axe Δ fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})}$.

⇨ **Méthode 16.2. Utilisation du TMC pour obtenir l'équation du mouvement**

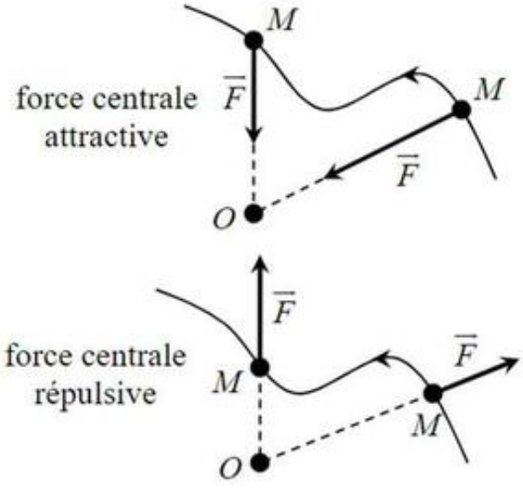
❑ Théorème du moment cinétique pour un système de points

Le théorème du moment cinétique pour un système, déformable ou non, s'écrit comme pour un point matériel, en tenant compte uniquement des moments des actions *extérieures* exercées sur les différents points du système (la somme des moments des actions intérieures étant nulle).

■ Application au mouvement à force centrale

❑ Forces centrales

On appelle **force centrale** toute force dont le support passe par un point fixe du référentiel. On choisit généralement ce point comme origine O du référentiel : la force est donc, à chaque instant, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et au vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$ des coordonnées sphériques.



Exemples

– Force de rappel élastique isotrope : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM} = -kr\overrightarrow{e_r}$.

– Force **gravitationnelle** exercée par une masse ponctuelle M située à l'origine O sur une masse ponctuelle m : $\boxed{\overrightarrow{F_g} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\overrightarrow{e_r} = -GMm\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}}$

avec $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ (constante de gravitation universelle).

– Force **électrostatique** exercée par une charge ponctuelle Q située en O sur une charge ponctuelle q : $\boxed{\overrightarrow{F_{él}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}}$ avec $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$ (permittivité du vide).

On dit que M est en **mouvement à force centrale** s'il est soumis uniquement à une force centrale (ou éventuellement à d'autres forces dont la somme est nulle).

❑ Conservation du moment cinétique

Pour M en mouvement à force centrale, dans $\mathcal{R}$ galiléen, le moment cinétique de M en O (le centre de force) se conserve : $\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}}}$.

❑ Conséquences

Mouvement plan

Le mouvement de M a lieu dans le plan contenant O (le centre de force) et orthogonal à $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$ (donné par les conditions initiales).

Dans le cas où $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$ est nul, alors le mouvement a lieu selon une droite passant par O.

⇨ **Méthode 16.3. Démonstration du mouvement plan**

Loi des aires

Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires et la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associée (dans ce plan, le r cylindrique se confond avec le r sphérique). Alors $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = C = \text{cte}}$ (**intégrale première du moment cinétique**).

Cette grandeur C est appelée **constante des aires**. En effet, l'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée Δt est $\boxed{S_{\Delta t} = \dfrac{|C|}{2}\Delta t}$: elle est proportionnelle à la durée.

⇨ **Méthode 16.4. Constante des aires et démonstration de la loi des aires**

■ Mouvement à force centrale conservative

❑ Conservation de l'énergie mécanique

Si la force $\overrightarrow{F}$ est conservative et dérive de l'énergie potentielle E_p, l'énergie mécanique se conserve : $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \text{cte}$ (intégrale première de l'énergie mécanique). On peut l'écrire :

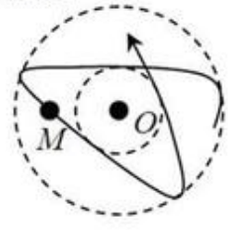
$E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\,\text{eff}}(r) = \text{cte}$ avec l'**énergie potentielle effective** $\boxed{E_{p\,\text{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r)}$.

❑ Limites du mouvement radial

Les seules valeurs accessibles de r sont celles qui vérifient l'inégalité $E_{p\,\text{eff}}(r) \leq E_m$. On applique alors un raisonnement graphique analogue à celui de la méthode 12.5.

Deux cas sont possibles, selon les conditions initiales.

– Si $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, la trajectoire du mobile M est comprise entre deux cercles de centre O et de rayons $r_{\min}$ et $r_{\max}$: M est dans un **état lié**.



– Si $r \in [r_{\min}, +\infty[$, la trajectoire du mobile M n'est pas bornée et il peut donc s'éloigner à l'infini : M est dans un **état libre** ou **état de diffusion**.



⇨ Méthode 16.5. Détermination des limites du mouvement radial

■ Cas du mouvement à force centrale newtonienne

❑ Force newtonienne

C'est une force centrale de la forme $\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$ avec K constante. On en connaît deux exemples.

– La force gravitationnelle est toujours attractive $(K = -GMm < 0)$.

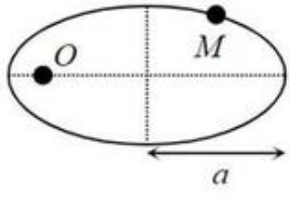
– La force électrostatique est attractive ou répulsive selon le signe de $K = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}$: des charges de même signe se repoussent $(K > 0)$, des charges de signes opposés s'attirent $(K < 0)$.

Énergie potentielle

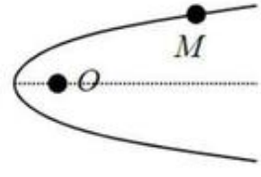
Une force newtonienne dérive d'une énergie potentielle : $\boxed{E_p = \frac{K}{r}}$ (avec origine à l'infini).

❑ Trajectoires possibles

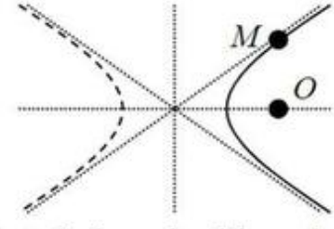
Dans le cas d'une force newtonienne attractive, il y a trois types de trajectoires possibles selon la valeur de l'énergie mécanique.



$E_m < 0$: ellipse de foyer O (état lié)



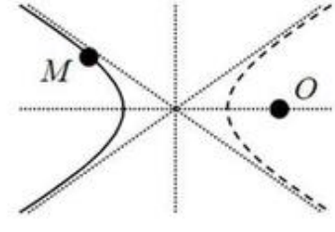
$E_m = 0$: parabole de foyer O (état de diffusion)



$E_m > 0$: branche d'hyperbole de foyer O (état de diffusion)

Une ellipse possède un grand axe (de longueur $2a$) et un petit axe (de longueur $2b$).
Le cercle est un cas particulier d'ellipse pour lequel $a = b = r$ (rayon).

Dans le cas d'une force newtonienne répulsive, $E_m > 0$ et la trajectoire est toujours une branche d'hyperbole de foyer O (branche la plus éloignée de O), correspondant à un état de diffusion.



❑ Mouvement des planètes : lois de Kepler

1. Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil est l'un des foyers.
2. Le vecteur Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
3. La période T et le demi-grand axe a sont tels que $\dfrac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes.

❑ Mouvement d'un satellite sur une trajectoire circulaire

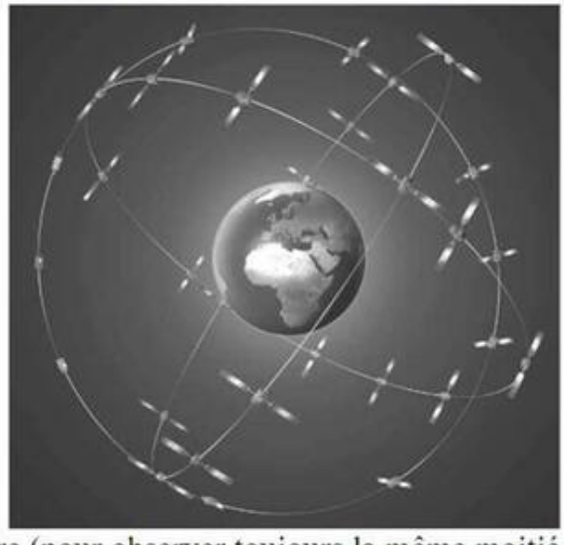
Pour un astre attracteur de masse M et de rayon R, la vitesse de satellisation sur une trajectoire circulaire de rayon r est $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$. On en déduit l'énergie mécanique : $\boxed{E_\text{m} = -\dfrac{GMm}{2r} = -E_\text{c}}$.

⇨ **Méthode 16.6. Étude d'une trajectoire circulaire**

Exemples de trajectoires circulaires

– Un satellite **géostationnaire** est immobile par rapport à la Terre : sa trajectoire est un cercle dans le plan équatorial et sa période de révolution est $T = 86164$ s (1 jour sidéral), ce qui détermine le rayon de sa trajectoire $r = 42200$ km et son altitude $h = r - R_\text{T} = 35800$ km.

– Les systèmes de géolocalisation et de navigation par satellites (GNSS) sont constitués de *constellations* de satellites : pour chaque système comme GPS ou Galileo, 24 satellites actifs sont répartis sur 3 orbites d'altitude moyenne (19000 à 23000 km), correspondant à une période de quelques heures. À tout instant, tout objet de la Terre est visible depuis au moins 3 satellites (et souvent 9 ou 10), ce qui permet de calculer sa position.



Constellation du système Galileo
Image ESA/Pierre Carril

– Un satellite météorologique peut être géostationnaire (pour observer toujours la même moitié de Terre), ou bien en **orbite circumpolaire**, orbite basse (altitude 600 à 800 km) passant pratiquement au-dessus des pôles : ainsi il peut observer chaque point de la Terre deux fois par jour.

❑ Énergie mécanique sur une trajectoire elliptique

Sur une trajectoire elliptique de demi-grand axe a, l'énergie mécanique vaut : $\boxed{E_\text{m} = -\dfrac{GMm}{2a}}$.

⇨ **Méthode 16.7. Calcul de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique**

■ Comment étudier le mouvement d'un point matériel avec le théorème du moment cinétique ?

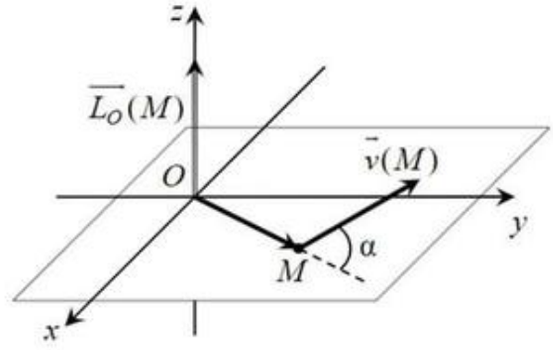
❑ Méthode 16.1. Calcul des moments

Le moment cinétique et le moment d'une force par rapport à un point sont des produits vectoriels de deux vecteurs, qui peuvent être calculés de deux manières :
- avec la définition du produit vectoriel (rarement utilisable en pratique) ;
- en utilisant les composantes des deux vecteurs dans une même base.

Les moments par rapport à un axe s'obtiennent par simple projection des moments vectoriels, ou bien avec la formule du « bras de levier » pour une force.

⇨ Exercices 16.1 à 16.14

– Par définition, le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ est orthogonal au plan défini par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$, son sens est tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{v}, \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right)$ forment un trièdre direct (règle des trois doigts de la main droite…) et sa norme est $\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{v}\right)\right|$.



Sur l'exemple du schéma ci-contre :
$\overrightarrow{L_O}(M) = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) = +m\,OM\,v\sin\alpha\,\overrightarrow{e_z}$
donc par rapport à l'axe (Oz) : $L_{(Oz)}(M) = +m\,OM\,v\sin\alpha$.

– Le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} r_2 v_3 - r_3 v_2 \\ r_3 v_1 - r_1 v_3 \\ r_1 v_2 - r_2 v_1 \end{pmatrix}$.

Par exemple dans une base cylindrique : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{L_O}(M)\begin{pmatrix} -mzr\dot{\theta} \\ m(z\dot{r} - r\dot{z}) \\ mr^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$.

On peut aussi faire ce calcul en écrivant explicitement les vecteurs unitaires de la base. On utilise alors le fait que le produit vectoriel de deux d'entre eux, pris dans l'ordre, donne le troisième (et s'ils sont pris dans le désordre, cela donne l'opposé) : par exemple $\overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r}$ mais $\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = -\overrightarrow{e_r}$. Enfin le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul.

Par exemple, toujours dans la base cylindrique : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$ donc

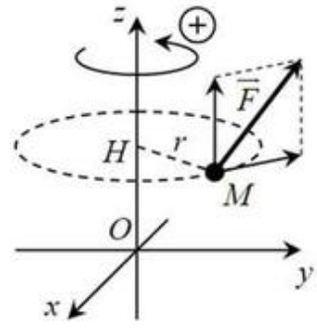
$$\begin{aligned}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} &= m\left(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z\right) \wedge \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z\right) \\ &= \vec{0} + mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta + mr\dot{z}\,\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z + mz\dot{r}\,\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r + mzr\dot{\theta}\,\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta + \vec{0} \\ &= -mzr\dot{\theta}\,\vec{e}_r + m(z\dot{r} - r\dot{z})\,\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z\ .\end{aligned}$$

Alors le moment par rapport à l'axe (Oz) est $L_{(Oz)}(M) = mr^2\dot{\theta}$.

– Pour le moment par rapport à un axe d'une force quelconque, on peut la décomposer en deux termes : l'un parallèle à l'axe, donc de moment nul, et l'autre dans un plan orthogonal à l'axe, pour lequel on peut faire le calcul avec le bras de levier.

Si on connaît les composantes de la force sur une base, on peut aussi faire un calcul analogue aux précédents (produit vectoriel puis projection sur l'axe).

Cherchons par exemple le moment par rapport à (Oz) d'une force $\vec{F} = F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_z\,\vec{e}_z$ appliquée à un point M quelconque.



$F_z\,\vec{e}_z$ est parallèle à l'axe, donc de moment nul ; et $F_\theta\,\vec{e}_\theta$ a pour bras de levier $HM = r$ donc $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{F}\right) = r\,F_\theta$ (le signe de F_θ donnant le « sens de rotation » donc le signe du moment).

On peut aussi le calculer à partir du moment par rapport à un point O de l'axe : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \left(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z\right) \wedge \left(F_\theta\,\vec{e}_\theta + F_z\,\vec{e}_z\right)$

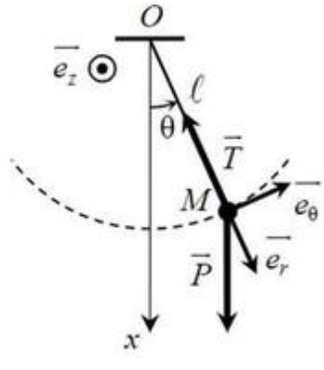
$= rF_\theta\,\vec{e}_z - rF_z\,\vec{e}_\theta + zF_\theta\,\vec{e}_r$ d'où $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z = r\,F_\theta$.

❑ Méthode 16.2. Utilisation du TMC pour obtenir l'équation du mouvement

On utilise le TMC dans certains cas particuliers pour éliminer une force inconnue, notamment la tension d'un fil ou la réaction d'un support : pour cela on applique le TMC par rapport à un point fixe donnant un moment nul pour cette force. Cette méthode peut permettre une mise en équation plus rapide que le PFD.
(On utilise aussi, et surtout, le TMC pour un mouvement à force centrale : voir méthodes suivantes.)

⇨ Exercices 16.1, 16.2, 16.3

L'exemple le plus classique est celui du pendule pesant simple, constitué d'une masse m assimilée à un point matériel M, suspendue par un fil idéal inextensible à un point fixe O du référentiel terrestre $\mathcal{R}$ (considéré comme galiléen). On suppose que M ne peut se déplacer que dans le plan vertical (Oxy). Forces appliquées à M : poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = mg\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$; tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_r$. On applique le TMC à M par rapport à O dans $\mathcal{R}$: $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{T}\right)$.



$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell \vec{e_r} \wedge mg\left(\cos\theta \vec{e_r} - \sin\theta \vec{e_\theta}\right) = \vec{0} - mg\ell\sin\theta \vec{e_z}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{T}$ est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$; et $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m\ell \vec{e_r} \wedge \ell\dot{\theta}\vec{e_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e_z}$ donc le TMC équivaut à : $m\ell^2\ddot{\theta}\vec{e_z} = -mg\ell\sin\theta \vec{e_z}$ d'où l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$.

■ Comment étudier un mouvement à force centrale ?

❑ Méthode 16.3. Démonstration du mouvement plan

Pour un point matériel M soumis uniquement à une force centrale $\vec{F}$, on applique le TMC par rapport au centre de force O : on en déduit que le moment cinétique est constant, puis que le mouvement a lieu dans un plan contenant O et dépendant des conditions initiales.

⇨ Exercice 16.4, 16.5, 16.6, 16.10

TMC par rapport au point O fixe dans $\mathcal{R}$ galiléen : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}}$: le moment cinétique de M en O se conserve.

Or $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}}$: le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal au vecteur constant $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$, donc le mouvement de M a lieu dans le plan contenant O et orthogonal à $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$.

– Supposons par exemple que les conditions initiales sont les suivantes : $\overrightarrow{OM_0} = a\vec{e_y}$ et $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$. Alors $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}} = ma\vec{e_y} \wedge v_0\vec{e_x} = -mav_0\vec{e_z}$. $\overrightarrow{OM}$ est alors toujours orthogonal à $\vec{e_z}$, soit $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$ donc le mouvement de M a lieu dans le plan (Oxy).

– Supposons maintenant $\overrightarrow{OM_0} = a\vec{e_y}$ et $\vec{v_0} = v_0\vec{e_y}$. Alors $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}} = ma\vec{e_y} \wedge v_0\vec{e_y} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ restent toujours colinéaires : le mouvement est rectiligne, selon l'axe (Oy) (donné par la position et la vitesse initiales).

❑ Méthode 16.4. Constante des aires et démonstration de la loi des aires

– On commence par montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

– On calcule l'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée infinitésimale, ce qui fait apparaître cette constante. Puis on intègre sur une durée quelconque.

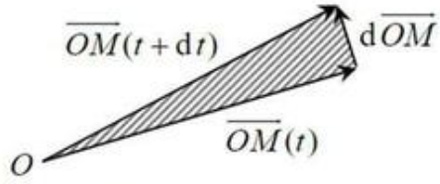
⇨ Exercices 16.4, 16.5, 16.6, 16.10, 16.13, 16.14

– Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires et la base $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$ associée : alors $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m r \overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = m r^2 \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $r^2\dot{\theta} = C = \text{cte}$.

Avec les conditions initiales précédentes, on trouve $C = -av_0$. $C<0$ donc $\dot{\theta}<0$: M tourne autour de O dans le sens négatif (par rapport au sens de $\overrightarrow{e_z}$).

– L'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée infinitésimale dt est :

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}\left\|r\overrightarrow{e_r}\wedge\left(\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}\right)\right\| = \frac{1}{2}r^2\left|\mathrm{d}\theta\right|$$



donc $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}r^2\left|\dot{\theta}\right| = \dfrac{|C|}{2}$ (vitesse aréolaire constante).

On intègre sur une durée Δt : l'aire balayée pendant Δt est alors $S_{\Delta t} = \dfrac{|C|}{2}\Delta t$.

Pour les conditions initiales précédentes on obtient donc $S_{\Delta t} = \dfrac{av_0}{2}\Delta t$.

❑ Méthode 16.5. Détermination des limites du mouvement radial

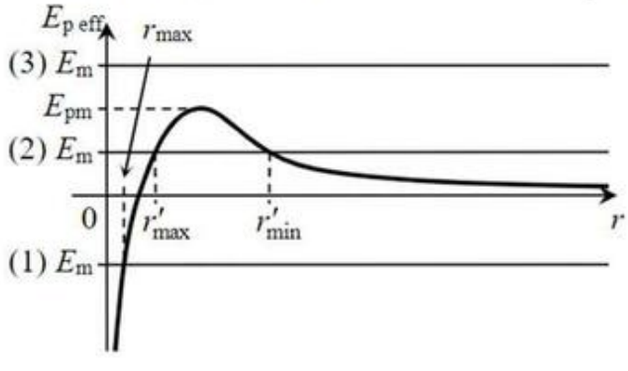
– On montre tout d'abord que les valeurs accessibles de r vérifient $E_{\text{p eff}}(r) \le E_{\text{m}}$.

– On trace alors la courbe donnant l'énergie potentielle effective en fonction de r, et on détermine, graphiquement puis éventuellement par le calcul, les valeurs de r accessibles d'après les conditions initiales.

⇨ **Exercice 16.4, 16.5, 16.7, 16.10, 16.14**

– L'énergie mécanique peut s'écrire $E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_{\text{p}}(r) = \text{cte}$ (après élimination de $\dot{\theta}$ avec $r^2\dot{\theta} = C = \text{cte}$), soit $E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{p eff}}(r) = \text{cte}$ en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{\text{p eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_{\text{p}}(r)$. Or $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$ donc $E_{\text{p eff}}(r) \le E_{\text{m}}$: les seules valeurs accessibles de r sont celles qui vérifient cette inégalité.

– Supposons par exemple que la courbe $E_{\text{p eff}}(r)$ a l'allure ci-dessous.



On distingue alors trois cas.

Cas 1 : si $E_{\text{m}} \le 0$, alors $0 \le r \le r_{\max}$ (état lié).

Cas 2 : si $0 < E_{\text{m}} < E_{\text{pm}}$, alors selon la valeur initiale de r on peut avoir $0 \le r \le r'_{\max}$ (état lié) ou $r \ge r'_{\min}$ (état de diffusion).

Cas 3 : si $E_{\text{m}} \ge E_{\text{pm}}$, alors toutes les valeurs de r sont accessibles (état de diffusion).

■ Comment calculer les paramètres d'un mouvement à force centrale newtonienne ?

❑ Méthode 16.6. Étude d'une trajectoire circulaire

On suppose au départ que la trajectoire est circulaire.
– Pour calculer la vitesse, on applique le PFD.
– On en déduit l'expression de l'énergie mécanique, ainsi que la troisième loi de Kepler pour les cercles.

⇨ Exercice 16.8, 16.9, 16.12

– PFD pour un satellite en orbite circulaire de rayon r : $m\vec{a} = -\dfrac{GMm}{r^2}\vec{e_r}$. Projection sur $\vec{e_r}$: $-mr\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GMm}{r^2}$ d'où $\dot{\theta}^2 = G\dfrac{M_T}{r^3}$ et $\boxed{v = r\left|\dot{\theta}\right| = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}}$.

– Alors l'énergie cinétique vaut $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{GMm}{2r}$, donc l'énergie mécanique vaut $E_m = \dfrac{GMm}{2r} - \dfrac{GMm}{r}$ soit $\boxed{E_m = -\dfrac{GMm}{2r} = -E_c}$.

– De plus la période est $T = \dfrac{2\pi}{\left|\dot{\theta}\right|} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$ donc $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}}$: c'est la même valeur pour tous les objets tournant autour de l'astre de masse M. Dans le cas où cet astre est le Soleil, on obtient donc la troisième loi de Kepler (dans l'approximation de trajectoires circulaires).

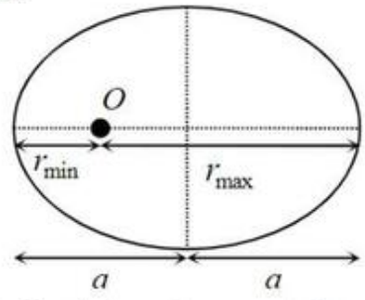
❑ Méthode 16.7. Calcul de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique

Avec l'énergie potentielle effective, on détermine l'équation donnant les deux valeurs extrêmes de la distance r.
Leur somme étant le grand axe de l'ellipse, on en déduit la relation cherchée.

⇨ Exercice 16.9

Dans le cas d'un état lié, les deux distances extrêmes r_{min} et r_{max} sont les solutions de l'équation : $E_{p\,eff}(r) = E_m \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r} = E_m \Leftrightarrow 2E_m r^2 + 2GMmr - mC^2 = 0$.

Sans même écrire les deux solutions, on sait que leur produit vaut $r_{\min} r_{\max} = \dfrac{-mC^2}{2E_m} (>0)$ et que leur somme vaut $r_{\min} + r_{\max} = -\dfrac{GMm}{E_m} (>0)$. Cela équivaut à $2a = -\dfrac{GMm}{E_m}$, soit $\boxed{E_m = -\dfrac{GMm}{2a}}$.



En particulier, si la trajectoire est circulaire, alors a est le rayon du cercle et on retrouve bien $E_m = -\dfrac{GMm}{2r}$.

■■ Vrai/Faux

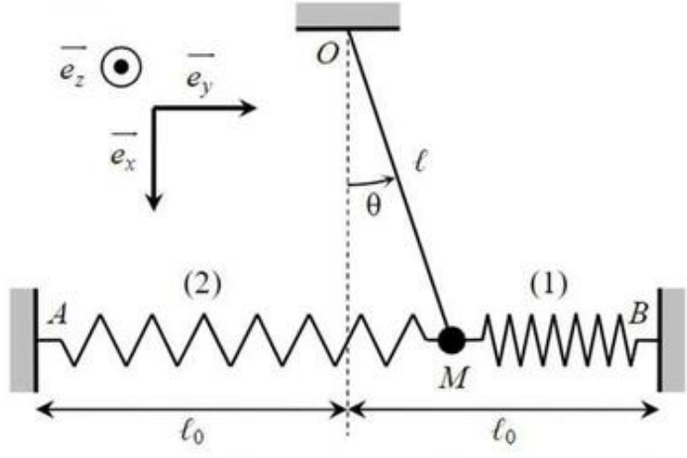
		Vrai	Faux
1.	Les moments par rapport à un point sont des vecteurs.	☐	☐
2.	Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs.	☐	☐
3.	Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie.	☐	☐
4.	Une force centrale est un vecteur de direction constante.	☐	☐
5.	La direction d'une force centrale est orthogonale au déplacement.	☐	☐
6.	Pour un point en mouvement à force centrale, le moment cinétique (par rapport au centre de force) est constant.	☐	☐
7.	Un mouvement à force centrale est toujours plan.	☐	☐
8.	Un mouvement à force centrale peut être rectiligne.	☐	☐
9.	La constante des aires provient de l'énergie mécanique.	☐	☐
10.	La constante des aires est utilisée pour faire apparaître l'énergie potentielle effective.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Pendules

❑ Exercice 16.1. Pendule simple relié à des ressorts

Un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur ℓ, à l'extrémité duquel est fixé un point matériel M de masse m. Il est accroché au point O, fixe par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. M est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, fixés entre deux points A et B distants de $2\,\ell_0$: lorsque le pendule est vertical, les ressorts sont au repos.



On déplace légèrement M par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre O, dans un plan vertical, et on repère sa position par l'angle θ avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.

1. Donner l'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$, en utilisant une base cylindrique $(\overline{e_r}, \overline{e_\theta}, \overline{e_z})$ d'origine O.
2. Calculer les moments des forces s'exerçant sur M, en fonction de la seule variable θ.
3. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire la pulsation des petites oscillations.

❑ Exercice 16.2. Pendule pesant simple : mouvement horizontal*

On constitue un pendule avec un fil idéal de longueur ℓ, dont l'une des extrémités est fixée au point O (origine du repère) ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel M de masse m. On prend l'axe (Oz) comme verticale ascendante (dans le référentiel terrestre supposé galiléen), et on utilise le système de coordonnées cylindriques. Le pendule est écarté d'un angle α par rapport à la verticale, et lancé avec une vitesse $\overline{v_0}$ pour que le point M décrive des cercles *horizontaux*.

1. Faire un schéma en perspective, en faisant apparaître la trajectoire de M et ses trois coordonnées. Préciser les valeurs de r et z.
2. Déterminer le vecteur $\overline{v_0}$ par application du TMC et montrer que le mouvement de M est uniforme.
3. Calculer la période T du mouvement. Quelle est la valeur approchée de T si α est faible ?

❑ Exercice 16.3. Pendule pesant simple : mouvement vertical* *

On constitue un pendule avec un fil idéal de longueur ℓ, dont l'une des extrémités est fixée au point O (origine du repère) ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel M de masse m. L'axe (Ox) est la verticale descendante, le repère $(Oxyz)$ étant lié au référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le pendule est écarté d'un angle α par rapport à la verticale, puis lâché sans vitesse initiale : on souhaite montrer que le mouvement aura lieu dans un plan vertical.

La « démonstration » qui tue !

1. On rencontre souvent le raisonnement suivant (auquel vous avez sûrement pensé...) : on fait un schéma dans le plan vertical (Oxy), on fait apparaître les deux forces, on écrit le PFD et sa projection sur $\overrightarrow{e_z}$ donne $\ddot{z}=0$, d'où $\dot{z}=0$ et finalement $z=0$ (avec les conditions initiales). Voyez-vous l'erreur fondamentale de ce raisonnement ?

Une démonstration rigoureuse

2. En appliquant le TMC en *coordonnées cartésiennes* (donc *sans utiliser d'angle*) au point M, montrer que le moment cinétique $L_{(Ox)}$ est une constante que l'on précisera. En déduire une équation différentielle liant $y(t)$ et $z(t)$.
3. Intégrer cette équation différentielle et en déduire que le mouvement de M a lieu dans un plan vertical (dépendant des conditions initiales).

*(L'étude des oscillations elles-mêmes, dans ce plan vertical, a été vue au chapitre **10**, dans la méthode 10.3.)*

■ Mouvement à force centrale quelconque

❑ Exercice 16.4. Force de rappel isotrope

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen lié au repère $(Oxyz)$, un point matériel M de masse m est mobile sans contrainte cinématique. Il subit une unique force $\overrightarrow{F}$, force centrale dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r)=\frac{1}{2}kr^2$ où k est une constante positive et r la distance OM. En coordonnées cartésiennes, les conditions initiales sont les suivantes :

$$x(0)=a>0\ ;\ y(0)=z(0)=0\ ;\ \dot{x}(0)=\dot{z}(0)=0\ ;\ \dot{y}(0)=v_0>0\,.$$

1. Déterminer la force $\overrightarrow{F}$, et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de $\overrightarrow{OM}$.
2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de M en O se conserve, et déterminer sa valeur avec les conditions initiales. En déduire que le mouvement est situé dans un plan que l'on précisera.
3. Montrer que l'énergie mécanique E_m de M se conserve, et déterminer sa valeur.
4. Démontrer que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement et préciser sa valeur. Déduire alors de la conservation de l'énergie une équation liant r, $\dot{r}$ et les constantes m, a, v_0 et k.
5. Définir une énergie potentielle effective de M. Montrer alors que la trajectoire est comprise entre deux cercles dont on donnera les rayons.
6. En utilisant le PFD (que l'on peut intégrer vectoriellement), déterminer les équations horaires cartésiennes de M. En déduire la nature exacte de la trajectoire, et vérifier le résultat de la question précédente. Représenter la trajectoire sur un schéma.

❑ Exercice 16.5. Nucléon dans un potentiel de Yukawa*



Le physicien japonais YUKAWA Hideki (prix Nobel 1949) a proposé en 1935 une interprétation des interactions nucléaires. On en donne ici quelques éléments simplifiés.

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen lié au repère $(Oxyz)$, un nucléon M de masse m est soumis uniquement à une force centrale $\overrightarrow{F}$ dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r)=\dfrac{K}{r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$ où K et a sont deux constantes (avec a positive) et r la distance OM. Cette énergie potentielle a pour origine les autres nucléons du noyau atomique.

1. Quelles sont les dimensions des constantes K et a ?

2. Déterminer l'expression de la force centrale $\overrightarrow{F}$ subie par le nucléon. Quel doit être le signe de K pour que cette force soit attractive ?

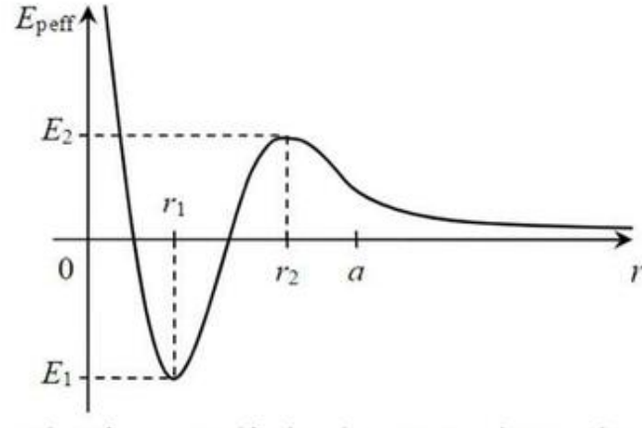
3. Démontrer que la trajectoire de M se situe dans un plan que l'on précisera.

4. On choisit ce plan comme plan (Oxy) du repère, et on utilise maintenant les coordonnées polaires de M dans ce plan. Montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement, et donner sa valeur à partir des conditions initiales : position $\overrightarrow{OM_0}=r_0\overrightarrow{e_x}$; vitesse $\overrightarrow{v_0}=v_1\overrightarrow{e_x}+v_2\overrightarrow{e_y}$.

5. Montrer que l'énergie mécanique de M peut s'écrire sous la forme : $E_m=\dfrac{1}{2}mr^2+E_{p\,eff}(r)$ avec une fonction $E_{p\,eff}(r)$ à préciser. E_m est-elle constante au cours du mouvement ?

6. Si la valeur de C est suffisamment faible, la courbe représentative de $E_{p\,eff}(r)$ a l'allure ci-contre.

Déterminer alors, en fonction des conditions initiales, si le nucléon est dans un état lié ou dans un état de diffusion. Lequel de ces deux cas correspond à la situation usuelle d'un nucléon ?



L'utilisation de ce type de potentiel a été envisagée pour décrire les quatre interactions fondamentales. Yukawa a également proposé de les interpréter comme des échanges de particules (bosons vecteurs) de masses très diverses : la portée a de chaque interaction, intervenant dans l'expression du potentiel, est alors liée à la masse m_b d'un boson vecteur par $a=\dfrac{h}{2\pi m_b c}$ avec les constantes universelles $c=3{,}0\cdot10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (célérité de la lumière dans le vide) et $h=6{,}6\cdot10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$ (constante de Planck). Les bosons vecteurs envisagés par Yukawa sont les suivants :

interaction forte	pion π	$m_b = 2{,}4 \cdot 10^{-28}$ kg
interaction faible	boson intermédiaire $W^{\pm}$	$m_b = 1{,}4 \cdot 10^{-25}$ kg
interaction électromagnétique	photon γ	$m_b = 0$
interaction gravitationnelle	graviton (hypothétique) g	$m_b = 0$

7. Calculer la portée a des quatre interactions et commenter les valeurs obtenues.

8. Pour les interactions gravitationnelle et électromagnétique, simplifier l'expression de $\vec{F}$ en tenant compte de la valeur trouvée pour a : montrer qu'on retrouve alors une forme connue.

9. Pour un proton dans un noyau, on peut ne considérer que les deux interactions électromagnétique et forte (les deux autres étant beaucoup plus faibles). Quel est le signe de la constante K dans le potentiel de Yukawa de l'interaction électromagnétique ? Quel doit être alors celui de la constante K' de l'interaction forte ?

❑ Exercice 16.6. Formules de Binet et application * *

On considère, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, une particule M (de masse m) soumise uniquement à une force centrale $\vec{F} = F_r(r)\vec{e_r}$ (coordonnées sphériques).

1. Démontrer que la trajectoire de M est plane.

2. On repère alors M par ses coordonnées polaires dans ce plan. Déterminer une intégrale première du mouvement en fonction de r et $\dot{\theta}$.

3. On pose $u = \dfrac{1}{r}$, $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ et $u'' = \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$. Montrer qu'il est possible d'exprimer la vitesse de M sous la forme $\vec{v} = -Cu'\vec{e_r} + Cu\vec{e_\theta}$, puis son accélération sous la forme $\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e_r}$ avec $C = r^2\dot{\theta}$. Ces deux formules sont appelées formules de Binet.

4. En utilisant la seconde formule de Binet, déterminer la fonction $F_r(r)$ pour que la trajectoire soit une spirale logarithmique, définie par l'équation polaire : $r = ae^{\theta}$.

5. Déterminer de même $F_r(r)$ pour que la trajectoire soit une ellipse, d'équation $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$.

❑ Exercice 16.7. Atome d'hydrogène dans un champ magnétique * *

On définit un repère $Oxyz$ lié au référentiel terrestre, supposé galiléen.

Un atome d'hydrogène est modélisé par un proton de charge e, fixe à l'origine O du repère, et un électron mobile de charge $-e$ et de masse m ; on rappelle que la force exercée par le proton sur l'électron est $\vec{F} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. De plus on applique à cet atome un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$ uniforme et stationnaire (avec $B > 0$).

On suppose que l'électron se trouve immobile à l'instant 0 au point $\overrightarrow{OM_0} = a\vec{e_x}$ (avec $a > 0$).

On traite le problème de son mouvement dans le cadre de la mécanique classique, et on admet que ce mouvement a lieu dans le plan $z = 0$.

On rappelle la formule du double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$.

1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, que l'on justifiera, montrer que la distance de l'électron au proton ne peut pas dépasser a.
2. Montrer que le moment cinétique de l'électron pour rapport à O est $\vec{L} = \frac{1}{2} e\left(r^2 - a^2\right)\vec{B}$.
3. Montrer que l'électron tourne toujours dans le même sens, que l'on précisera.
4. Montrer que l'énergie mécanique de M peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$ avec une fonction $E_{peff}(r)$ dont on précisera l'expression.
5. Déterminer le signe de $\frac{dE_{peff}}{dr}$ pour $r = a$ et pour $r \to 0$. Tracer l'allure de la courbe de la fonction $E_{peff}(r)$.
6. En déduire que la distance entre l'électron et le proton oscille entre deux valeurs r_{min} et r_{max} ; on déterminera l'une de ces deux valeurs, et on écrira l'équation déterminant l'autre.
7. Quelle est la vitesse de l'électron lorsque $r = a$? Dessiner une trajectoire possible de l'électron, en tenant compte de ce résultat et des autres informations.

■ Mouvement à force centrale newtonienne

Dans les exercices suivants, on note $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ la constante de gravitation universelle, $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$ la masse de la Terre et $R = 6370\ \mathrm{km}$ son rayon.

❑ Exercice 16.8. Satellite circulaire*

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r = R + h$ autour du centre de la Terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre). Ce mouvement peut s'étudier simplement à l'aide du PFD.

1. Montrer que la vitesse v est constante, et donner sa valeur en fonction de G, M, R et h.
2. En déduire la période T du mouvement, et montrer que la constante $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?
3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite ; quelle est la relation simple entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.
4. Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude h et commenter.
5. Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer ! Le satellite étant initialement immobile par rapport à la Terre, sur une base de lancement située à la latitude λ, une fusée lui fournit le travail W pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée ci-dessus.

a) Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement ? (On n'oubliera pas de tenir compte de la rotation de la Terre.)

b) Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?

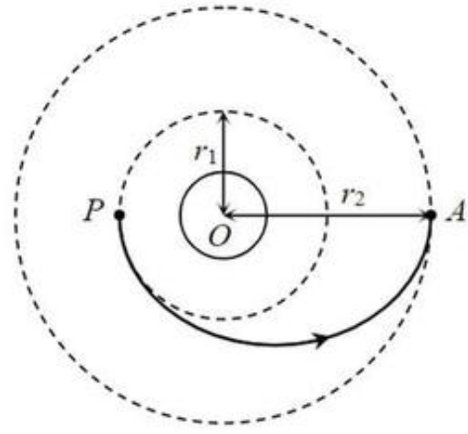
c) Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur ($\lambda_1 = 0$) et un lancement depuis le Nord de l'Europe ($\lambda_2 = 55°$), pour $h \ll R$. Commenter.

❑ Exercice 16.9. Changement d'orbite*

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M de masse m = 900 kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7500\,\text{km}$ autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42200\,\text{km}$ (orbite géostationnaire).

Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre de la Terre ; lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.

Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considérera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans chaque cas).



1. Calculer la vitesse v_1.

2. Démontrer que sur la trajectoire elliptique, le produit $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante (en notant r et θ les coordonnées polaires du satellite).

3. Montrer que l'énergie mécanique de M peut s'écrire sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$.

4. Déterminer l'équation dont sont solutions les deux valeurs extrêmes de r, et en déduire que pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe a, l'énergie mécanique du satellite s'écrit : $E_m = -\frac{GMm}{2a}$. Exprimer alors l'énergie mécanique du satellite sur chacune des trois orbites.

5. Calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert, et la variation $\Delta v_P = v_{e1} - v_1$. Calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.

6. Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2. Calculer v_{e2}.

7. Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert, et le second travail W_A fourni par le moteur au satellite.

❑ Exercice 16.10. Trou noir*

En 1783, le physicien britannique John MICHELL eut l'idée pour la première fois de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon de LAPLACE en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale, lorsque le jeune Karl SCHWARZSCHILD vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Albert EINSTEIN. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de *trou noir* s'est imposée dans les années 1960.



Première photographie d'un trou noir, obtenue par le télescope Event Horizon en 2019

On se propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans le cadre de la physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel P de masse m à proximité d'un astre sphérique de centre O, de masse M et de rayon R. Ce point matériel est soumis uniquement à la force gravitationnelle due à l'astre. On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique (dans lequel le point O est fixe), qui est supposé galiléen.

1. Exprimer cette force, ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive (supposée nulle à l'infini) et l'énergie mécanique du point matériel P. Cette dernière se conserve-t-elle ?
2. Montrer que le mouvement de P est nécessairement plan. P étant alors repéré par ses coordonnées polaires, démontrer que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme : $E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{p eff}}(r)$ en introduisant une fonction $E_{\text{p eff}}(r)$ dont on précisera l'expression.
4. Tracer la courbe représentative de $E_{\text{p eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_{m} le point P peut « échapper » à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver en état de diffusion.
5. En déduire la vitesse minimale, appelée vitesse de libération v_{lib}, pour qu'un objet à la surface de cet astre puisse s'en échapper.
6. Un trou noir est un astre pour lequel la vitesse de libération est supérieure à $c = 3\cdot10^8$ m·s^{-1} : aucun objet, pas même la lumière, ne peut donc dépasser cette vitesse et s'échapper du voisinage du trou noir.
   Calculer le rayon maximal R_{S} que doit avoir l'astre de masse M pour être un trou noir (ce rayon est appelé rayon de Schwarzschild). Faire l'application numérique avec la masse du Soleil ($M = 2{,}0\cdot10^{30}$ kg) puis celle de la Terre, et commenter.

❑ Exercice 16.11. Alerte à l'astéroïde !*

De nombreux objets, dits géocroiseurs, traversent l'orbite de la Terre… et parfois la heurtent !

On considère ici un astéroïde de masse m, actuellement très éloigné de la Terre et de tout autre astre, et ayant donc une vitesse constante $\overrightarrow{v_0}$. Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b (appelée *paramètre d'impact*) du centre O de la Terre ; cependant, lorsqu'il se rapprochera de la Terre, l'attraction gravitationnelle de celle-ci va dévier l'astéroïde, selon une trajectoire hyperbolique. On appelle *périgée* le point P de cette trajectoire le plus proche du centre de la Terre.



1. Quelles sont les deux grandeurs dynamiques de l'astéroïde qui se conservent au cours de son mouvement ? Écrire les deux équations correspondantes en considérant les deux positions M_∞ et P.
2. En déduire la distance minimale d'approche $r_{\text{min}} = OP$.
3. Application numérique : pour l'astéroïde Toto, $v_0 = 2{,}0$ km·s^{-1} et $b = 140\,000$ km.
   Toto va-t-il nous tomber sur la tête ?

❑ Exercice 16.12. Erreur de satellisation

On souhaite lancer un satellite artificiel, de masse m, sur une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à cette distance r_0 du centre de la Terre, et lui donner une vitesse $\vec{v}$ orthoradiale (suivant $\vec{e_\theta}$) avec une valeur très précise.

1. Montrer qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Calculer alors la valeur à donner à v pour obtenir la trajectoire de rayon r_0.

2. En déduire dans ce cas la valeur de la constante des aires C et de l'énergie mécanique E_m.

3. Le satellite ayant été amené à la distance r_0, une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse : le vecteur $\vec{v'}$ a la norme voulue mais il fait un petit angle α avec le vecteur $\vec{e_\theta}$.

a) Quelles sont alors les valeurs de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?

b) Que peut-on dire du grand axe de l'ellipse réellement décrite par le satellite ? Représenter sur un même schéma la trajectoire circulaire souhaitée et la trajectoire réelle.

❑ Exercice 16.13. Lois de Kepler* *

Par rapport au référentiel de Kepler $\mathcal{R}$ (supposé galiléen), les mouvements de toutes les planètes du système solaire s'effectuent dans un même plan, appelé écliptique. On note O le centre du Soleil (de masse m_S) ; on négligera les interactions entre les planètes.

1. Énoncer les trois lois de Kepler, lois relatives à la trajectoire des planètes (K1), aux aires balayées (K2) et à la période (K3).

2. On étudie tout d'abord le mouvement de la Terre, considérée comme un point matériel O_T (de masse m_T) ; on repère la position de O_T par ses coordonnées polaires (r, θ) de centre O.
Montrer que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante au cours du temps, et en déduire la deuxième loi de Kepler. On notera $\frac{C}{2}$ la vitesse aréolaire (supposée positive).

On montre que l'équation polaire de la trajectoire elliptique est : $r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse et e un paramètre appelé *excentricité* de l'ellipse. Ces grandeurs vérifient par ailleurs la relation $C = \sqrt{Gm_S a(1-e^2)}$.

3. Calculer, en fonction de a et e, les distances $r_{pér}$ et r_{aph} correspondant au périhélie (point le plus proche du Soleil) et à l'aphélie (point le plus éloigné). Donner également la vitesse de la Terre en ces points.

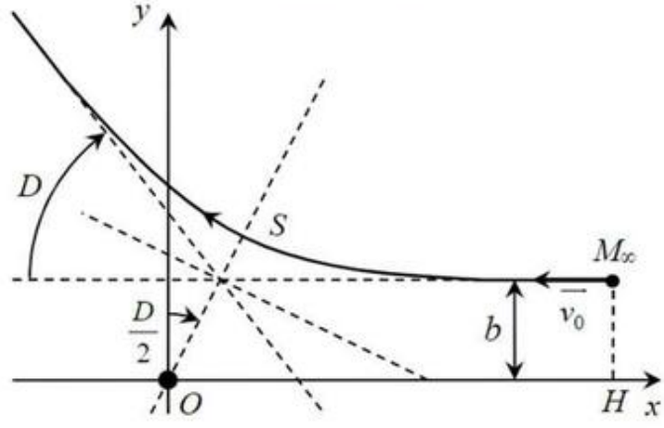
4. Montrer qu'il est possible, à partir de l'expression précédente de $r(\theta)$, d'obtenir sous forme d'intégrale la loi horaire $t = t(\theta)$. *Il n'est pas demandé le calcul explicite de cette intégrale !*

La Terre est au périhélie (point le plus proche du Soleil) le 3 janvier. On considère que le début de l'hiver (solstice d'hiver le 21 ou 22 décembre) correspond avec le choix précédent à $\theta = 0$. De même $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'équinoxe de printemps (20 ou 21 mars), $\theta = \pi$ au solstice d'été et $\theta = \frac{3\pi}{2}$ à l'équinoxe d'automne. Un calcul avec l'intégrale précédente conduit aux durées moyennes en jours : printemps 92,8 j ; été 93,6 j ; automne 89,8 j ; hiver 89,0 j.

5. Comment expliquez-vous la durée inégale des saisons ? On s'aidera d'un schéma précis de la trajectoire elliptique de la Terre autour du Soleil, en y plaçant les cinq points particuliers cités (le périhélie, les deux équinoxes, les deux solstices).
6. On donne la valeur du demi-grand axe a de la trajectoire pour trois planètes (en unités astronomiques) : Mercure $a = 0{,}39$ ua ; Terre $a = 1{,}0$ ua ; Neptune $a = 30$ ua.
En utilisant la troisième loi de Kepler, déterminer les périodes orbitales de Mercure et Neptune, directement en *années*.

❑ Exercice 16.14. Expérience de Rutherford *

Entre 1909 et 1911, Ernest RUTHERFORD et ses étudiants Hans GEIGER et Ernest MARSDEN ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α (identifiées comme des noyaux d'hélium). Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne rencontraient que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement : la déviation pouvant être reliée à la distance microscopique, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.
On considère ici une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\,\overrightarrow{e_x}$, et s'approchant avec le paramètre d'impact b d'un noyau cible de numéro atomique Z.
Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant centré sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est une branche d'hyperbole représentée ci-dessous.



1. Donner l'expression de la force électrique subie par la particule α, sous la forme $\overrightarrow{F} = \dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, ainsi que celle de son énergie potentielle d'interaction.
2. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la particule α en O est un vecteur constant, et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales.
La particule étant repérée par ses coordonnées polaires (r,θ) dans le plan (Oxy), montrer que $\overrightarrow{L_O}$ s'exprime de manière simple en fonction des variables r et $\dot{\theta}$.
4. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme : $E_\text{m} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E'_\text{p}(r)$ et expliciter la fonction $E'_\text{p}(r)$. Comment appelle-t-on $E'_\text{p}(r)$?

5. On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = OS$ la distance minimale d'approche. Que devient l'expression de E_m lorsque $r = r_{\min}$? En déduire que la valeur de $r_{\min}$ est : $r_{\min} = \dfrac{K}{mv_0^2}\left(1+\sqrt{1+\left(\dfrac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)$.

6. On donne $\varepsilon_0 = 8{,}9\cdot10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 6{,}6\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $v_0 = 2{,}0\cdot10^{7}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $Z = 79$ pour l'or. D'autre part on peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donné par $\tan\dfrac{D}{2} = \dfrac{K}{mbv_0^2}$. Calculer b puis $r_{\min}$ pour $D_1 = 60°$ et pour $D_2 = 180°$ (particule renvoyée vers l'arrière) ; en déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 16.1. Écrire les définitions des différents moments (vectoriels), et les calculer en exprimant chaque vecteur dans la base cylindrique. Faire attention en particulier à l'allongement de chaque ressort.

Exercice 16.2. La trajectoire circulaire est nécessairement centrée sur l'axe (Oz), à une altitude z négative : faire le schéma classique des coordonnées et de la base cylindriques, et exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)$ dans cette base.

Exercice 16.3. Commencer par faire la pseudo-démonstration en entier... pour bien comprendre ensuite où se situe l'erreur ! Ensuite on travaille en *cartésiennes*, donc *il ne faut surtout pas introduire un angle !*

Exercice 16.4. Pour la question 1, se rappeler la relation générale entre une force conservative et l'énergie potentielle dont elle dérive. Ensuite l'exercice suit point par point les démonstrations du cours pour un mouvement à force centrale.

Exercice 16.5. À la question 6 on doit distinguer trois cas, selon la valeur de E_m.

Exercice 16.6. Les premières questions sont les démonstrations du cours. Pour les formules de Binet, utiliser des formules de dérivée composée du type $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Exercice 16.8. Question 5.b : le travail W ne peut pas être déterminé à partir de la force de poussée exercée sur la fusée (inconnue), mais en appliquant le théorème de l'énergie mécanique à la fusée entre un instant où elle est posée sur la Terre et un instant où elle est sur son orbite définitive.

Exercice 16.11. À la question 2, il faut éliminer l'inconnue v_P (vitesse au périhélie) entre les deux équations provenant des lois de conservation.

Exercice 16.13. Question 3 : les valeurs extrêmes de la distance s'obtiennent avec les extrémums du cosinus ; celles de la vitesse en utilisant la conservation du moment cinétique. Question 4 : partir de l'expression de la constante des aires et séparer les variables. Question 5 : attention, O n'est pas le centre de l'ellipse mais l'un de ses *foyers* (donc plus près du périhélie), et les axes du repère *ne sont pas* les axes de symétrie de l'ellipse !

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai

3. Le moment d'une force et l'énergie ont les dimensions d'une force multipliée par une longueur.

4. La direction de la force centrale est toujours (*OM*), c'est une direction variable au cours du mouvement de *M* (sauf dans le cas particulier d'un mouvement rectiligne).

5. La direction de la force n'a en général *aucun rapport* avec la direction du mouvement. Mais *dans le cas d'une trajectoire circulaire*, elle se trouve être orthogonale à la trajectoire.

9. La constante des aires provient du moment cinétique. Donc le calcul de C à partir de conditions initiales revient à calculer le moment cinétique.

10. Elle permet d'éliminer $\dot{\theta}$, donc d'obtenir une relation avec le seul paramètre r.

❑ Les erreurs classiques

– Les démonstrations concernant le mouvement à force centrale sont de grands classiques, et ne peuvent être faites que *dans l'ordre* indiqué. Ainsi, une erreur fréquente est de calculer $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ avec les coordonnées cylindriques alors qu'on n'a *pas encore* montré que le mouvement est plan (et choisi ce plan comme (*Oxy*)). Il faudrait alors travailler en coordonnées *sphériques* et non cylindriques, avec $\vec{v}(M) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$, ce qui ne donne pas la formule attendue. C'est seulement dans (*Oxy*) que les deux r deviennent confondus.

– D'autre part, le mouvement plan est souvent très mal justifié, et le plan non précisé : il faut bien indiquer que $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal au vecteur constant $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$, ce qui définit un plan contenant *O* et orthogonal à $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}$.

– Ne pas énoncer la troisième loi de Kepler en disant que le rapport T^2/a^3 est « une constante » : il est évident que le rapport de deux constantes ne peut être qu'une constante ! Ce qu'il faut indiquer, c'est que cette constante *a la même valeur pour toutes les planètes* du système solaire.

Exercice 16.1

1. Par définition : $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = m\ell\overrightarrow{e_r} \wedge \ell\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ soit $\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}}$.

2. Forces appliquées à M : poids $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\overrightarrow{e_x}$; tensions des deux ressorts $\vec{T_1} = -k(\ell_0 - \ell\sin\theta - \ell_0)(-\overrightarrow{e_y}) = -k\ell\sin\theta\overrightarrow{e_y}$ et $\vec{T_2} = -k(\ell_0 + \ell\sin\theta - \ell_0)\overrightarrow{e_y} = -k\ell\sin\theta\overrightarrow{e_y}$; tension du fil $\vec{T} = -T\overrightarrow{e_r}$.

> *Les tensions $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ sont bien égales et non opposées ! Par exemple lorsque (1) est comprimé et (2) étiré, leurs deux tensions sont orientées vers la gauche.*

Les moments par rapport à O sont donc : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell\overrightarrow{e_r} \wedge mg\overrightarrow{e_x}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta\overrightarrow{e_z}}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T_1}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T_2}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T_1} = \ell\overrightarrow{e_r} \wedge (-k\ell\sin\theta\overrightarrow{e_y})$ soit $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T_1}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T_2}) = -k\ell^2\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{e_z}}$; $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}}$ (vecteurs colinéaires).

⇨ *Méthode 16.1*

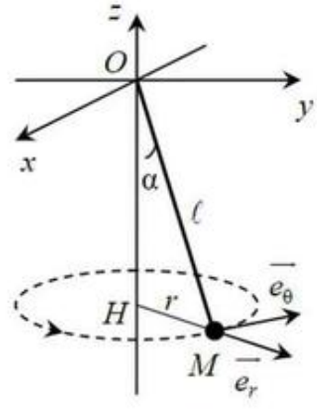
3. Théorème du moment cinétique appliqué à M, par rapport à O dans $\mathcal{R}$ (supposé galiléen) : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T_2})$. Projection sur $\overrightarrow{e_z}$:

$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - 2k\ell^2\sin\theta\cos\theta$. Pour $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$ donc l'équation devient $\boxed{\ddot{\theta} + \left(\dfrac{g}{\ell} + \dfrac{2k}{m}\right)\theta = 0}$. La pulsation est donc $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell} + \dfrac{2k}{m}}}$.

⇨ *Méthode 16.2*

Exercice 16.2

1. La trajectoire circulaire est nécessairement centrée sur l'axe vertical (Oz), puisque le fil a une longueur constante.
On lit alors : $\boxed{r = \ell\sin\alpha}$ et $\boxed{z = -\ell\cos\alpha}$ (valeurs constantes).



2. Forces appliquées à M : poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{e_z}$; tension du fil $\vec{T} = -T\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$. TMC pour M par rapport à O (dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$) : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T})$. On calcule alors chaque terme de cette équation. $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires).

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (\ell\sin\alpha\overrightarrow{e_r} - \ell\cos\alpha\overrightarrow{e_z}) \wedge (-mg\overrightarrow{e_z}) = +mg\ell\sin\alpha\overrightarrow{e_\theta}$.

$\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = m\ell(\sin\alpha\overrightarrow{e_r} - \cos\alpha\overrightarrow{e_z}) \wedge \ell\sin\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}(\sin^2\alpha\overrightarrow{e_z} + \sin\alpha\cos\alpha\overrightarrow{e_r})$

donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\ddot{\theta}(\sin^2\alpha\overrightarrow{e_z} + \sin\alpha\cos\alpha\overrightarrow{e_r}) + m\ell^2\dot{\theta}^2\sin\alpha\cos\alpha\overrightarrow{e_\theta}$.

⇨ *Méthode 16.1*

☞ *Ne pas oublier de dériver le vecteur unitaire* $\overrightarrow{e_r}$: $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

Projections du TMC sur la base cylindrique : $\begin{cases} m\ell^2\ddot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ m\ell^2\dot{\theta}^2\sin\alpha\cos\alpha = +mg\ell\sin\alpha \\ m\ell^2\ddot{\theta}\sin^2\alpha = 0. \end{cases}$

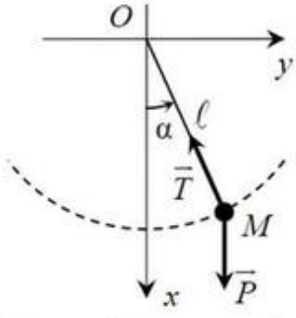
⇨ *Méthode 16.2*

La première et la troisième équations indiquent simplement que $\ddot{\theta}$ est nulle donc que $\dot{\theta}$ est une constante. La deuxième équation donne la valeur de cette constante (au signe près) : $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\alpha}}$. La vitesse sur ce cercle étant $\ell\sin\alpha\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, on voit donc que la norme de cette vitesse est constante (mouvement uniforme), et que le vecteur vitesse initial doit donc être de la forme $\overrightarrow{v_0} = \pm\ell\sin\alpha\sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\alpha}}\overrightarrow{e_{\theta 0}}$ soit $\boxed{\overrightarrow{v_0} = \pm\sqrt{g\ell\sin\alpha\tan\alpha}\overrightarrow{e_{\theta 0}}}$ où $\overrightarrow{e_{\theta 0}}$ est le vecteur orthoradial initial : par exemple $\overrightarrow{e_y}$ si M est lancé dans le plan (Oxz).

3. Période du mouvement circulaire uniforme : $T = \dfrac{2\pi}{|\dot{\theta}|}$ soit $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\alpha}{g}}}$. Pour $\alpha \ll 1$: $\cos\alpha \approx 1$ donc $\boxed{T \approx 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}}$ (période du mouvement pendulaire « classique », c'est-à-dire dans un plan vertical).

Exercice 16.3

1. Détaillons un peu ce « raisonnement classique » : il s'appuie généralement sur le schéma ci-contre.
La première erreur fréquente sur le schéma est de nommer α l'angle avec la verticale : l'énoncé donne ce nom à l'angle *initial* uniquement, mais à un instant quelconque l'angle aura a priori une autre valeur, que l'on doit donc noter autrement, par exemple (de façon très originale) θ. Mais l'erreur principale est dans la suite.



Si on projette les deux forces (poids et tension du fil) en lisant ce schéma, on trouve que leurs projections sur $\overrightarrow{e_z}$ sont toutes les deux nulles, et le PFD projeté sur $\overrightarrow{e_z}$ donne donc $z = 0$, etc. L'erreur fondamentale est d'avoir *supposé le résultat dès le départ* : on prétend alors démontrer ce qu'on a déjà admis. En effet on a supposé *en faisant ce schéma* que le mouvement se ferait

toujours dans le plan (Oxy), donc que la tension n'aurait pas de composante sur $\vec{e_z}$: on « prouve » donc que le mouvement est plan en ayant supposé qu'il est plan…
Pour éviter de faire cette hypothèse sans s'en rendre compte, il faudrait commencer par un schéma en perspective (analogue à celui de l'exercice précédent), dans lequel on verrait que la tension du fil a trois composantes a priori, quelle que soit la base de projection. Alors le raisonnement avec le PFD ne permet pas d'obtenir le résultat simplement.

2. Reprenons donc au départ, sans faire aucune hypothèse a priori. Lorsqu'on ne connaît pas le mouvement cherché, on utilise les coordonnées cartésiennes : alors $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ et $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$ donc $\overrightarrow{L_O}(M) = m\left((y\dot{z} - z\dot{y})\vec{e_x} + (z\dot{x} - x\dot{z})\vec{e_y} + (x\dot{y} - y\dot{x})\vec{e_z}\right)$ et $L_{(Ox)} = m(y\dot{z} - z\dot{y})$. Moments par rapport à (Ox) des deux forces appliquées à M (poids $\vec{P}$ et tension $\vec{T}$ du fil) : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \wedge mg\vec{e_x} = +mg(z\vec{e_y} - y\vec{e_z})$ donc $\mathcal{M}_{(Ox)}(\vec{P}) = 0$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ donc $\mathcal{M}_{(Ox)}(\vec{T}) = 0$. Le TMC par rapport à (Ox) donne donc : $\dfrac{\mathrm{d}L_{(Ox)}}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $L_{(Ox)} = \text{cte}$ soit $y\dot{z} - z\dot{y} = \text{cte}$. La vitesse initiale est nulle donc la constante est nulle : $\boxed{y\dot{z} - z\dot{y} = 0}$.

⇨ *Méthodes 16.1, 16.2*

3. Il y a tout d'abord deux solutions particulières évidentes : $y = \text{cte} = 0$ (donc mouvement dans le plan (Oxz)) ou $z = \text{cte} = 0$ (mouvement dans le plan (Oxy)) ; dans les deux cas, le plan du mouvement est bien vertical.

Pour trouver la solution générale on sépare les variables : $\dfrac{\dot{z}}{z} = \dfrac{\dot{y}}{y}$. On intègre par rapport à t : $\ln|z| = \ln|y| + \ln A$ d'où $|z| = A|y|$ soit $z = Ay$ ou $z = -Ay$ avec une constante A positive. Il s'agit dans les deux cas d'un plan contenant l'axe (Ox), c'est-à-dire d'un plan vertical.

> *D'un point de vue purement mathématique, la solution est la réunion des deux plans $z = Ay$ et $z = -Ay$. Mais physiquement on ne peut pas passer d'un plan à l'autre, car cela supposerait une vitesse discontinue, donc une accélération infinie.*

Exercice 16.4

1. M est mobile *a priori* dans tout l'espace, donc le r utilisé est celui des coordonnées *sphériques*. Par définition : $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -F_r\vec{e_r} \cdot (\mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{e_\varphi}) = -F_r\,\mathrm{d}r$ d'où $F_r = -\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = -kr$ et finalement $\boxed{\vec{F} = -kr\vec{e_r} = -k\overrightarrow{OM}}$.

2. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la particule M est soumise uniquement à la force centrale $\vec{F}$. Théorème du moment cinétique par rapport à O : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) donc $\overrightarrow{L_O}$ est constant. Or $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) \perp \overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal à un vecteur constant : le mouvement de M a lieu dans le plan contenant O et

orthogonal au vecteur $\overrightarrow{L_O}$. Avec les conditions initiales : $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM_0} \wedge \overrightarrow{v_0} = ma\overrightarrow{e_x} \wedge v_0\overrightarrow{e_y}$ soit $\boxed{\overrightarrow{L_O} = mav_0\overrightarrow{e_z}}$ donc le plan du mouvement est (Oxy).

⇨ *Méthode 16.3*

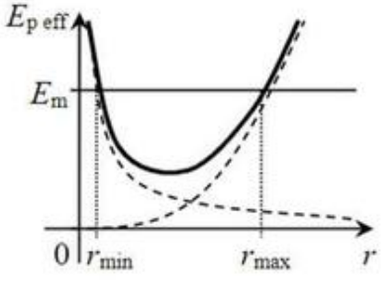
3. L'énergie mécanique est également constante car la seule force est conservative : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2}$.

4. $\overrightarrow{L_O} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cte} = av_0}$. De plus la conservation de E_m s'écrit : $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$. Or $\dot{\theta} = \frac{av_0}{r^2}$ donc

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{a^2v_0^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2}.$$

⇨ *Méthode 16.4*

5. Cela peut s'écrire $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\,\text{eff}}(r) = E_m$ en posant $\boxed{E_{p\,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{a^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2}$.



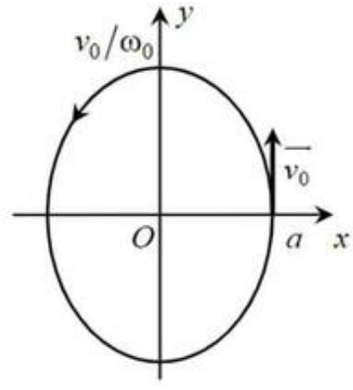
$E_m - E_{p\,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ donc les seules valeurs de r accessibles sont celles qui vérifient $E_{p\,\text{eff}}(r) \leq E_m$. Quelle que soit la valeur de E_m, on obtient $\boxed{r_{\min} \leq r \leq r_{\max}}$, les deux valeurs extrêmes vérifiant $\frac{1}{2}m\frac{a^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 = E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$. Cette équation bicarrée peut être résolue en posant $X = r^2$ puis en calculant le discriminant, etc.

Mais on peut trouver directement les deux racines qui sont évidentes (pour un œil avisé !), en identifiant terme à terme : l'une est $\boxed{r_{\min/\max} = a}$ et l'autre est $\boxed{r_{\max/\min} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}}$. (En l'absence de valeurs numériques, on ne peut pas préciser laquelle est la plus grande des deux.)

La trajectoire de M dans (Oxy) est donc comprise entre deux cercles de rayons $r_{\min}$ et $r_{\max}$.

⇨ *Méthode 16.5*

6. PFD : $m\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}=-k\overrightarrow{OM}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\overrightarrow{OM}=\vec{0}$ en posant $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Solution : $\overrightarrow{OM}=\vec{A}\cos(\omega_0 t)+\vec{B}\sin(\omega_0 t)$.



CI : $\overrightarrow{OM_0}=\vec{A}=a\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_0}=\vec{B}\omega_0=v_0\overrightarrow{e_y}$ donc finalement $\overrightarrow{OM}=a\cos(\omega_0 t)\overrightarrow{e_x}+\dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{e_y}$ soit $\boxed{\begin{cases}x=a\cos(\omega_0 t)\\ y=\dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\end{cases}}$.

Équation cartésienne : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{\omega_0^2 y^2}{v_0^2}=1$. Il s'agit d'une ellipse de centre de symétrie O. On retrouve bien $r_{\min/\max}=a$ et $r_{\max/\min}=\sqrt{\dfrac{mv_0^2}{k}}=\dfrac{v_0}{\omega_0}$.

Exercice 16.5

1. $\dfrac{r}{a}$ est sans dimension donc $\boxed{[a]=[L]}$ (a est une longueur). $\dfrac{K}{r}$ est une énergie $[M\cdot L^2\cdot T^{-2}]$ donc $\boxed{[K]=[M\cdot L^3\cdot T^{-2}]}$.

2. Par définition, $\mathrm{d}E_\mathrm{p}=-\delta W(\vec{F})=-\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=-F_r\overrightarrow{e_r}\cdot(\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}+r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi})=-F_r\,\mathrm{d}r$ donc $F_r=-\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}$ soit $\boxed{\vec{F}=\dfrac{K}{r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{a}\right)\overrightarrow{e_r}}$. La force est attractive si sa projection sur $\overrightarrow{e_r}$ est négative, ce qui suppose $\boxed{K<0}$.

3. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la particule M est soumise uniquement à la force centrale $\vec{F}$. TMC par rapport à O : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}=\vec{0}$ (vecteurs colinéaires) donc $\overrightarrow{L_O}$ est constant. Or $\overrightarrow{L_O}=m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}(M)\perp\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal au vecteur constant $\overrightarrow{L_O}$: le mouvement de M a lieu dans le plan contenant O et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{L_O}$.

⇨ *Méthode 16.3*

4. $\overrightarrow{L_O}=mr\overrightarrow{e_r}\wedge(\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta})=mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}=\overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{C=r^2\dot{\theta}=\text{cte}}$. Avec les conditions initiales : $\overrightarrow{L_O}=m\overrightarrow{OM_0}\wedge\overrightarrow{v_0}=mr_0\overrightarrow{e_x}\wedge(v_1\overrightarrow{e_x}+v_2\overrightarrow{e_y})=mr_0v_2\overrightarrow{e_z}$ donc $\boxed{C=r_0v_2}$.

⇨ *Méthode 16.4*

5. L'énergie mécanique de M est $E_\mathrm{m}=E_\mathrm{c}+E_\mathrm{p}(r)$, avec $E_\mathrm{c}=\dfrac{1}{2}mv(M)^2=\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$. Or $\dot{\theta}=\dfrac{C}{r^2}=\dfrac{r_0v_2}{r^2}$ donc $E_\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2+\dfrac{1}{2}m\dfrac{r_0^2v_2^2}{r^2}+\dfrac{K}{r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)=\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2+E_\mathrm{peff}(r)$ en posant

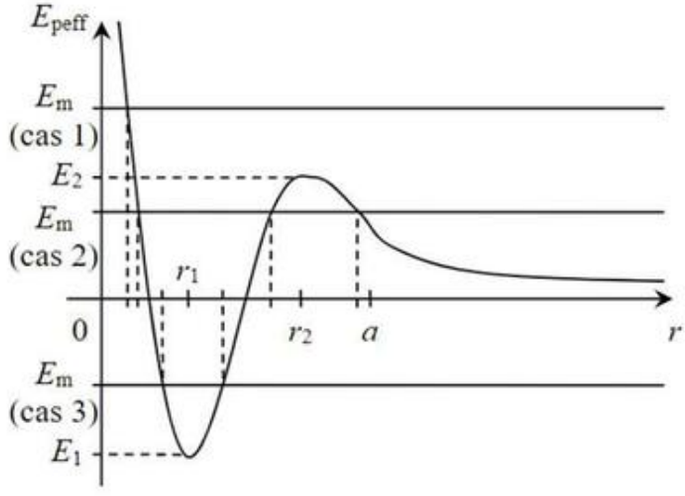
$\boxed{E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_2^2}{r^2} + \frac{K}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$ (énergie potentielle effective). La seule force appliquée à M est $\vec{F}$ et elle est conservative, donc E_m est constante au cours du temps $\left[E_m = \text{cte} = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + \frac{K}{r_0}\exp\left(-\frac{r_0}{a}\right)\right.$ d'après les conditions initiales$\left.\right]$.

6. $E_m - E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ donc les seules valeurs de r accessibles sont celles qui vérifient $E_{peff}(r) \leq E_m$.

• Premier cas : $E_m \geq E_2$.

Alors $r \geq r_{min}$: le nucléon est dans un état de diffusion.

• Deuxième cas : $0 < E_m < E_2$. Selon la valeur initiale de r on peut avoir $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ (état lié) ou $r \geq r_{min} (> r_2)$ (état de diffusion).



• Troisième cas : $E_1 \leq E_m \leq 0$. Alors $r_{min} \leq r \leq r_{max}$: c'est un état lié.

En général un nucléon reste confiné dans le noyau atomique, ce qui correspond à un état lié.

⇨ *Méthode 16.5*

7. Interaction forte : $\boxed{a = 1{,}5 \cdot 10^{-15}\ \text{m}}$. Cette valeur correspond à la taille du noyau atomique : l'interaction forte devient négligeable au-delà de cette distance. Interaction faible : $\boxed{a = 2{,}5 \cdot 10^{-18}\ \text{m}}$. Cette valeur est beaucoup plus faible que la taille du noyau : l'interaction faible ne s'exerce donc qu'entre deux nucléons voisins ou même à l'intérieur de chaque nucléon. Interactions électromagnétique et gravitationnelle : $\boxed{a = \infty}$. La portée de ces deux interactions est infinie, c'est pourquoi on peut les observer à notre échelle ou à des échelles encore plus grandes (astronomique pour l'interaction gravitationnelle).

8. On remplace $\frac{1}{a}$ par 0, d'où $\boxed{E_p(r) = \frac{K}{r}}$ et $\boxed{\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}}$. On retrouve l'expression classique de ces deux forces $\left(K = -Gm_O m$ pour la gravitationnelle, $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_O q$ pour l'électrique$\right)$.

9. L'interaction électromagnétique entre un proton et le reste du noyau est répulsive car ces charges sont toutes positives : cela correspond à $\boxed{K > 0}$. Pour que le proton reste au sein du noyau il faut donc que l'interaction forte soit attractive, soit $\boxed{K' < 0}$.

Exercice 16.6

1. Théorème du moment cinétique pour M par rapport à O (centre de force) dans $\mathcal{R}$: $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) donc $\overrightarrow{L_O}$ est constant au cours du mouvement. Or $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) \perp \overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal à un vecteur constant : le mouvement de M a lieu dans le plan contenant O et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{L_O}$.

2. $\overrightarrow{L_O} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cte}}$ (notée C).

⇨ *Méthode 16.4*

3. $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ avec $r\dot{\theta} = \dfrac{C}{r} = Cu$ et $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(1/u)}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{C}{r^2} = -\dfrac{u'}{u^2}\dfrac{C}{r^2} = -Cu'$ d'où $\boxed{\vec{v} = -Cu'\overrightarrow{e_r} + Cu\overrightarrow{e_\theta}}$. $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$ avec $r\dot{\theta}^2 = r\dfrac{C^2}{r^4} = C^2u^3$;

$\ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}(-Cu')}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(-Cu')}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -Cu''\dfrac{C}{r^2} = -C^2u^2u''$; $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \dfrac{1}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = 0$

d'où $\boxed{\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\overrightarrow{e_r}}$.

Cette démonstration classique utilise simplement, de façon répétée, l'égalité $C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}$ et la technique des dérivées composées.

4. PFD pour M dans $\mathcal{R}$: $m\vec{a} = \vec{F}$. Projection sur $\overrightarrow{e_r}$: $-mC^2u^2(u'' + u) = F_r$. Or $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a}e^{-\theta}$ donc $u' = -\dfrac{1}{a}e^{-\theta}$ et $u'' = \dfrac{1}{a}e^{-\theta} = u$. Alors $F_r = -mC^2u^2(u'' + u) = -2mC^2u^3$ soit $\boxed{F_r = -\dfrac{2mC^2}{r^3}}$.

5. Ici $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{e}{p}\cos\theta$ donc $u' = -\dfrac{e}{p}\sin\theta$ et $u'' = -\dfrac{e}{p}\cos\theta$.

Alors $F_r = -mC^2u^2(u'' + u) = -\dfrac{mC^2}{p}u^2$ soit $\boxed{F_r = -\dfrac{K}{r^2}}$ avec $K = \dfrac{mC^2}{p}$.

On reconnaît une force newtonienne : on a ainsi démontré que les trajectoires elliptiques observées par Kepler ne peuvent être dues qu'à une force en $1/r^2$. Inversement, si la fonction u est l'inconnue, on démontre qu'une force en $1/r^2$ donne nécessairement une conique : ellipse, parabole ou branche d'hyperbole.

Exercice 16.7

1. Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ galiléen, l'électron M est soumis à la force centrale électrique $\vec{F} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ et à la force magnétique $\overrightarrow{F_m} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La force électrique est une force centrale, mais pas la force magnétique : le mouvement de l'électron n'est donc pas un mouvement à force centrale. Dans la

suite on ne retrouvera donc pas tous les résultats du cours, mais on utilisera quand même des raisonnements analogues.

Or $\vec{F}$ est une force conservative, dérivant de l'énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$, et $\vec{F_m}$ ne travaille pas car elle est toujours orthogonale au mouvement, donc l'énergie mécanique se conserve : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \text{cte}$. D'après les conditions initiales, cette constante vaut $0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}$, soit $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}$. Comme $\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$, on en déduit $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \leq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}$ soit $\boxed{r \leq a}$.

2. Théorème du moment cinétique par rapport à O : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F_m})}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F_m})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_m} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(-e\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

$= -\left(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{B}\right)e\vec{v} + \left(\overrightarrow{OM} \cdot e\vec{v}\right)\vec{B} = \vec{0} + e\left(\overrightarrow{OM} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)\vec{B} = e\frac{1}{2}\frac{dOM^2}{dt}\vec{B} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}er^2\vec{B}\right)$.

Donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}er^2\vec{B}\right)$, d'où $\vec{L} = \frac{1}{2}er^2\vec{B} + \overrightarrow{\text{cte}}$. À l'instant initial : $\vec{L} = \frac{1}{2}ea^2\vec{B} + \overrightarrow{\text{cte}} = ma\overrightarrow{e_x} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ d'où $\boxed{\vec{L} = \frac{1}{2}e(r^2 - a^2)\vec{B}}$.

3. $\vec{L} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ donc $mr^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}e(r^2 - a^2)B$ soit $\dot{\theta} = \frac{e(r^2 - a^2)B}{2mr^2}$.

Puisque $r \leq a$, $\boxed{\dot{\theta} \leq 0}$: l'électron tourne toujours dans le sens négatif (sens indirect par rapport au champ magnétique).

4. $E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{e^2(r^2 - a^2)^2B^2}{4m^2r^4} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$

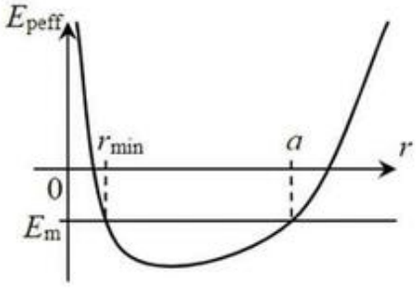
$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$ en posant $\boxed{E_{peff}(r) = \frac{e^2B^2(r^2 - a^2)^2}{8mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ (énergie potentielle effective).

5. $\frac{dE_{peff}}{dr} = \frac{e^2B^2}{8m}\frac{2(r^2 - a^2)2r^3 - 2r(r^2 - a^2)^2}{r^4} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{e^2B^2}{4m}\frac{(r^2 - a^2)(r^2 + a^2)}{r^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Pour $r = a$: $\frac{dE_{peff}}{dr}(a) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} > 0$.

Pour $r \to 0$: $\frac{dE_{peff}}{dr} \to -\infty$ (et $E_{peff} \to +\infty$).

De plus $E_{peff}(a) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = E_m < 0$.

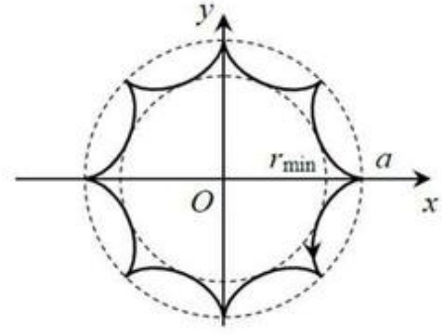


Corrigé

6. $E_m - E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ donc les seules valeurs de r accessibles sont celles qui vérifient $E_{peff}(r) \leq E_m$. D'après le graphe, on obtient donc $r_{min} \leq r \leq a$, où r_{min} est donné par $E_{peff}(r_{min}) = E_m$, soit $\boxed{\frac{(r_{min}^2 - a^2)^2 B^2}{8m r_{min}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}}$.

La deuxième solution de cette équation est bien sûr a, solution évidente.

7. Chaque fois que $r = a$, $\dot{r} = 0$ puisque c'est le maximum de r, et $\dot{\theta} = 0$ d'après la formule de la question 3, donc la vitesse est nulle.
Cela correspond à des points d'arrêt sur la trajectoire. La courbe a donc l'allure ci-contre (avec sens de rotation négatif d'après la question **3**).



Exercice 16.8

1. PFD pour le satellite, soumis uniquement à la force de gravitation de la Terre, dans le référentiel géocentrique : $m\vec{a} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e_r}$. Projection sur $\vec{e_r}$: $-mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{Mm}{r^2}$ d'où $\dot{\theta}^2 = G\frac{M}{r^3}$. Or $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ donc $\boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}}$.

⇨ *Méthode 16.6*

2. $T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ donc $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$. Ce rapport est indépendant des caractéristiques du satellite, il est donc le même pour tous les satellites de la Terre.

Cette loi est l'équivalent de la troisième loi de Kepler dans le système solaire : le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ a la même valeur pour toutes les planètes.

3. $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$ et $E_p = -\frac{GMm}{r}$ donc $\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c}$. L'énergie mécanique est négative, ce qui correspond à un état lié si on fait l'étude avec l'énergie potentielle effective.

4. $\boxed{T = T_T}$ (il fait un tour sur son orbite en même temps que la Terre sur elle-même) d'où $\boxed{h = \left(\frac{GMT_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R}$. AN $\boxed{h = 35800\ \text{km}}$. On trouve $h \approx 6R$: les satellites géostationnaires sont très éloignés, par rapport à d'autres satellites (observation, communication…).

5. a) Le satellite est à la distance R du centre de la Terre, et tourne avec elle à la vitesse angulaire ω_T et selon un cercle de rayon $R\cos\lambda$. Alors $\boxed{E_{m0} = -\dfrac{GMm}{R} + \dfrac{1}{2}mR^2\cos^2\lambda\,\omega_T^2}$.

b) TÉM entre le point de départ sur la Terre et un point de l'orbite circulaire : $\Delta E_m = W$ soit $W = -\dfrac{GMm}{2(R+h)} - \left(-\dfrac{GMm}{R} + \dfrac{1}{2}mR^2\cos^2\lambda\,\omega_T^2\right) \Leftrightarrow \boxed{W = \dfrac{GMm(R+2h)}{2R(R+h)} - \dfrac{1}{2}mR^2\cos^2\lambda\,\omega_T^2}$.

Pour minimiser W on doit donc maximiser $\cos^2\lambda$, donc se rapprocher de l'équateur ($\lambda = 0$).

c) Pour $h \ll R$: $W \approx \dfrac{GMm}{2R} - \dfrac{1}{2}mR^2\cos^2\lambda\,\omega_T^2$. On calcule $\dfrac{W_1}{W_2}$ avec $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T_T}$ (où $T_T = 1$ jour sidéral $= 86164$ s) ; la donnée de m n'est pas nécessaire. AN $\dfrac{W_1}{W_2} = 0{,}9977$ soit une économie de $\boxed{0{,}23\,\%}$ seulement en lançant depuis l'équateur : contrairement à une croyance répandue, l'économie d'énergie due à « l'effet de fronde » donné par la Terre n'est pas la raison pour laquelle les bases spatiales sont situées près de l'équateur (Kourou, Cap Canaveral…). L'intérêt réel est une plus grande facilité pour placer des satellites en orbite équatoriale.

Exercice 16.9

1. On obtient avec le PFD : $\boxed{v_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}}$. AN $\boxed{v_1 = 7300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 16.6*

2. TMC par rapport au point O fixe dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ supposé galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F}$ (force gravitationnelle) est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\text{cte}}$: le moment cinétique de M en O se conserve. Or sur cette trajectoire plane : $\overrightarrow{L_O}(M)_{\mathcal{R}} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = C = \text{cte}}$.

⇨ *Méthode 16.4*

3. Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \dfrac{GMm}{r} = \text{cte}$ soit en utilisant la constante des aires C :

$E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r} = \text{cte}$. On a donc trouvé $\boxed{E_{p\,\text{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r}}$.

4. Lorsque la distance r est extrémale ($r_{\min}$ ou $r_{\max}$), sa dérivée $\dot{r}$ est nulle, donc $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont les solutions de l'équation : $\dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r} = E_m \Leftrightarrow 2E_m r^2 + 2GMmr - mC^2 = 0$. La somme des racines est $r_{\min} + r_{\max} = -\dfrac{GMm}{E_m}$. Cela équivaut à $2a = -\dfrac{GMm}{E_m}$, soit $\boxed{E_m = -\dfrac{GMm}{2a}}$.

⇨ *Méthode 16.7*

Corrigé

Pour un cercle, a est égal au rayon, donc $\boxed{E_{m1} = -\dfrac{GMm}{2r_1}}$ sur le premier cercle et $\boxed{E_{m2} = -\dfrac{GMm}{2r_2}}$ sur le second. Sur l'ellipse de transfert : $r_1 + r_2 = r_{min} + r_{max} = 2a$ donc $\boxed{E_{me} = -\dfrac{GMm}{r_1 + r_2}}$.

5. Le changement d'orbite a lieu en un point donné, donc à énergie potentielle constante. Alors la variation d'énergie mécanique est une variation d'énergie cinétique :

$\dfrac{1}{2}m(v_{e1}^2 - v_1^2) = E_{me} - E_{m1} = -\dfrac{GMm}{r_1 + r_2} + \dfrac{GMm}{2r_1} = \dfrac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)}$ donc $v_{e1} = \sqrt{\dfrac{GM(r_2 - r_1)}{r_1(r_1 + r_2)} + v_1^2}$ soit $\boxed{v_{e1} = \sqrt{\dfrac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}}$. AN $\boxed{v_{e1} = 9520 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$ donc $\boxed{\Delta v_P = 2220 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Travail fourni par le moteur : $\boxed{W_P = E_{me} - E_{m1} = \dfrac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)}}$. AN $\boxed{W_P = 1{,}7 \cdot 10^{10} \text{ J} = 17 \text{ GJ}}$.

On peut aussi calculer la valeur numérique de W_P avec la formule $\dfrac{1}{2}m(v_{e1}^2 - v_1^2)$, mais ce n'est pas égal à $\dfrac{1}{2}m(\Delta v_P)^2$!

6. En P et en A, les vecteurs vitesse et position sont orthogonaux : la conservation du moment cinétique donne $mr_1v_{e1}\overrightarrow{e_z} = mr_2v_{e2}\overrightarrow{e_z}$ d'où $\boxed{v_{e2} = v_{e1}\dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{\dfrac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}}$. AN $\boxed{v_{e2} = 1690 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

7. $v_2 = \sqrt{\dfrac{GM}{r_2}}$ donc $\Delta v_A = \sqrt{\dfrac{GM}{r_2}} - \sqrt{\dfrac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$. AN $\boxed{\Delta v_A = 1390 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$ (donc la vitesse sur l'orbite géostationnaire sera $v_2 = 3080 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Travail fourni par le moteur : $W_A = E_{m2} - E_{me} = -\dfrac{GMm}{2r_2} + \dfrac{GMm}{r_1 + r_2}$ soit $\boxed{W_A = \dfrac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_2(r_1 + r_2)}}$.

AN $\boxed{W_A = 3{,}0 \cdot 10^9 \text{ J} = 3{,}0 \text{ GJ}}$.

Les vitesses étant plus faibles quand la distance à la Terre est plus grande, la dépense énergétique du moteur est nettement moins grande à l'apogée qu'au périgée.

Exercice 16.10

1. Force de gravitation : $\boxed{\overrightarrow{F_g} = -\dfrac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$ en posant $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{e_r}$. Elle dérive de l'énergie potentielle $\boxed{E_p = -\dfrac{GMm}{r}}$ en prenant l'origine à l'infini. L'énergie mécanique de P est donc $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r}}$; elle se conserve puisque la seule force appliquée à P est conservative.

2. Théorème du moment cinétique pour P par rapport à O (centre de force) dans $\mathcal{R}$: $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) donc $\overrightarrow{L_O}$ est constant au cours du mouvement. Or $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}(P) \perp \overrightarrow{OP}$ donc $\overrightarrow{OP}$ est toujours orthogonal à un vecteur constant : le mouvement de P a lieu dans le plan contenant O et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{L_O}$.

⇨ *Méthode 16.3*

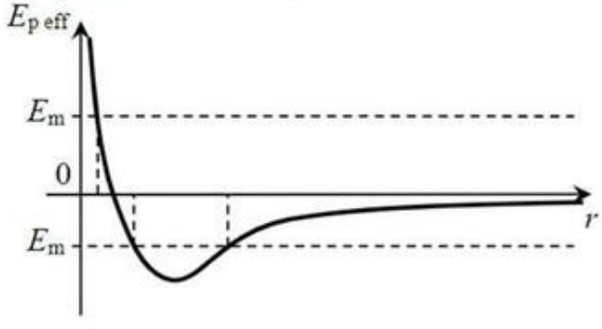
Or $\overrightarrow{L_O} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cte}}$ (notée C).

⇨ *Méthode 16.4*

3. $E_\text{m} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \dfrac{GMm}{r}$ et on utilise la formule précédente pour éliminer la variable $\dot{\theta}$: $E_\text{m} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r}$, ce qui a bien la forme demandée en posant $\boxed{E_{\text{p eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{GMm}{r}}$.

4. L'allure de la courbe est donnée ci-dessous.

$E_\text{m} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{p eff}}(r)$ avec $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$ donc $E_{\text{p eff}}(r) \leq E_\text{m}$: les seules valeurs accessibles de r sont celles qui vérifient cette inégalité. On ajoute donc sur le graphe une droite horizontale représentant la valeur de E_m : seule la partie de la courbe située sous cette droite correspond à des positions accessibles.



– Si $E_\text{m} < 0$, alors $r \in [r_\text{min} ; r_\text{max}]$, P est dans un état lié.

– Si $\boxed{E_\text{m} \geq 0}$, alors $r \in [r_\text{min} ; +\infty[$, P est dans un état de diffusion, il peut « échapper » à l'attraction gravitationnelle de l'astre et s'éloigner à l'infini.

⇨ *Méthode 16.5*

5. La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant d'obtenir un état de diffusion : $E_\text{m} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{R} \geq 0$ d'où $\boxed{v \geq \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = v_\text{lib}}$.

6. $v_\text{lib} = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} \geq c \Leftrightarrow \boxed{R \leq \dfrac{2GM}{c^2} = R_\text{S}}$.

AN pour la masse du Soleil ; $\boxed{R_\text{S} = 3\ \text{km}}$; pour la masse de la Terre : $\boxed{R_\text{S} = 9\ \text{mm}}$.

Il faudrait que toute la masse de la Terre soit concentrée dans une sphère de rayon 9 mm pour qu'elle constitue un trou noir !

Les trous noirs (du moins ceux qui ne sont pas trop massifs) sont donc des astres où la matière est extrêmement concentrée, autant voire plus que la matière nucléaire ($10^{18}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$).

> *On pense aujourd'hui que les trous noirs dont la présence a été détectée proviennent de l'effondrement de certaines étoiles sur elles-mêmes, lorsque l'attraction gravitationnelle n'est plus compensée par l'énergie provenant de la fusion nucléaire.*

Exercice 16.11

1. L'énergie mécanique de l'astéroïde est conservée, car la seule force est conservative : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{cte}$. Lorsqu'il est très éloigné (M_∞), $v = v_0$ et $r \to \infty$ donc $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$. Lorsqu'il est au périgée P, $E_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_{min}}$. Donc $\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_{min}}}$.

D'autre part, le moment cinétique de l'astéroïde est également conservé, car il n'est soumis qu'à une force centrale : $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}}$. On le calcule aux points M_∞ et P :

$\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM_\infty} \wedge \overrightarrow{v_0} = m\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{v_P} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_\infty}\right) \wedge \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{v_P} \Leftrightarrow -bv_0\overrightarrow{e_z} + \vec{0} = -r_{min}v_P\overrightarrow{e_z}$ soit finalement $\boxed{bv_0 = r_{min}v_P}$.

⇨ *Méthode 16.1*

2. Dans les deux équations précédentes, il faut éliminer la vitesse v_P au périgée. On la remplace par $v_0\frac{b}{r_{min}}$ dans la première équation : $G\frac{Mm}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{b^2}{r_{min}^2} - 1\right)$ ce qui donne une équation du second degré : $v_0^2 r_{min}^2 + 2GM r_{min} - v_0^2 b^2 = 0$. $\Delta = 4G^2M^2 + 4v_0^4b^2 > 0$ et il y a une seule solution positive : $\boxed{r_{min} = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + v_0^4b^2}}{v_0^2}}$.

3. AN $\boxed{r_{min} = 72000\ \text{km}}$. On trouve $r_{min} > R$ donc Toto ne heurtera pas la Terre !

Exercice 16.12

1. $C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}$ donc si $r = \text{cte} = r_0$ (cercle), alors $\dot{\theta} = \text{cte}$; or $\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ donc $\boxed{v = \text{cte}}$.

PFD pour le satellite, soumis uniquement à la force de gravitation de la Terre : $m\vec{a} = -G\frac{Mm}{r_0^2}\overrightarrow{e_r}$.

Projection sur $\overrightarrow{e_r}$: $-mr\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{r_0} = -G\frac{Mm}{r_0^2}$ d'où $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$.

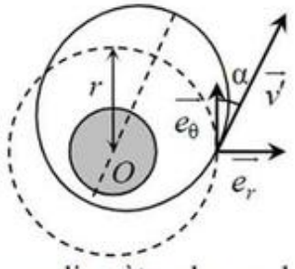
⇨ *Méthode 16.6*

2. $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = mr_0\overrightarrow{e_r} \wedge v\overrightarrow{e_\theta} = mr_0v\overrightarrow{e_z}$ donc $\boxed{C = r_0v = \sqrt{GMr_0}}$.

Et $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{GMm}{2r_0} - \frac{GMm}{r_0}$ soit $\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r_0}}$.

3.a) Maintenant $\overrightarrow{L_O} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}' = m r_0 \overrightarrow{e_r} \wedge \left(v\sin\alpha\,\overrightarrow{e_r} + v\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}\right) = m r_0 v\cos\alpha\,\overrightarrow{e_z}$ donc $\boxed{C' = r_0 v\cos\alpha = \sqrt{GMr_0}\cos\alpha}$. En revanche, v et r_0 ayant les mêmes valeurs que sur la trajectoire circulaire, on a toujours $\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r_0}}$.

b) Le demi-grand axe de l'ellipse ne dépend que de l'énergie mécanique, selon la formule : $E_m = -\frac{GMm}{2a}$.



Puisque l'énergie est la même sur le cercle souhaité et sur l'ellipse réelle, le grand axe de celle-ci a la même longueur que celui du cercle, c'est-à-dire son diamètre $2r_0$.

Il faut donc dessiner une ellipse donc la longueur du grand axe est égale au diamètre du cercle, qui passe par le point initial, qui est tangente au vecteur vitesse initial, et enfin dont le grand axe passe par O. On voit bien alors apparaître le périgée (point le plus proche de la Terre) et l'apogée (point le plus éloigné).

Exercice 16.13

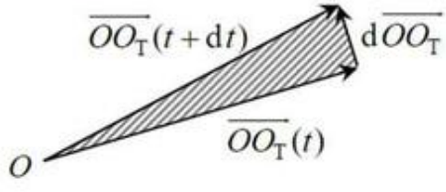
1. K1 : les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.
K2 : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
K3 : le rapport du carré de la période orbitale et du cube du demi-grand axe est le même pour toutes les planètes.

2. O_T étant soumis uniquement à la force centrale $\vec{F} = -G\frac{m_T m_S}{r^2}\vec{e_r}$, on lui applique le TMC par rapport au point fixe O dans $\mathcal{R}$: $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OO_T} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{L_O}$ est constant.

Dans le plan du mouvement : $\overrightarrow{L_O} = m r \vec{e_r} \wedge (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = m r^2\dot{\theta}\vec{e_z} = \overrightarrow{\text{cte}}$ donc $\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}}$.

Or l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OO_T}$ pendant une durée infinitésimale dt est :

$$dS = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OO_T} \wedge d\overrightarrow{OO_T}\right\| = \frac{1}{2}\left\|r\overrightarrow{e_r} \wedge \left(dr\overrightarrow{e_r} + r\,d\theta\overrightarrow{e_\theta}\right)\right\| = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$



donc $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$ (vitesse aréolaire).

L'aire balayée pendant une durée Δt est alors $\boxed{S_{\Delta t} = \frac{C}{2}\Delta t}$.

⇨ *Méthode 16.4*

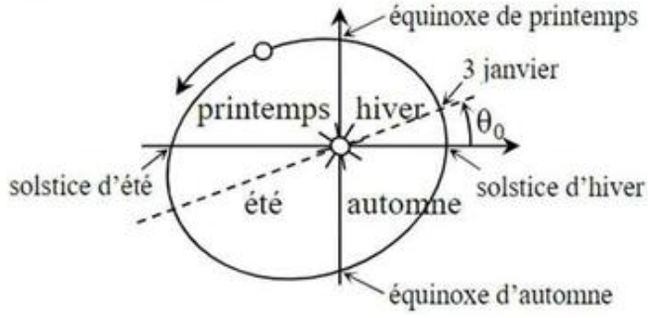
3. Le périhélie (r minimal) correspond à un dénominateur maximal, donc à $\cos(\theta - \theta_0) = 1$: alors $\boxed{r_{\text{pér}} = a(1-e)}$. De même l'aphélie ($r$ maximal) correspond à $\cos(\theta - \theta_0) = -1$:

$\boxed{r_{aph} = a(1+e)}$. De plus en ces points $\dot{r} = 0$ donc $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \dfrac{C}{r}\vec{e_\theta}$: $\boxed{v_{pér} = \dfrac{C}{r_{pér}} = \sqrt{\dfrac{Gm_S(1+e)}{a(1-e)}}}$

et $\boxed{v_{aph} = \dfrac{C}{r_{aph}} = \sqrt{\dfrac{Gm_S(1-e)}{a(1+e)}}}$.

4. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{r^2} = \dfrac{C[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^2}{a^2(1-e^2)^2}$. On sépare les variables : $dt = \dfrac{a^2(1-e^2)^2}{C[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^2}d\theta$. Et on intègre à partir d'un instant initial : $\boxed{t(\theta) = \int \dfrac{a^2(1-e^2)^2}{C[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^2}d\theta}$.

5. La durée d'une saison est proportionnelle à l'aire balayée, d'après la loi K2. La plus courte est donc celle qui contient le périhélie (3 janvier), c'est l'hiver ; l'automne est un peu plus long. La saison la plus longue est celle qui contient l'aphélie, soit l'été, et le printemps est un peu moins long.



6. La valeur de $\dfrac{T^2}{a^3}$ est 1 avec T en années et a en ua.

Pour Mercure, $a^3 = 0{,}059$ ua^3 donc $\boxed{T = \sqrt{0{,}059} = 0{,}24 \text{ année (soit 88 jours)}}$.

Pour Neptune, $a^3 = 27000$ ua^3 donc $\boxed{T = \sqrt{27000} = 160 \text{ années}}$ (à deux chiffres significatifs).

Exercice 16.14

1. La force est $\boxed{\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Ze^2}{r^2}\vec{e_r}}$ $\left(\text{donc } K = \dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}\right)$ et l'énergie potentielle $\boxed{E_p = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Ze^2}{r}}$.

2. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la particule α n'est soumise qu'à la force conservative $\vec{F}$. Son énergie mécanique $E_m = E_c + E_p(r) = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze^2}{r}$ est donc constante au cours du temps.

Initialement $v \to v_0$ et $r \to \infty$ donc $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2}$.

3. Théorème du moment cinétique en O : $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) donc $\vec{L_O}$ est constant. Avec les conditions initiales : $\vec{L_O} = m\left(x_0\vec{e_x} + b\vec{e_y}\right) \wedge \left(-v_0\vec{e_x}\right)$ soit $\boxed{\vec{L_O} = mbv_0\vec{e_z}}$. Enfin $\vec{L_O} = mr\vec{e_r} \wedge \left(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}\right)$ soit $\boxed{\vec{L_O} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}}$ (donc $r^2\dot{\theta} = bv_0$).

⇨ *Méthode 16.4*

4. $E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{b^2v_0^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$ soit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p'(r)$ en posant $\boxed{E_p'(r) = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}}$. C'est l'énergie potentielle effective (ou efficace).

5. Lorsque r est minimal, sa dérivée $\dot{r}$ est nulle donc $\boxed{E_m = E_p'(r_{min})}$, soit $E_m = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r_{min}^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_{min}}$ ou encore $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}}$ que l'on met sous forme d'une équation du second degré : $mv_0^2r_{min}^2 - 2Kr_{min} - mb^2v_0^2 = 0$. $\Delta' = K^2 + (mbv_0^2)^2 > 0$ d'où la racine positive : $r_{min} = \frac{K + \sqrt{K^2 + (mbv_0^2)^2}}{mv_0^2}$ soit $\boxed{r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)}$.

6. $\boxed{b = \frac{K}{mv_0^2\tan(D/2)} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2\tan(D/2)}}$. AN $\boxed{b_1 = 2{,}4\cdot10^{-14}\text{ m}}$ et $\boxed{b_2 = 0}$, d'où $\boxed{r_{min1} = 2{,}4\cdot10^{-14}\text{ m}}$ et $\boxed{r_{min2} = 2{,}7\cdot10^{-14}\text{ m}}$.

La taille caractéristique du noyau d'or (assez gros) est donc de l'ordre de $\boxed{10^{-14}\text{ m}}$, soit environ 10 000 fois plus petit que l'atome (10^{-10} m).

Corrigé

Chapitre 17

Mouvement d'un solide

UN SCIENTIFIQUE



Le physicien français **Léon Foucault** (1819-1868) conçoit de nombreuses expériences astucieuses mettant en évidence des phénomènes physiques. C'est ainsi qu'il montre que la lumière se propage plus rapidement dans l'air que dans l'eau, qu'il découvre l'existence de courants induits dans une masse métallique, et surtout qu'il met en évidence la rotation de la Terre, par le mouvement d'un immense pendule puis grâce à son invention du gyroscope.

Un peu d'histoire

Galilée, initiateur de l'étude scientifique du mouvement, affirme l'isochronisme du pendule. Huygens utilise cette propriété pour concevoir les premières pendules. Ceci l'amène à définir, en 1673, dans *Horologium Oscillatorium,* la notion de centre de gravité et celle de moment d'inertie : il parle de la somme des masses fois les carrés des distances. L'introduction du calcul différentiel et intégral à la fin du XVII^{e} siècle fournit un puissant outil de développement de la mécanique du solide, dont Euler et D'Alembert sont les principaux artisans. Le terme *moment d'inertie* est introduit par le savant suisse en 1765.

La conservation du moment cinétique pour un solide isolé sera exploitée par Foucault avec son gyroscope, solide tournant à grande vitesse autour d'un axe fixe dans l'espace, par rapport auquel on peut voir la rotation de la Terre.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition d'un solide et de ses mouvements élémentaires (translation, rotation autour d'un axe fixe)
- ▷ Le moment d'inertie, le moment cinétique et l'énergie cinétique d'un solide en rotation
- ▷ La notion de couple
- ▷ La liaison pivot et le moment qu'elle peut produire

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire, une rotation autour d'un axe fixe
- ▷ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses
- ▷ Étudier le mouvement de rotation ou l'équilibre d'un solide avec le théorème (scalaire) du moment cinétique
- ▷ Établir l'équation du mouvement et une intégrale première du mouvement pour un pendule de torsion, pour un pendule pesant
- ▷ Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un solide en rotation

■■ Résumé de cours

■ Cinématique du solide

❑ Généralités

Un **solide** est un système de points matériels tel que la distance entre deux points quelconques du système est invariante au cours du temps. On définit donc ici le solide comme **indéformable**, par opposition aux systèmes déformables (système élastique, ensemble de solides articulés, fluide…).
La répartition de masse d'un solide est généralement décrite de façon *continue* : le solide peut être découpé en éléments infinitésimaux de masse $\mathrm{d}m$, et sa masse totale est alors $m = \int_{\text{solide}} \mathrm{d}m$.

Il s'agit d'une intégrale triple (sur le volume du solide, par exemple d'une boule), qui se ramène à une intégrale double si le solide est modélisé comme une surface (par exemple une sphère, un disque dont on néglige l'épaisseur), ou à une intégrale simple s'il est modélisé comme une courbe (par exemple une tige modélisée comme un segment, un anneau modélisé comme un cercle).
Le mouvement d'un solide peut être complexe. On se limite à l'étude de deux cas particuliers.

❑ Mouvement de translation

Définition

Un solide S est en **translation** par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si pour tout couple de points A et B de S, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement du solide.

Propriétés

Si le solide S est en translation, alors *tous ses points ont le même vecteur vitesse* à chaque instant, donc aussi le même vecteur accélération.
Les trajectoires de tous les points de S sont superposables. On peut parler en particulier de **translation rectiligne** si ces trajectoires sont des segments de droites (nécessairement parallèles entre eux), de **translation circulaire** si ce sont des cercles (nécessairement de même rayon), etc.
L'étude dynamique d'un solide en translation utilise les mêmes méthodes que celle d'un point matériel, puisqu'il suffit d'étudier le mouvement du centre d'inertie G.

❑ Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Définition

Un solide S est en **rotation** autour d'un axe fixe Δ si tous les points de S ont une trajectoire circulaire centrée sur un point de Δ. Si des points de S appartiennent à l'axe Δ, ils sont immobiles.

Vitesse et accélération angulaires

La **vitesse angulaire** du solide est la dérivée temporelle $\omega = \dot{\theta}$ de l'angle repérant sa position.
(On la définit aussi parfois comme la valeur absolue de cette dérivée, soit $\omega = |\dot{\theta}|$; dans ce cas on doit préciser le sens de rotation.)
L'**accélération angulaire** du solide est la dérivée temporelle $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$.

Relation entre vitesse et vitesse angulaire

Soit un solide S en rotation autour de l'axe fixe Δ et M un point quelconque de S : M décrit une trajectoire circulaire dont le centre est son projeté orthogonal H sur Δ.
On peut donc lui appliquer les formules du mouvement circulaire, dans la base cylindrique d'axe (Oz) confondu avec Δ :

- sa vitesse est $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = r\,\omega\,\vec{e_\theta}$ (avec $r = HM$), de norme $v(M)_{\mathcal{R}} = |\omega| \cdot HM$;
- son accélération est $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e_r} + R\dot{\omega}\vec{e_\theta}$.

Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire (et la même accélération angulaire), mais ils ont une vitesse de norme d'autant plus grande qu'ils sont plus éloignés de l'axe de rotation.

⇨ **Méthode 17.1. Identifier le mouvement d'un solide**

■ Éléments cinétiques d'un solide en rotation

❑ Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

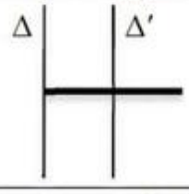
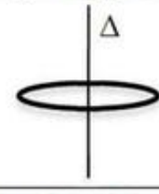
Pour un solide S en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$, avec une vitesse angulaire ω :

$\boxed{L_\Delta(S)_{\mathcal{R}} = J_\Delta\,\omega}$ où J_Δ est le **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe Δ.

J_Δ est défini par : $\boxed{J_\Delta = \int_{\text{solide}} \mathrm{d}m\, r_\Delta^2}$ avec r_Δ la distance de chaque point du solide à l'axe Δ.

Pour une même masse totale, le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus grand que sa répartition de masse est plus éloignée de l'axe de rotation.

Exemples de moments d'inertie de solides homogènes

Tige de masse m, de longueur L par rapport à un axe orthogonal	Cerceau de masse m, de rayon R par rapport à son axe de révolution
 $J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$; $J_{\Delta'} = \frac{1}{12}mL^2$	 $J_\Delta = mR^2$
Disque ou cylindre de masse m, de rayon R par rapport à son axe de révolution	**Boule (pleine) de masse m, de rayon R par rapport à l'un de ses axes de révolution**
 $J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$	 $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$

❑ Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour un solide S en rotation autour de Δ fixe dans $\mathcal{R}$: $\boxed{E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}$.

■ Moment d'un couple

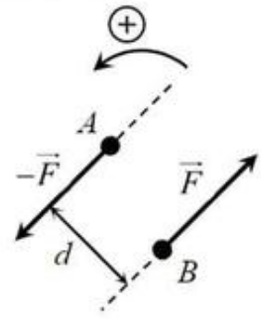
❑ Moment d'un couple par rapport à un axe

Un **couple** est un ensemble de forces de résultante nulle, mais de moment total non nul.

Le cas le plus simple est celui de deux forces opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ appliquées en deux points différents du système considéré.

La distance entre leurs deux supports étant d, le moment du couple de forces, par rapport à un axe quelconque orthogonal au plan des deux supports, est $\boxed{\mathcal{M}_{\text{couple}} = \pm d\,F}$.

Le signe est positif si le couple tend à faire tourner le système dans le sens positif, négatif sinon. Sur ce schéma : $\mathcal{M}_{\text{couple}} > 0$.

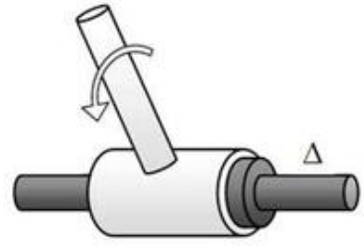


❑ Liaison pivot

C'est une liaison entre un bâti fixe et une pièce mobile, donnant à celle-ci un seul degré de liberté de rotation autour d'un axe fixe Δ.

Si elle est **parfaite**, elle n'exerce aucun moment selon l'axe Δ.

Si elle n'est pas parfaite, elle exerce sur la pièce mobile un **couple de frottement solide**, dont le moment $\mathcal{M}_f$ par rapport à l'axe est de signe opposé au sens de rotation.



■ Théorèmes de la dynamique pour un solide en rotation

❑ Théorème du moment cinétique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, le théorème s'écrit : $\boxed{J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{\Delta\text{ext}}}$.

⇨ Méthode 17.2. Utiliser le TMC pour un solide en rotation
⇨ Méthode 17.4. Utiliser le TQM et le TMC pour un solide en équilibre

❑ Théorème de l'énergie cinétique

Puissance et travail en fonction du moment

Puissance d'une force ou d'un couple de moment $\mathcal{M}_\Delta$ exercé sur S en rotation : $\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_\Delta \cdot \omega}$.

Travail d'une force ou d'un couple de moment $\mathcal{M}_\Delta$ exercé sur S en rotation : $\boxed{W_{\mathcal{R}} = \displaystyle\int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathcal{M}_\Delta \,\mathrm{d}\theta}$.

Le solide étant indéformable, *la puissance totale des forces intérieures est nulle* : seules les actions extérieures (forces et couples) interviennent donc dans le théorème de l'énergie cinétique.

Forme instantanée du TÉC

L'équation $\dfrac{\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R},\text{ext}}$ est ici équivalente à $J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{\Delta\text{ext}}$ (donnée par le TMC).

Forme intégrale du TÉC

L'équation $\Delta E_c(S)_{\mathcal{R}} = \sum W_{\mathcal{R},\text{ext}}$ devient : $\boxed{\frac{1}{2} J_\Delta \left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = \sum W_{\mathcal{R}\,\text{ext}}^{i \to f}}$.

⇨ **Méthode 17.3. Utiliser le TÉC pour un solide en rotation**

■ Comment décrire le mouvement d'un solide ?

❑ Méthode 17.1. Identifier le mouvement d'un solide

En cinématique du solide, dans le cadre du programme, les deux types de mouvements simples à connaître sont la translation et la rotation autour d'un axe fixe. Il convient donc de savoir les identifier, et en particulier de ne pas confondre la rotation avec la translation circulaire.

– Choisir deux points quelconques A et B du solide et étudier le comportement du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

– Si ce vecteur garde une direction constante au cours du mouvement du solide, alors ce dernier a un mouvement de translation.

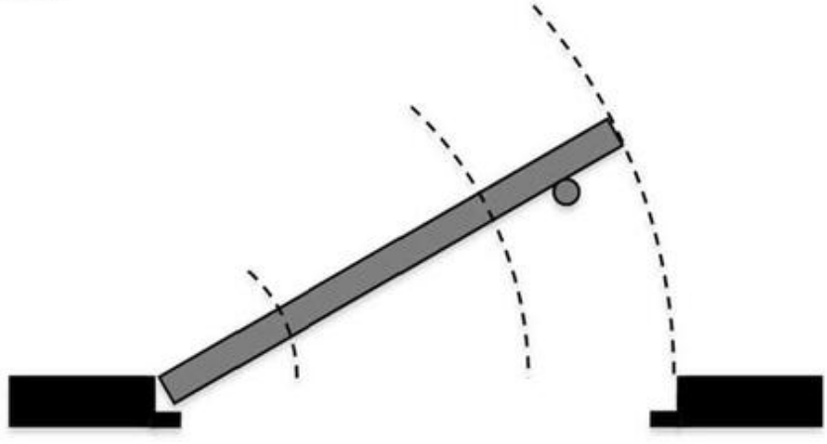
– Sinon, le solide n'a pas un mouvement de translation. Il faut alors vérifier qu'il est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe : les trajectoires de A et B doivent être des cercles centrés sur un même axe.

⇨ Exercices 17.1, 17.3

– Premier exemple : mouvement d'une porte

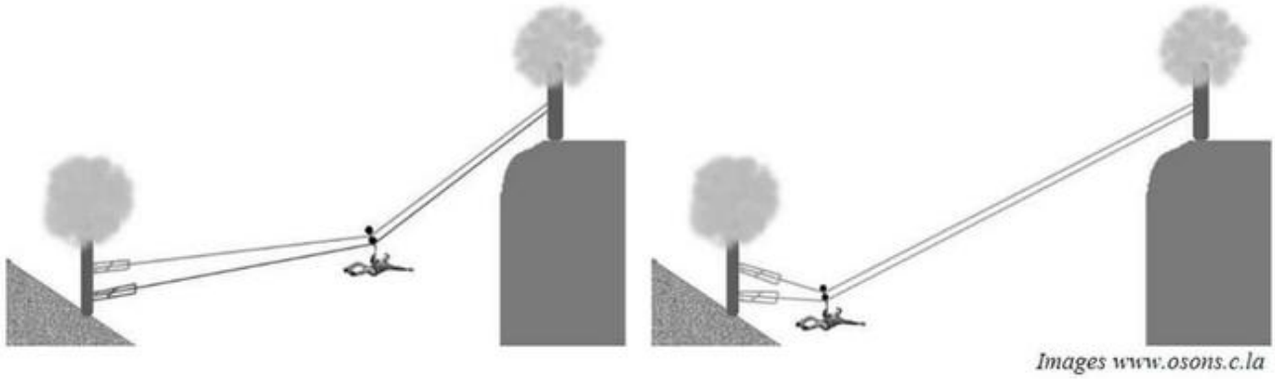
Lorsqu'on ouvre une porte, elle effectue un mouvement de rotation autour de l'axe fixe de ses gonds.

Sur un schéma représentant la porte vue de dessus, le schéma étant dans un plan orthogonal à l'axe des gonds, on constate que chaque point de la porte effectue une trajectoire circulaire dont le centre est sur l'axe.



– Deuxième exemple : tyrolienne

Il s'agit d'une méthode pour franchir un espace vide en étant suspendu(e) à une corde.



Images www.osons.c.la

Dans les différentes positions successives, deux points quelconques de la personne gardent approximativement la même orientation l'un par rapport à l'autre : il s'agit donc d'une translation. La trajectoire décrite par chaque point, quant à elle, n'est ni rectiligne, ni circulaire, c'est une courbe plus complexe : on peut juste parler de translation curviligne.

■ Comment étudier le mouvement d'un solide en rotation ?

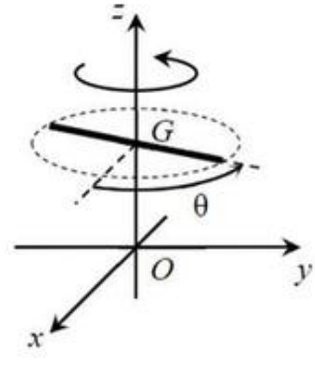
❑ Méthode 17.2. Utiliser le TMC pour un solide en rotation

Le système étant un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, il a un seul degré de liberté correspondant à l'angle θ de rotation autour de Δ, dont la dérivée temporelle est la vitesse angulaire ω.
L'application du TMC scalaire par rapport à Δ donne directement l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par θ (ou d'ordre 1 vérifiée par ω).

⇨ Exercice 17.4, 17.5, 17.6

– Pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué d'un solide accroché à un fil vertical et pouvant tourner autour de l'axe Δ confondu avec le fil.
Le barycentre G du solide se trouve sur le fil, et on note J le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe. Lorsque l'angle de rotation a une valeur θ, le fil exerce sur le solide un couple de torsion de moment $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C\theta$ (C étant sa constante de torsion).



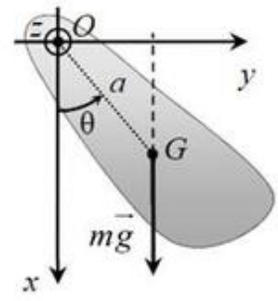
Les actions extérieures exercées sur le solide sont donc : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, appliqué en G dont de moment nul par rapport à l'axe ; la réaction vertical du fil (empêchant le solide de tomber), de moment nul pour la même raison ; et le couple de torsion.
G étant immobile (sur le fil), il est inutile d'appliquer le théorème de la quantité de mouvement.

TMC par rapport à Δ : $\dfrac{\mathrm{d}L_{\Delta\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}$ soit $J\ddot{\theta} = -C\theta$ que l'on peut encore écrire $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{C}{J}\theta = 0}$.

On reconnaît immédiatement l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J}}$ et de période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{C}}}$.

– Pendule pesant

Il est constitué d'un solide S pouvant tourner librement autour d'un axe horizontal (Oz) (liaison pivot parfaite). Son barycentre G se situe à une distance a de l'axe, et son moment d'inertie par rapport à (Oz) est J. On cherche à déterminer la période des petites oscillations.



On fait l'inventaire de toutes les actions extérieures exercées sur le pendule, et on calcule leurs moments par rapport à (Oz).

Le poids $m\vec{g}$, qui s'exerce au barycentre G, a pour bras de levier $a\sin\theta$ et son signe est opposé à celui de θ, soit $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(m\vec{g}\right) = -mga\sin\theta$. Sur la figure, ce moment est négatif (il a tendance à ramener le solide vers la verticale, donc à la faire tourner dans le sens négatif autour de l'axe).
La liaison pivot n'exerce aucun moment, puisque sa résultante coupe l'axe et qu'elle est parfaite donc sans frottement.

TMC pour le pendule par rapport à l'axe (Oz) : $\dfrac{\mathrm{d}L_{(Oz)\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{(Oz)}$ soit $J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta$ ou encore $\ddot{\theta} + \dfrac{mga}{J}\sin\theta = 0$. Pour les petits angles ($\theta \ll 1$), on peut faire l'approximation $\sin\theta \approx \theta$, d'où $\ddot{\theta} + \dfrac{mga}{J}\theta = 0$. On reconnaît alors un oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mga}{J}}$ et de période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}}$.

❑ Méthode 17.3. Utiliser le TÉC pour un solide en rotation

L'équation différentielle du mouvement d'un solide, en rotation autour d'un axe fixe Δ, peut également être obtenue par application du théorème de l'énergie cinétique. Dans le cas d'un mouvement sans force non conservative, on peut alors faire apparaître l'intégrale première de l'énergie mécanique.

⇨ Exercice 17.9, 17.10, 17.11

Reprenons les deux exemples précédents.

– Pendule de torsion

L'énergie cinétique du solide est $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. Le poids et la réaction verticale du fil s'exerçant en G qui est immobile, leurs puissances sont nulles. La puissance du couple de torsion est $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\text{torsion}}\dot{\theta} = -C\theta\dot{\theta}$. Enfin le solide étant rigide, il n'y a pas de puissance des forces intérieures.

Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -C\theta\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta}(J\ddot{\theta} + C\theta) = 0$.

On obtient donc la solution particulière $\dot{\theta} = 0, \forall t$ (équilibre), et l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{J\ddot{\theta} = -C\theta}$.

On peut aussi intégrer directement l'équation donnée par le théorème :

$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \dfrac{1}{2}C\theta^2\right) = 0$ soit $\boxed{\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \dfrac{1}{2}C\theta^2 = \text{cte}}$. C'est l'intégrale première de l'énergie mécanique $\boxed{E_c + E_{p\,\text{torsion}} = \text{cte}}$.

– Pendule pesant

De même $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ et la seule force qui travaille est le poids : sa puissance est $\mathcal{P}\left(m\vec{g}\right)_{\mathcal{R}} = m\vec{g}\cdot\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = mg\,\vec{e_x}\cdot a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = -mg\,a\dot{\theta}\sin\theta$. Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\,a\dot{\theta}\sin\theta \Leftrightarrow \dot{\theta}(J\ddot{\theta} + mg\,a\sin\theta) = 0$.

Comme précédemment on obtient le cas particulier de l'équilibre, et l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{mga}{J}\sin\theta = 0}$.

L'intégration du théorème donne également une intégrale première du mouvement : $\boxed{\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \text{cte}}$, c'est-à-dire $\boxed{E_c + E_{pp} = \text{cte}}$.

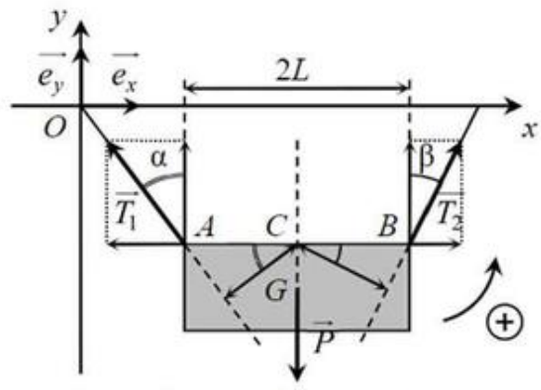
■ Comment étudier l'équilibre d'un solide ?

❑ Méthode 17.4. Appliquer le TQM et le TMC à un solide en équilibre

– Le théorème de la quantité de mouvement (TQM) est une loi vectorielle : sa projection sur trois directions de l'espace donne trois équations.
– Le TMC par rapport à un axe est une loi scalaire, donnant une seule équation. Le solide ne tournant pas, on peut appliquer le TMC par rapport à n'importe quel axe : on choisira celui donnant les calculs les plus simples.
– Les deux lois doivent être vérifiées pour que le solide soit à l'équilibre. Cependant, dans beaucoup de cas simples, une ou plusieurs des quatre équations obtenues ne donne(nt) aucune information.

⇨ **Exercice 17.5, 17.7, 17.8**

Cherchons par exemple à déterminer les normes des tensions des deux fils dans l'exemple ci-contre, où une plaque rectangulaire homogène de masse m est suspendue en équilibre dans le référentiel terrestre (supposé galiléen). Les fils sont attachés aux deux bords A et B de la plaque, faisant des angles α et β avec la verticale.
On montrera d'autre part que ces deux angles sont nécessairement liés, pour que cette situation (plaque horizontale) soit possible.



Il y a en tout trois forces appliquées à la plaque : son poids, $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_y}$; la tension du fil en A, $\vec{T_1} = -T_1 \sin\alpha \vec{e_x} + T_1 \cos\alpha \vec{e_y}$; la tension du fil en B, $\vec{T_2} = +T_2 \sin\beta \vec{e_x} + T_2 \cos\beta \vec{e_y}$.

– Première loi de l'équilibre (TQM) : $\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.

Projections sur $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$: $\begin{cases} -T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = 0 & (1) \\ -mg + T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases}$

La (3) ne donne aucune information, on a donc deux équations pour les deux inconnues T_1 et T_2.

Résolution : $(1) \Leftrightarrow T_2 = T_1 \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; on reporte dans (2), soit $T_1 \cos\alpha + T_1 \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cos\beta = mg$ d'où $\boxed{T_1 = \dfrac{mg\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} = \dfrac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$; et finalement $\boxed{T_2 = \dfrac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$.

– Seconde loi de l'équilibre (TMC) : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T_1}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T_2}) = 0$ par rapport à tout axe Δ fixe. Choisissons l'axe (Cz), orthogonal au plan de figure, et pour sens positif le sens trigonométrique habituel dans ce plan. Alors $\mathcal{M}_{(Cz)}(\vec{P}) = 0$ (car $\vec{P}$ peut être considéré comme s'appliquant au centre de gravité G, au centre de la plaque, donc son support vertical passe par C) ; $\mathcal{M}_{(Cz)}(\vec{T_1}) = -L\cos\alpha T_1$; $\mathcal{M}_{(Cz)}(\vec{T_2}) = +L\cos\beta T_2$. L'équation obtenue est donc : $-L\cos\alpha T_1 + L\cos\beta T_2 = 0$ soit $-\cos\alpha \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} + \cos\beta \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 0$. On en déduit nécessairement $\boxed{\alpha = \beta}$, et les expressions des deux tensions deviennent $\boxed{T_1 = T_2 = \dfrac{mg}{2\cos\alpha}}$.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Un solide est en mouvement de translation si tous ses points ont le même vecteur vitesse à chaque instant.	☐	☐
2.	Si un solide est en rotation autour d'un axe fixe, alors tous les points du solide ont une trajectoire circulaire de même rayon.	☐	☐
3.	Le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus petit que sa masse est plus concentrée au voisinage de l'axe de rotation.	☐	☐
4.	Pour un solide constitué de deux parties, le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie des deux parties.	☐	☐
5.	Une liaison pivot est une liaison sans frottement.	☐	☐
6.	Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.	☐	☐
7.	Le moment d'un couple de torsion est proportionnel à l'angle de torsion.	☐	☐
8.	La puissance d'un couple est nulle.	☐	☐
9.	Le théorème du moment cinétique pour un solide fait intervenir les forces intérieures.	☐	☐
10.	Le théorème de l'énergie cinétique pour un solide fait intervenir les forces intérieures.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Cinématique du solide

❑ Exercice 17.1. Grande roue



La petite Gudule monte dans la grande roue de la fête foraine. Elle en profite pour faire le point sur ses connaissances en cinématique du solide.

1. Quel est le mouvement de chaque rayon de la roue ?
2. Quel est le mouvement d'une nacelle ?
3. Ces résultats resteraient-ils vrais si soudain le moteur s'emballait et faisait tourner la roue dix ou vingt fois plus vite ?

❑ Exercice 17.2. Mouvement d'une scie circulaire



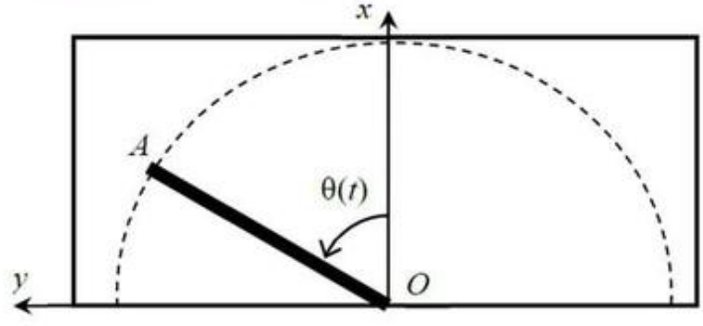
Une scie circulaire d'un diamètre de 60 cm tourne à 640 tours par minute.

1. Calculer sa vitesse angulaire.
2. Calculer la vitesse d'une de ses dents, appelée vitesse de coupe. À quelle fréquence devrait tourner la scie pour que la vitesse de coupe soit de $30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$?
3. Lorsqu'on coupe le moteur, la scie ralentit uniformément et s'arrête en 6 s.
Calculer la valeur absolue de l'accélération angulaire de la scie.
On note $t = 0$ le moment où l'on coupe le moteur. Donner l'expression numérique de la vitesse angulaire de la scie entre $t = 0$ et $t = 6$ s.
4. Combien de tours aura effectué la scie durant cette phase d'arrêt ?

❑ Exercice 17.3. Mouvement d'un essuie-glace* *

Toto et son camarade Lulu sont en voiture lorsque la pluie se met à tomber. Toto met donc en route les essuie-glaces. Lulu, scientifique dans l'âme, essaie d'analyser leur mouvement.

Il fait un schéma du problème, note que l'angle entre les deux positions extrêmes du balai unique est de 160° et que le balai effectue 10 allers-retours en 9,0 s. Les deux positions extrêmes sont symétriques par rapport à l'axe (Ox). Enfin, la longueur du balai est $OA = 60$ cm.



1. Quel est le mouvement du balai ?

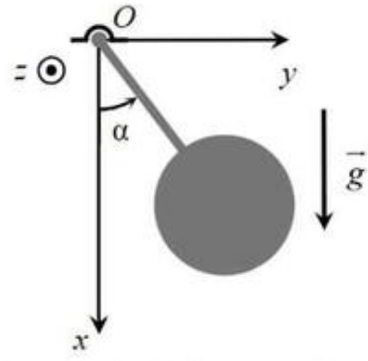
2. On note $\theta(t)$ la position angulaire, et θ_0 la position initiale du balai, correspondant à la position extrême, à droite sur le schéma. Lulu fait l'hypothèse que $\theta(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps et que le balai part de sa position θ_0 à la date $t=0$ sans vitesse initiale. Donner l'expression numérique de $\theta(t)$.
3. Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité A du balai ?
4. Il existe une deuxième « vitesse » pour les essuie-glaces, pour laquelle le temps d'un aller-retour du balai est divisé par deux. Comment seraient affectées $\theta(t)$ et la vitesse maximale du point A si cette deuxième vitesse était enclenchée ?
5. Pour mesurer l'efficacité de l'essuie-glace, Lulu définit la vitesse aréolaire comme la surface balayée par unité de temps. Donner l'expression numérique de cette vitesse aréolaire à chaque instant. Quelle est la partie du pare-brise la mieux protégée de la pluie ?

■ Application du TMC à un solide en rotation

❑ Exercice 17.4. Pendule pesant

On considère le pendule ci-contre, capable d'osciller librement autour de l'axe (Oz) horizontal grâce à une liaison pivot parfaite. Il est constitué d'une barre homogène, de section constante et de masse m, à l'extrémité de laquelle on a soudé un disque homogène de masse $2m$ et de centre C. L'ensemble obtenu constitue un solide rigide. La distance OG entre le point O et le centre de masse du système est notée b.

Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Oz) est $J_{(Oz)} = kmb^2$, k étant un réel positif.



On écarte le pendule d'un angle α_0 par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale à la date $t=0$. On étudie son mouvement ultérieur en observant l'angle α que forme la direction de la barre avec l'axe vertical descendant (Ox).

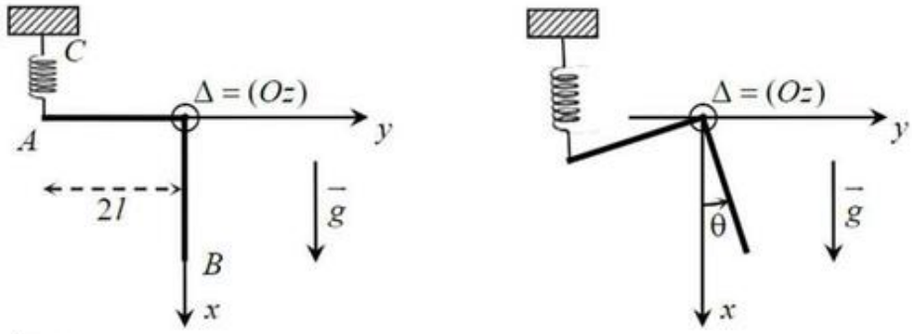
1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit α.
2. Une mesure expérimentale permet de déterminer la période T des petites oscillations. Déterminer le coefficient k en fonction de T, g et b.

❑ Exercice 17.5. Oscillations d'un solide soumis à une force élastique*

Un solide (S) est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant entre elles un angle droit. Chaque tige a pour masse m et pour longueur $2l$. (S) peut tourner autour d'un axe horizontal $\Delta = (Oz)$ passant par O.

La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur supposé vertical et uniforme, AO est horizontale, et OB verticale.

On donne le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur $2l$, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité : $I = \frac{4}{3}ml^2$.



1. Préliminaires

a) Que vaut le moment d'inertie J_Δ de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe Δ ?

b) Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

2. Oscillations

On étudie les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle θ restant petit, on considère que la force exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant tout le mouvement.

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période en fonction de m, g, k et l.

b) Calculer la période sachant que $m = 100$ g, $l = 10$ cm, $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $k = 12\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

D'après TPE/EIVP

❑ Exercice 17.6. Compétition de toupies* *

Madame Michu possède des toupies de forme et de taille identiques, mais faites de trois métaux différents.

Pour faire tourner une toupie, elle exerce pendant une brève durée ($\tau = 0{,}10$ s) un couple de forces avec le pouce et l'index sur sa partie supérieure ; la force exercée par chaque doigt peut être évaluée à $F = 0{,}60$ N.

Lorsque la toupie tourne à une vitesse angulaire ω, elle est freinée par deux types de frottements :

– les frottements fluides exercés par l'air environnant correspondent à un couple de moment $\mathcal{M}_{f,air} = -h\omega$;

– les frottements solides exercés par le support se traduisent par un couple de moment $\mathcal{M}_{f,supp} = -rN$ où N est la réaction normale du support.

Les coefficients h et r dépendent du traitement de surface des toupies.

Madame Michu essaie d'obtenir le temps de rotation T le plus long possible ; on suppose qu'une toupie tourne toujours autour d'un axe vertical immobile, mais elle tombe finalement sur le côté quand sa vitesse angulaire devient inférieure à $\omega_f = 20\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.



Photo ForeverSpin

On note m la masse de la toupie, J son moment d'inertie, g l'intensité de la pesanteur.

	 Acier	 Titane	 Magnésium
Masse m (g)	28,45	15,91	6,41
Coefficient h (unité SI)	$1{,}8\cdot10^{-9}$	$2{,}3\cdot10^{-9}$	$2{,}1\cdot10^{-9}$
Coefficient r (unité SI)	$1{,}3\cdot10^{-5}$	$4{,}7\cdot10^{-5}$	$2{,}5\cdot10^{-5}$

Photos ForeverSpin

1. Quelles sont les dimensions et les unités SI des coefficients h et r ?

2. Déterminer littéralement la vitesse angulaire ω_0 obtenue initialement par action des doigts, en supposant que les frottements sont négligeables sur cette phase.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$, à partir du moment où madame Michu lâche la toupie. Donner sa solution et en déduire l'expression de la durée T.

4. Pour la toupie en acier, indiquer laquelle de ces quatre valeurs correspond au bon ordre de grandeur pour son moment d'inertie J, en unité SI : $9{,}42\cdot10^{-7}$; $9{,}42\cdot10^{-4}$; 0,942 ; 942. On prendra cette valeur pour la suite. En déduire les valeurs de J pour les deux autres toupies.

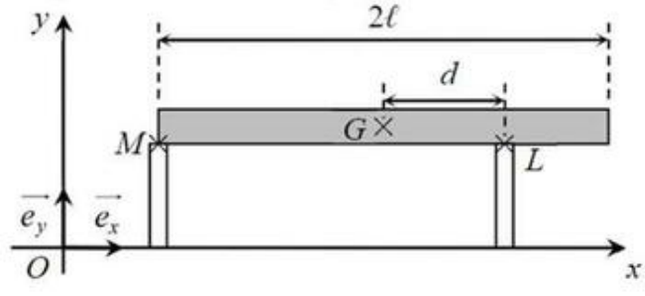
5. Laquelle des trois toupies tourne le plus longtemps ? On prendra $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

■ Application du TMC à un solide en équilibre

❑ Exercice 17.7. Portage d'une poutre

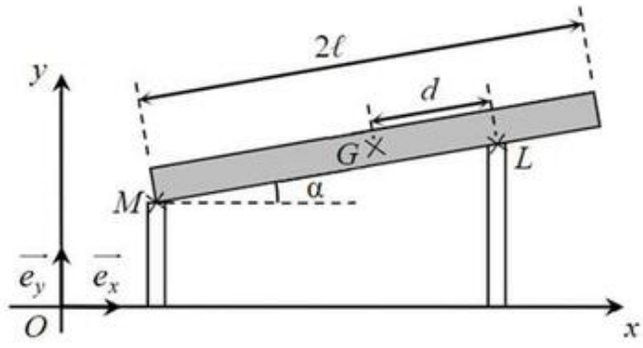
Les deux charpentiers Mario et Luigi portent ensemble une poutre, de longueur $2\ell = 4{,}0$ m et de masse $m = 30$ kg. Mario est à une extrémité M de la poutre, Luigi étant au point L à une distance $d = 1{,}4$ m du milieu de la poutre. Les deux forces qu'ils exercent sur la poutre sont verticales.

1. On suppose tout d'abord que les deux charpentiers ont la même taille, la poutre étant donc maintenue horizontale.
Déterminer les normes des forces $\overrightarrow{F_M}$ et $\overrightarrow{F_L}$ exercées par les deux charpentiers.

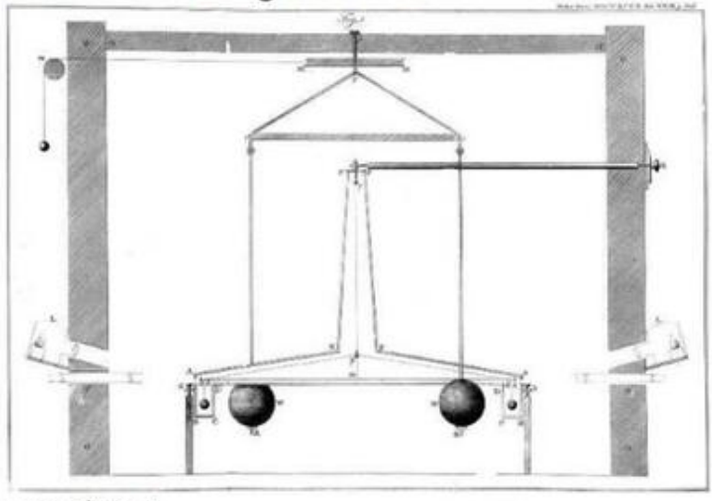


2. En fait Mario est plus petit que Luigi, la poutre faisant alors un angle α avec l'horizontale. Les forces restent toujours verticales.

Déterminer à nouveau les normes des deux forces et commenter.

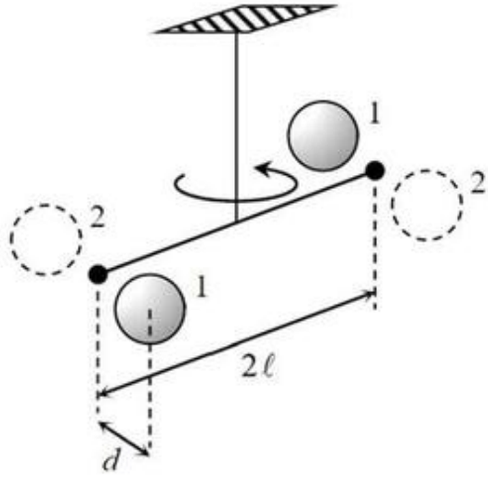


❑ Exercice 17.8. Mesure de la constante de gravitation*



Le physicien britannique Henry CAVENDISH a réalisé en 1798, sur un dispositif conçu par John MICHELL, une expérience destinée à « peser la Terre », ou plus exactement à déterminer sa masse volumique ρ. Cette expérience est considérée aujourd'hui comme une détermination de la constante de gravitation G (apparaissant dans l'expression de la force de gravitation), car celle-ci peut se déduire de ρ et du champ de pesanteur terrestre g.

L'expérience utilise un pendule de torsion, consistant en un fléau (tige rigide horizontale de longueur $2\ell = 1{,}86$ m, de masse négligeable) suspendu à un fil vertical ; celui-ci, lorsqu'il est tordu d'un angle θ, exerce sur le fléau un couple de torsion dont le moment par rapport à l'axe confondu avec le fil vaut $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C \times \theta$, avec $C = 6{,}79 \cdot 10^{-5}$ N·m·rad^{-1}.



À chaque extrémité du fléau sont placées deux petites sphères de même masse m = 730 g. On approche de chacune d'elle une sphère beaucoup plus grosse, de masse M = 158 kg, la distance entre le centre d'une grosse sphère et celui de la petite sphère la plus proche étant d = 22,5 cm.

Pour chaque grosse sphère, on ne tiendra compte que de son action sur la petite sphère la plus proche. Lorsqu'on fait passer, par un dispositif opératoire non représenté ici, les deux grosses sphères de la position 1 à la position 2, le fléau tourne d'un angle 2θ.

1. On rappelle que la force attractive de gravitation s'exerçant entre deux sphères de masses m_1 et m_2, dont les centres sont séparés d'une distance r, a pour norme $F_g = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$.

Que devient cette expression si l'une des sphères est la Terre (de rayon R_T = 6370 km et de masse M_T) et l'autre une masse m quelconque au voisinage de la Terre ? En déduire

l'expression de la norme du champ de pesanteur g en fonction de G, R_T et M_T, puis en fonction de G, R_T et ρ.

2. L'angle de torsion mesuré dans l'expérience de Cavendish vaut $2\theta = 8{,}38 \cdot 10^{-3}$ rad. Cet angle étant très faible, on peut considérer que les droites joignant les centres des sphères voisines sont orthogonales au fléau. Déterminer la valeur de la constante de gravitation G.

3. En déduire la masse volumique de la Terre, sachant que $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

D'après CCINP

■ Étude énergétique d'un solide en rotation

❑ Exercice 17.9. Volant freiné par un couple constant

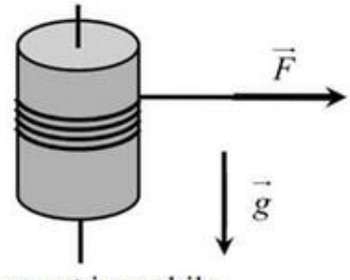
Un volant tourne autour d'un axe horizontal par rapport auquel son moment d'inertie est J ; son barycentre est sur l'axe. On schématise le frottement solide par un couple opposé au mouvement, dont le moment vaut en valeur absolue : $|\mathcal{M}| = \alpha J$ (α étant un paramètre positif supposé constant).

1. On lance le volant avec une vitesse angulaire initiale ω_0 : on constate qu'il s'arrête après N tours. Calculer α.

2. Comment pourrait-on vérifier expérimentalement que α est bien constant au cours du mouvement et indépendant de la vitesse angulaire ω ?

❑ Exercice 17.10. Toupie lancée avec un fil

Le jeune Toto joue avec une toupie qu'il fait tourner à l'aide d'un fil inextensible entouré sur le corps de la toupie. Celle-ci est assimilable à un cylindre de masse m et de rayon R. Une pointe métallique de masse négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. Pendant tout son mouvement, la toupie reste verticale. Toto enroule le fil (4 tours) puis tire sur le fil avec une force de norme F constante. On note ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie.



Toto commence à exercer la force à la date $t = 0$, la toupie étant initialement immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.

2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire l'accélération angulaire de la toupie.

3. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé (4 tours) ?

❑ Exercice 17.11. Toto le cycliste

Toto roule sur son vélo, à vitesse constante, en ligne droite, sur une route horizontale, à la vitesse de $36\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Les roues roulent sans glisser sur le sol.

On étudie tout d'abord la rotation d'une des roues par rapport au référentiel lié au cadre du vélo. La roue est assimilable à un cerceau de section négligeable, de masse $m = 1450$ g, de diamètre $D = 67$ cm. La masse totale du vélo est $m_{\text{tot}} = 9100$ g.

1. Si le référentiel terrestre est supposé galiléen, que peut-on dire du référentiel lié au vélo ?

2. Vérifier que la vitesse angulaire de la roue est d'environ $30\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. Calculer l'énergie cinétique de rotation de la roue (dans le référentiel lié au vélo).

4. Calculer l'énergie cinétique totale du vélo dans le référentiel terrestre, définie comme la somme des énergies cinétiques de rotation des deux roues et de l'énergie cinétique de translation de l'ensemble du vélo.
5. Toto freine et met une durée $\Delta t = 5{,}0$ s à s'arrêter. Calculer la puissance moyenne de la force de freinage.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 17.4. Question 1.b : écrire le travail élémentaire du couple (qui peut se déduire de la puissance), montrer que cela peut s'écrire $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\delta W$ et intégrer.

Exercice 17.6. Les moments des différentes forces peuvent être calculés avec un produit vectoriel puis un produit scalaire, ou bien avec les bras de levier : pour cela faire un schéma détaillé, et faire attention comme toujours à l'expression de la tension du ressort.

Exercice 17.10. Le TÉC sous forme intégrale donne la réponse rapidement, sans avoir à résoudre d'équation différentielle.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux

2. Le rayon est plus grand pour les points plus éloignés de l'axe.

4. L'intégrale sur l'ensemble du solide est la somme des intégrales sur les deux sous-ensembles.

5. Elle peut être avec ou sans frottement : dans ce dernier cas elle est dite *parfaite*.

6. C'est la distance entre le *support de la force* et l'axe, qui peut donc être plus petite que la distance entre le point d'application et l'axe (selon la direction de la force).

8. C'est le produit du moment du couple par la vitesse angulaire.

9. Le TMC ne fait jamais intervenir les forces intérieures (de moment total nul).

10. Le TÉC fait intervenir les forces intérieures dans le cas d'un système *déformable* ; mais pour un solide, la puissance totale des forces intérieures est nulle.

❑ Les erreurs classiques

– Pour un solide, l'inventaire des « forces extérieures » est plutôt ici un inventaire des « actions extérieures » : en plus des différentes *forces*, ayant un point d'application défini (poids, tension d'un ressort…), ne pas oublier d'éventuels *couples* (de torsion, de frottement…).
– Dans le calcul du moment d'une force avec le bras de levier, ne pas oublier de déterminer le *signe* de ce moment.
– De même les moments des couples sont souvent donnés en valeur absolue : ne pas oublier d'ajouter le signe en fonction du sens de rotation.

Corrigé des exercices

Exercice 17.1

1. Chaque point d'un rayon de la roue décrit un cercle centré sur le même axe : les rayons sont en rotation autour d'un axe fixe.

2. Chaque nacelle garde la même orientation dans l'espace au cours du mouvement : elle est en translation circulaire.

3. Si la roue tourne beaucoup plus vite, les rayons sont toujours en rotation. En revanche les nacelles ne peuvent plus garder un mouvement de translation :

– dans un premier temps elles vont osciller fortement autour de leur axe de suspension (leur mouvement est donc complexe, composé de deux rotations) ;

– si la grande roue tourne vraiment très vite, on peut arriver à la situation où les nacelles ne tourneraient plus autour de leur propre axe de suspension mais auraient le même mouvement de rotation que l'ensemble de la roue (c'est-à-dire que Gudule se retrouverait la tête en bas chaque fois que sa nacelle est tout en haut de la grande roue).

⇨ *Méthode 17.1*

Exercice 17.2

1. $\boxed{\omega = \dfrac{640 \times 2\pi}{60} = 67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

2. $v = R\omega$. AN $\boxed{v = 20{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Pour avoir une vitesse de coupe de $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, il faudrait une vitesse angulaire de $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit une fréquence de $\dfrac{100 \times 60}{2\pi} = 954$ tours/min , soit $\boxed{15{,}9 \text{ Hz}}$.

3. Accélération angulaire : $\boxed{\left|\dfrac{\text{d}\omega}{\text{d}t}\right| = \alpha_0 = \dfrac{67}{6} = 11{,}2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}$.

On intègre pour obtenir la vitesse angulaire : $\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \alpha_0 t}$. AN $\omega(t) = 67 - 11{,}2t$ avec t en s.

4. On intègre une nouvelle fois pour obtenir l'équation horaire : $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t - \dfrac{\alpha_0}{2} t^2}$. AN $\theta(t) = 67t - 5{,}6t^2$ avec t en s. À la date $t = 6$ s : $\boxed{\theta(6 \text{ s}) = 201 \text{ rad} = 32 \text{ tours}}$.

Exercice 17.3

1. Le balai est en rotation autour de l'axe fixe (Oz), puisque chaque point décrit un cercle de centre O dans le plan (Oxy).

⇨ *Méthode 17.1*

2. La fonction recherchée est du type $\theta(t) = A\cos(\omega t + B)$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T étant la période.

Compte tenu des données, $T = 0{,}90$ s d'où $\omega = 7{,}0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales :

$\theta(0) = A\cos(B) = -60° = -\dfrac{\pi}{3}$ et $\dot{\theta}(0) = -A\omega\sin(B) = 0$, soit $B = 0$ et $A = -\dfrac{\pi}{3}$.

Donc $\boxed{\theta(t) = -\dfrac{\pi}{3}\cos(7{,}0t)}$ avec t en secondes.

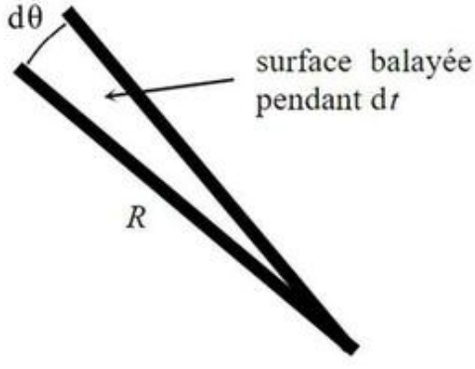
3. La vitesse de l'extrémité A est donnée par la relation $\vec{v}(A) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$, soit $v(A) = R\left|\dot{\theta}\right|$.

Or $\dot{\theta}(t) = \dfrac{7\pi}{3}\sin(7{,}0t)$, donc $v(A) = 1{,}4\pi\left|\sin(7{,}0t)\right|$. La valeur maximale correspond au moment où le balai passe par la position centrale, pour $\theta = 0$: $\boxed{v(A)_{\max} = 4{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

4. Si Toto passe la deuxième vitesse, seule la période, et donc le terme ω, est changée.

On a $\omega = 14 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\theta(t) = -\dfrac{\pi}{3}\cos(14t)$ et $v(A)_{\max} = 8{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5. Pendant une durée dt, la position angulaire du balai varie de dθ et le balai passe sur une surface $\text{d}S = \dfrac{R^2\,\text{d}\theta}{2}$. La vitesse aréolaire est donc $\dfrac{\text{d}S}{\text{d}t} = \dfrac{R^2\,\text{d}\theta}{2\text{d}t}$ soit $\boxed{\dfrac{\text{d}S}{\text{d}t} = \dfrac{R^2\dot{\theta}}{2}}$.



Numériquement, $\dfrac{\text{d}S}{\text{d}t} = 0{,}42\pi\sin(7{,}0t)$. Cette grandeur est maximale quand le balai passe par l'axe (Ox) et $\boxed{\left(\dfrac{\text{d}S}{\text{d}t}\right)_{\max} = 1{,}3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$.

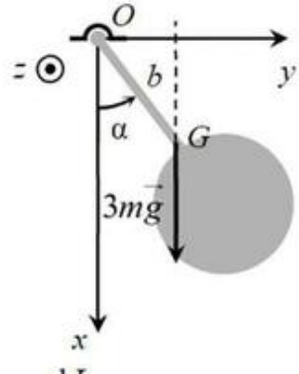
On peut donc en déduire que <u>la partie centrale du pare-brise est mieux protégée de la pluie</u>.

Exercice 17.4

1. On fait l'inventaire de toutes les actions extérieures exercées sur le pendule, et on calcule leurs moments par rapport à (Oz) :

– le poids $3m\vec{g}$, qui s'exerce au barycentre G, a pour bras de levier $b\sin\alpha$ et son signe est opposé à celui de α, soit $\mathcal{M}_{(Oz)}\left(m\vec{g}\right) = -3mgb\sin\alpha$;

– la liaison pivot n'exerce aucun moment, puisque sa résultante coupe l'axe et qu'elle est parfaite donc sans frottement.



On applique le TMC pour le pendule par rapport à l'axe (Oz) : $\dfrac{\text{d}L_{(Oz)\mathcal{R}}}{\text{d}t} = \sum\mathcal{M}_{(Oz)}$ soit $J_{(Oz)}\ddot{\alpha} = -3mgb\sin\alpha$.

Avec l'expression $J_{(Oz)} = kmb^2$ on obtient l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{3g}{kb}\sin\alpha = 0}$.

⇨ *Méthode 17.2*

2. Si α reste faible, on peut linéariser l'équation : $\ddot{\alpha} + \frac{3g}{kb}\alpha = 0$. On reconnaît une équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique, de mouvement sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{kb}{3g}}$. Par identification, on obtient $\boxed{k = \frac{3gT^2}{4\pi^2 b}}$.

Exercice 17.5

1. a) Le moment d'inertie s'obtient en faisant une somme sur tous les points du solide. Il est donc la somme des moments des deux tiges par rapport au même axe : $\boxed{J_\Delta = 2I = \frac{8}{3}ml^2}$.

b) Faisons l'inventaire des actions extérieures auxquelles est soumis le solide, et déterminons leurs moments par rapport à Δ :

– la réaction de la liaison pivot s'exerce en O donc coupe l'axe, son moment est nul, et de plus il n'y a pas de couple de frottement (liaison parfaite) ;

– le poids de la tige OA s'exerce au milieu de OA, son bras de levier est l, et il a tendance à faire tourner le solide dans le sens positif, donc $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_A}\right) = +mgl$;

– le poids de la tige OB s'exerce au milieu de OB, son support coupe l'axe donc son moment est nul ;

– la tension du ressort $\vec{T} = -k(L_{éq} - L_0)\overrightarrow{e_x}$ a pour bras de levier $2l$ et fait tourner dans le sens négatif si $L_{éq} > L_0$, donc $\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = -k(L_{éq} - L_0)2l$.

> *On aurait pu aussi calculer ces moments avec le produit vectoriel puis la projection sur l'axe : le calcul est plus long mais il évite d'avoir à regarder en détails le schéma.*

TMC pour le solide à l'équilibre :

$\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_A}\right) + \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = 0 \Leftrightarrow +mgl - k(L_{éq} - L_0)2l = 0$ d'où on tire $\boxed{L_{éq} = L_0 + \frac{mg}{2k}}$.

⇨ *Méthode 17.4*

2. a) On recalcule les moments :

– toujours aucun moment de la liaison pivot ;

– le poids de la tige OA a pour bras de levier $l\cos\theta$, donc $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_A}\right) = +mgl\cos\theta$;

– le poids de la tige OB a pour bras de levier $l\left|\sin\theta\right|$, et il est négatif quand θ est positif, donc $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_B}\right) = -mgl\sin\theta$;

– la tension a pour bras de levier $2l\cos\theta$, donc $\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = -2kl(L - L_0)\cos\theta$ avec $L = L_{éq} + 2l\sin\theta$, soit $\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = -2kl(L_{éq} + 2l\sin\theta - L_0)\cos\theta$.

TMC : $\dfrac{\mathrm{d}L_{\Delta\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{\Delta} \Leftrightarrow J_{\Delta}\ddot{\theta} = +mgl\cos\theta - 2kl(L_{éq} + 2l\sin\theta - L_0)\cos\theta - mgl\sin\theta$.

Pour $\theta \ll 1$: $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$ donc l'équation peut s'écrire : $J_{\Delta}\ddot{\theta} = +mgl - 2kl(L_{éq} + 2l\theta - L_0) - mgl\theta = -4kl^2\theta - mgl\theta$ (la somme des constantes est nulle) d'où finalement l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{4kl^2 + mgl}{J_{\Delta}}\theta = 0}$.

La période est $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_{\Delta}}{4kl^2 + mgl}}$ soit $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{8ml}{12kl + 3mg}}}$.

⇨ *Méthode 17.2*

b) AN $\boxed{T = 0{,}43\ \mathrm{s}}$.

Exercice 17.6

1. Le moment d'une force ou d'un couple a la dimension d'une force multipliée par une longueur, soit $\left[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}\right]$. Donc d'après la formule $\mathcal{M}_{\mathrm{f,supp}} = -r\,N$, $\boxed{[r] = [L]}$, unité SI : $\boxed{m}$ (mètre). Et d'après la formule $\mathcal{M}_{\mathrm{f,air}} = -h\,\omega$, $\boxed{[h] = \left[M \cdot L^2 \cdot T^{-1}\right]}$, unité SI : $\boxed{\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}}$.

2. Sur cette phase de démarrage, la toupie est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$, à la réaction du support $\vec{R} = N\vec{e_z}\ \left[+\vec{T}\right]$, et au couple exercé par madame Michu, de moment $\mathcal{M} = d \times F$. Pour évaluer la vitesse de rotation acquise après la durée τ, on applique le théorème du moment cinétique à la toupie : $\dfrac{\mathrm{d}L_{(Oz)}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{P}\right) + \mathcal{M}_{(Oz)}\left(\vec{R}\right) + \mathcal{M}$.

Les forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont des moments nuls puisque leurs points d'application sont sur l'axe de rotation ; et $L_{(Oz)} = J\,\omega$. Donc $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M} = dF \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{dF}{J} = \mathrm{cte}$. L'intégration sur la durée τ donne $\boxed{\omega_0 = \dfrac{dF}{J}\tau}$.

⇨ *Méthode 17.2*

3. Les actions extérieures sont maintenant $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{f,supp}}$ et $\mathcal{M}_{\mathrm{f,air}}$. On applique tout d'abord le théorème de la quantité de mouvement, permettant de trouver la réaction normale et ainsi d'exprimer le moment de frottement. Puisque le barycentre de la toupie est immobile : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ d'où en projection sur la verticale : $N = mg$.

On applique ensuite à nouveau le TMC : $\dfrac{\mathrm{d}L_{(Oz)}}{\mathrm{d}t} = 0 + 0 + \mathcal{M}_{\mathrm{f,supp}} + \mathcal{M}_{\mathrm{f,air}} \Leftrightarrow J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -h\omega - r\,m\,g$

$\Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{h}{J}\omega = -\dfrac{r\,m\,g}{J}$. Solution générale : $\omega(t) = A\exp\left(-\dfrac{h}{J}t\right) - \dfrac{r\,m\,g}{h}$.

Si on prend $t=0$ lorsque $\omega=\omega_0$: $\omega_0 = A - \dfrac{r\,m\,g}{h}$ donc $A = \omega_0 + \dfrac{r\,m\,g}{h}$ et finalement

$$\boxed{\omega(t) = \left(\omega_0 + \frac{r\,m\,g}{h}\right)\exp\left(-\frac{h}{J}t\right) - \frac{r\,m\,g}{h}}.$$

Cette solution reste valable tant que la toupie tourne, c'est-à-dire d'après l'énoncé jusqu'à l'instant T où $\omega(T)=\omega_f$, donc $\boxed{T = \dfrac{J}{h}\ln\dfrac{\omega_0 + rmg/h}{\omega_f + rmg/h}}$.

4. Pour un objet tournant de masse m et de rayon R, le moment d'inertie est toujours de la forme kmR^2 où k est un coefficient sans dimension dépendant de la forme de l'objet ($1/2$ pour un cylindre, $2/5$ pour une boule… et d'une façon générale un coefficient plus petit quand la masse est plus concentrée près de l'axe). Le calcul de mR^2 donne ici $5{,}54\cdot10^{-6}$ kg·m², et on doit trouver une valeur plus petite, donc la bonne valeur est $\boxed{J_{\text{acier}} = 9{,}42\cdot10^{-7}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$, et le coefficient est $k = 0{,}170$. On calcule alors de même $J = kmR^2$ pour les deux autres métaux :

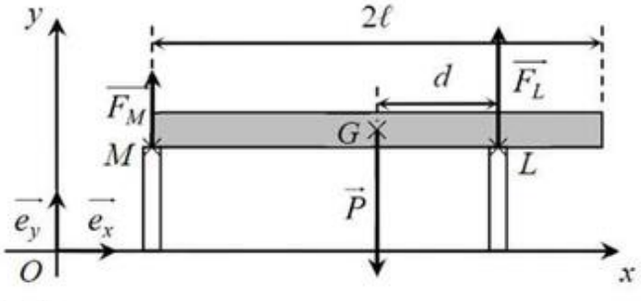
$\boxed{J_{\text{titane}} = 5{,}27\cdot10^{-7}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$ et $\boxed{J_{\text{magnésium}} = 2{,}12\cdot10^{-7}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$.

5. La combinaison des formules précédentes donne : $\boxed{T = \dfrac{J}{h}\ln\dfrac{dF\tau/J + rmg/h}{\omega_f + rmg/h}}$

AN $\boxed{T_{\text{acier}} = 45\ \text{s}}$; $\boxed{T_{\text{titane}} = 23\ \text{s}}$; $\boxed{T_{\text{magnésium}} = 77\ \text{s}}$. La toupie de magnésium est gagnante !

Exercice 17.7

1. Il y a en tout trois forces appliquées à la poutre : son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_y}$; la force de Mario $\overrightarrow{F_M} = +F_M\,\vec{e_y}$; la force de Luigi $\overrightarrow{F_L} = +F_L\,\vec{e_y}$.



– Théorème de la quantité de mouvement à l'équilibre : $\vec{P} + \overrightarrow{F_M} + \overrightarrow{F_L} = \vec{0}$.

Projections sur $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$: $\begin{cases} 0 = 0 \\ -mg + F_M + F_L = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Deux d'entre elles ne donnent aucune information, on a donc une seule équation pour les deux inconnues F_M et F_L.

– TMC à l'équilibre : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_M}) + \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_L}) = 0$ par rapport à tout axe Δ fixe. Choisissons par exemple l'axe (Mz), orthogonal au plan de figure, et pour sens positif le sens trigonométrique habituel dans ce plan.

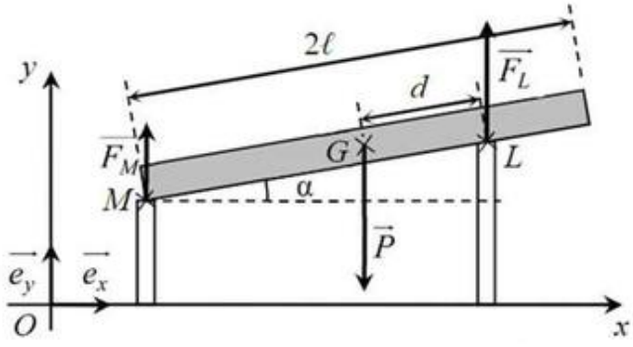
Alors $\mathcal{M}_{(Mz)}(\vec{P}) = -\ell\,mg$ (car $\vec{P}$ peut être considéré comme s'appliquant au centre de gravité G, au centre de la poutre, donc son support vertical est à la distance ℓ de M) ; $\mathcal{M}_{(Mz)}(\overrightarrow{F_M}) = 0$ puisque

$\overrightarrow{F_M}$ s'applique en M (donc son support coupe l'axe) ; $\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right) = +(\ell + d)F_L$. L'équation obtenue est donc $-\ell mg + (\ell + d)F_L = 0$, qui donne directement $\boxed{F_L = mg\dfrac{\ell}{\ell + d}}$. La résolution de l'autre équation donne alors $\boxed{F_M = mg\dfrac{d}{\ell + d}}$. AN $\boxed{F_L = 170\ \text{N}}$ et $\boxed{F_M = 120\ \text{N}}$.

⇨ *Méthode 17.4*

Si on avait appliqué le TMC par rapport à l'axe (Lz), on aurait trouvé d'abord F_M puis F_L. Si on l'avait appliqué par rapport à (Gz), on aurait obtenu une seconde relation entre F_M et F_L, puis résolu le système de deux équations à deux inconnues.

2. Les expressions des forces sont toujours les mêmes, donc la première loi de l'équilibre donne toujours la même équation : $F_M + F_L = mg$.
Calculons à nouveau les moments des forces par rapport à l'axe (Mz).



Alors $\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\vec{P}\right) = -\ell\cos\alpha\, mg$ (le bras de levier étant maintenant $\ell\cos\alpha$) ; $\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_M}\right) = 0$ comme précédemment ; $\mathcal{M}_{(Mz)}\left(\overrightarrow{F_L}\right) = +(\ell + d)\cos\alpha F_L$. L'équation obtenue est donc $-\ell\cos\alpha mg + (\ell + d)\cos\alpha F_L = 0$, ce qui redonne $\boxed{F_L = mg\dfrac{\ell}{\ell + d}}$ et $\boxed{F_M = mg\dfrac{d}{\ell + d}}$.
L'inclinaison de la poutre ne change donc rien à la force totale, ni à la répartition entre les forces exercées par les deux personnes.

Exercice 17.8

1. Dans le cas d'une masse m au voisinage de la Terre : $\boxed{F_g = G\dfrac{M_T m}{R_T^2}}$. Par identification avec le poids mg, on obtient $\boxed{g = G\dfrac{M_T}{R_T^2}}$. De plus $M_T = \rho\dfrac{4}{3}\pi R_T^3$, d'où $\boxed{g = \dfrac{4}{3}G\pi\rho R_T}$.

2. Le solide formé par le fléau et les deux petites sphères est soumis aux forces suivantes : le poids des deux sphères (celui du fléau étant négligé) ; la tension du fil de suspension ; les forces gravitationnelles exercées par chaque grosse sphère sur la petite sphère voisine ; auxquelles on doit ajouter le couple de torsion.
On applique le TMC à l'équilibre, par rapport à l'axe Δ confondu avec le fil : $\sum \mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = 0$.
Les deux poids et la tension du fil sont parallèles à cet axe, donc leurs moments sont nuls.
Pour chaque force gravitationnelle, dirigée selon les centres des deux sphères voisines donc orthogonale au fléau, le bras de levier est ℓ donc le moment vaut $\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{F_g}\right) = \ell \times G\dfrac{M m}{d^2}$.

Enfin le fléau tourne de 2θ lorsque les sphères passent de la position 1 à la position 2, ce qui signifie que le fil est tordu d'un angle θ dans chacune des positions : le moment du couple de torsion vaut alors $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C \times \theta$.

Donc $2 \times \mathcal{M}_{\Delta}\left(\overrightarrow{F_g}\right) + \mathcal{M}_{\text{torsion}} = 0 \Leftrightarrow 2\ell G \dfrac{M m}{d^2} - C\theta = 0$ d'où $\boxed{G = \dfrac{C\theta d^2}{2\ell M m}}$.

AN $\boxed{G = 6{,}71 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}}$.

⇨ *Méthode 17.4*

Si on applique le théorème de la quantité de mouvement à l'équilibre, ses deux projections horizontales ne donnent aucune information, et sa projection verticale permet de déterminer la tension du fil, qui n'était pas demandée ici.

3. D'après la formule de la question 1 : $\boxed{\rho = \dfrac{3g}{4G\pi R_T}}$. AN $\boxed{\rho = 5{,}48 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

Dans son article de 1798, Cavendish indique comme résultat une « densité » de $5{,}48 \pm 0{,}38$, *soit* $\rho = (5{,}48 \pm 0{,}38) \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, *en faisant une statistique sur 23 mesures. La valeur admise aujourd'hui est une masse volumique moyenne* $\rho = 5{,}51 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, *qui est bien dans l'intervalle d'incertitude de Cavendish.*

Exercice 17.9

1. La seule action de moment non nul est celle des frottements, puisque le poids et la réaction s'exercent sur l'axe. Notons W son travail total entre le lancement et l'arrêt.

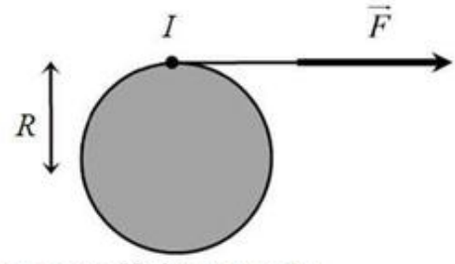
Théorème de l'énergie cinétique : $E_{c(f)} - E_{c(i)} = W$ soit $-\dfrac{1}{2} J \omega_0^2 = W$. Or la puissance du couple de frottement est $\mathcal{P} = \mathcal{M}\,\omega = -\alpha J \omega = -\alpha J \dot{\theta}$ donc son travail entre $\theta = 0$ et $\theta = 2N\pi$ vaut : $W = -\displaystyle\int_i^f \alpha J \dot{\theta}\,\mathrm{d}t = -\alpha J \int_0^{2\pi N} \mathrm{d}\theta = -2\pi N \alpha J$. Donc $\dfrac{1}{2} J \omega_0^2 = 2\pi N \alpha J$ d'où $\boxed{\alpha = \dfrac{\omega_0^2}{4\pi N}}$.

⇨ *Méthode 17.3*

2. L'intégration précédente n'est valable que si α est une constante : la formule montre alors que le nombre total de tours est proportionnel au carré de la vitesse angulaire initiale. Pour tester cette hypothèse, il suffit de lancer le volant avec différentes valeurs de la vitesse angulaire initiale. Par exemple si on le lance deux fois plus vite, il doit effectuer quatre fois plus de tours. Si ce n'est pas le cas, le modèle est incorrect.

Exercice 17.10

1. La force $\vec{F}$ s'exerce sur un point de la corde, ayant la même vitesse que le point I de la périphérie du cylindre. La puissance de cette force est donc $\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(I) = FR\omega}$.



2. La toupie est soumise à :
- son poids, qui ne travaille pas (altitude constante) ;
- la réaction du sol qui ne travaille pas (son point d'application ne se déplaçant pas) ;
- la force $\vec{F}$ exercée par Toto.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F})$. Or $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \dfrac{1}{4}mR^2\omega^2$, donc $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}mR^2\omega\dot{\omega}$. Le TÉC donne donc $\dfrac{1}{2}mR^2\omega\dot{\omega} = FR\omega$ d'où $\boxed{\dot{\omega} = \dfrac{2F}{mR} = \text{cte}}$.
La vitesse angulaire de la toupie augmente donc proportionnellement au temps, pendant toute la durée où Toto tire sur la corde.

⇨ *Méthode 17.3*

3. On peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et l'instant final ou tout le fil a été déroulé : $E_{\mathrm{c(f)}} - E_{\mathrm{c(i)}} = W(\vec{F})_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}$ soit $\dfrac{1}{2}J_\Delta\omega_\mathrm{f}^2 - 0 = 4 \times 2\pi R \times F$.

On en déduit $\boxed{\omega_\mathrm{f} = \sqrt{\dfrac{16\pi RF}{J}} = \sqrt{\dfrac{32\pi F}{mR}}}$.

Exercice 17.11

1. Le référentiel du vélo est galiléen puisqu'il est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre, lui-même galiléen.

2. Chaque fois que la roue effectue 1 tour (soit un angle de 2π), le vélo avance d'une distance $2\pi R$. Donc $v = \dfrac{2\pi R}{T} = R\omega$ et $\boxed{\omega = \dfrac{v}{R} = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

3. $E_{\mathrm{c(roue/vélo)}} = \dfrac{1}{2}J\omega^2$ avec $J = mR^2$. Donc $\boxed{E_{\mathrm{c(roue/vélo)}} = \dfrac{1}{2}mR^2\omega^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 = 72{,}5 \text{ J}}$.

4. $E_{\mathrm{c(totale)}} = 2E_{\mathrm{c(roue/vélo)}} + E_{\mathrm{c(translation)}} = mv^2 + \dfrac{1}{2}m_\mathrm{tot}v^2$. AN $\boxed{E_{\mathrm{c(totale)}} = 600 \text{ J}}$.

5. Si on suppose que la force de freinage est constante, d'après le théorème de l'énergie cinétique : $\mathcal{P}(\vec{F}) = \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\Delta E_\mathrm{c}}{\Delta t} = \dfrac{-E_{\mathrm{c(totale)}}}{\Delta t}$. AN $\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = -120 \text{ W}}$.

⇨ *Méthode 17.3*

Chapitre 18

Description d'un système thermodynamique

UN SCIENTIFIQUE



Après une passion pour les mathématiques, **William Thomson** (1824-1907), se tourne vers la physique, d'abord l'électricité puis la thermodynamique dont il énonce en 1850 le deuxième principe, indépendamment de Rudolf Clausius. Passionné de tout, il décrit les vagues du sillage d'un navire, étudie les marées, invente le galvanomètre à cadre mobile. Il est aussi connu sous le nom de Lord Kelvin suite à son anoblissement, nom qui est donné à l'échelle de température qu'il a introduite.

Un peu d'histoire

En 1846, William Thomson consulte par hasard un article de Clapeyron dans lequel celui-ci présente un diagramme représentant un cycle de Carnot idéal. Le jeune physicien écossais est séduit par la logique de cette présentation, qui lui inspire l'échelle de température absolue.

Faute d'avoir été publiés, les travaux de Carnot sur la conservation de l'énergie étaient inconnus de James Joule en 1840 lorsque le savant anglais expérimente les effets calorifiques du passage d'un courant dans un circuit ; il en déduit que la chaleur produite par unité de temps est proportionnelle au carré de l'intensité du courant. Peu après, en 1847, Helmholtz présente un mémoire dans lequel il énonce le principe de conservation de l'énergie. En 1850, Rudolf Clausius démontre que la production d'énergie mécanique correspond à la destruction de la même quantité de chaleur.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les différentes échelles de description d'un système
- ▷ La définition d'un système ouvert, fermé ou isolé
- ▷ Les propriétés respectives des grandeurs extensives et intensives
- ▷ La notion d'équilibre thermodynamique
- ▷ Les hypothèses du modèle du gaz parfait et son équation d'état
- ▷ L'équation d'état d'une phase condensée idéale
- ▷ Le diagramme d'équilibre (P,T), le point triple et le point critique
- ▷ Le diagramme de Clapeyron (P,v) pour l'équilibre liquide/gaz

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Utiliser un modèle unidirectionnel pour justifier l'expression de la pression cinétique
- ▷ Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique, déduire une température d'une condition d'équilibre thermique
- ▷ Retrouver la loi d'évolution de la pression cinétique et l'expression de la vitesse quadratique moyenne en fonction des autres variables d'état
- ▷ Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait
- ▷ Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point du diagramme de Clapeyron (P,v)
- ▷ Interpréter des propriétés de gaz ou de liquides à partir de réseaux d'isothermes expérimentales
- ▷ Déterminer la composition finale d'un système à l'issue d'une vaporisation

■■ Résumé de cours

■ Différentes échelles de description d'un système

❑ Libre parcours moyen

Dans un solide, les atomes vibrent légèrement autour de positions fixes. Dans un fluide (liquide ou gaz), les molécules sont libres de se déplacer. On appelle **libre parcours moyen** ℓ_p la distance moyenne parcourue par les molécules d'un fluide entre deux chocs successifs. Dans un liquide, ℓ_p est de l'ordre du diamètre moléculaire, soit $\ell_p \sim 10^{-10}$ m. Dans un gaz à pression et température ambiantes, il est de plusieurs centaines de fois leur taille, soit $\ell_p \sim 10^{-7}$ m.

❑ Échelles microscopique, macroscopique et mésoscopique

– Une longueur de l'ordre du libre parcours moyen ℓ_p caractérise l'**échelle microscopique**. Un volume de l'ordre de ℓ_p^3 ne contient que quelques molécules ; celles-ci entrant et sortant sans cesse du volume, leur nombre présente de fortes fluctuations relatives.

– L'**échelle macroscopique** correspond à la taille L des objets de notre quotidien ($L \sim 10^{-2}$ à 1 m). Un volume de l'ordre de L^3 contient un nombre de molécules de l'ordre du nombre d'Avogadro ($\mathcal{N}_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$).

– L'**échelle mésoscopique** est une échelle intermédiaire entre les deux précédentes, soit $\boxed{\ell_p \ll \ell \ll L}$. Un volume $d\tau$ de l'ordre de ℓ^3 est assez petit à l'échelle macroscopique pour pouvoir être considéré comme quasi ponctuel, mais il contient assez de molécules pour que leur nombre ait des fluctuations faibles : la notion de moyenne statistique a un sens à cette échelle.

❑ Système thermodynamique

On appelle **système** une portion de matière séparée du **milieu extérieur** par une frontière (fictive ou matérielle). La réunion du système et de son milieu extérieur constitue l'**Univers**. Si le système est constitué d'un trop grand nombre de particules pour qu'une description microscopique de celui-ci soit envisageable, il est qualifié de **thermodynamique**.

En fonction de la nature des échanges entre le système et le milieu extérieur, on distingue :

– les systèmes **isolés** qui n'échangent ni matière ni énergie avec le milieu extérieur ;
– les systèmes **fermés** qui échangent de l'énergie mais pas de matière avec le milieu extérieur ;
– les systèmes **ouverts** qui échangent matière et énergie avec le milieu extérieur.

❑ État microscopique et état macroscopique

– On peut imaginer caractériser un système par l'état individuel de tous ses constituants : position et quantité de mouvement de chaque particule dans un formalisme classique, nombres quantiques dans un formalisme quantique. On parle alors d'**état microscopique** (ou **microétat**).

– Le système peut aussi être décrit à l'aide de grandeurs accessibles à notre échelle (voir paragraphe suivant). On parle alors d'**état macroscopique** (ou **macroétat**).

– À un macroétat donné correspond en général un grand nombre de microétats.

■ Grandeurs d'état et équilibre thermodynamique

❑ Grandeurs d'état

Les propriétés à notre échelle d'un système thermodynamique peuvent être décrites à l'aide d'un petit nombre de grandeurs macroscopiques, appelées **grandeurs d'état**. Pour les gaz, les liquides et les solides, on utilise fréquemment :

- la **quantité de matière** n, dont l'unité SI est la mole (mol) ;
- la **pression** P, dont l'unité SI est le pascal (Pa) ;
- le **volume** V, dont l'unité SI est le mètre cube (m^3) ;
- la **température** (absolue) T, dont l'unité SI est le kelvin (K).

La température Celsius θ, en degrés Celsius (°C), est définie par $\theta = T - T_0$ avec $T_0 = 273{,}15\,K$.

❑ Variables, fonctions et équation d'état

Les grandeurs d'état indépendantes, et en nombre suffisant, choisies pour décrire l'état macroscopique d'un système sont appelées **variables d'état** ; les autres grandeurs d'état, exprimées en fonction des variables d'état, sont alors qualifiées de **fonctions d'état**.

Pour un corps pur de quantité n fixée, on choisira deux variables d'état parmi P, V et T, et la troisième leur est liée par une **équation d'état**.

⇨ Méthode 18.1. Passer de l'équation d'état molaire à l'équation d'état extensive

❑ Extensivité ou intensivité des grandeurs d'état

- Une grandeur **extensive** est relative à un système entier, elle constitue un stock contenu dans le système. Elle est additive lors de la réunion de deux systèmes. Exemples : quantité de matière, volume, masse…
- Une grandeur **intensive** est définie en chaque point M d'un système, elle décrit une propriété locale. Exemples : pression, température, concentration…

Un système dont les grandeurs intensives ont même valeur en tout point est dit **homogène**.

- Le rapport de deux grandeurs extensives (éventuellement sous la forme d'une dérivée) est une grandeur intensive.

❑ Équilibre thermodynamique

Un système est en **équilibre thermodynamique** lorsque ses variables d'état sont définies et constantes au cours du temps et que tout échange de matière et d'énergie avec le milieu extérieur a cessé. L'existence d'un état d'équilibre thermodynamique impose notamment la valeur de certaines variables d'état :

- en présence d'une paroi mobile ou déformable, égalité des pressions P à l'intérieur et P_{ext} à la frontière extérieure du système (**équilibre mécanique**) ;
- en présence d'une paroi diatherme, égalité des températures T à l'intérieur et T_{ext} à l'extérieur du système (**équilibre thermique**).

L'équilibre mécanique est généralement atteint plus rapidement que l'équilibre thermique.

Hors équilibre, les grandeurs d'état ne sont pas forcément toutes définies.

■ Gaz parfait

❑ Hypothèses microscopiques du modèle du gaz parfait

À l'échelle microscopique, un gaz est considéré comme parfait quand on peut négliger les interactions entre ses molécules. En distinguant les interactions à courte et longue portée, on obtient le jeu d'hypothèses suivant :

- les particules n'ont pas de volume propre ;
- les particules n'ont pas d'interactions attractives entre elles.

❑ Théorie cinétique du gaz parfait monoatomique

Hypothèses sur la distribution moléculaire et la distribution des vitesses

- La densité moléculaire $n^* = N/V$ est homogène (N particules contenues dans le volume V).
- La distribution des vitesses est homogène et isotrope.

Pression cinétique

$\boxed{P = \frac{1}{3} n^* m u^2}$ où $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ est la **vitesse quadratique moyenne** des particules de masse m.

⇨ **Méthode 18.2. Établir l'expression de la pression cinétique**

Température cinétique

Elle est définie à partir de l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule :

$$\boxed{\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T}$$

d'où l'expression de la vitesse quadratique moyenne : $\boxed{u = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$

avec $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann, $\mathcal{N}_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ la constante d'Avogadro et $R = k_B \mathcal{N}_A = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

❑ Équation d'état

L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit $\boxed{PV = nRT}$. Elle découle directement de la relation $P = n^* k_B T$ obtenue dans le cadre de la théorie cinétique.

■ Autres corps

❑ Gaz réel

Pour de faibles valeurs de la pression P ou de la concentration n/V, le produit PV pour tout gaz réel tend vers la valeur prédite par l'équation des gaz parfaits : $\boxed{PV \xrightarrow[P \to 0 \text{ ou } n/V \to 0]{} nRT}$.

❑ Phase condensée

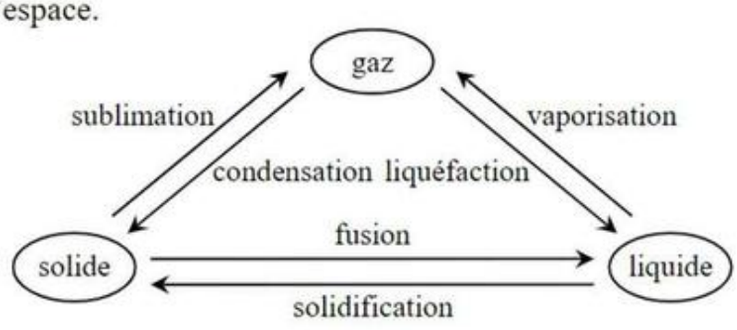
On désigne par **phase condensée** un liquide ou un solide. Dans le modèle de la phase condensée incompressible et indilatable, ou **phase condensée idéale**, leur équation d'état est : $\boxed{V = \text{cte}}$.

■ Corps pur diphasé

❑ Phases, transitions de phase et équilibre

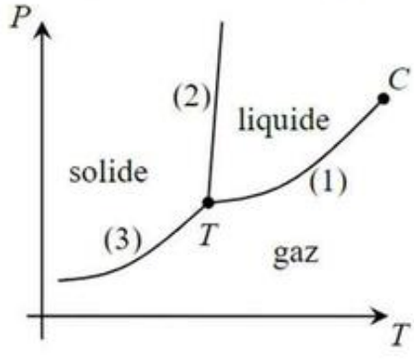
On appelle **phase** toute partie d'un système thermodynamique dans laquelle les paramètres intensifs sont des fonctions continues de l'espace.

Un corps pur peut se présenter sous différentes phases usuelles (on dit aussi *états*) : solide, liquide, gaz (ou vapeur). Quand il passe d'une phase à l'autre, il y a **transition de phase** (ou *changement de phase* ou encore *changement d'état*). Les transitions de phase usuelles ont un nom traditionnel.



❑ Description dans le diagramme d'équilibre (*P*, *T*)

Un corps pur en équilibre sous deux phases est un système monovariant (une seule variable intensive indépendante). Dans un diagramme (P,T), un tel équilibre correspond donc à une courbe $P = f(T)$. Les différentes courbes d'équilibre délimitent les domaines d'existence du corps pur sous l'une des phases liquide, solide ou gaz.



(1) est la **courbe de vaporisation** (équilibre liquide/gaz). La pression d'équilibre entre liquide et gaz à la température T est appelée **pression de vapeur saturante** $P = P_{sat}(T)$.

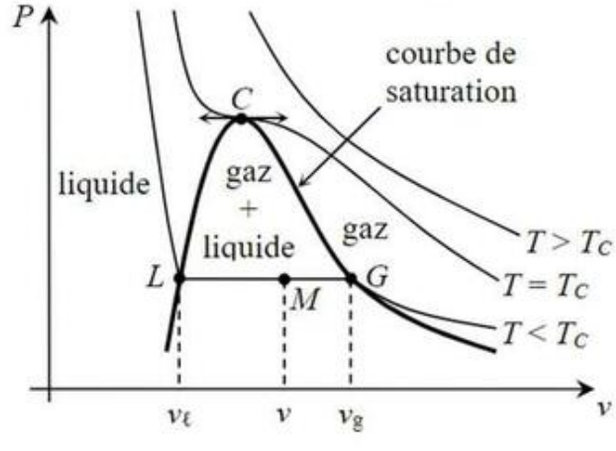
Cette courbe se termine au **point critique** C, au-delà duquel la distinction entre état gazeux et état liquide n'existe plus ; on parle alors de **fluide supercritique**.

(2) est la **courbe de fusion** (équilibre liquide/solide). Elle est quasi verticale, de pente positive pour la plupart des corps mais négative pour l'eau.

(3) est la **courbe de sublimation** (équilibre solide/gaz).

Le point d'intersection de ces trois courbes est le **point triple** T. En ce point, le corps pur est en équilibre sous ses trois phases, la pression et la température sont fixées (pour un corps donné).

❑ Description de l'équilibre liquide/gaz en diagramme (*P*, *v*)



Courbe de saturation

Elle comporte deux parties.

– La **courbe d'ébullition**, à gauche du point critique C, est l'ensemble des points L pour lesquels le liquide est saturant (apparition de la première bulle de gaz).

– La **courbe de rosée**, à droite du point critique C, est l'ensemble des points G pour lesquels le gaz est saturant (apparition de la première goutte de liquide).

Isothermes d'Andrews

– Une isotherme $T < T_C$ possède un *palier* dans la zone de coexistence liquide/gaz. En effet, à T fixée, la pression à l'équilibre liquide/gaz est égale à la pression de vapeur saturante $P = P_{sat}(T)$. Par ailleurs, la pente d'une isotherme dans la zone où le système est gazeux est beaucoup plus faible que celle dans la zone où le système est liquide : la compressibilité des gaz (variation de v sous l'effet d'une variation de P) est beaucoup plus élevée que celle des liquides.

– L'isotherme $T = T_C$, appelée isotherme critique, présente un point d'inflexion à tangente horizontale au point critique C.

– Une isotherme $T > T_C$ ne possède pas de palier, car il n'y a plus de transition liquide/gaz.

Titres massiques

Pour un état diphasé, on appelle $\boxed{x_g = \frac{m_g}{m}}$ le **titre massique en gaz** et $x_\ell = \frac{m_\ell}{m}$ le titre massique en liquide : ils vérifient $x_\ell + x_g = 1$. Dans l'état du système correspondant à un point M sur un palier isotherme (volume massique moyen v), les proportions en liquide et en gaz sont données par les relations de proportionnalité : $\boxed{x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{LM}{LG}}$ et $x_\ell = 1 - x_g = \frac{MG}{LG}$.

⇨ Méthode 18.3. Déterminer la composition d'un système pouvant être liquide et/ou gazeux

■■ Méthodes

■ Comment manipuler une équation d'état quelconque ?

❑ Méthode 18.1. Passer de l'équation d'état molaire à l'équation d'état extensive

Remplacer le volume molaire par son expression en fonction de V et n : $V_m = V/n$.
L'équation d'état obtenue est alors celle d'une quantité quelconque n de fluide.

⇨ Exercices 18.7, 18.8

Par exemple, pour un gaz réel dans le modèle de Dieterici : $P(V_m - b) = RT\exp\left(-\dfrac{a}{RTV_m}\right)$.

On remplace V_m par son expression en fonction de V et n : $P\left(\dfrac{V}{n} - b\right) = RT\exp\left(-\dfrac{a}{RTV/n}\right)$.

En reformulant, on obtient l'équation d'état pour une quantité de matière n quelconque :

$$P(V - nb) = nRT\exp\left(-\frac{na}{RTV}\right).$$

■ Comment modéliser la pression cinétique ?

❑ Méthode 18.2. Établir l'expression de la pression cinétique

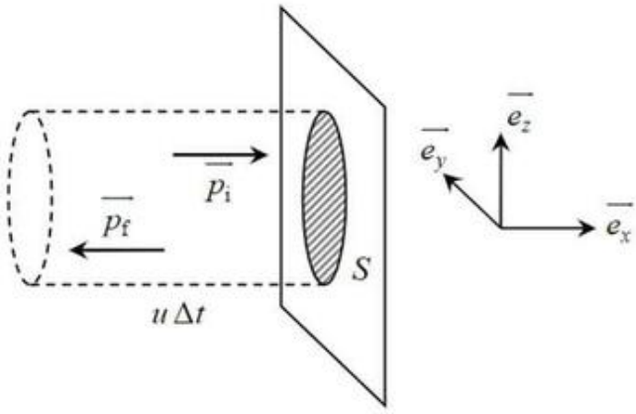
On cherche à établir la loi d'évolution de la pression cinétique $P \propto m n^* u^2$ où m est la masse des particules (identiques), n^* la densité moléculaire et u la vitesse quadratique moyenne.

- Déterminer la variation de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ d'une particule au cours d'un choc sur une paroi dans un modèle homocinétique unidirectionnel (selon $\vec{e_x}$).
- Exprimer la variation de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}(\Sigma)$ du système de particules heurtant une surface S de la paroi pendant un intervalle de temps Δt.
- Appliquer le PFD à la paroi et en déduire la pression qui s'exerce sur la paroi.

⇨ Exercice 18.5

- Variation de quantité de mouvement d'une particule au cours du choc :

$$\Delta\vec{p} = \vec{p_f} - \vec{p_i} = -mu\vec{e_x} - (mu\vec{e_x}) = -2mu\vec{e_x}$$



– Les particules qui viennent frapper la paroi pendant l'intervalle de temps Δt sont situées dans un cylindre de longueur $u\,\Delta t$ et d'aire de base S, contenant $n^* S u \Delta t$ particules. La distribution des vitesses étant isotrope, toutes ces particules ne se dirigent pas vers la paroi : seule une fraction $k n^* S u \Delta t$ avec $0 < k < 1$ vient effectivement heurter la paroi. La variation de quantité de mouvement de ce système Σ de molécules au cours du choc s'écrit donc :

$$\Delta\overline{p}(\Sigma) = k n^* S u \Delta t \times \left(-2mu\,\overline{e_x}\right) = -2k m n^* u^2 S \Delta t\,\overline{e_x}\,.$$

– On applique à Σ le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel lié à la paroi, supposé galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}\,\overline{p}(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overline{F}_{\text{paroi}\to\Sigma} = -\overline{F}_{\Sigma\to\text{paroi}} \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\overline{p}(\Sigma)}{\Delta t} = -P S\,\overline{e_x}\,.$

Par identification, on obtient l'expression de la pression $P = 2k m n^* u^2$, soit $\boxed{P \propto m n^* u^2}$.

Un calcul statistique exact fournirait $k = \dfrac{1}{6}$, d'où $\boxed{P = \dfrac{1}{3} m n^* u^2}$.

■ Comment raisonner dans le cas d'un système pouvant exister sous phase liquide ou gazeuse ?

❑ Méthode 18.3. Déterminer la composition d'un système pouvant être liquide ou gazeux

Quand on cherche à déterminer l'état final d'un corps pur à la fin d'une transformation, connaissant sa température finale, s'il est susceptible d'exister sous forme de gaz ou de liquide on peut faire trois hypothèses différentes.

– Si on suppose que toute la masse m du corps pur étudié est sous forme de gaz dans l'enceinte de volume V, on calcule alors la pression $P = \dfrac{mRT}{MV}$ dans l'hypothèse du gaz parfait. Cette hypothèse est la bonne si on trouve $P < P_{\text{sat}}(T)$: la pression calculée est alors effectivement celle du gaz. En revanche si on trouve $P > P_{\text{sat}}(T)$, ce qui est impossible, il faut changer d'hypothèse.

– Si on suppose que le système est diphasé (une partie de la masse sous forme de liquide, l'autre sous forme de gaz), alors automatiquement la pression du gaz est égale à $P_{\text{sat}}(T)$ à l'équilibre. On détermine alors la composition du système à l'équilibre en calculant le titre massique en gaz x_g avec la relation de proportionnalité sur le palier de changement d'état : $x_g = \dfrac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell}$. Cette hypothèse est la bonne si on trouve $0 < x_g < 1$.

– Si aucune des deux hypothèses précédentes ne convient, c'est que le corps pur est sous forme entièrement liquide. Alors la pression est $P > P_{\text{sat}}(T)$, mais généralement on ne dispose pas d'une équation d'état pour la calculer.

⇨ **Exercices 18.10, 18.11**

Une enceinte indéformable de volume $V = 10{,}0\ \text{L}$ est maintenue à la température constante $T_0 = 353\ \text{K}$ (80 °C). On y introduit une masse $m = 1{,}00\ \text{g}$ d'eau liquide à la température $T_0 = 353\ \text{K}$. La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait. On donne : $P_{\text{sat}}(353\ \text{K}) = 0{,}447$ bar la pression de vapeur saturante de l'eau à T_0, $R = 8{,}31\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et $M = 18{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'eau. Sous quelle forme et dans quelles proportions l'eau liquide initialement introduite dans l'enceinte se trouve-t-elle à l'équilibre final ? Déterminer également la pression finale si l'enceinte est initialement vide.

En supposant que l'eau liquide a été totalement vaporisée, on a $P = \dfrac{mRT}{MV}$.

AN $P = 0{,}163$ bar. Comme $P_{\text{eau}} < P_{\text{sat}}(353\ \text{K})$, l'hypothèse est correcte : à l'équilibre final, l'enceinte contient $m = 1{,}00\ \text{g}$ de vapeur d'eau à $T_0 = 353\ \text{K}$, et la pression P est $\boxed{P = 0{,}163\ \text{bar}}$.

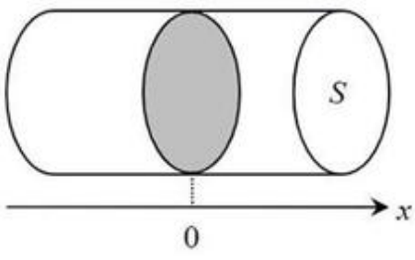
■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Un système fermé n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.	☐	☐
2.	Un système fermé n'échange pas de matière.	☐	☐
3.	La densité moléculaire est une grandeur intensive.	☐	☐
4.	La pression cinétique est proportionnelle à la masse, donc elle est extensive.	☐	☐
5.	Les gaz réels suivent le modèle du gaz parfait aux très faibles pressions.	☐	☐
6.	Dans un diagramme (P,T), la pente de la courbe de fusion est toujours positive.	☐	☐
7.	Dans un diagramme (P,T), la pente de la courbe de vaporisation est toujours positive.	☐	☐
8.	La pression de vapeur saturante dépend uniquement de la température et du corps considéré.	☐	☐
9.	Un changement d'état a lieu à température et pression constante.	☐	☐
10.	À une température donnée, le gaz ne peut exister seul que pour une pression inférieure à la pression de vapeur saturante.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Gaz parfait

❑ Exercice 18.1. Enceinte à deux compartiments



On place dans les deux compartiments d'une enceinte la même quantité n de deux gaz parfaits monoatomiques identiques. Ces deux compartiments sont séparés par un piston mobile de section $S = 200\ \text{cm}^2$. Initialement, les deux gaz ont même température $T_0 = 300\ \text{K}$, même volume $V_0 = 10{,}0\ \text{L}$ et même pression $P_0 = 10{,}0\ \text{bar}$, et le piston est au centre de l'enceinte, à l'abscisse $x = 0$.

1. Calculer la quantité de matière n de gaz dans chacun des compartiments.
2. On élève la température du gaz du compartiment de gauche jusqu'à $T_F = 350\ \text{K}$, tout en maintenant la température du compartiment de droite à T_0. Calculer l'abscisse x du piston une fois le nouvel état d'équilibre atteint.

❑ Exercice 18.2. Enceinte verticale à deux compartiments*

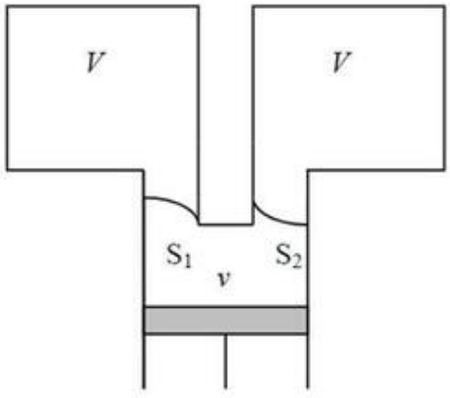
Un cylindre vertical, de section S, fermé aux deux bouts, est séparé en deux compartiments égaux étanches par un piston sans frottements, de forme cylindrique, et homogène (masse surfacique $\sigma = 136\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$). Chaque compartiment, de hauteur $h = 0{,}50\ \text{m}$, contient un gaz parfait à $T_0 = 273\ \text{K}$; la pression dans le compartiment inférieur est $P_1 = 1{,}33\ \text{bar}$. L'intensité de la pesanteur est $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Déterminer la pression P_2 dans le compartiment supérieur.
2. On chauffe l'ensemble du système à $T = 373\ \text{K}$. Déterminer le déplacement x du piston.
3. À partir de la situation initiale, on retourne maintenant le cylindre de bas en haut, la température restant égale à T_0. Déterminer le déplacement x' du piston.

(Pour ces deux questions, on établira littéralement l'équation du second degré donnant x ou x', mais on pourra la résoudre directement avec les valeurs numériques.)

❑ Exercice 18.3. Étude d'une pompe*

Deux réservoirs, de même volume V, sont mis en communication par une pompe dont le cylindre a un volume maximal v. À l'instant initial, les deux réservoirs contiennent deux gaz parfaits identiques à la même pression P_0 et à la même température T_0. Le piston est initialement en position haute, de telle sorte que le volume du cylindre est nul au début de l'expérience.
À la descente du piston, la soupape S_1 est ouverte et la soupape S_2 est fermée. À la remontée du piston, la soupape S_1 est fermée et la soupape S_2 est ouverte.



On note P_n^{g} et P_n^{d} les pressions respectivement dans le réservoir de gauche et le réservoir de droite après n aller-retours du piston, depuis sa position haute initiale. On suppose que toutes les transformations s'effectuent de manière isotherme, et que le système constitué par le gaz contenu dans les deux réservoirs et le cylindre est fermé.

1. En utilisant une loi de conservation, établir une relation entre P_n^{g}, P_n^{d} et P_0.

2. Quelle est la relation entre P_{n-1}^{g} et P_n^{g} ? En déduire les expressions de P_n^{g} puis de P_n^{d} en fonction de P_0, V et v.

D'après oral Centrale-Supélec

❑ Exercice 18.4. Stabilité de l'atmosphère terrestre

1. Calculer la vitesse de libération v_ℓ à la surface de la Terre, c'est-à-dire la vitesse minimale à communiquer à un objet pour qu'il échappe définitivement à l'attraction gravitationnelle.

2. Calculer la vitesse quadratique moyenne u pour le dihydrogène, le diazote et le dioxygène, pour une température $T = 300\ \mathrm{K}$. Commenter le résultat obtenu en admettant que des molécules peuvent s'échapper dans l'espace si la vitesse quadratique moyenne atteint le dixième de la vitesse de libération.

3. Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température à la surface de la Terre pour que les molécules de diazote puissent échapper à l'attraction terrestre ?

Données : masse de la Terre $M_{\mathrm{T}} = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$; constante de gravitation universelle $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$; constante des gaz parfaits $R = 8{,}3\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$; masses molaires $M_{\mathrm{H_2}} = 2{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, $M_{\mathrm{N_2}} = 28\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, $M_{\mathrm{O_2}} = 32\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

❑ Exercice 18.5. Effusion gazeuse*

Un récipient est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T. Initialement, une certaine quantité d'un gaz parfait remplit le compartiment (1) et le compartiment (2) est vide. À l'instant $t = 0$, on perce un petit trou de section s entre les deux compartiments. On étudie alors le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2), phénomène appelé *effusion gazeuse*. On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres de molécules respectivement dans les compartiments (1) et (2). Soit $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ un trièdre cartésien dans lequel $\overrightarrow{e_x}$ est le vecteur unitaire normal au trou dirigé du compartiment (1) vers le compartiment (2).

On adopte pour le gaz parfait le modèle cinétique suivant :

– la norme v de la vitesse de toutes les molécules est identique et égale à la vitesse quadratique moyenne u ;

– partout dans le gaz, les vecteurs vitesses des molécules sont parallèles à l'une des six directions définies par $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$, $-\overrightarrow{e_x}$, $-\overrightarrow{e_y}$, $-\overrightarrow{e_z}$, avec un sixième des molécules dans chacune de ces six directions.

1. **a)** Établir l'expression du nombre $\delta N_{1\to 2}$ de molécules contenues dans le compartiment (1) à l'instant t et traversant la surface s vers le compartiment (2) entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

b) Établir de même l'expression du nombre $\delta N_{2\to 1}$ de molécules contenues dans le compartiment (2) à l'instant t et traversant la surface s vers le compartiment (1) entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.

2. En déduire les expressions de $\mathrm{d}N_1/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}N_2/\mathrm{d}t$ en fonction de N_1, N_2, s, u et V.

3. Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$. On fera apparaître une constante de temps τ caractéristique du phénomène observé.

4. Comment varie τ avec la masse des molécules ? À quoi un tel dispositif peut-il servir ?

❑ Exercice 18.6. Distribution de Maxwell–Boltzmann * *

Un gaz parfait, en équilibre thermique dans une enceinte à la température T est constitué de N molécules de masse m. Les chocs moléculaires se traduisent par une répartition aléatoire des vitesses des molécules suivant la distribution de MAXWELL–BOLTZMANN. Ainsi, le nombre de molécules de l'enceinte dont le module de la vitesse est compris entre v et $v+\mathrm{d}v$ est donné par : $\mathrm{d}N_v = N\left(\dfrac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)4\pi v^2\,\mathrm{d}v = N f(v)\,\mathrm{d}v$.

1. Que représente la quantité $f(v)\,\mathrm{d}v$? Donner l'allure de la fonction $f(v)$.

2. Calculer la vitesse moyenne $\langle v\rangle$ et la vitesse quadratique moyenne u d'une molécule de ce gaz, en fonction de k_B (constante de Boltzmann), T et m, puis en fonction de R (constante des gaz parfaits), T et M (masse molaire). On rappelle que $R = k_\mathrm{B}\mathscr{N}_\mathrm{A}$ avec $\mathscr{N}_\mathrm{A}$ la constante d'Avogadro, et on donne : $I_k = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^k\,\mathrm{d}x$, $I_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$, $I_1 = \dfrac{1}{2\alpha}$, $I_k = \dfrac{k-1}{2\alpha}I_{k-2}$.

3. Donner les valeurs numériques de $\langle v\rangle$ et u pour le diazote à $T = 273\,\mathrm{K}$, sachant que $M(N) = 14{,}0\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $R = 8{,}31\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$. Commenter.

4. Déduire de ce qui précède l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'une molécule en fonction de k_B et T.

5. En utilisant la loi des gaz parfaits, montrer que la pression est donnée par : $P = \dfrac{1}{3}n^* m\,u^2$ avec n^* la densité moléculaire.

6. Le trajet en ligne droite effectué par une molécule de gaz entre deux chocs s'appelle le libre parcours moyen. Il est donné par la relation suivante : $\ell_\mathrm{p} = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2}\sigma^2 n^*}$

où σ est le diamètre des molécules. Pour le diazote, on donne $\sigma = 3{,}77\cdot 10^{-10}$ m.

Exprimer ℓ_p en fonction des variables P et T. Calculer ℓ_p pour du diazote lorsque $T = 273$ K et $P = 1{,}00\cdot 10^5$ Pa. Que devient cette valeur si la pression est réduite d'un facteur 10^8 ? Pourquoi dit-on qu'à très basse pression, les phénomènes de paroi sont prépondérants ?

D'après CCINP

■ Gaz réels

❑ Exercice 18.7. Comportement d'un gaz réel

1. Donner l'équation d'état d'un gaz parfait. Quelles sont les deux hypothèses qui définissent, au niveau microscopique, un gaz parfait ?

2. L'argon est un gaz noble qui peut être modélisé, aux faibles pressions, par l'équation d'état molaire : $P(V_m - b) = RT$ où R est la constante des gaz parfaits, et b une constante positive caractéristique de ce gaz.

a) Écrire cette équation d'état pour une quantité de matière n quelconque.

b) Quelle est l'hypothèse du gaz parfait qui reste valable pour ce gaz, et quelle est celle qui ne l'est plus ?

c) Tracer l'allure de quelques courbes isothermes (ensembles de points pour une valeur de T fixée) en coordonnées d'Amagat, c'est-à-dire $y = PV$ en fonction de P. Si on obtient de telles isothermes expérimentalement, comment en déduire la valeur de b ?

d) Déterminer la limite du produit PV quand P tend vers 0 et commenter le résultat obtenu.

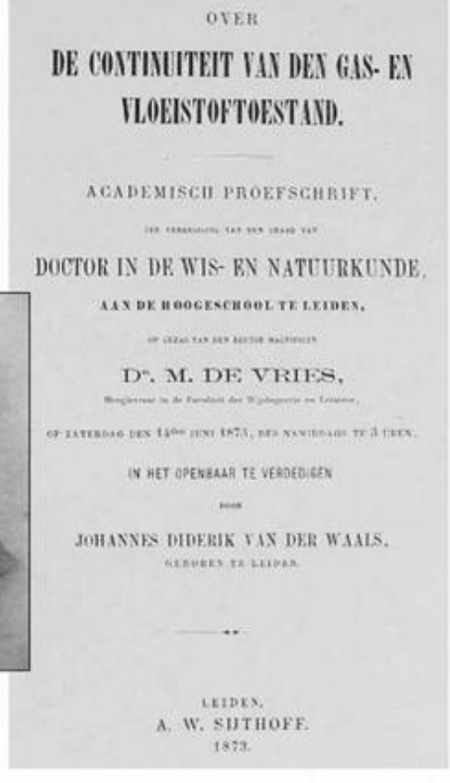
❑ Exercice 18.8. Étude d'un gaz réel de Van der Waals*

Johannes Diderik VAN DER WAALS a proposé dans sa thèse de doctorat, en 1873, l'équation d'état molaire suivante pour un gaz réel :

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

où $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et a et b des constantes positives caractéristiques de ce gaz.





OVER

DE CONTINUITEIT VAN DEN GAS- EN VLOEISTOFTOESTAND.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

Dr. M. DE VRIES,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

JOHANNES DIDERIK VAN DER WAALS,

LEIDEN,
A. W. SIJTHOFF.
1873.

1. Donner l'équation d'état correspondante pour une quantité quelconque (n moles).

2. Laquelle des deux constantes a ou b est-elle associée à l'existence d'un volume propre pour les molécules ? Quelle autre hypothèse constitutive du modèle du gaz parfait est mise en défaut par la présence de l'autre constante ?

3. Montrer que dans l'approximation $\frac{b}{V_m} \ll 1$ des volumes élevés, on a $PV_m = RT\left(1 + \frac{A(T)}{V_m}\right)$ avec $A(T)$ une fonction qu'on exprimera en fonction des données du problème.

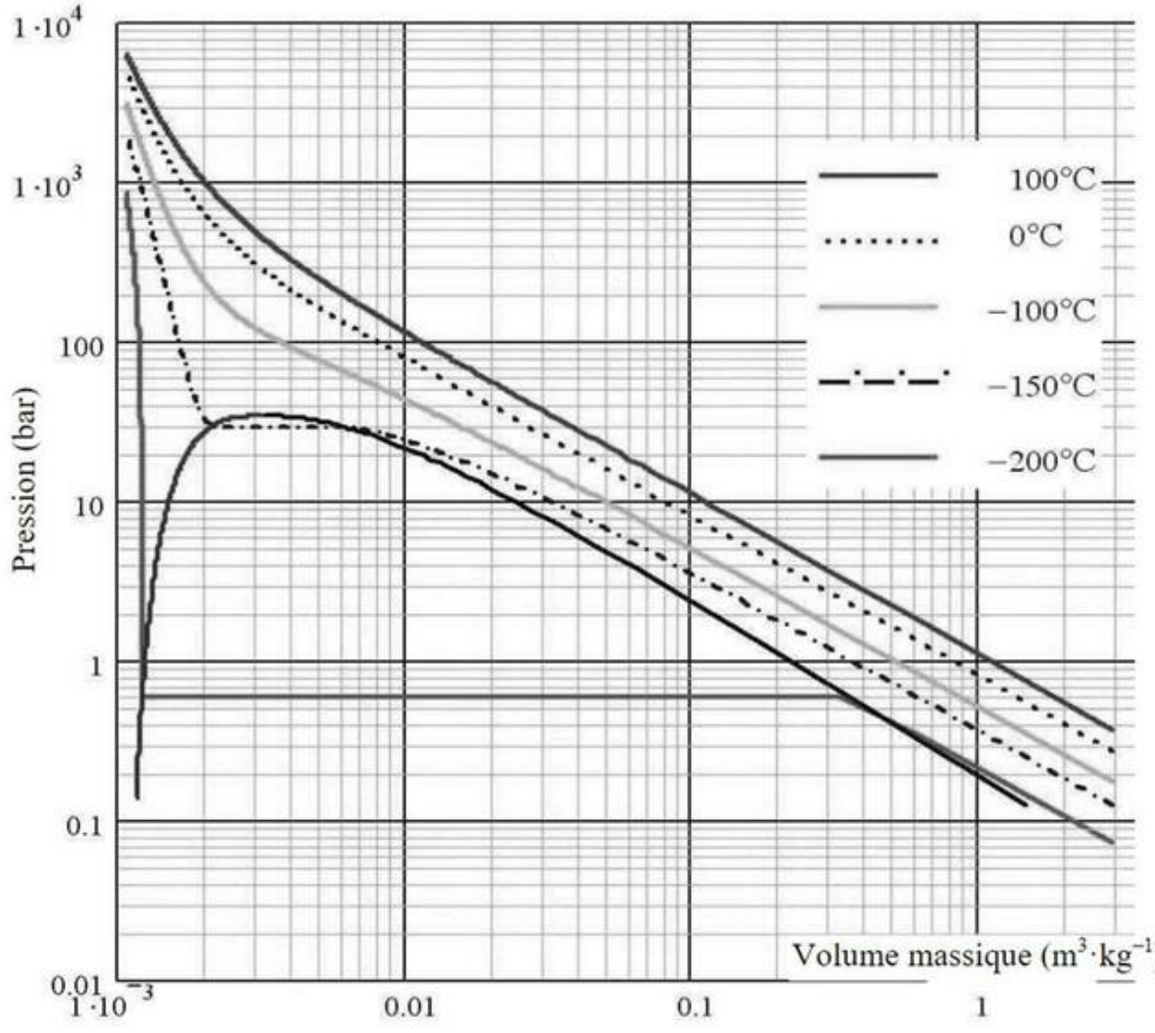
On pourra utiliser la relation approchée $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ pour $x \ll 1$.

4. Dans le cadre de l'approximation de la question précédente, montrer qu'il existe une température T_M (température de Mariotte) pour laquelle ce gaz se comporte comme un gaz parfait. Calculer T_M pour le diazote, avec $a = 0{,}137\ \text{J}\cdot\text{m}^3\cdot\text{mol}^{-2}$ et $b = 3{,}87\cdot10^{-5}\ \text{m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$.

■ Corps pur diphasé

❑ Exercice 18.9. Diazote liquide ou gazeux

On donne ci-dessous le diagramme de Clapeyron (P,v) liquide/vapeur pour le diazote (N_2) : il comporte la courbe de saturation et cinq isothermes. Les échelles sur les deux axes sont logarithmiques (voir comment les graduations se resserrent vers la droite et vers le haut).



1. Évaluer d'après ce diagramme la pression et la température du point critique du diazote.

2. Sous quelle phase se trouve le diazote en équilibre à la pression $P = 1$ bar et à la température $\theta = 0\ °\text{C}$? Évaluer alors graphiquement son volume massique, et comparer à celui donné par l'équation d'état du gaz parfait. Que peut-on en conclure ?
On donne $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et la masse molaire $M(\text{N}_2) = 28\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

On stocke couramment, pour des applications médicales par exemple, du diazote liquide dans un type de récipient appelé *vase Dewar*. Ses parois sont suffisamment calorifugées pour que le diazote puisse s'y maintenir longtemps à une température très inférieure à la température ambiante. En revanche, un petit orifice maintient l'intérieur du récipient à la même pression que l'extérieur, soit généralement $P = 1$ bar.



3. Évaluer la température du diazote à l'intérieur du récipient, où il se trouve à l'état diphasé.

4. Une masse $m = 750$ g de diazote est stockée dans ce récipient, de volume $V = 6{,}0$ L. Déterminer les proportions en masse des deux phases liquide et gazeuse.

5. La notice commerciale de ce vase Dewar indique une diminution du stock de diazote liquide de « 0,12 L par jour » dans des conditions ordinaires. Quel phénomène se produit exactement ? De combien diminue ainsi la masse du récipient chaque jour de stockage ?

❑ Exercice 18.10. Transformations de masses d'eau

1. De la vapeur d'eau sèche, assimilée à un gaz parfait, se trouve à 300 °C sous une pression de 10,0 bar ; on la refroidit à volume constant jusqu'à 150 °C.

a) Sur un schéma en coordonnées de Clapeyron, tracer l'allure de la courbe de saturation et les deux isothermes 150 °C et 300 °C, puis représenter la transformation (il faudra envisager deux possibilités).

b) Déterminer l'état final (composition et pression).

2. On prend maintenant 0,10 m^3 d'eau liquide et 0,90 m^3 de vapeur d'eau en équilibre sous une pression de 4,76 bar. Un transfert thermique isobare porte la température à 200 °C.

a) Quelle est la masse totale du mélange ?

b) Représenter la transformation dans le diagramme de Clapeyron précédent, et déterminer le volume final.

Données

Pour l'eau : masse molaire $M = 18{,}0$ g·mol^{-1} ; à 150 °C, la pression de vapeur saturante est $P_s = 4{,}76$ bar, et les volumes massiques sont $v_\ell = 1{,}09 \cdot 10^{-3}$ $m^3 \cdot kg^{-1}$ pour le liquide et $v_v = 0{,}393$ $m^3 \cdot kg^{-1}$ pour la vapeur.

La constante des gaz parfaits est $R = 8{,}314$ J·K^{-1}·mol^{-1}.

❑ Exercice 18.11. Stockage dans un ballon d'eau chaude

On souhaite stocker une masse m d'eau dans un ballon d'eau chaude modélisé par un récipient fermé et indéformable de volume $V_0 = 200\,\text{L}$. Pour simplifier, on suppose qu'il ne contient que de l'eau (pas d'air). Suite à un échauffement accidentel, l'eau maintenue initialement à $T_0 = 333\,\text{K}$ (soit $\theta_0 = 60\,°\text{C}$) passe à la température $T = 647\,\text{K}$ (soit $\theta = 374\,°\text{C}$). La masse molaire de l'eau est $M = 18{,}0\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, la constante des gaz parfaits est $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

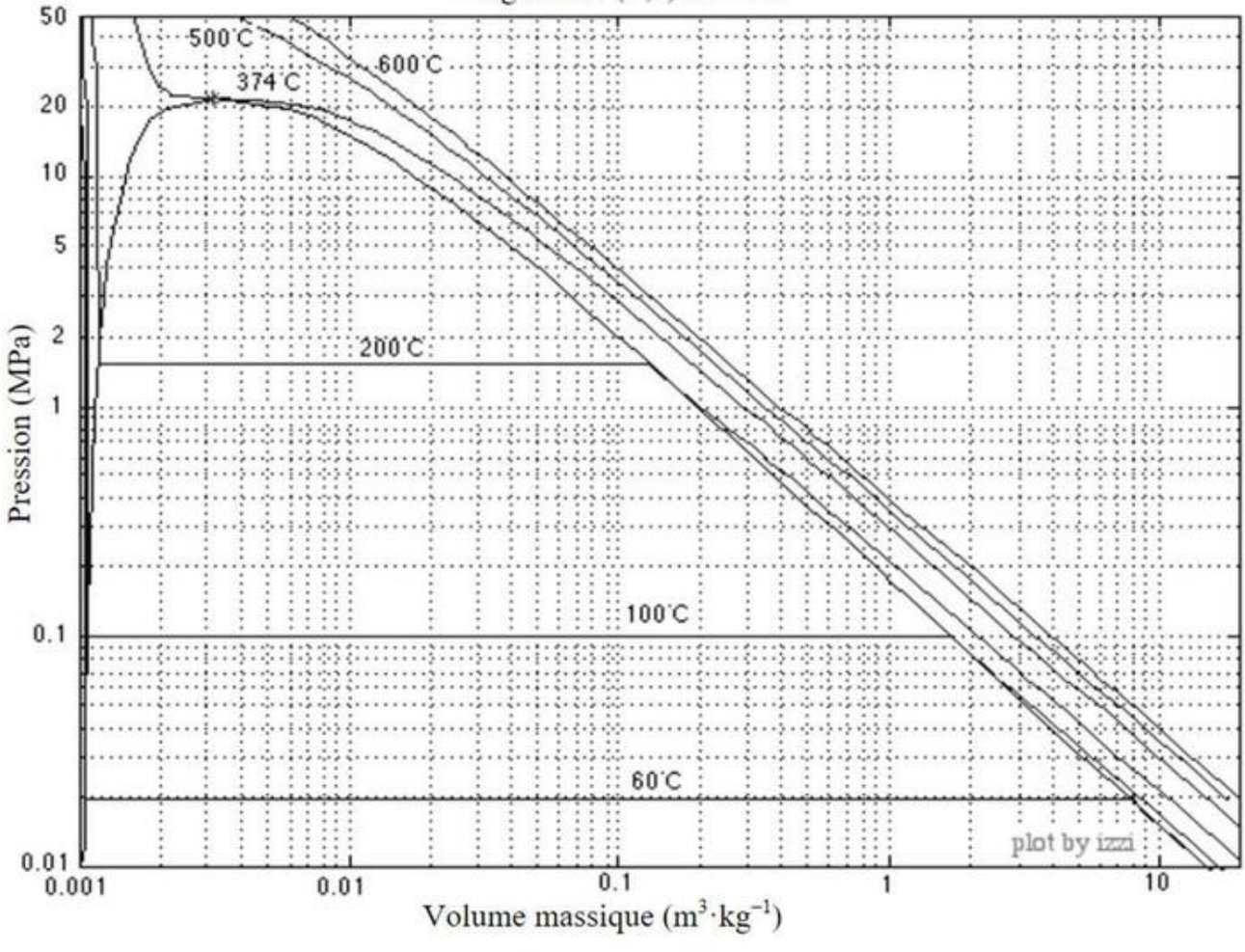
1. On suppose dans un premier temps que le ballon est presque vide et contient seulement une masse $m = m_1 = 400\,\text{g}$ d'eau.

a) En utilisant le diagramme de Clapeyron (P,v) fourni (en échelles logarithmiques, voir page suivante), déterminer la composition du mélange liquide-gaz dans le ballon à T_0.

b) Sous quelle forme trouve-t-on l'eau après l'échauffement accidentel ? Lire la pression P_1 correspondante sur le diagramme. Retrouver cette pression P_1 par un calcul et commenter la pertinence du modèle utilisé.

2. On suppose maintenant que le ballon contient une masse importante d'eau : $m = m_2 = 100\,\text{kg}$. Déterminer la composition du mélange avant échauffement puis la nouvelle pression P_2 à l'issue de l'échauffement. Conclusion ?

Diagramme (P,v) de l'eau



■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 18.1. Traduire la condition d'équilibre en une relation entre les pressions dans les deux compartiments.
Exercice 18.2. À la question 1, écrire l'équilibre mécanique du piston. Pour la suite, attention : la quantité de matière n'est pas la même en haut et en bas.
Exercice 18.5. À la question 3, penser à utiliser la conservation du nombre total de molécules (enceinte fermée).
Exercice 18.6. Raisonner en termes de probabilités.
Exercice 18.11. Déterminer dans chaque cas le volume massique, et placer le point correspondant à l'état initial sur le graphe.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai

1. Un système fermé n'échange pas de matière mais peut échanger de l'énergie avec l'extérieur.

3. C'est le rapport de deux grandeurs extensives : la quantité de matière sur le volume.

4. Elle n'est pas proportionnelle à la masse *du système* (extensive) mais à la masse *de chaque molécule* (intensive, car elle ne dépend pas de l'étendue du système).

6. Pour l'eau et quelques autres corps, la pente de la courbe de fusion est négative.

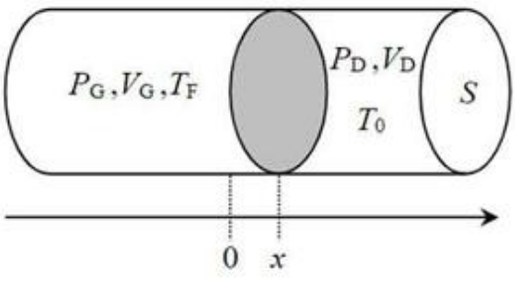
9. Ce n'est pas forcément le cas. En revanche, *si* on fixe la valeur d'un des deux paramètres intensifs, pression ou température, alors l'autre prend une valeur bien déterminée tout au long de l'équilibre de changement d'état (équilibre monovariant).

❑ Les erreurs classiques

– Attention à bien utiliser la température absolue T (en kelvins) dans les formules, et non la « température Celsius » qui est une grandeur différente θ (ce n'est pas un simple changement d'unité).
– Les erreurs sont fréquentes dans les calculs numériques où on doit multiplier différentes grandeurs, parce que les unités SI ne sont pas les unités les plus usuelles : les pressions doivent être exprimées en pascals (et non en bars), les volumes en mètres cubes (et non en litres), les masses en kilogrammes (et non en grammes)…

Corrigé des exercices

Exercice 18.1



1. Utilisons l'équation d'état du gaz parfait : $\boxed{n = \dfrac{P_0 V_0}{R T_0}}$.

AN $n = \dfrac{10 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \times 300}$ soit $\boxed{n = 4{,}01 \text{ mol}}$.

2. Supposons que le chauffage du compartiment de gauche provoque un déplacement du piston vers la droite d'abscisse x : $V_G = V_0 + Sx$ et $V_D = V_0 - Sx$.

Loi des gaz parfait des les deux compartiments : $P_G (V_0 + Sx) = nRT_F$ et $P_D (V_0 - Sx) = nRT_0$.

Équilibre mécanique : $P_G = P_D$ d'où $\boxed{x = \dfrac{V_0}{S} \dfrac{T_F - T_0}{T_F + T_0}}$. AN $x = \dfrac{10 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-4}} \dfrac{350 - 300}{350 + 300}$ soit $\boxed{x = 3{,}85 \text{ cm}}$.

Exercice 18.2

1. Le piston est soumis à son poids et aux forces de pression des deux compartiments.

PFD à l'équilibre : $\vec{P} + \overrightarrow{F_{p1}} + \overrightarrow{F_{p2}} = \vec{0}$. Projection sur $\vec{e_x}$ (ascendant) : $-\sigma S g + P_1 S - P_2 S = 0$ d'où $\boxed{P_2 = P_1 - \sigma g}$. AN $\boxed{P_2 = 1{,}20 \text{ bar}}$.

2. À l'état initial et à l'état final : $P_2 = P_1 - \sigma g$; $P_2' = P_1' - \sigma g$. Conservation de la matière dans chaque compartiment : $\dfrac{P_1' S (h + x)}{RT} = \dfrac{P_1 S h}{RT_0}$; $\dfrac{P_2' S (h - x)}{RT} = \dfrac{P_2 S h}{RT_0}$. En combinant ces équations on obtient $P_2 \dfrac{T}{T_0} \dfrac{h}{h - x} = P_1 \dfrac{T}{T_0} \dfrac{h}{h + x} - \sigma g$. On multiplie par $T_0 (h - x)(h + x)$:

$P_2 T h (h + x) - P_1 T h (h - x) + \sigma g T_0 (h^2 - x^2) = 0$ d'où finalement l'équation du second degré : $\boxed{\sigma g T_0 x^2 - (P_1 + P_2) T h x + \sigma g (T - T_0) h^2 = 0}$. Solutions : $x = 13 \text{ m}$ (impossible) ou $\boxed{x = 7{,}1 \text{ mm}}$.

3. Maintenant $P_2' = P_1' + \sigma g$; $P_1' S (h - x') = P_1 S h$; $P_2' S (h + x') = P_2 S h$ (et toujours $P_2 = P_1 - \sigma g$) d'où l'équation du second degré : $\boxed{\sigma g x'^2 - (P_1 + P_2) h x' - 2 \sigma g h^2 = 0}$. Solutions : $x' = 9{,}5 \text{ m}$ (impossible) ou $\boxed{x' = -5{,}2 \text{ cm}}$.

Exercice 18.3

1. Soient n_0 la quantité de matière initiale, n_g et n_d les quantités de matière respectivement dans le réservoir de gauche et le réservoir de droite. Conservation de la matière pour le système fermé constitué par le gaz contenu dans les deux réservoirs après n coups de piston :

$n_0 = n_g + n_d$. La transformation étant isotherme, la température du système est constante, d'où, d'après la loi des gaz parfaits : $P_0 \cdot 2V = P_n^g \cdot V + P_n^d \cdot V$ soit $\boxed{2P_0 = P_n^g + P_n^d}$.

2. Après $n-1$ coups de piston, le piston est en position haute et la pression dans le réservoir de gauche vaut P_{n-1}^g. La première moitié du n-ième coup de piston correspond à une descente de celui-ci avec S_1 ouverte et S_2 fermée. La quantité de matière contenu dans le réservoir de gauche à l'issu du $(n-1)$-ième coup de piston passe donc de manière isotherme d'un volume V à un volume $V+v$, d'où $\boxed{P_{n-1}^g V = P_n^g (V+v)}$. Par récurrence, on obtient $\boxed{P_n^g = P_0 \left(\frac{V}{V+v}\right)^n}$. En utilisant les résultats de la question 1., on en déduit $\boxed{P_n^d = P_0 \left[2 - \left(\frac{V}{V+v}\right)^n\right]}$.

P_n^g décroît avec n alors que P_n^d croît avec n. On retrouve bien le résultat que laissait entrevoir l'étude du fonctionnement des soupapes et du piston : le gaz contenu dans le réservoir de gauche est transféré par la pompe dans le réservoir de droite.

Exercice 18.4

1. La vitesse de libération v_ℓ correspond à la vitesse initiale minimale à communiquer à un point à la surface de la Terre pour qu'il échappe définitivement à l'attraction terrestre. Par conservation de l'énergie mécanique, on peut écrire $\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GmM_T}{r_\infty} = 0$ d'où $\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$. AN $\boxed{v_\ell = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$.

2. Vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait diatomique : $\boxed{u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$ avec M la masse molaire du gaz considéré. Pour le dihydrogène $\boxed{u_{H_2} = 2{,}5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$, pour le diazote $\boxed{u_{N_2} = 0{,}67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$ et pour le dioxygène $\boxed{u_{O_2} = 0{,}62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$. On constate que $u_{H_2} > v_\ell / 10$ alors que $u_{N_2}, u_{O_2} < v_\ell / 10$: à température ambiante, les molécules de dihydrogène peuvent échapper à l'attraction terrestre alors que les molécules de diazote et de dioxygène restent piégées. Le résultat obtenu est conforme à la composition de l'air dans la troposphère : 1/5 de dioxygène, 4/5 de diazote, et du dihydrogène sous forme de traces uniquement.

Le critère consistant à comparer la vitesse quadratique moyenne au 1/10 de la vitesse de libération, et non pas simplement à la vitesse de libération, peut sembler curieux au premier abord. Toutefois, nous verrons dans l'exercice 18.6 que la vitesse quadratique moyenne n'est pas la vitesse de toutes les molécules, celle-ci obéissant à une loi de distribution. Ajoutons que la probabilité qu'une molécule dépasse la vitesse de libération est d'autant plus élevée que la vitesse quadratique moyenne est proche de la vitesse de libération.

3. Les molécules de diazote pourraient échapper à l'attraction terrestre si $u_{N_2} > v_\ell / 10$ soit $\boxed{T > T_0 = \dfrac{Mv_\ell^2}{500R}}$. AN $\boxed{T_0 = 815\ \text{K}}$, température de l'atmosphère (heureusement) impossible à la surface de la Terre.

Exercice 18.5

1. a) Les particules contenues dans le compartiment (1) à l'instant t, et traversant la surface s vers le compartiment (2) entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, doivent vérifier les conditions suivantes : (i) être contenues à l'instant t dans le cylindre de section orientée $s\overrightarrow{e_x}$ et de hauteur $u\,\mathrm{d}t$ selon $\overrightarrow{e_x}$; (ii) avoir un vecteur vitesse dirigée selon $+\overrightarrow{e_x}$ (soit un sixième seulement des particules du cylindre précédent). En introduisant la densité moléculaire N_1/V dans le compartiment (1), on en déduit $\boxed{\delta N_{1\to 2} = \dfrac{1}{6}\dfrac{N_1}{V} su\,\mathrm{d}t}$.

⇨ *Méthode 18.2*

b) De manière analogue, on obtient : $\boxed{\delta N_{2\to 1} = \dfrac{1}{6}\dfrac{N_2}{V} su\,\mathrm{d}t}$.

2. En comptant positivement les molécules qui entrent dans le compartiment (1) et négativement les particules qui en sortent, un bilan de matière entre t et $t+\mathrm{d}t$ donne :

$N_1(t+\mathrm{d}t) - N_1(t) = -\delta N_{1\to 2} + \delta N_{2\to 1}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\delta N_{1\to 2} + \delta N_{2\to 1} = \dfrac{1}{6}\dfrac{su}{V}(N_2 - N_1)\mathrm{d}t$.

En simplifiant par $\mathrm{d}t$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{6}\dfrac{su}{V}(N_2 - N_1)}$. De même : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{6}\dfrac{su}{V}(N_2 - N_1)}$.

3. Conservation de la matière pour le système fermé constitué par le gaz contenu dans les deux compartiments : $N_0 = N_1 + N_2$ (avec $N_0 = \mathcal{N}_\text{A}$). En utilisant les résultats de la question précédente : $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{6}\dfrac{su}{V}(N_0 - 2N_1)$ soit $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{N_1}{\tau} = \dfrac{N_0}{2\tau}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{3V}{su}}$ constante de temps. La solution de l'équation différentielle est $N_1(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{N_0}{2}$ avec A une constante à déterminer.

À $t = 0$, $N_1(0) = N_0$ d'où $A = \dfrac{N_0}{2}$.

Finalement, $\boxed{N_1(t) = \dfrac{N_0}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$ et $\boxed{N_2(t) = N_0 - N_1(t) = \dfrac{N_0}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

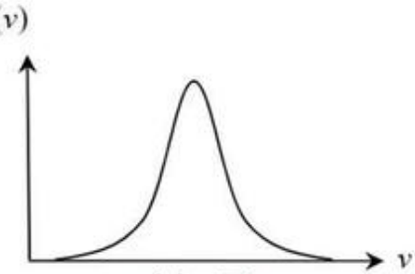
Pour $t \to \infty$, $N_1 \to \dfrac{N_0}{2}$ et $N_2 \to \dfrac{N_0}{2}$. À l'état final, la densité moléculaire est uniforme : un état d'équilibre thermodynamique interne a été atteint.

4. La vitesse quadratique moyenne est proportionnelle à $1/\sqrt{m}$ donc τ est proportionnelle à $\sqrt{m}$. Le dispositif étudié peut être utilisé pour réaliser une séparation isotopique. Par exemple,

l'hydrogène H possède un isotope utilisé pour réaliser la fusion thermonucléaire, le deutérium D dont le noyau est constitué d'un proton et d'un neutron. Alors le dideutérium D_2, deux fois plus lourd que le dihydrogène H_2 possède une constante de temps $\sqrt{2}$ fois plus élevée. En partant d'un mélange des deux gaz dans le compartiment (1), le dihydrogène passera plus vite dans le compartiment (2) que le dideutérium D_2. En obturant le trou bien avant que l'équilibre soit atteint et en répétant l'opération un grand nombre de fois, on peut séparer par ce processus les deux gaz initialement mélangés.

Exercice 18.6

1. $f(v)\,\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}N_v}{N}$ est la probabilité qu'une molécule ait le module de sa vitesse compris entre v et $v + \mathrm{d}v$. La fonction $f(v)$ tend vers 0 pour $v \to 0$ et $v \to \infty$. Comme elle est toujours positive, elle passe par un maximum pour une certaine valeur de v (vitesse la plus probable).



2. Pour une distribution discrète de vitesses v_i de probabilités P_i, on aurait $\langle v \rangle = \sum_i P_i v_i$. Avec la distribution continue étudiée ici, cette dernière formule devient $\langle v \rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}P(v)\,v$, soit $\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v)\,\mathrm{d}v$. De même, on a pour expression de la vitesse quadratique moyenne : $u = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)\,\mathrm{d}v}$. On injecte la distribution $f(v)$ dans l'intégrale :

$$\langle v \rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\alpha v^2\right)\mathrm{d}v \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{m}{2k_B T}$$

donc $\langle v \rangle = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} I_3 = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \dfrac{I_1}{\alpha} = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \dfrac{1}{2\alpha^2} = \sqrt{\dfrac{4}{\pi\alpha}}$ soit $\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8k_B T}{\pi m}}}$.

De même : $u^2 = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \displaystyle\int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\alpha v^2\right)\mathrm{d}v$ avec

$\alpha = \dfrac{m}{2k_B T}$ donc $u^2 = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} I_4 = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \dfrac{3I_2}{2\alpha} = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \dfrac{3I_1}{4\alpha^2} = 4\pi\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \dfrac{3}{8\alpha^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} = \dfrac{3}{2\pi\alpha}$

soit $\boxed{u = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m}}}$. De plus $\dfrac{M}{m} = \dfrac{R}{k_B} = \mathcal{N}_A$ donc $\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}}$ et $\boxed{u = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}}$.

Ici m n'est pas la masse du système mais celle d'une molécule, donc ne pas écrire aveuglément m = n M, formule habituelle en chimie macroscopique.

3. $M(N_2) = 28{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ d'où $\boxed{\langle v \rangle = 454\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ et $\boxed{u = 493\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$. Ces deux vitesses sont du même ordre de grandeur (et elles sont également du même ordre de grandeur que la vitesse la plus probable évoquée en 1).

Ne pas oublier de convertir la masse molaire en unité SI, qui est le $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

4. Énergie cinétique moyenne : $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2$ soit $\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T}$.

5. Équation des gaz parfaits : $P = \frac{nRT}{V} = \frac{Nk_BT}{V} = n^* k_B T$. Or d'après la question 2, $T = \frac{mu^2}{3k_B}$ d'où $\boxed{P = \frac{1}{3} n^* m u^2}$.

6. Avec $n^* = \frac{P}{k_B T}$, on obtient $\ell_p = \frac{k_B T}{\pi\sqrt{2}\sigma^2 P}$. AN Pour $T = 273\ \text{K}$ et $P = 1{,}00\cdot10^5\ \text{Pa}$: $\boxed{\ell_p = 4{,}41\cdot10^{-8}\ \text{m}}$. Pour une diminution de la pression d'un facteur 10^8, $\boxed{\ell_p = 4{,}41\ \text{m}}$. Aux très basses pressions, ℓ_p peut devenir nettement supérieur aux dimensions de l'enceinte contenant le gaz. Dans ce cas, les chocs des particules sur les parois deviennent beaucoup plus fréquents que les chocs des particules entre elles.

Exercice 18.7

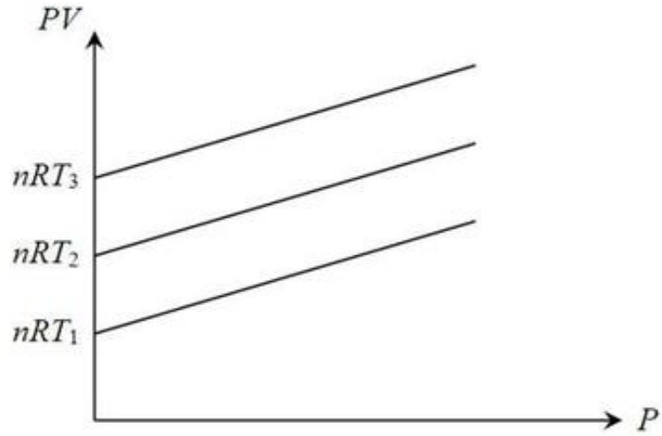
1. Équation d'état d'un gaz parfait : $\boxed{PV = nRT}$. Les particules d'un gaz parfait sont supposées sans volume propre et sans interactions à distance entre elles.

2. a) En remplaçant V_m par V/n, on obtient $\boxed{P(V - nb) = nRT}$.

⇨ *Méthode 18.1*

b) L'équation d'état précédente diffère de l'équation d'état du gaz parfait par le volume accessible aux molécules : celui-ci est $V - nb < V$ pour le gaz réel considéré, alors qu'il est V pour le gaz parfait. Cette différence correspond à l'attribution d'un volume propre aux molécules du gaz réel. En revanche, les interactions à distance entre particules sont ici négligées comme dans le modèle du gaz parfait.

c) L'équation d'état peut se réécrire : $PV = nRT + nbP$. En coordonnées d'Amagat, les isothermes sont donc des droites de pente nb et d'ordonnée à l'origine égale à nRT.



On obtient donc b en calculant la pente des courbes et en divisant par la quantité de matière n.

d) $\boxed{PV \xrightarrow[P\to 0]{} nRT}$: aux basses pressions, on retrouve pour tout gaz réel la valeur prédite par le modèle du gaz parfait.

Exercice 18.8

1. En remplaçant V_m par V/n, on obtient $\boxed{\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT}$.

⇨ *Méthode 18.1*

2. La constante b est associée à l'existence d'un volume propre. La constante a est ainsi liée aux interactions à distance entre les particules du gaz. En effet, en réécrivant l'équation d'état pour $b=0$ sous la forme $P=\frac{nRT}{V}-\frac{n^2a}{V^2}=P^{GP}-\frac{n^2a}{V^2}$, on constate que la pression qu'exercerait ce gaz sur une paroi est inférieure à la pression qu'exercerait le gaz parfait correspondant. Ce résultat est conforme à la nature attractive de l'interaction entre les molécules dans un gaz réel.

3. L'équation de Van der Waals s'écrit $PV=\frac{RT}{1-\frac{b}{V_m}}-\frac{a}{V_m}$. Pour des volumes élevés, on a ainsi

$PV\simeq RT\left(1+\frac{b}{V_m}\right)-\frac{a}{V_m}=RT\left[1+\left(b-\frac{a}{RT}\right)\frac{1}{V}\right]$ soit la relation demandé $\boxed{PV_m=RT\left(1+\frac{A(T)}{V_m}\right)}$

avec $\boxed{A(T)=b-\frac{a}{RT}}$.

4. Le gaz parfait étant caractérisé par son équation d'état $PV_m=RT$, la température de Mariotte est solution de $A(T_M)=0$, soit $\boxed{T_M=\frac{a}{bR}}$. AN $\boxed{T_M=426\text{ K}}$.

Exercice 18.9

1. Le point critique est le sommet de la courbe de saturation. En ce point on lit approximativement : $\boxed{P_C = 35 \text{ bar}}$. Par ailleurs, ce point se situe juste au-dessus de la courbe isotherme à −150 °C, et assez loin de l'isotherme à −100 °C : on peut évaluer la température critique à environ $\boxed{\theta_C = -140 \text{ °C}}$, soit $\boxed{T_C = 130 \text{ K}}$ avec deux chiffres significatifs.

> *Les valeurs plus précises que l'on peut trouver dans des tables sont* $P_C = 34{,}1$ bar *et* $T_C = 126{,}3$ K.

2. La température $\theta = 0$ °C se trouve bien au-dessus de la température critique θ_C, donc on pourrait penser à qualifier le diazote dans ces conditions de fluide supercritique. Mais en fait le point de l'isotherme 0 °C d'ordonnée $P = 1$ bar se trouve dans la partie droite du diagramme, loin du point critique, et P est bien inférieure à P_C, donc il s'agit de diazote sous forme de gaz.

> *Il s'agit ici de conditions usuelles en hiver : on considère alors habituellement que l'air qui nous entoure est un gaz et non un fluide supercritique !*

Le point de l'isotherme 0 °C d'ordonnée $P = 1$ bar a pour abscisse $\boxed{v = 0{,}83 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$ environ (au milieu des graduations 0,8 et 0,9).

Avec le modèle du gaz parfait on calcule : $v = \dfrac{V}{m} = \dfrac{V}{nM} = \dfrac{RT}{PM}$. AN $\boxed{v = 0{,}81 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$.

Le modèle du gaz parfait est donc convenable pour le diazote dans ces conditions.

3. La température cherchée est celle de l'isotherme dont le palier se trouve à $P = 1$ bar. Cette isotherme est un peu au-dessus à −200 °C, et assez loin de l'isotherme à −150 °C, donc on peut évaluer cette température à $\boxed{\theta = -190 \text{ °C}}$, soit environ $\boxed{T = 80 \text{ K}}$.

> *La valeur plus précise que l'on peut trouver dans des tables est* $T = 77{,}36$ K.

4. Le titre massique en vapeur est donné par : $x_g = \dfrac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \dfrac{V/m - v_\ell}{v_g - v_\ell}$. On lit sur le diagramme, aux deux extrémités du palier à 1 bar : $v_\ell = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $v_g = 0{,}22 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, d'où $\boxed{x_g = 0{,}031}$, soit 3,1 % de gaz (23 g) et 96,9 % de liquide (727 g).

5. La très faible quantité de chaleur qui traverse les parois provoque une lente ébullition du diazote liquide, et le gaz ainsi créé s'échappe par l'orifice de contact avec l'extérieur.
Le volume massique du liquide ayant la valeur indiquée à la question précédente ($v_\ell = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$), on calcule la masse perdue : $\boxed{m_{\text{perdue}} = \dfrac{V_{\text{perdu}}}{v_\ell} = 92 \text{ g}}$.

Corrigé

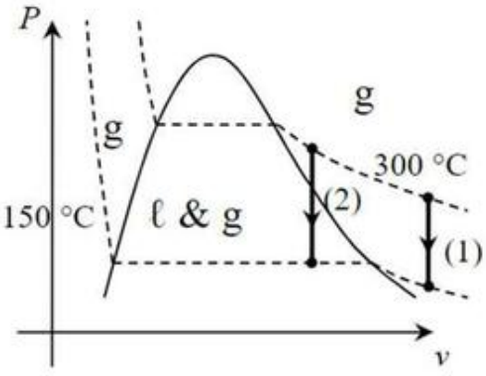
Exercice 18.10

1. a) L'état initial se trouve dans la zone de vapeur seule (à droite de la courbe de saturation). Le refroidissement isochore correspond alors à un segment vertical.

On peut envisager deux possibilités pour l'état final :

– (1) le système est toujours entièrement gazeux, et le point représentant l'état final se trouve dans la zone de vapeur seule ;

– (2) une partie du gaz s'est liquéfiée, et le point représentant l'état final se trouve dans la zone diphasée.



b) – Hypothèse (1) : gaz seul (vapeur sèche). Alors pour un gaz parfait :

$V = \text{cte} \Leftrightarrow \dfrac{T}{P} = \text{cte} \Leftrightarrow P_f = P_i \dfrac{T_f}{T_i}$. AN $P_f = 10{,}0\dfrac{423}{573} = 7{,}38\,\text{bar} > P_s(T_f)$ donc cette hypothèse ne convient pas (la vapeur sèche ne peut exister que pour $P_f \leq P_s(T_f)$).

– Hypothèse (2) : mélange diphasé. Alors $\boxed{P_f = P_s(T_f) = 4{,}76\,\text{bar}}$ et il reste à déterminer les proportions des deux phases, c'est-à-dire le titre massique en vapeur x_v.

Or l'état gazeux initial permet d'obtenir le volume massique moyen du système (qui reste constant) : $v = \dfrac{V}{m} = \dfrac{V}{nM} = \dfrac{RT_i}{P_i M} = 0{,}265\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$. Alors $x_v = \dfrac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = \dfrac{RT_i/MP_i - v_\ell}{v_v - v_\ell}$.

AN $x_v = 0{,}673$ (soit 67,3 % de vapeur et 32,7 % de liquide).

On trouve bien $0 < x_v < 1$ donc l'hypothèse est valide.

⇨ *Méthode 18.2*

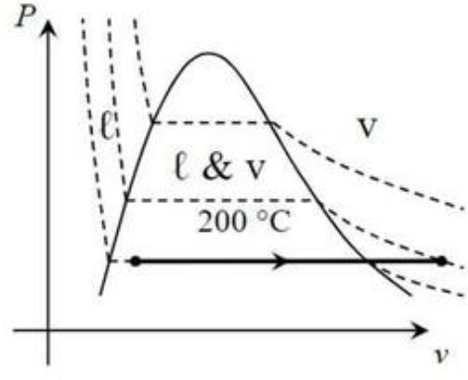
2. a) On repart d'un point sur le palier précédent.

Masse totale : $\boxed{m = m_v + m_\ell = \dfrac{V_v}{v_v} + \dfrac{V_\ell}{v_\ell}}$.

AN $\boxed{m = 2{,}3 + 91{,}7 = 94\ \text{kg}}$.

(Il y a donc initialement 97,6 % de liquide : le point de départ est proche de l'extrémité gauche du palier.)

b) Cette fois on se déplace horizontalement (P = cte), jusqu'à rejoindre l'isotherme 200 °C, donc nécessairement vers la droite jusqu'à un point de la zone de vapeur seule.



On peut alors utiliser l'équation d'état du gaz parfait : $\boxed{V_f = \dfrac{nRT_f}{P_f} = \dfrac{mRT_f}{MP_f}}$. AN $\boxed{V_f = 43\,\text{m}^3}$.

Exercice 18.11

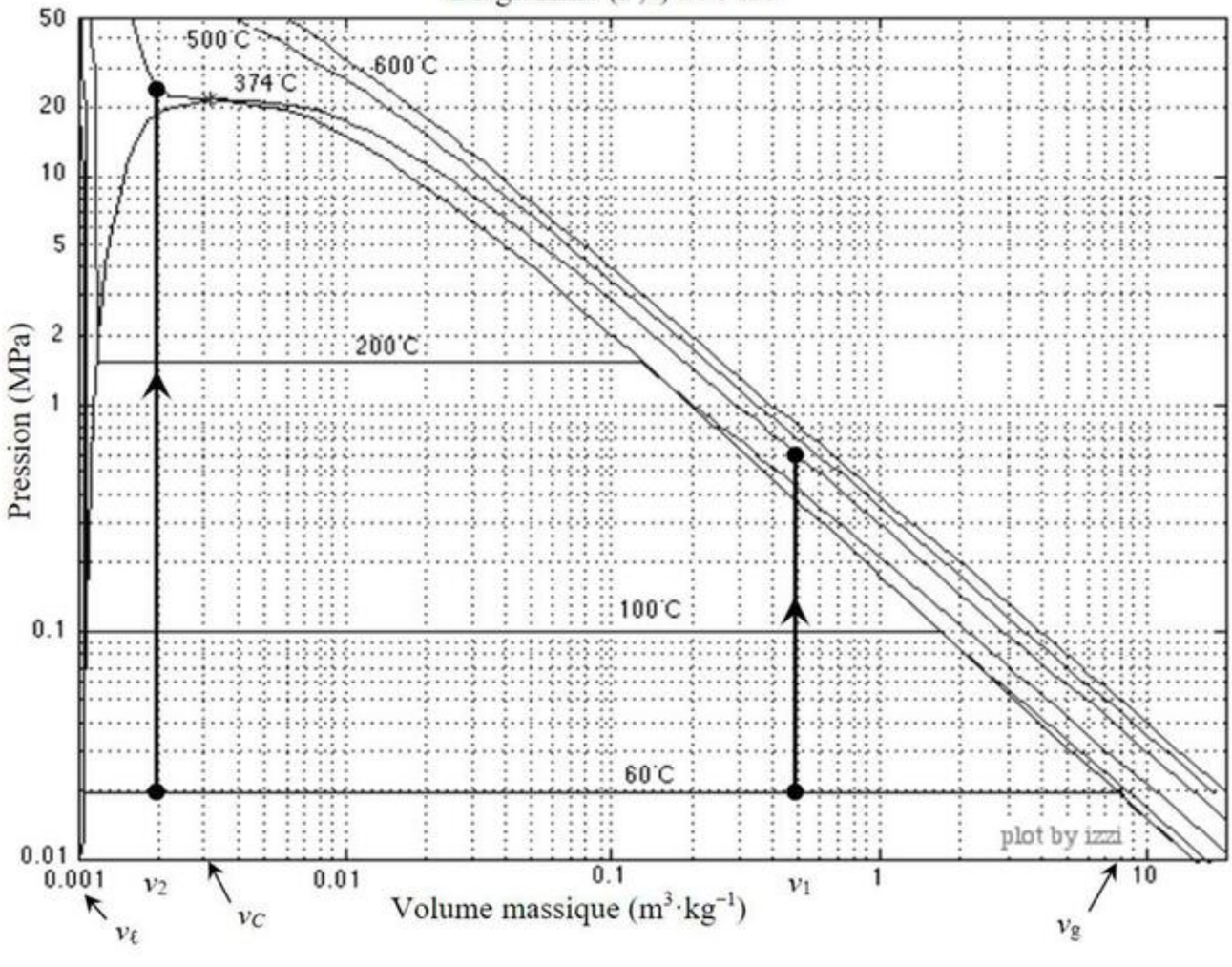
1. a) Avec le peu d'eau contenue dans le ballon, le volume massique moyen $\boxed{v_1 = \dfrac{V}{m_1}}$ est relativement grand. AN $\boxed{v_1 = 0{,}50\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}}$. À $T_0 = 333\ \text{K}$ ($\theta_0 = 60\ °\text{C}$), le point M_1 correspondant dans le diagramme de Clapeyron est situé sur le palier de changement de phase

liquide/gaz et sa fraction massique en gaz est $x_{g1} = \dfrac{v_1 - v_\ell}{v_g - v_\ell}$ avec $v_g = 8{,}0\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $v_\ell = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. AN $x_{g1} = 6{,}2 \cdot 10^{-2}$, soit une masse de gaz $\boxed{m_{g1} = m_1 x_{g1} = 25\ \text{g}}$; la masse de liquide restant est alors $\boxed{m_{\ell 1} = m - m_{g1} = 375\ \text{g}}$.

☛ *Attention à l'échelle logarithmique qui empêche ici de calculer x_{g1} à l'aide d'un simple rapport de longueurs mesurées sur le graphe.*

b) Le volume de la cuve étant constant, le chauffage est isochore à $V = V_0$. À $T = 647\ \text{K}$ ($\theta = 374\ °\text{C}$) et $v_1 = 0{,}50\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, on constate sur le graphique que le système à l'issue du chauffage est totalement gazeux à la pression $\boxed{P_1 = 0{,}60\ \text{MPa} = 6{,}0\ \text{bar}}$. Dans l'hypothèse où la vapeur se comporte comme un gaz parfait, on peut aussi calculer $\boxed{P_1 = \dfrac{mRT}{MV_0}}$. AN $\boxed{P_1 = 6{,}0\ \text{bar}}$. Le modèle du gaz parfait pour la vapeur d'eau est donc ici tout à fait pertinent. Par ailleurs, cette pression est du même ordre de grandeur que la pression atmosphérique : le ballon pourrait y résister.

Diagramme (P,v) de l'eau



2. Compte tenu de la masse plus importante d'eau dans le ballon, le volume massique moyen de l'eau $\boxed{v_2 = \dfrac{V}{m_2}}$ est maintenant beaucoup plus faible. AN $\boxed{v_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$.

À $T_0 = 333\ \text{K}$ ($\theta_0 = 60\ °\text{C}$), le point M_2 correspondant dans le diagramme de Clapeyron est situé sur le palier de changement d'état liquide/gaz, beaucoup plus à gauche que le précédent. La fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par $x_{g2} = \dfrac{v_2 - v_\ell}{v_g - v_\ell}$. AN $x_{g2} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$, soit une masse de gaz égale à $\boxed{m_{g2} = m_2 x_{g2} = 13\ \text{g}}$ seulement, le reste des 100 kg d'eau étant sous forme liquide.

À $T = 647\ \text{K}$ ($\theta = 374\ °\text{C}$) et $v_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, on constate cette fois sur le graphique que l'eau est entièrement liquide à la pression $\boxed{P_2 = 2{,}2 \cdot 10^2\ \text{bar}}$. Cette pression est énorme : elle pourrait provoquer l'explosion du ballon !

Comme l'illustre cet exemple, il est donc préférable, pour stocker un fluide sans danger, d'être dans le premier cas, où $\boxed{v_1 > v_C = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}}$ (volume massique du point critique), plutôt que dans le deuxième, caractérisé par $v_2 < v_C$.

Chapitre 19

Premier principe de la thermodynamique

UN SCIENTIFIQUE



Sadi Carnot (1796-1832) est le fils aîné de Lazare Carnot, mathématicien de renom et révolutionnaire convaincu. Après un passage à l'École du génie de Metz, Sadi quitte l'armée et rentre à Paris ; il se penche alors sur l'étude des machines à vapeur et en décortique le fonctionnement théorique. Il comprend que l'efficacité d'une machine à vapeur est liée à la production de chaleur. On le considère souvent comme le père de la thermodynamique.

Un peu d'histoire

Soucieux d'améliorer le fonctionnement des machines à vapeur, le jeune Sadi Carnot étudie la création d'énergie mécanique à l'aide de la chaleur et émet une hypothèse nouvelle connue de nos jours sous le nom de théorème de Carnot. Il publie ses conclusions en 1824 dans un mémoire appelé *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*. Passé inaperçu, ce texte est sorti de l'oubli par Émile Clapeyron.

Sadi Carnot énonce en 1831 le premier principe de la thermodynamique mais considère la chaleur comme indestructible. Grâce à de nombreuses expériences, James Joule revient sur cette idée et explicite le principe de conservation de l'énergie en 1843. Dans les années 1850, Rudolf Clausius et William Thomson précisent ces notions.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les différents types de transformations (monotherme, isotherme, monobare, isobare, isochore, adiabatique, quasi-statique, réversible, cyclique)
- ▷ L'énoncé du premier principe de la thermodynamique
- ▷ L'expression du travail élémentaire des forces de pression, pour une transformation quelconque et dans le cas d'une transformation réversible
- ▷ La définition d'un thermostat et sa réalisation pratique
- ▷ Les définitions de l'enthalpie, des capacités thermiques et du coefficient gamma
- ▷ La relation de Mayer pour le gaz parfait
- ▷ L'approximation $C_P \approx C_V \approx C$ pour les phases condensées
- ▷ La loi de Laplace (énoncé et conditions d'application)

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer le travail des forces de pression pour différentes transformations
- ▷ Appliquer le premier principe et déterminer un transfert thermique
- ▷ Retrouver les expressions des capacités thermiques pour un gaz parfait, à partir de la définition de γ et de la relation de Mayer
- ▷ Retrouver les autres relations de Laplace à partir de $PV^{\gamma} = \text{cte}$
- ▷ Déterminer l'état final d'un système
- ▷ Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et appliquer le premier principe en prenant en compte des transitions de phase

■■ Résumé de cours

■ Transformations thermodynamiques

Quand on modifie les contraintes extérieures, l'équilibre thermodynamique est rompu et le système subit une évolution. On appelle **transformation** une évolution entre deux états d'équilibre thermodynamiques. Au cours d'une transformation quelconque, toutes les grandeurs d'état ne sont pas forcément définies à chaque instant.

❑ Transformation infinitésimale et transformation quasi-statique

Une transformation est **infinitésimale** quand les états d'équilibres thermodynamiques initial et final sont infiniment proches. Une transformation correspondant à une succession de transformations infinitésimales est qualifiée de **quasi-statique**. En conséquence, toutes les grandeurs d'état à l'intérieur du système (P, T…) sont constamment définies au cours d'une transformation quasi-statique, le système étant toujours infiniment proche d'un état d'équilibre.

❑ Transformation réversible ou irréversible

Une transformation est dite **réversible** si elle est quasi-statique et si en outre le système y est constamment à l'équilibre thermodynamique avec l'extérieur (ce qui implique $P = P_{ext}$ si la paroi est mobile ou déformable et $T = T_{ext}$ si elle est diatherme).

Si une telle transformation est qualifiée de réversible, c'est parce qu'une modification infinitésimale des contraintes extérieures responsables de la transformation permet d'inverser le sens dans lequel elle se déroule, et ce en repassant par les même états intermédiaires.

En pratique, une transformation ne pourra être réversible que si, simultanément :
- la transformation est quasi-statique ;
- il n'y a aucune des causes d'irréversibilité suivantes : inhomogénéités (température, densité, pression...), phénomènes dissipatifs (frottements, effet Joule...), hystérésis, réactions chimiques ou nucléaires.

Dans le cas contraire, la transformation est dite **irréversible**. Les transformations réelles sont par nature irréversibles : la transformation réversible est un modèle idéal obtenu par passage à la limite.

❑ Transformations particulières

- Transformation **monotherme** : la température extérieure T_{ext} reste constante.
- Transformation **isotherme** : la température T du système reste constante.
- Transformation **monobare** : la pression extérieure P_{ext} reste constante.
- Transformation **isobare** : la pression P du système reste constante.
- Transformation **isochore** : le volume du système reste constant.
- Transformation **cyclique** : l'état initial et l'état final sont confondus, d'où $\Delta X = 0$ pour toute grandeur d'état X.

■ Premier principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique fermé, il existe une fonction d'état extensive E appelée **énergie** (totale), qui ne peut être qu'échangée (pas de création ni de disparition), soit sous forme de travail W, soit sous forme de transfert thermique Q.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc :
- $\boxed{\Delta E = W + Q}$ pour une transformation globale entre deux états I et F;
- $\boxed{\mathrm{d}E = \delta W + \delta Q}$ pour une transformation infinitésimale.

D'après cet énoncé, un travail ou un transfert thermique positif correspond à de l'énergie reçue par le système ; un transfert négatif correspond à de l'énergie fournie à l'extérieur.

■ Énergie interne

❑ Définition

On a déjà rencontré différentes formes d'énergie d'un système en mécanique et en électricité. Un système macroscopiquement au repos et non soumis à une action extérieure stocke aussi de l'énergie sous une forme « invisible » à notre échelle, appelée **énergie interne** U. Elle est extensive et s'interprète, à l'échelle microscopique, comme la somme des énergies cinétiques d'agitation thermique et des énergies potentielles d'interaction des particules du système.
Nous considérerons des systèmes pour lesquels l'énergie totale E se limite à U, ou bien comporte aussi un terme d'énergie cinétique macroscopique ($E = U + E_c$).

❑ Cas du gaz parfait

Énergie interne du gaz parfait

Les molécules d'un gaz parfait n'interagissent pas entre elles. L'énergie interne d'un gaz parfait a ainsi une origine purement cinétique et ne dépend que de la température : $\boxed{U^{\mathrm{GP}} = U^{\mathrm{GP}}(T)}$.
Pour un GP monoatomique contenant N molécules, soit une quantité de matière $n = N/\mathcal{N}_A$:
$\boxed{U^{\mathrm{GPM}} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} nRT}$ (k_B constante de Boltzmann, $\mathcal{N}_A$ nombre d'Avogadro, R constante des gaz parfaits). Cette énergie correspond aux mouvements de translation aléatoire des molécules.
Pour un GP polyatomique, les énergies cinétiques associées aux mouvements propres de rotation et de vibration s'ajoutent à celles des translations : $U^{\mathrm{GPP}}(T) \geq U^{\mathrm{GPM}}(T)$.

Capacité thermique à volume constant du gaz parfait

Pour un GP subissant une transformation entre un état 1 et un état 2, l'énergie interne varie de $\Delta U^{\mathrm{GP}} = U_2^{\mathrm{GP}} - U_1^{\mathrm{GP}}$ quand la température varie de $\Delta T = T_2 - T_1$. On définit ainsi sa **capacité thermique à volume constant** C_V (unité SI : $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$) par la relation : $\boxed{\Delta U^{\mathrm{GP}} = C_V \, \Delta T}$. Pour une transformation infinitésimale : $\boxed{\mathrm{d}U^{\mathrm{GP}} = C_V \, \mathrm{d}T}$.

On définit également :

- la capacité thermique *molaire* à volume constant : $C_{Vm} = C_V / n$ (unité SI : $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$) ;
- la capacité thermique *massique* à volume constant : $c_V = C_V / m$ (unité SI : $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$).

Pour un GP monoatomique, $C_V^{\mathrm{GPM}} = \frac{3}{2} nR$. Pour un GP diatomique, $C_V^{\mathrm{GPD}} = \frac{5}{2} nR$ sur une large gamme de températures.

❑ Cas des gaz réels

L'énergie interne d'un gaz réel dépend à la fois de la température et du volume : $\boxed{U^{\mathrm{GR}} = U^{\mathrm{GR}}(T,V)}$. La dépendance vis-à-vis du volume est associée à la présence d'interactions à distance entre les molécules du gaz, donc d'énergie potentielle microscopique.

❑ Cas d'une phase condensée idéale

L'énergie interne d'une phase condensée idéale ne dépend que de la température : $\boxed{U^{\mathrm{PC}} = U^{\mathrm{PC}}(T)}$. Dans le domaine des températures ordinaires, la capacité thermique à volume constant des solides est constante. Pour de nombreux liquides, tels que l'eau, elle est également constante sur une large gamme de températures. On a ainsi $\boxed{\Delta U^{\mathrm{PC}} = C_V \, \Delta T}$ pour une transformation globale et $\boxed{\mathrm{d}U^{\mathrm{GP}} = C_V \, \mathrm{d}T}$ pour une transformation infinitésimale.

■ Travail

❑ Notion de travail

Le **travail** W correspond à l'énergie échangée sous l'action de forces extérieures macroscopiques. Quand un système reçoit de l'énergie sous forme de travail (mécanique ou électrique), un mouvement cohérent est communiqué à ses particules.

❑ Travail des forces de pression

Un système soumis à une pression extérieure P_{ext} reçoit un travail élémentaire $\boxed{\delta W = -P_{\mathrm{ext}} \, \mathrm{d}V}$ où $\mathrm{d}V$ est le volume élémentaire balayé par les parties mobiles du système (qui correspond généralement à la variation de volume du système). Au cours d'une transformation quelconque entre l'état initial I et l'état final F, le travail reçu est alors $\boxed{W = -\int_{V_I}^{V_F} P_{\mathrm{ext}} \, \mathrm{d}V}$.

⇨ Méthode 19.1. Calcul du travail des forces de pression

Cas d'une transformation réversible

Lors d'une transformation réversible, on a $P = P_{\mathrm{ext}}$ d'où $\boxed{W_{\mathrm{rév}} = -\int_{V_I}^{V_F} P \, \mathrm{d}V}$.

Dans un **diagramme de Clapeyron** (ou de Watt) $P = f(V)$, $|W|$ est égal à l'aire sous la courbe décrivant la transformation, $W > 0$ si V diminue (compression), $W < 0$ si V augmente (détente).

■ Transfert thermique

❑ Notion de transfert thermique

Le **transfert thermique** Q (ou **chaleur**) correspond à de l'énergie échangée par l'interaction désordonnée des particules du système avec les particules du milieu extérieur, au niveau microscopique. Quand un système reçoit de l'énergie sous forme de transfert thermique, un mouvement incohérent est communiqué à ses particules.

On distingue qualitativement trois grands types de transferts thermiques :
- la **conduction**, transfert thermique par diffusion de proche en proche ;
- la **convection**, transfert thermique accompagné d'un mouvement de fluide ;
- le **rayonnement**, transfert thermique par l'intermédiaire d'une onde électromagnétique.

Une paroi est dite **diatherme** (ou **diathermane**) si elle permet le transfert thermique ; dans le cas contraire, elle est dite **athermane** (ou **calorifugée**).

⇨ **Méthode 19.2. Calcul d'un transfert thermique**

❑ Transformation adiabatique

Une transformation au cours de laquelle il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur ($Q = 0$) est qualifiée d'**adiabatique**.

Cela peut correspondre à une transformation où le système est entouré de parois athermanes, ou bien à une transformation trop rapide pour que les transferts thermiques puissent avoir lieu.

❑ Thermostat

On appelle **thermostat** (ou **source de chaleur**) un système fermé n'échangeant pas de travail avec l'extérieur, mais capable d'échanger un transfert thermique sans que sa température varie.
En pratique, c'est un système de taille beaucoup plus grande que ceux avec lesquels il est susceptible d'être mis en contact : ses capacités thermiques sont considérées comme infinies.

■ Enthalpie

❑ Définition

L'**enthalpie** est une fonction d'état extensive définie par $\boxed{H = U + PV}$.
Pour une transformation monobare entre deux états I et F tels que $P_I = P_F = P_{ext}$, ou pour une transformation isobare réversible : $\boxed{\Delta H = Q + W'}$ avec W' le travail autre que celui de pression.

❑ Cas du gaz parfait

Enthalpie du gaz parfait

L'enthalpie du gaz parfait ne dépend que de la température : $\boxed{H^{GP} = H^{GP}(T)}$.

Capacité thermique à pression constante du gaz parfait

La **capacité thermique à pression constante** C_P du gaz parfait est définie par la relation : $\boxed{\Delta H^{GP} = C_P \, \Delta T}$. Pour une transformation infinitésimale, on a ainsi : $\boxed{\mathrm{d}H^{GP} = C_P \, \mathrm{d}T}$.

On définit aussi la capacité thermique molaire à pression constante $C_P^{\mathrm{m}} = C_P/n$ et la capacité thermique massique à pression constante $c_P = C_P/m$.

On note $\boxed{\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}}$ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constant.

Relation de Mayer

Pour tout gaz parfait : $\boxed{C_P - C_V = nR}$ ou encore $C_P^{\mathrm{m}} - C_V^{\mathrm{m}} = R$.

Expressions des capacités thermiques

Elles se déduisent de la définition de γ et de la relation de Mayer : $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_P = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}$.

Relations de Laplace

Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait (tel que $\gamma = \text{cte}$ et soumis aux seules forces de pression) : $\boxed{PV^\gamma = \text{cte}} \quad \Leftrightarrow \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$.

❑ Cas d'une phase condensée idéale

Pour une phase condensée, $PV \ll U$ d'où $H \approx U$. Ainsi, pour une phase condensée idéale :

$\boxed{H^{\text{PC}} \approx H^{\text{PC}}(T)}$, $C_P \approx C_V$ (notée C), $\boxed{\Delta H^{\text{PC}} \approx \Delta U^{\text{PC}} \approx C\,\Delta T}$ et $\boxed{\mathrm{d}H^{\text{PC}} \approx \mathrm{d}U^{\text{PC}} \approx C\,\mathrm{d}T}$.

L'eau liquide possède une capacité thermique massique très élevée ($c = 4{,}18\ \mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$) lui permettant d'emmagasiner beaucoup d'énergie sans bouillir : c'est ce qui justifie son utilisation fréquente dans les systèmes d'échanges thermiques.

⇨ **Méthode 19.3. Détermination de l'état final avec l'équation d'état**

⇨ **Méthode 19.4. Détermination de l'état final avec le premier principe**

⇨ **Méthode 19.5. Détermination de l'état final avec les relations de Laplace**

❑ Cas du corps pur diphasé

Enthalpie massique de transition de phase

L'**enthalpie massique de transition de phase** à la température T est définie comme la différence des enthalpies massiques d'un corps pur dans la phase 2 et dans la phase 1, à la même température T de changement d'état et à la pression d'équilibre $P = P_{\text{sat}}(T)$:

$$\boxed{\Delta_{1\to2}h(T) = h_2(T) - h_1(T)} \qquad \text{(unité SI : } \mathrm{J \cdot kg^{-1}}\text{)}.$$

Elle est aussi appelée chaleur latente de transition de phase, et notée $\ell_{1\to2}(T)$.

Elle est égale au transfert thermique nécessaire pour faire passer une unité de masse du corps pur de la phase 1 à la phase 2 de manière isotherme à T (donc isobare à $P = P_{\text{sat}}(T)$).

Variation d'enthalpie du corps pur diphasé

Au cours d'un changement d'état isotherme entre deux phases 1 et 2, l'enthalpie massique du système diphasé varie de $\boxed{\Delta h(T) = \Delta x_2 \times \Delta_{1\to2}h(T)}$, x_2 étant le titre massique dans la phase 2.

Donc pour une variation Δm_2 de la masse de la phase 2 : $\boxed{\Delta H(T) = \Delta m_2 \times \Delta_{1\to2}h(T)}$.

⇨ **Méthode 19.6. Détermination d'un état final par hypothèse et validation**

⇨ **Méthode 19.7. Calcul d'une variation d'enthalpie par décomposition en étapes**

■■ Méthodes

■ Comment calculer les transferts énergétiques au cours d'une transformation ?

❑ Méthode 19.1. Calcul du travail des forces de pression

Pour une transformation ayant des propriétés particulières, partir de la définition $W = -\int_{V_I}^{V_F} P_{ext} \mathrm{d}V$ et calculer l'intégrale avec les hypothèses et l'expression de P_{ext}.

⇨ Exercices 19.1, 19.2, 19.5

– Transformation isochore

$V = \text{cte}$ soit $\mathrm{d}V = 0$, donc $\boxed{W = 0}$.

– Transformation monobare

$P_{ext} = \text{cte}$: on peut la sortir de l'intégrale, donc $\boxed{W = -P_{ext}\,\Delta V}$.

– Transformation isotherme réversible pour un gaz parfait

$P_{ext} = P$ car la transformation est réversible, et $P = \dfrac{nRT}{V}$ d'après l'équation d'état.

La transformation est isotherme ($T = \text{cte}$) et pour un système fermé il n'y a pas de variation de quantité de matière ($n = \text{cte}$) donc nRT peut être sorti de l'intégrale.

Finalement, $W = -nRT \int_{V_I}^{V_F} \dfrac{\mathrm{d}V}{V}$ soit $\boxed{W = -nRT \ln\left(\dfrac{V_F}{V_I}\right) = +nRT \ln\left(\dfrac{P_F}{P_I}\right)}$.

– Transformation adiabatique

$Q = 0$ donc $\boxed{W = \Delta U}$.

❑ Méthode 19.2. Calcul d'un transfert thermique

– Dans le cas général, pour une transformation finie, le transfert thermique reçu est calculé à partir du premier principe par la relation : $Q = \Delta U - W$ (en l'absence de variation d'énergie mécanique). La variation d'énergie interne ΔU se calcule à partir de la fonction d'état du fluide étudié, et le travail W à l'aide de la méthode précédente.

– Pour certaines transformations particulières, on obtient des résultats simples.

⇨ Exercices 19.1, 19.3

– Transformation adiabatique

Par définition : $\boxed{Q = 0}$.

– Transformation isochore

$W = 0$ donc $\boxed{Q = \Delta U}$.

– Transformation isobare réversible, ou monobare entre deux états I et F tels que $P_I = P_F = P_{ext}$

$U_F - U_I = W + Q$ avec $W = -\int_{V_I}^{V_F} P_{ext}\,dV = -P_{ext}(V_F - V_I) = -P_F V_F + P_I V_I$ donc

$(U_F + P_F V_F) - (U_I + P_I V_I) = Q$ soit finalement $\boxed{Q = \Delta H}$.

■ Comment étudier une transformation sans transition de phase ?

❑ Méthode 19.3. Détermination de l'état final avec l'équation d'état

Dans le cas où l'équation d'état du fluide est connue, ainsi que toutes les autres grandeurs d'état à l'exception de la grandeur finale recherchée, cette dernière peut être calculée en utilisant l'équation d'état.

⇨ Exercices 19.1, 19.3

Un gaz parfait enfermé dans une enceinte de volume $V_0 = 2{,}00$ L, initialement à la pression $P_0 = 1{,}00$ bar et à la température $T_0 = 300$ K subit une compression qui l'amène au volume $V_1 = 1{,}00$ L et à pression $P_1 = 3{,}00$ bar. Quelle est sa température finale T_1 ?

À n constant, l'équation d'état du gaz parfait conduit à $\boxed{T_1 = \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} T_0}$ soit $T_1 = 450$ K.

❑ Méthode 19.4. Détermination de l'état final avec le premier principe

Dans le cas où il est possible de déterminer W et Q indépendamment sans utiliser le premier principe, l'application du premier principe permet de déterminer l'état final (la température finale pour un gaz parfait).

⇨ Exercices 19.5

Soit une compression adiabatique d'une quantité n d'un gaz parfait diatomique, passant d'un volume initial $2V_0$ à un volume final V_0 sous l'effet d'un piston exerçant une pression extérieure constante P_0 sur le gaz. T_0 étant la température initiale, on cherche la température finale T_1.

La détente est adiabatique donc le transfert thermique reçu par le gaz est nul : $Q = 0$.

En outre, la transformation est monobare d'où $W = -P_0(V_0 - 2V_0) = P_0 V_0$.

Au cours de la transformation, l'énergie interne du gaz parfait diatomique a varié de $\Delta U = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0)$. En appliquant le premier principe au gaz, on obtient $\boxed{T_1 = T_0 + \frac{2P_0V_0}{5nR}}$.

❑ Méthode 19.5. Détermination de l'état final avec les relations de Laplace

Connaissant les autres grandeurs d'état, on utilise les relations de Laplace pour trouver la grandeur finale recherchée : $PV^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte} \Leftrightarrow T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$.
Pour pouvoir utiliser les relations de Laplace, il faut que le gaz soit parfait, que son coefficient γ soit constant, et que la transformation soit adiabatique et réversible.

⇨ Exercice 19.3

Un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$), sous pression initiale $P_0 = 1,0$ bar, subit une compression adiabatique et réversible qui le fait passer d'un volume V_0 à un volume $V_1 = V_0/10$: quelle est la pression finale P_1 ?

Compte tenu des hypothèses, il est possible d'appliquer les relations de Laplace : $P_0V_0^\gamma = P_1V_1^\gamma$ soit $\boxed{P_1 = P_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma}$. AN $P_1 = 25$ bar.

■ Comment étudier une transformation avec transition de phase ?

❑ Méthode 19.6. Détermination d'un état final par hypothèse et validation

– Émettre une hypothèse sur la composition finale : mélange diphasé ou bien une seule des deux phases possibles.
– Calculer en conséquence le paramètre restant à déterminer, en fonction des conditions de l'expérience : dans l'hypothèse diphasée on cherche la composition du mélange ; dans l'hypothèse monophasée on cherche la température ou la pression.
– Vérifier la validité de l'hypothèse de départ. Si les calculs conduisent à une composition incohérente, ou à une température ou pression finale incompatible avec l'hypothèse, recommencer l'étude en émettant une autre hypothèse sur la composition finale.

⇨ Exercice 19.11, 19.12

On introduit dans un calorimètre aux parois calorifugées et de capacité thermique négligeable une masse $m = 1{,}00$ kg d'eau liquide initialement à 20 °C. On y ajoute 0,50 kg de glace à 0 °C. Déterminer la composition et la température finale. On suppose que la transformation a lieu à pression constante $P = 1{,}0$ bar. On donne : $\Delta_{\text{fus}}h = 3{,}3 \cdot 10^2$ kJ·kg^{-1} (enthalpie massique de fusion de l'eau à 0°C) et $c = 4{,}2$ kJ·K^{-1}·kg^{-1} (capacité thermique de l'eau liquide).

Compte tenu des masses d'eau et de glace mises en jeu, on peut supposer que le refroidissement de l'eau dégage une énergie permettant de faire fondre uniquement une partie de la glace dans le calorimètre. On suppose donc que l'état final est un mélange d'eau liquide et solide à 0 °C.

Pour le système {eau + glace}, $\Delta H = Q_P = 0$ dans le calorimètre. L'enthalpie étant une fonction d'état, on calcule sa variation au cours de cette transformation en imaginant un chemin qui amène d'abord la masse d'eau de 20 °C à 0 °C, et fait ensuite fondre une masse m' de glace, d'où : $\Delta H = 0 = \Delta H_{\text{refroidissement}} + \Delta H_{\text{fonte}} = mc(T_{\text{f}} - T_{\text{i}}) + m'\Delta_{\text{fus}}h$

avec $T_{\text{f}} = 273$ K et $T_{\text{i}} = 293$ K. On en déduit $m' = \dfrac{mc(T_{\text{i}} - T_{\text{f}})}{\Delta_{\text{fus}}h}$. AN $m' = 0{,}25$ kg $< m$.

Le résultat cohérent obtenu valide l'hypothèse de départ. Finalement, la composition du mélange à l'équilibre est : 0,25 kg de glace et 1,25 kg d'eau, le tout à 0 °C.

❑ Méthode 19.7. Calcul des variations d'enthalpie par décomposition en étapes

L'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation sur une transformation complexe peut toujours être calculée en imaginant un chemin en plusieurs étapes, au cours desquelles il ne se passe qu'une chose à la fois : variation de température pour une phase seule, changement d'état à une température donnée. Dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur, ce chemin peut être visualisé sur le diagramme (P,v).

On additionne alors les variations d'enthalpie sur chacune des étapes, en utilisant les différentes formules :

– pour un liquide seul ou un solide seul (considéré comme une phase condensée idéale de capacité thermique massique c), $\Delta h = c(T_2 - T_1)$;

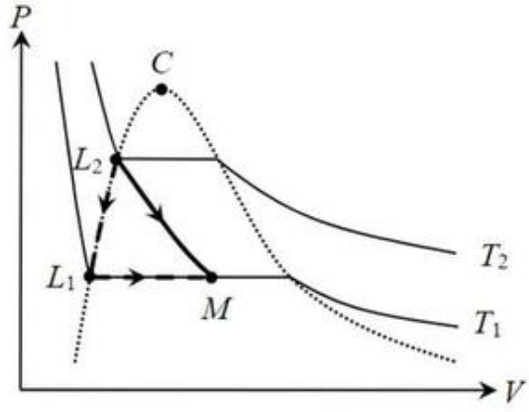
– pour un gaz seul (considéré comme un gaz parfait de masse molaire M), $\Delta h = c_P(T_2 - T_1)$;

– pour une transition de phase à la température T, $\Delta h = \Delta x_2 \times \Delta_{1\to 2}h(T)$ avec Δx_2 la variation du titre massique de la phase 2.

⇨ Exercices 19.8, 19.10, 19.11

On fait subir une détente isenthalpique (de Joule-Kelvin) à de l'ammoniac, de l'état liquide L_2 ($P_2 = 6{,}2$ bar, $T_2 = 283$ K) à l'état diphasé M ($P_1 = 1{,}9$ bar, $T_1 = 253$ K). On donne $\Delta_{\text{vap}}h(T_1) = 1{,}3 \cdot 10^3$ kJ·kg^{-1} et $c = 4{,}6$ kJ·K^{-1}·kg^{-1} (capacité thermique de l'ammoniac liquide).

On cherche à exprimer la variation d'enthalpie massique $\Delta h = h_M - h_{L_2}$, puis à en déduire le titre massique en vapeur final x_M.



La détente est isenthalpique donc $\Delta h = h_M - h_{L_2} = 0$.

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut calculer sa variation sur le chemin L_2L_1M :

$\Delta h = \left(h_M - h_{L_1}\right) + \left(h_{L_1} - h_{L_2}\right)$

d'où $x_M \Delta_{vap} h(T_1) + c(T_1 - T_2) = 0$.

On en déduit $x_M = \dfrac{c(T_2 - T_1)}{\Delta_{vap} h(T_1)}$. AN $x_M = 0{,}11$. Ainsi, 11 % du liquide s'est vaporisé au cours de la détente.

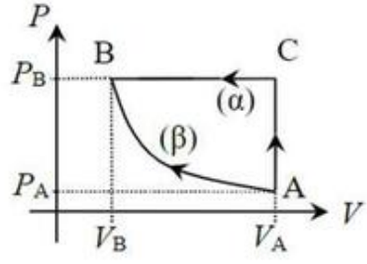
■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Au cours d'une transformation quelconque, toutes les grandeurs d'état sont définies à chaque instant.	☐	☐
2.	Au cours d'une transformation monobare, la pression P du système est constante.	☐	☐
3.	Une transformation monotherme et réversible est isotherme.	☐	☐
4.	Au cours d'une transformation quelconque, le travail reçu par un gaz soumis uniquement aux forces de pression est $W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V$.	☐	☐
5.	La présence de frottements rend la transformation irréversible.	☐	☐
6.	Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz de coefficient $\gamma = \text{cte}$ soumis aux seules forces de pression, $PV^{\gamma} = \text{cte}$.	☐	☐
7.	Par définition de l'enthalpie, $\Delta H = Q$.	☐	☐
8.	Si un système reçoit de la chaleur ($Q > 0$), sa température augmente.	☐	☐
9.	Au cours d'une vaporisation isotherme totale d'un corps pur, l'énergie interne du système ne varie pas.	☐	☐
10.	Les variations d'énergie interne et d'enthalpie sont considérées comme égales pour une phase condensée idéale.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Systèmes gazeux

❑ Exercice 19.1. Transformations d'un gaz parfait



On fait passer une certaine quantité de gaz parfait d'un état d'équilibre A (P_A, V_A, T_A) à un autre état d'équilibre B $(P_B = 3P_A, V_A, T_A)$ par deux chemins distincts :

- α : isochore AC puis isobare CB ;
- β : isotherme réversible AB.

Déterminer T_B et V_B ainsi que les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz au cours des transformations α et β. Commenter les résultats obtenus.

❑ Exercice 19.2. Compression d'un gaz de Van der Waals*

On considère un gaz réel obéissant à l'équation de Van der Waals : $\left(P + \frac{a}{V_m{}^2}\right)(V_m - b) = RT$.

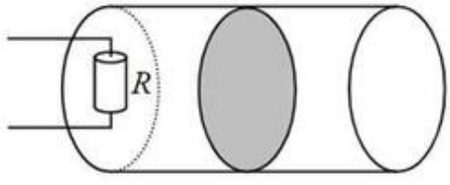
1. Calculer le travail reçu par une mole de gaz au cours d'une compression isotherme à T_0 faisant passer le gaz de V_{m1} à V_{m2}.

2. a) Donner une expression approchée de ce travail aux faibles densités $(b \ll V_m)$. On mettra en évidence dans le résultat le terme correctif par rapport au travail qui serait reçu par le gaz parfait correspondant et on pourra utiliser la relation approchée $\ln(1+x) \simeq x$ pour $x \ll 1$.

b) En déduire qu'il existe une température, appelée température de Mariotte, pour laquelle le gaz réel se comporte comme un gaz parfait.

c) Vérifier que pour cette température, l'isotherme correspondante dans le diagramme d'Amagat admet une tangente horizontale.

❑ Exercice 19.3. Transformations couplées



Un cylindre horizontal est séparé en deux parties par une paroi mobile. Le mouvement de la paroi s'effectue sans frottements. Le cylindre horizontal, ainsi que la paroi mobile (de masse et de capacité thermique négligeables), sont calorifugés et rigides. À partir d'un état initial identique pour chaque compartiment (quantité n de gaz parfait avec les paramètres P_0, T_0 et V_0), on chauffe lentement le compartiment de gauche à l'aide d'un conducteur ohmique de résistance R jusqu'à obtenir $P_g = 5P_0$ dans le compartiment de gauche.

1. Déterminer les paramètres d'état à gauche (indice g) et à droite (indice d) : V_g, T_g, V_d, P_d et T_d dans l'ordre de votre choix. On suppose $\gamma = C_P/C_V$ connu.

2. Déterminer le travail W_d, le transfert thermique Q_d et la variation d'énergie interne ΔU_d pour le gaz contenu dans le compartiment de droite.
3. Déterminer la variation d'énergie interne ΔU_g pour le gaz contenu dans le compartiment de gauche et déduire de ce qui précède le transfert thermique Q reçu par le gaz, conséquence de l'effet Joule dans le conducteur ohmique.

❑ Exercice 19.4. Détente de Joule et Gay-Lussac

Au XIX^e siècle, James JOULE et Louis Joseph GAY-LUSSAC imaginaient le dispositif suivant pour étudier les propriétés des gaz réels. Deux compartiments aux parois calorifugées et indéformables communiquent par un robinet. Ce robinet, initialement fermé, sépare le compartiment (1), de volume V_1, initialement rempli d'une quantité n de gaz en équilibre à la température T_1, du compartiment (2), de volume V_2, dans lequel on a fait le vide. On ouvre le robinet et on attend l'établissement d'un nouvel équilibre, caractérisé par une température T_F du gaz.

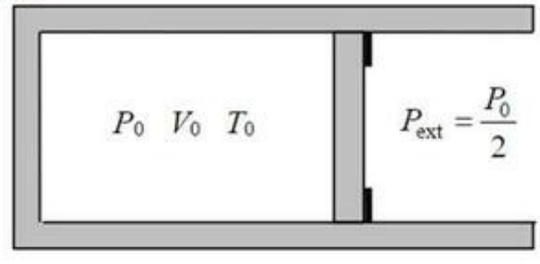
1. Montrer que l'énergie interne U du gaz ne varie pas au cours de la transformation. Cette propriété dépend-elle de la nature du gaz ?
2. Déterminer la température T_F dans le cas où le gaz subissant la détente est supposé parfait.
3. Supposons maintenant que l'expérience est réalisée avec de l'argon, assimilé à un gaz réel de Van der Waals d'énergie interne : $U = nC_{Vm}T - \dfrac{n^2 a}{V}$ avec $C_{Vm} = 12\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et a une constante positive caractéristique du gaz étudié.

a) Nommer la constante C_{Vm} et donner son interprétation physique.

b) Expérimentalement, on constate que la température du gaz diminue au cours de la détente : $\Delta T = T_F - T_I = -5{,}4\ \text{K}$ pour $V_1 = V_2 = 1{,}0\ \text{L}$ et $n = 1{,}0\ \text{mol}$.
En déduire la valeur du coefficient a de l'argon.

❑ Exercice 19.5. Détente d'un gaz parfait

Une certaine quantité n d'un gaz, supposé parfait, est enfermée dans un récipient aux parois parfaitement calorifugées ; l'une des parois est mobile horizontalement, sans frottement.
Dans l'état initial (figure ci-contre), la paroi est bloquée et le gaz occupe alors un volume V_0, à une température T_0 et sous une pression P_0.



On débloque alors la paroi mobile et le gaz se détend spontanément, jusqu'à un nouvel état d'équilibre caractérisé par les paramètres V_1, T_1 et P_1. La pression de l'air extérieur est constante : $P_{ext} = \dfrac{P_0}{2}$. La capacité thermique à volume constant du gaz est $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$.

1. Déterminer la pression finale P_1.
2. Par application du premier principe, déterminer V_1 et T_1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une détente. Le gaz s'est-il réchauffé ou refroidi ?

❑ Exercice 19.6. Calorimétrie par méthode des mélanges

Madame Michu a acheté chez un antiquaire une statue garantie en or massif, de masse $m = 860\ \text{g}$. Pour vérifier sa composition, elle souhaite mesurer la capacité thermique massique c du métal qui la constitue. Pour cela elle plonge la statue, à la température initiale $T_0 = 293\ \text{K}$, dans une masse $m_e = 300\ \text{g}$ d'eau, de température initiale $T_e = 353\ \text{K}$ et de capacité thermique massique $c_e = 4{,}18 \cdot 10^3\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, contenue dans un calorimètre (aux parois parfaitement athermanes) initialement à la température T_e, et elle mesure alors la température finale T_f du système Σ {eau + statue + calorimètre} à l'équilibre thermodynamique.

On définit la masse équivalente en eau du calorimètre μ par la relation $\mu = C_{cal}/c_e$ avec C_{cal} la capacité thermique du calorimètre, sa valeur est $\mu = 40\ \text{g}$. Pendant toute la transformation, le système Σ est en contact avec l'atmosphère où règne une pression P_0.

1. Déterminer la capacité thermique c du solide en fonction de m_0, m, μ, c_e, T_f et T_0. Faire l'application numérique, sachant que la température finale mesurée est $T_f = 346\ \text{K}$.

2. Pour tous les métaux à température ordinaire, la capacité thermique molaire a la même valeur $C_m = 3R = 24{,}9\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ (loi de Dulong et Petit). En déduire la masse molaire du métal constituant la statue et la comparer à celle de l'or ($M_{Au} = 197\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) : Madame Michu s'est-elle fait arnaquer ?

❑ Exercice 19.7. Température d'un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique de résistance $R = 1{,}00\ \text{k}\Omega$, assimilé à une phase condensée idéale de capacité thermique C, est placé dans l'air ambiant dont la température $T_0 = 293\ \text{K}$ (20 °C) est supposée constante. On modélise les transferts thermiques entre ces deux systèmes en supposant que le conducteur ohmique à la température T reçoit pendant un intervalle de temps dt un transfert thermique infinitésimal $\delta Q = a(T_0 - T)\text{d}t$ de la part de l'atmosphère. À partir de $t = 0$, le conducteur ohmique est parcouru par un courant d'intensité $I = 100\ \text{mA}$ constante.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T du conducteur ohmique pour $t \geq 0$. Quel est la durée caractéristique τ du phénomène décrit par cette équation ?

2. Au bout d'un temps suffisamment long, le conducteur ohmique atteint une température limite $T_1 = 313\ \text{K}$ (40 °C). En déduire la valeur du coefficient a.

❑ Exercice 19.8. Variation des fonctions d'état

Une masse $m = 1{,}00\ \text{kg}$ d'éther liquide est entièrement vaporisée à la température constante de 34,6 °C sous sa pression de vapeur saturante $P_{sat} = 1{,}01\ \text{bar}$. L'éther gazeux est assimilé à un gaz parfait.

Calculer la variation d'enthalpie et la variation d'énergie interne de l'éther.

Données : constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; enthalpie massique de vaporisation de l'éther $\Delta_{vap}h = 377\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 34,6 °C ; masse molaire de l'éther $M = 74{,}1\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 19.9. Thermoplongeur de voyage



Toto possède un thermoplongeur de voyage, constitué d'un serpentin métallique fournissant par effet Joule une puissance thermique constante $\mathcal{P}_{th} = 300$ W. Elle souhaite utiliser ce thermoplongeur pour chauffer à l'air libre une masse $m = 200$ g d'eau liquide, initialement à la température $T_0 = 293$ K (20 °C) contenue dans une tasse de capacité thermique négligeable. On négligera les transferts thermiques avec l'air environnant.

1. Calculer le temps τ_1 au bout duquel l'eau se met à bouillir.

2. Toto, étourdi, laisse l'eau bouillir entièrement sans débrancher le thermoplongeur. Calculer le temps τ_2 au bout duquel toute l'eau s'est vaporisée.

Données : $c = 4{,}18$ kJ·K^{-1}·kg^{-1} (capacité thermique de l'eau liquide)

et $\Delta_{vap}h = 2{,}25 \cdot 10^3$ kJ·kg^{-1} (enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à 100 °C).

❑ Exercice 19.10. Échauffement isochore d'un mélange diphasé*

Une enceinte de volume $V = 1{,}00$ L contient à l'équilibre $m_g = 0{,}600$ g de vapeur d'eau et $m_\ell = 0{,}400$ g d'eau liquide à la température $T = 373$ K (100 °C) pour laquelle la pression de vapeur saturante est $P_{sat} = 1{,}01$ bar. On chauffe réversiblement ce mélange à volume constant jusqu'à la température $T' = 383$ K (110 °C) pour laquelle la pression de vapeur saturante est $P'_{sat} = 1{,}32$ bar. Le système est alors toujours à l'équilibre liquide-vapeur.

1. Déterminer la nouvelle composition du système à l'équilibre.

2. Calculer le transfert thermique Q qu'il a fallu fournir pour réaliser cette transformation.

Données : $R = 8{,}31$ J·K^{-1}·mol^{-1} la constante des gaz parfaits ; $\Delta_{vap}h = 2{,}26 \cdot 10^3$ kJ·kg^{-1} et $\Delta_{vap}h' = 2{,}23 \cdot 10^3$ kJ·kg^{-1} les enthalpies massiques de vaporisation de l'eau respectivement à 100 °C et 110 °C ; $c = 4{,}18 \cdot 10^3$ J·K^{-1}·kg^{-1} la capacité thermique massique de l'eau ; et $\rho = 1{,}00$ kg·L^{-1} la masse volumique de l'eau (sur le domaine de températures considéré, c et ρ sont supposées constantes).

❑ Exercice 19.11. Surfusion du phosphore

Certains corps purs sont susceptibles d'exister à l'état liquide, sous une pression donnée, à une température inférieure à leur température de fusion : c'est le phénomène de surfusion. Il nécessite des conditions expérimentales particulières (composition très pure, refroidissement brusque...) et peut cesser dès qu'on introduit un cristal de solide ou une impureté, ou si on agite le liquide. (Cet état de surfusion est dit métastable : la moindre perturbation fait revenir le système à l'état d'équilibre stable.)

On considère ici un récipient calorifugé contenant une masse m = 10,0 g de phosphore liquide surfondu à la température $T = 307$ K sous la pression atmosphérique.

1. On fait cesser la surfusion et on observe un nouvel état d'équilibre diphasé du phosphore. Déterminer les masses des deux phases.

2. Quel serait l'état final du système si on faisait cesser la surfusion d'une même masse de phosphore initialement à la température $T' = 290{,}5$ K ?

Données pour le phosphore : $T_{fus} = 317$ K et $\ell_{fus}(T_{fus}) = 20{,}9$ kJ·kg^{-1} sous cette pression ; capacités thermiques $c_{liq} = 795$ J·kg^{-1}·K^{-1} pour le liquide (valeur constante dans l'intervalle de température considéré) et $c_{sol} = 840$ J·kg^{-1}·K^{-1} pour le solide (idem).

❑ Exercice 19.12. Mélange d'eau sous trois états * *

On introduit dans un calorimètre aux parois athermanes et de capacité thermique négligeable :

- une masse $m_1 = 100$ g de glace à la température $T_1 = 273$ K (0 °C) ;
- une masse $m_2 = 250$ g d'eau liquide à la température $T_2 = 293$ K (20 °C) ;
- une masse $m_3 = 100$ g de vapeur d'eau à la température $T_3 = 373$ K (100 °C).

On suppose que la transformation a lieu à pression constante $P = 1{,}01$ bar. Déterminer la composition et la température finales.

On donne : $\Delta_{fus}h = 3{,}35 \cdot 10^2$ kJ·kg^{-1} (enthalpie massique de fusion de la glace à 0 °C), $c = 4{,}18$ kJ·K^{-1}·kg^{-1} (capacité thermique de l'eau liquide) et $\Delta_{vap}h = 2{,}25 \cdot 10^3$ kJ·kg^{-1} (enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à 100 °C).

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 19.2. À la question 2.c, exprimer le produit PV_m en fonction de P et simplifier l'expression obtenue dans l'hypothèse d'une transformation isotherme d'un gaz réel aux faibles pressions et faibles densités.

Exercice 19.3. À la question 2, on pourra utiliser les relations de Laplace.

Exercice 19.5. Pour la question 1, il suffit de se poser la question : pourquoi le piston s'arrête-t-il ?

Exercice 19.6. La transformation est monobare : appliquer le premier principe au système complet (calorifugé) en utilisant l'enthalpie.

Exercice 19.7. Quelle forme du premier principe, globale ou infinitésimale, a-t-elle selon vous le plus de chance d'aboutir à une équation différentielle ?

Exercice 19.10. À la question 2, il faut montrer que Q correspond à la variation d'une fonction d'état et imaginer un chemin pour calculer cette variation.

Exercice 19.12. Il y a beaucoup d'hypothèses possibles : pour avoir une idée de l'état final, évaluer par un calcul d'ordres de grandeur la quantité de vapeur nécessaire pour faire fondre la glace et amener à 100 °C toute l'eau du calorimètre (celle initialement présente et celle résultant de la fonte de la glace).

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	faux	vrai

1. Par exemple, lors d'une transformation brutale (explosion…), la pression n'est pas définie.

2. C'est la pression *extérieure* qui est constante.

3. La transformation est monotherme donc $T_{ext} = \text{cte}$, et également réversible donc à chaque instant $T = T_{ext}$: on en déduit $T = \text{cte}$.

4. Dans le cas général, le travail des forces de pression fait intervenir P_{ext} et non P.

6. Il faut aussi que le gaz soit *parfait* pour pouvoir appliquer les relations de Laplace.

7. On trouve $\Delta H = Q$ pour certaines transformations (isobare…) : c'est une propriété qui justifie l'utilisation de l'enthalpie, mais ce n'est pas la définition de l'enthalpie ($H = U + PV$).

8. Si dans le même temps il se détend, donc fournit du travail ($W < 0$), son énergie interne peut diminuer ou rester constante, donc sa température également.

9. $\Delta U = \Delta(H - PV) = \Delta H - P_{sat}\Delta V \neq 0$ *a priori*.

❑ Les erreurs classiques

– La formule générale du travail des forces de pression fait intervenir P_{ext} et non P. Ce n'est que dans le cas *réversible* qu'on remplacera P_{ext} par P.
– Ne pas appliquer les relations de Laplace si toutes les hypothèses ne sont pas vérifiées (gaz parfait à γ constant, transformation adiabatique et réversible).
– Ne pas écrire le premier principe avant d'avoir défini clairement à quel système on l'applique, et entre quels états (ou quels instants).
– Quand un corps est susceptible d'exister sous différentes phases, on est amené à faire une hypothèse sur l'état final : attention à ne pas oublier de vérifier *a posteriori* la validité de cette hypothèse. Par exemple, il est peu probable que la température finale d'un mélange à l'équilibre eau liquide/glace soit de 150 °C...

Exercice 19.1

La transformation β est isotherme donc $\boxed{T_B = T_A}$. Alors $P_B V_B = P_A V_A$ (gaz parfait), donc $\boxed{V_B = V_A/3}$.

⇨ *Méthode 19.3*

De plus, sur une isotherme réversible : $W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$ soit $\boxed{W_\beta = W_{AB} = P_A V_A \ln 3}$.

⇨ *Méthode 19.1*

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température donc sur l'isotherme AB, $\Delta U_\beta = \Delta U_{AB} = 0$. D'après le premier principe, on a alors $Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB}$ d'où $\boxed{Q_\beta = Q_{AB} = -P_A V_A \ln 3}$.

⇨ *Méthode 19.2*

AC est isochore donc $W_{AC} = 0$; CB est isobare donc $W_{CB} = -P_B(V_B - V_A)$ soit $W_{CB} = 2P_A V_A$. Finalement, $\boxed{W_\alpha = W_{AC} + W_{CB} = 2P_A V_A}$. L'énergie interne est une fonction d'état donc $\Delta U_\alpha = \Delta U_\beta = 0$. D'après le premier principe, on a alors $Q_\alpha = \Delta U_\alpha - W_\alpha$ d'où $\boxed{Q_\alpha = -2P_A V_A}$.

Exercice 19.2

1. Pour une mole, $\delta W_m = -P_{ext}\,dV_m = -P\,dV_m$ (transformation réversible). D'après l'équation d'état, et avec $T = T_0 = \text{cte}$ (transformation isotherme) : $W_m = -\int_{V_{m1}}^{V_{m2}} \left(\frac{RT_0}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}\right) dV_m$ soit

$$\boxed{W_m = RT_0 \ln\left(\frac{V_{m1} - b}{V_{m2} - b}\right) - a\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)}.$$

⇨ *Méthode 19.1*

2. a) On a $\ln\left(\frac{V_{m1} - b}{V_{m2} - b}\right) = \ln\left(\frac{V_{m1}}{V_{m2}}\right) + \ln\left(\frac{1 - b/V_{m1}}{1 - b/V_{m2}}\right)$. Avec un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{b}{V_m}$, le 2e terme devient : $\ln\left(\frac{1 - b/V_{m1}}{1 - b/V_{m2}}\right) = \ln\left(1 - \frac{b}{V_{m1}}\right) - \ln\left(1 - \frac{b}{V_{m2}}\right) \approx b\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)$

d'où $\boxed{W_m = RT_0 \ln\left(\frac{V_{m1}}{V_{m2}}\right) + (RT_0 b - a)\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)}$. Le cas du gaz parfait est obtenu pour $a = 0$ et $b = 0$ d'où $\boxed{W_{mGR} = W_{mGP} + (RT_0 b - a)\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)}$ avec $\boxed{W_{mGP} = RT_0 \ln\left(\frac{V_{m1}}{V_{m2}}\right)}$.

b) $W_{\text{mGR}} = W_{\text{mGP}}$ pour $RT_0 b - a = 0$ soit $\boxed{T_0 = \dfrac{a}{Rb}}$ (température de Mariotte).

c) Le diagramme d'Amagat correspond à $PV = f(P)$ [ou $PV_{\text{m}} = f(P)$]. Pour le gaz de Van der Waals considéré, $PV_{\text{m}} = RT\left(\dfrac{V_{\text{m}}}{V_{\text{m}} - b}\right) - \dfrac{a}{V_{\text{m}}} = RT\left(1 - \dfrac{b}{V_{\text{m}}}\right)^{-1} - \dfrac{a}{V_{\text{m}}}$. L'étude de la tangente horizontale correspond à l'étude du comportement du gaz aux faibles pressions. Dans ce cas, le comportement du gaz tend vers celui du gaz parfait. En particulier, $P \approx \dfrac{RT}{V_{\text{m}}} \to 0$.

Ainsi, $PV_{\text{m}} \approx RT\left(1 + \dfrac{b}{V_{\text{m}}}\right) - \dfrac{a}{V_{\text{m}}} \approx RT + \dfrac{1}{V_{\text{m}}}(RTb - a) = RT + \left(b - \dfrac{a}{RT}\right)P$ d'où

$\left.\dfrac{\mathrm{d}(PV_{\text{m}})}{\mathrm{d}P}\right)_{T=T_0} = b - \dfrac{a}{RT_0} = 0$ pour $\boxed{T_0 = \dfrac{a}{Rb}}$. On retrouve la température de Mariotte.

Exercice 19.3

1. Équilibre mécanique du piston : $\boxed{P_{\text{d}} = P_{\text{g}} = 5P_0}$. Le chauffage étant lent, le mouvement du piston sans frottements et le cylindre et les parois calorifugés, on peut supposer que le gaz parfait contenu dans le compartiment de droite, soumis aux seules forces de pression, subit une transformation adiabatique et réversible. L'application des relations de Laplace conduit alors à $P_{\text{d}}V_{\text{d}}^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$ d'où $\boxed{V_{\text{d}} = 5^{-1/\gamma} V_0}$.

⇨ *Méthode 19.5*

Conservation de la quantité de matière et loi des gaz parfaits dans le compartiment de droite : $nR = \dfrac{P_{\text{d}}V_{\text{d}}}{T_{\text{d}}} = \dfrac{P_0 V_0}{T_0}$ d'où $\boxed{T_{\text{d}} = 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0}$.

⇨ *Méthode 19.3*

Le volume total du cylindre reste inchangé d'où $2V_0 = V_{\text{d}} + V_{\text{g}}$. On en déduit $\boxed{V_{\text{g}} = \left(2 - 5^{-1/\gamma}\right)V_0}$. Enfin, la conservation de la quantité de matière et loi des gaz parfaits dans le compartiment de gauche fournit $\dfrac{P_{\text{g}}V_{\text{g}}}{T_{\text{g}}} = \dfrac{P_0 V_0}{T_0}$ soit $\boxed{T_{\text{g}} = \left(10 - 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)T_0}$.

2. Le gaz contenu dans le compartiment de droite subit une transformation adiabatique : $\boxed{Q_{\text{d}} = 0}$. La variation d'énergie interne du gaz parfait contenu dans le compartiment de droite s'écrit $\Delta U_{\text{d}} = C_V(T_{\text{d}} - T_0)$ soit $\boxed{\Delta U_{\text{d}} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\left(5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)T_0}$. L'application du premier principe à ce même gaz conduit alors à $\Delta U_{\text{d}} = W_{\text{d}}$ d'où $\boxed{W_{\text{d}} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\left(5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)T_0}$.

3. La variation d'énergie interne du gaz parfait contenu dans le compartiment de gauche s'écrit $\Delta U_g = C_V(T_g - T_0)$ soit $\boxed{\Delta U_g = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(9 - 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)T_0}$. Le premier principe appliqué au système {gaz de gauche + gaz de droite + paroi mobile}, compte tenu du fait que l'évolution est globalement isochore (donc $W = 0$) s'écrit $\Delta U + \Delta E_m = Q$. La variation d'énergie mécanique provient exclusivement de la paroi mobile. Cependant, comme son altitude est constante et que par définition, la transformation s'effectue entre deux états d'équilibre où la paroi mobile est donc au repos, alors $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$. En outre, l'énergie interne est une fonction extensive : en négligeant la variation d'énergie interne de la paroi mobile, on a $\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_d$. Finalement, on obtient $\boxed{Q = \frac{8nR}{\gamma - 1}T_0}$.

Exercice 19.4

1. Appliquons le premier principe au système {gaz + vide} au repos macroscopique : $\Delta U_\Sigma = W + Q$. Les parois des enceintes étant rigides, le travail des forces de pression est nul : $W = 0$; comme ces dernières sont aussi calorifugées, la transformation est adiabatique : $Q = 0$. Dans ce cas, on a $\Delta U_\Sigma = 0$. Or, par extensivité de l'énergie interne, $U_\Sigma = U + U_{vide}$. Comme $U_{vide} = 0$, on en déduit le résultat demandé : $\boxed{\Delta U = 0}$ pour un gaz subissant une détente de Joule Gay-Lussac. Ce résultat ne dépend pas de la nature du gaz.

2. Pour un gaz parfait, on a $\Delta U = C_V \Delta T$. Comme $C_V \neq 0$, on en déduit que $\Delta T = T_F - T_I = 0$, d'où $\boxed{T_F = T_I}$ pour un gaz parfait.

3. a) Pour $\frac{n}{V} \to 0$, on a $U \to nC_{Vm}T = U^{GP}$. Dans ce cas, $\Delta U^{GP} = nC_{Vm}\Delta T$: on en déduit que la constante C_{Vm} est la capacité thermique molaire à volume constant du gaz parfait vers lequel tend le gaz réel aux faibles concentrations molaires.

b) En écrivant $\Delta U = 0$ on obtient, compte tenu de l'équation d'état : $nC_{Vm}T_I - \frac{n^2 a}{V_1} = nC_{Vm}T_F - \frac{n^2 a}{V_1 + V_2}$ d'où $\boxed{a = -\frac{V_1(V_1 + V_2)}{V_2}\frac{C_{Vm}}{n}\Delta T}$. AN $\boxed{a = 0{,}13\ \text{J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2}}$.

Exercice 19.5

1. L'état final est un état d'équilibre donc la paroi mobile ne bouge plus. On lui applique alors le théorème de la quantité de mouvement : $m\vec{g} + \vec{R_n} + \vec{F}_{p_1} + \vec{F}_{p\,ext} = \vec{0}$.

Projection sur la direction horizontale : $+P_1 S - \frac{P_0}{2}S = 0$ d'où $\boxed{P_1 = \frac{P_0}{2}}$.

2. Premier principe pour le gaz contenu dans le récipient, entre l'état initial et l'état final : $\Delta U = W + Q$. Toutes les parois sont calorifugées donc $Q = 0$.

Le gaz est parfait donc $\Delta U = C_V(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$.

Et le travail des forces de pression extérieures est :

$W = -\int_{V_0}^{V_1} P_{ext}\,\mathrm{d}V = -\frac{P_0}{2}\int_{V_0}^{V_1}\mathrm{d}V = -\frac{P_0}{2}(V_1 - V_0)$, donc $\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = \frac{P_0}{2}(V_0 - V_1)$.

D'autre part il y a conservation de la matière : $n = \frac{P_0V_0}{RT_0} = \frac{P_0V_1}{2RT_1}$. Alors

$\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = \frac{nRT_0}{2} - nRT_1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\gamma-1}+1\right)T_1 = \left(\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\right)T_0$ d'où $\boxed{T_1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma}T_0}$: $T_1 < T_0$ puisque $\gamma > 1$, donc le gaz s'est refroidi.

Enfin $V_1 = V_0\frac{2T_1}{T_0}$ soit $\boxed{V_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma}V_0}$: $V_1 > V_0$ donc il s'agit bien d'une détente.

Exercice 19.6

1. Pendant la transformation, le système Σ {eau + statue + calorimètre} est en contact avec l'atmosphère où règne une pression P_0. Il subit donc une transformation monobare telle que $P_I = P_F = P_{ext} = P_0$: $\Delta H_\Sigma = Q$. Or les parois du calorimètre sont athermanes : $Q = 0$ d'où $\Delta H_\Sigma = 0$. L'enthalpie est une fonction extensive donc $\Delta H_\Sigma = \Delta H_{calorimètre} + \Delta H_{eau} + \Delta H_{statue}$ soit $\Delta H_\Sigma = C_{cal}(T_f - T_e) + m_e c_e(T_f - T_e) + mc(T_f - T_0) = (\mu + m_e)c_e(T_f - T_e) + mc(T_f - T_0) = 0$.

Finalement, on obtient $\boxed{c = \frac{(\mu + m_e)c_e(T_e - T_f)}{m(T_f - T_0)}}$. AN $\boxed{c = 218\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}}$.

2. $mc = nC_m = \frac{m}{M}C_m$ donc $\boxed{M = \frac{C_m}{c}}$. AN $\boxed{M = 114\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}}$: Madame Michu s'est fait avoir !

Exercice 19.7

1. Appliquons le premier principe au conducteur ohmique sous sa forme infinitésimale : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. D'après l'énoncé, le transfert thermique élémentaire reçu par le système au contact de l'atmosphère s'écrit $\delta Q = a(T_0 - T)\mathrm{d}t$. En outre, le courant qui parcourt le conducteur ohmique fournit à celui-ci pendant $\mathrm{d}t$ un travail électrique élémentaire $\delta W = RI^2\mathrm{d}t$. Enfin, pour le conducteur ohmique assimilé à une phase condensée idéale de capacité C, on peut écrire $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T$. Finalement : $C\mathrm{d}T = a(T_0 - T)\mathrm{d}t + RI^2\mathrm{d}t$ soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{a}{C}T = \frac{a}{C}T_0 + \frac{RI^2}{C}}$. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants de constante de temps $\boxed{\tau = \frac{C}{a}}$.

2. La température limite T_1 correspond à la solution particulière de l'équation précédente. On a ainsi : $0 + \frac{a}{C}T_1 = \frac{a}{C}T_0 + \frac{RI^2}{C}$ d'où $\boxed{a = \frac{RI^2}{T_1 - T_0}}$. AN $\boxed{a = 5{,}00\ \mathrm{W\cdot K^{-1}}}$.

Exercice 19.8

Sur le palier de liquéfaction, la variation d'enthalpie est donnée par $\boxed{\Delta H = m\Delta_{\text{vap}}h}$. AN $\boxed{\Delta H = 377\ \text{kJ}}$. La variation d'énergie interne s'écrit $\Delta U = \Delta(H - PV) = \Delta H - P_{\text{sat}}\Delta V$. Le liquide est entièrement vaporisé au cours de la transformation donc $\Delta V = V_{\text{g}} - V_{\ell} \approx V_{\text{g}}$ (on néglige le volume de la phase liquide devant celui de la phase gazeuse). L'éther gazeux étant assimilé à un gaz parfait, $V_{\text{g}} = \dfrac{nRT_0}{P_{\text{sat}}}$ d'où finalement $\boxed{\Delta U = m\left(\Delta_{\text{vap}}h - \dfrac{RT_0}{M}\right)}$. AN $\boxed{\Delta U = 342\ \text{kJ}}$.

Exercice 19.9

1. Le chauffage a lieu à l'air libre, donc la transformation est monobare. Le premier principe s'écrit alors $\Delta H = Q_P$. Or $Q_P = \mathcal{P}_{\text{th}}\,\Delta t$ (la puissance étant constante), et $\Delta H = mc\Delta T$ (phase condensée idéale), donc $mc\Delta T = \mathcal{P}_{\text{th}}\,\Delta t$. L'eau se met à bouillir dès que $T(\tau_1) = T_1 = 373\ \text{K}$ (soit $\theta_1 = 100\ °\text{C}$), d'où $\boxed{\tau_1 = \dfrac{mc(T_1 - T_0)}{\mathcal{P}_{\text{th}}}}$. AN $\boxed{\tau_1 = 220\ \text{s} = 3\ \text{min}\ 40\ \text{s}}$.

2. À partir de l'apparition de la première bulle de vapeur à $t = \tau_1$, l'eau se vaporise progressivement sur le palier de liquéfaction jusqu'à $t = \tau_2$. Pour calculer la variation d'enthalpie correspondante, on imagine une transformation réversible isotherme et isobare : on a alors toujours $\Delta H = Q_P = \mathcal{P}_{\text{th}}\,\Delta t$ mais avec cette fois $\Delta H = m\Delta_{\text{vap}}h$, soit $m\Delta_{\text{vap}}h = \mathcal{P}_{\text{th}}\,\Delta t = \mathcal{P}_{\text{th}}\,(\tau_2 - \tau_1)$, d'où $\tau_2 = \tau_1 + \dfrac{m\Delta_{\text{vap}}h}{\mathcal{P}_{\text{th}}}$.

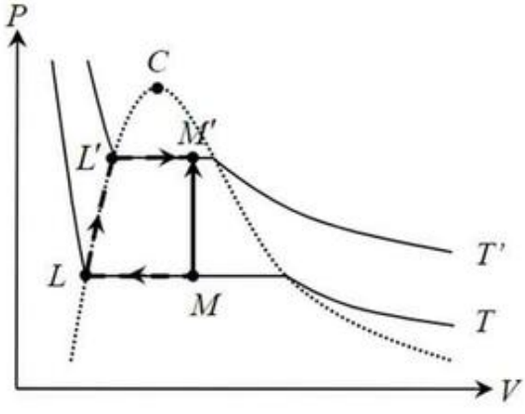
En injectant dans cette expression celle de τ_1 déterminée précédemment, on obtient finalement :

$\boxed{\tau_2 = \dfrac{m}{\mathcal{P}_{\text{th}}}\left[c(T_1 - T_0) + \Delta_{\text{vap}}h\right]}$. AN $\boxed{\tau_2 = 1720\ \text{s} = 29\ \text{min}}$.

Exercice 19.10

1. La fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par $x'_{\text{g}} = \dfrac{v - v_{\ell}}{v'_{\text{g}} - v_{\ell}}$, avec $v = \dfrac{V}{m}$ ($m = m_{\text{g}} + m_{\ell}$), $v_{\ell} = \dfrac{1}{\rho}$ et $v_{\text{g}} = \dfrac{RT'}{MP'_{\text{sat}}}$. Avec les données numériques fournies, on a $v = 1{,}00\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, $v_{\ell} = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, $v'_{\text{g}} = 1{,}34\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $x'_{\text{g}} = 0{,}740$, soit une masse de gaz $\boxed{m'_{\text{g}} = mx'_{\text{g}} = 0{,}740\ \text{g}}$; la masse de liquide est alors $\boxed{m'_{\ell} = m - m'_{\text{g}} = 0{,}260\ \text{g}}$.

2. La transformation étant isochore, en appliquant le premier principe au mélange diphasé, on obtient $Q = \Delta U$.



On peut alors utiliser le fait que U est une fonction d'état pour décomposer la transformation complexe sur un chemin sur lequel la variation d'énergie interne se calcule simplement à chaque étape.

– Sur ML, on liquéfie une masse m_g de vapeur à la température T et à la pression P_{sat} :

$\Delta U_{ML} = \Delta H_{ML} - P_{sat}(0 - V) = -m_g \Delta_{vap} h + P_{sat} V$ (en négligeant le volume final du liquide).

AN $\Delta U_{ML} = -1{,}26 \cdot 10^3$ J.

– Sur LL', on chauffe une masse m d'eau liquide de T à T' : $\Delta U_{LL'} = mc(T' - T)$.

AN $\Delta U_{LL'} = 41{,}8$ J.

– Sur $L'M'$, on vaporise une masse m'_g d'eau liquide :

$\Delta U_{L'M'} = \Delta H_{L'M'} - P'_{sat}(V - 0) = m'_g \Delta_{vap} h' - P'_{sat} V$. AN $\Delta U_{L'M'} = +1{,}52 \cdot 10^3$ J.

Finalement, on obtient $Q = \Delta U_{ML} + \Delta U_{LL'} + \Delta U_{L'M'}$. AN $\boxed{Q = 305 \text{ J}}$.

⇨ *Méthode 19.5*

Exercice 19.11

1. État initial : liquide seul, T = 307 K. État final : diphasé, T_{fus} = 317 K (puisque l'équilibre diphasé, sous la pression atmosphérique, ne peut exister qu'à cette température). Deux choses se sont donc produites simultanément : changement de température et changement d'état.

Premier principe pour cette transformation monobare : $\Delta H = Q = 0$ (récipient calorifugé). Or H est une fonction d'état donc on peut exprimer ΔH en imaginant un chemin où il y aurait *d'abord* le changement de température seul (l'ensemble restant liquide) *puis* la solidification d'une partie (m_{sol}) de la masse totale (à T_{fus}, seule température pour laquelle on connaît L_{fus}).

Alors $\Delta H = m c_{liq}(T_{fus} - T) - m_{sol} L_{fus} = 0$ d'où $\boxed{m_{sol} = \dfrac{m c_{liq}(T_{fus} - T)}{L_{fus}}}$. AN $\boxed{m_{sol} = 3{,}8\,\text{g}}$ (donc $m_{liq} = 6{,}2\,\text{g}$).

⇨ *Méthode 19.6*

2. – Hypothèse : état final diphasé comme précédemment. On reprend alors le même calcul, qui donne $m_{sol} = 10{,}1\,\text{g}$: l'hypothèse est donc fausse puisqu'on trouve $m_{sol} > m$.

– Hypothèse : <u>état final monophasé solide</u> (ce que suggère le résultat précédent). Alors il reste à déterminer la température finale T_f. Pour cela on utilise toujours $\Delta H = 0$, en imaginant un chemin comportant successivement : changement de température du liquide seul (de T' à T_{fus}) ; solidification complète à T_{fus} ; changement de température du solide seul (de T_{fus} à T_f).

$\Delta H = m c_{liq}(T_{fus} - T') - m L_{fus} + m c_{sol}(T_f - T_{fus}) = 0$ d'où $T_f = T_{fus} - \dfrac{c_{liq}(T_{fus} - T') - L_{fus}}{c_{sol}}$.

AN $\boxed{T_f = 316{,}8\,\text{K}}$. On trouve bien $T_f < T_{fus}$, ce qui <u>valide l'hypothèse</u>.

Exercice 19.12

Commençons par analyser les données pour avoir une idée de l'état final.
Comme les transformations ont lieu dans un calorimètre aux parois athermanes, toute l'énergie libérée par un changement d'état peut directement servir à induire un autre changement d'état, ou une variation de température. En particulier, pour faire fondre 100 g de glace, il suffit de liquéfier $0{,}100 \cdot 3{,}35 \cdot 10^2 / 2.25 \cdot 10^3 = 14{,}9$ g de vapeur. Pour amener les 100 g d'eau formés de 0 °C à 100 °C, il faut encore liquéfier $0{,}100 \cdot 4{,}18 \cdot 100 / 2.25 \cdot 10^3 = 18{,}6$ g de vapeur. Enfin, pour porter de 20 °C à 100 °C les 250 g d'eau initialement introduits, il faut liquéfier $0{,}250 \cdot 4{,}18 \cdot 80 / 2.25 \cdot 10^3 = 37{,}2$ g de vapeur. Au total, en liquéfiant 70,7 g de vapeur, on fait fondre toute la glace et on porte toute l'eau du calorimètre à 100 °C.
On suppose donc que l'état final est un mélange à l'équilibre d'eau liquide et de vapeur d'eau à 100 °C.

> *On se rend compte ici de l'importance de ces calculs d'ordre de grandeur. En l'absence de ces derniers, il est difficile de prévoir l'état d'équilibre du système : on risque alors de faire de longs calculs sur une hypothèse erronée.*

La transformation est monobare et adiabatique donc $\Delta H = Q_P = 0$. L'enthalpie étant une fonction d'état extensive, on décompose la transformation de manière à avoir $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 = 0$ avec :

- $\Delta H_1 = m_1 \Delta_{\text{fus}} h$ (fusion d'une masse m_1 de glace) ;
- $\Delta H_2 = m_1 c (T_3 - T_1)$ (chauffage jusque 100 °C de l'eau formée) ;
- $\Delta H_3 = m_2 c (T_3 - T_2)$ (chauffage jusque 100 °C de l'eau initialement présente) ;
- $\Delta H_4 = x_\ell m_3 \Delta_{\text{liq}} h = -x_\ell m_3 \Delta_{\text{vap}} h = -(1 - x_g) m_3 \Delta_{\text{vap}} h$ (liquéfaction d'une fraction massique x_ℓ de vapeur d'eau).

Finalement, $m_1 \Delta_{\text{fus}} h + m_1 c (T_3 - T_1) + m_2 c (T_3 - T_2) - (1 - x_g) m_3 \Delta_{\text{vap}} h = 0$, d'où on tire :

$$x_g = 1 - \frac{m_1 \Delta_{\text{fus}} h + m_1 c (T_3 - T_1) + m_2 c (T_3 - T_2)}{m_3 \Delta_{\text{vap}} h}.$$

AN $x_g = 0{,}294 = 29{,}4\,\%$: on trouve bien $0 \leq x_g \leq 1$ donc l'hypothèse est la bonne.

Le mélange final est donc constitué de 29,4 g de vapeur d'eau (soit 29,4 % des 100 g de départ) et de 420 g d'eau liquide (la masse totale étant 450 g), en équilibre à la température finale $\boxed{T_3 = 373 \text{ K}}$ ($\theta_3 = 100$ °C).

⇨ *Méthode 19.6*

Chapitre 20

Deuxième principe de la thermodynamique

UN SCIENTIFIQUE



Rudolf Clausius (1822-1888) étudie à Stettin puis à Berlin et se spécialise en physique mathématique. Il s'interroge sur le statut de la chaleur. Reprenant les idées de James Joule et de Sadi Carnot, il met en équation le lien entre la chaleur et l'énergie mécanique. Il introduit la notion d'entropie en thermodynamique. Par ailleurs, Clausius a fourni des travaux intéressants en théorie statistique des gaz et en électromagnétisme.

Un peu d'histoire

Le deuxième principe de la thermodynamique est en filigrane dans le texte de Sadi Carnot publié en 1824. C'est cependant William Thomson, alias Lord Kelvin, qui en fournit la première formulation en 1850. C'est indépendamment, la même année mais un peu différemment que Rudolf Clausius l'énonce lui aussi. Il explicite la transformation de chaleur en énergie et se rend compte que c'est un processus irréversible, ce qui l'amène à introduire en 1865 la notion d'entropie.

L'étude des gaz permet d'affiner ces notions avec Ludwig Boltzmann. Le savant autrichien reformule la notion d'entropie en 1878, dans le cadre de la physique statistique, sous l'aspect d'ordre et de désordre correspondant respectivement au travail et à la chaleur. En 1894, Max Planck cherche à reformuler ce principe, ce qui l'amène à étudier les corps noirs et à introduire la constante de Planck.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'énoncé du deuxième principe de la thermodynamique
- ▷ L'expression de l'entropie échangée avec un thermostat
- ▷ L'expression de l'entropie massique de transition de phase

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Retrouver les relations de Laplace pour une transformation isentropique d'un gaz parfait de coefficient γ constant
- ▷ Utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase
- ▷ Calculer l'entropie créée au cours d'une transformation, et la relier à une ou plusieurs causes physiques d'irréversibilité
- ▷ Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann

■■ Résumé de cours

■ Deuxième principe de la thermodynamique

❑ Énoncé

Pour tout système thermodynamique fermé, il existe une fonction d'état extensive S appelée **entropie**, dont la variation se décompose en un terme d'échange δ_e et un terme de création δ_c.

Pour une transformation globale entre deux états I et F, le deuxième principe de la thermodynamique s'écrit donc $\boxed{\Delta S = \delta_e + \delta_c}$ avec :

- $\boxed{\delta_e = \sum_i \frac{Q_i}{T_{th,i}}}$ où Q_i est le transfert thermique reçu par le système au contact d'un thermostat de température $T_{th,i}$;
- $\boxed{\delta_c \geq 0}$, l'égalité $\delta_c = 0$ correspondant au cas d'une transformation réversible.

⇨ Méthode 20.3. Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur l'Univers
⇨ Méthode 20.4. Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur un sous-système donné

❑ Cas d'un système isolé

Pour un système isolé, il ne peut y avoir d'échange d'entropie donc $\Delta S = \delta_c \geq 0$.

Ainsi, l'entropie d'un système isolé (en particulier l'entropie de l'Univers) ne peut pas décroître : elle croît jusqu'à une valeur maximale correspondant à l'équilibre.

■ Variation d'entropie de quelques systèmes caractéristiques

❑ Gaz parfait

$$S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln T + nR\ln V + \text{cte} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln T - nR\ln P + \text{cte} = \frac{nR}{\gamma-1}\ln P + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln V + \text{cte} \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{T_F}{T_I} + nR\ln\frac{V_F}{V_I} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_F}{T_I} - nR\ln\frac{P_F}{P_I} = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\frac{P_F}{P_I} + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V_F}{V_I}} \text{ si } \gamma = \text{cte}.$$

Pour une évolution isentropique (en particulier une adiabatique réversible) d'un gaz parfait de coefficient γ constant, $\Delta S = 0$ donc les variables d'état vérifient les relations de Laplace :

$$\boxed{PV^\gamma = \text{cte}} \quad \Leftrightarrow \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}.$$

❑ Phase condensée idéale

Pour une phase condensée idéale telle que $C = \text{cte}$: $S = C\ln T + \text{cte}$ d'où $\boxed{\Delta S = C\ln\frac{T_F}{T_I}}$.

❑ Thermostat

En notant Q_{th} le transfert thermique reçu algébriquement par le thermostat : $\boxed{\Delta S_{th} = \dfrac{Q_{th}}{T_{th}}}$.

⇨ **Méthode 20.1. Calcul d'une variation d'entropie pour différents corps**

❑ Corps pur diphasé

Entropie massique de transition de phase

L'**entropie massique de transition de phase** à la température T est définie comme la différence des entropies massiques d'un corps pur dans la phase 2 et dans la phase 1, à la même température T de changement d'état et à la pression d'équilibre $P = P_{sat}(T)$:

$$\boxed{\Delta_{1\to 2}s(T) = s_2(T) - s_1(T) = \frac{\Delta_{1\to 2}h(T)}{T}} \quad \text{(unité SI : } \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}\text{)}.$$

avec $\Delta_{1\to 2}h(T)$ l'enthalpie massique de transition de phase à la température T.

Variation d'entropie du corps pur diphasé

Au cours d'un changement d'état isotherme entre deux phases 1 et 2, l'entropie massique du système diphasé varie de $\boxed{\Delta s(T) = \Delta x_2 \times \dfrac{\Delta_{1\to 2}h(T)}{T}}$, x_2 étant le titre massique dans la phase 2.

Donc pour une variation Δm_2 de la masse de la phase 2 : $\boxed{\Delta S(T) = \Delta m_2 \times \dfrac{\Delta_{1\to 2}h(T)}{T}}$.

⇨ **Méthode 20.2. Calcul d'une variation d'entropie par décomposition en étapes**

Titre massique en vapeur

Pour un système diphasé liquide-vapeur : $\boxed{x_g = \dfrac{s - s_\ell}{s_g - s_\ell}}$.

■ Interprétation statistique de l'entropie

À un état macroscopique donné, ou **macroétat**, peut correspondre un nombre Ω d'états microscopiques, ou **microétats**. L'entropie peut être définie par la formule de Boltzmann :

$\boxed{S = k_B \ln \Omega}$ avec $k_B = 1{,}381\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$ la constante de Boltzmann.

Seuls les macroétats étant accessibles à la mesure, l'entropie constitue une mesure indirecte du *manque d'information* (sur les microétats du système), ou encore du *désordre* microscopique.

■ Comment calculer une variation d'entropie ?

❑ Méthode 20.1. Calcul d'une variation d'entropie pour différents corps

- Déterminer les grandeurs d'état du système à l'équilibre initial et final.
- Utiliser la relation fournie pour la variation d'entropie ΔS du système étudié.

⇨ Exercices 20.1, 20.2, 20.3

Calculons par exemple la variation d'entropie d'un gaz parfait subissant une détente dans un compartiment vide d'une enceinte calorifugée et indéformable (détente de Joule et Gay-Lussac), qui le fait passer d'un volume initial V_1 à un volume final $V_2 > V_1$.

Appliquons le premier principe au système {gaz + vide} au repos macroscopique : $\Delta U_\Sigma = W + Q$. Les parois de l'enceinte sont rigides : le travail des forces de pression est donc nul, soit $W = 0$. Ces dernières étant aussi calorifugées, la transformation est adiabatique : $Q = 0$. Dans ce cas, on a $\Delta U_\Sigma = 0$. Or, par extensivité de l'énergie interne, $U_\Sigma = U + U_{\text{vide}}$. Comme $U_{\text{vide}} = 0$, on en déduit $\Delta U = 0$. Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, on en déduit que la température T_2 du gaz en fin de détente est égale à la température T_1 du gaz en début de détente, soit $T_2 = T_1$.

Les variables d'état connues au début et à la fin de la transformation sont le volume et la température. On choisit donc la variation d'entropie sous la forme $\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma - 1} \ln \dfrac{T_2}{T_1} + nR \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.

Comme $T_2 = T_1$, on en déduit $\boxed{\Delta S = nR \ln \dfrac{V_2}{V_1}}$.

❑ Méthode 20.2. Calcul d'une variation d'entropie par décomposition en étapes

L'entropie étant une fonction d'état, sa variation sur une transformation complexe peut toujours être calculée en imaginant un chemin en plusieurs étapes, au cours desquelles il ne se passe qu'une chose à la fois : variation de température pour une phase seule, changement d'état à une température donnée. Dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur, ce chemin peut être visualisé sur le diagramme (P, v).

On additionne alors les variations d'entropie sur chacune des étapes, en utilisant les différentes formules :

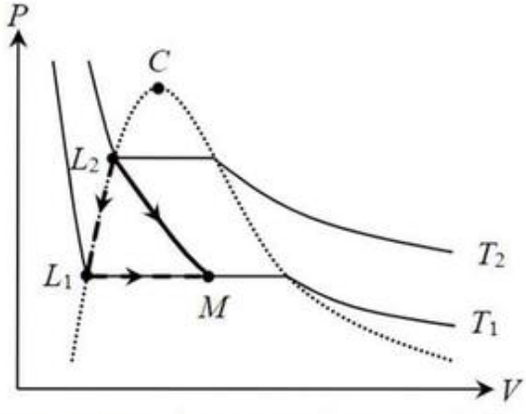
- pour un liquide seul ou un solide seul (considéré comme une phase condensée

idéale de capacité thermique massique c), $\Delta s = c \ln \dfrac{T_2}{T_1}$;

– pour un gaz seul (considéré comme un gaz parfait de masse molaire M), $\Delta s = c_P \ln \dfrac{T_2}{T_1} - \dfrac{R}{M} \ln \dfrac{P_2}{P_1}$;

– pour une transition de phase à la température T, $\Delta s = \Delta x_2 \times \dfrac{\Delta_{1\to 2} h(T)}{T}$ avec Δx_2 la variation du titre massique de la phase 2.

⇨ Exercice 20.7



On fait subir une détente à de l'ammoniac, de l'état liquide L_2 ($P_2 = 6{,}2$ bar, $T_2 = 283$ K) à l'état diphasé M ($P_1 = 1{,}9$ bar, $T_1 = 253$ K). On donne $\Delta_{vap} h(T_1) = 1{,}3 \cdot 10^3$ kJ·kg^{-1} et $c = 4{,}6$ kJ·K^{-1}·kg^{-1} (capacité thermique de l'ammoniac liquide).
Calculer la variation d'entropie massique $\Delta s = s_M - s_{L_2}$ connaissant le titre massique en vapeur final $x_M = 0{,}69$.

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut calculer sa variation sur le chemin L_2L_1M : $\Delta s = \left(s_M - s_{L_1}\right) + \left(s_{L_1} - s_{L_2}\right)$ d'où $\boxed{\Delta s = x_M \dfrac{\Delta_{vap} h(T_1)}{T_1} + c \ln \dfrac{T_2}{T_1}}$. AN $\Delta s = 4{,}1$ kJ·K^{-1}·kg^{-1}.

■ Comment calculer une entropie créée ?

❑ Méthode 20.3. Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur l'Univers

– Déterminer l'état final et calculer la variation d'entropie (voir méthode 20.1) de chaque sous-système subissant une transformation.
– L'entropie étant une fonction d'état extensive, en sommant les variations d'entropie précédentes, on obtient la variation d'entropie $\Delta S_{\text{Univers}}$ de l'Univers. Compte tenu du caractère isolé de ce dernier, on en déduit $\mathcal{S}_c = \Delta S_{\text{Univers}}$.

⇨ Exercices 20.3, 20.4, 20.5

Calculons l'entropie créée lors de la mise en contact d'un solide de température initiale T_1 et de capacité thermique C avec un thermostat de température T_2.
À l'équilibre thermique, le solide a atteint la température T_2 du thermostat (constante par définition). Le système {solide + thermostat} étant isolé par construction, la variation d'entropie de l'ensemble correspond à $\Delta S_{\text{Univers}} = \mathcal{S}_c$.

La variation d'entropie du solide est $\Delta S_{\text{solide}} = C \ln \dfrac{T_2}{T_1}$. La variation d'entropie du thermostat est $\Delta S_{\text{thermostat}} = \dfrac{Q_{\text{thermostat}}}{T_2} = \dfrac{-Q_{\text{solide}}}{T_2}$. Or, d'après le premier principe appliqué à une phase condensée idéale, $Q_{\text{solide}} = \Delta U_{\text{solide}} = C(T_2 - T_1)$ d'où $\Delta S_{\text{thermostat}} = -\dfrac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$.

Finalement, $\mathcal{S}_c = \Delta S_{\text{Univers}} = \Delta S_{\text{solide}} + \Delta S_{\text{thermostat}}$ soit $\boxed{\mathcal{S}_c = C \ln \dfrac{T_2}{T_1} - \dfrac{C(T_2 - T_1)}{T_2}}$.

Vérifions que cette expression est bien positive ou nulle. En posant $x = \dfrac{T_1}{T_2}$, on a $\mathcal{S}_c = C\left(-\ln x + x - 1\right) = C\, f(x)$. L'étude du tableau de variation montre que la fonction $f(x)$ possède un minimum nul en $x = 1$. Pour $x \neq 1$, on a bien $\mathcal{S}_c > 0$ comme prévu par le second principe (et pour $x = 1$, soit $T_1 = T_2$, il ne se passe rien !).

❑ Méthode 20.4. Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur un sous-système donné

- Déterminer l'état final et calculer la variation d'entropie ΔS (voir méthode 20.1) d'un des sous-systèmes subissant une transformation.
- Déterminer son entropie échangée $\mathcal{S}_e$ et en déduire l'entropie créée par la relation $\mathcal{S}_c = \Delta S - \mathcal{S}_e$.

⇨ Exercices 20.3, 20.4, 20.5

Reprenons l'exemple de la méthode précédent, et calculons par cette nouvelle méthode l'entropie créée lors de la mise en contact d'un solide, de température initiale T_1 et de capacité thermique C, avec un thermostat de température T_2.

La variation d'entropie du solide est $\Delta S_{\text{solide}} = C \ln \dfrac{T_2}{T_1}$. Au cours de la transformation, il échange avec le thermostat une entropie $\mathcal{S}_e = \dfrac{Q}{T_2}$. Or le premier principe appliqué au solide considéré comme une phase condensée idéale ($\mathrm{d}V = 0$) s'écrit $\Delta U = Q$. Le solide est en équilibre thermique avec le thermostat à la fin de la transformation donc $\Delta U = C(T_2 - T_1)$. On en déduit $\mathcal{S}_e = \dfrac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$ soit finalement $\mathcal{S}_c = \Delta S - \mathcal{S}_e = C \ln \dfrac{T_2}{T_1} - \dfrac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$.

On trouve bien le même résultat avec les deux méthodes 20.3 et 20.4. On pourra donc utiliser indifféremment l'une ou l'autre pour déterminer une entropie créée.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Une transformation quasi-statique est toujours réversible.	☐	☐
2.	Une transformation réversible est forcément quasi-statique.	☐	☐
3.	Une transformation adiabatique et réversible est isentropique, quelle que soit la nature du système.	☐	☐
4.	La variation d'entropie d'un système dépend du chemin suivi pour effectuer la transformation.	☐	☐
5.	L'entropie d'un système subissant une transformation irréversible augmente.	☐	☐
6.	L'entropie d'un système isolé ne peut pas décroître.	☐	☐
7.	L'entropie échangée δ_e est une fonction d'état.	☐	☐
8.	Une transformation isentropique d'un gaz parfait de coefficient γ constant vérifie les lois de Laplace.	☐	☐
9.	L'entropie d'une phase condensée idéale de capacité thermique constante ne dépend que de la température.	☐	☐
10.	Au cours d'un changement d'état isotherme entre deux phases 1 et 2, l'entropie d'un système diphasé varie de $\frac{\Delta_{1\to 2}h(T)}{T}\Delta x_2$.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Transformations de systèmes gazeux

❑ Exercice 20.1. Transformation monobare

Un récipient, muni d'un piston mobile de masse négligeable pouvant se déplacer sans frottement, contient un gaz parfait occupant initialement un volume $V_1 = 10{,}0$ L à la température $T_1 = 373$ K. Les parois du récipient ainsi que le piston sont calorifugés. La pression qui s'exerce sur le piston vaut initialement $P_1 = 1{,}00 \cdot 10^6$ Pa. On donne $R = 8{,}31\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. Calculer la quantité de matière n de gaz contenue dans le récipient.

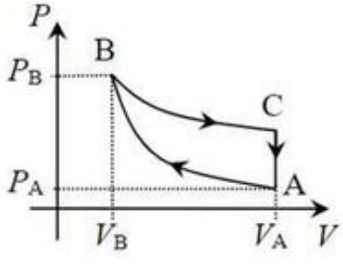
2. La contrainte qui maintient le piston en équilibre est supprimée, de sorte que la pression qui s'exerce sur lui tombe brutalement à la valeur $P_2 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa correspondant à la pression atmosphérique du lieu. Le gaz évolue vers un nouvel état d'équilibre caractérisé par les valeurs respectives T_2 et V_2 de la température et du volume.

a) Calculer T_2 et V_2 pour une capacité thermique à volume constant $C_V = 5nR/2$.

b) Calculer la variation d'entropie ΔS du gaz.

c) Calculer l'entropie créée $\mathcal{S}_c$ au cours de la transformation. Quelle est la cause de l'irréversibilité ?

❑ Exercice 20.2. Étude d'un cycle



Un gaz parfait de quantité de matière constante et caractérisé par un rapport $\gamma = C_P/C_V = 1{,}4$ parcourt le cycle ci-contre, constitué des transformations suivantes :

- AB : isentropique ;
- BC : isotherme réversible ;
- CA : isochore et monotherme (température extérieure T_A).

On donne $P_A = 1{,}0$ bar, $V_A = 500\ \text{cm}^3$, $T_A = 100$ K, $T_B = 300$ K.

1. Calculer P_B, V_B et P_C.

2. Calculer les variations d'entropie ΔS_{BC}, ΔS_{CA} ainsi que l'entropie créée $\mathcal{S}_{cCA}$ au cours de la transformation CA.

❑ Exercice 20.3. Entrée d'air dans une bouteille * *

Une bouteille rigide de volume V_1 possède des parois calorifugées, et elle est fermée par un bouchon également calorifugé ; elle est initialement vide. L'air qui l'environne est à la pression P_0 et à la température T_0 ; on le considère comme un gaz parfait de coefficient γ constant. On enlève le bouchon et la bouteille se remplit très rapidement d'air ; dès que l'air n'entre plus, on rebouche la bouteille. On notera V_0 le volume occupé *initialement* par l'air qui est entré dans la bouteille.

1. Représenter sur un schéma l'état initial, un état intermédiaire et l'état final, en précisant bien le système étudié.
2. Pourquoi peut-on considérer la transformation comme adiabatique ? Déterminer alors l'état final de l'air dans la bouteille, notamment sa température finale T_1.
3. Déterminer l'entropie créée, et préciser la cause de cette création d'entropie.

■ Transformations de systèmes solides

❑ Exercice 20.4. Contact thermique entre deux solides

Deux solides S_1 et S_2 de capacités thermiques respectives C_1 et C_2 et de températures initiales T_{01} et T_{02} sont mis en contact. Des parois rigides et athermanes isolent l'ensemble de l'extérieur.

1. Déterminer l'expression de la température finale T_f du système Σ constitué par la réunion des deux solides.
2. Pour simplifier, on suppose que $C_1 = C_2 = C$. Exprimer la variation d'entropie ΔS_Σ du système global, ainsi que l'entropie créée $\mathcal{S}_c$ au cours de la transformation. Commenter.

❑ Exercice 20.5. Effet Joule*

Un conducteur ohmique de résistance $R = 20{,}0\ \Omega$, parcouru par un courant d'intensité constante $I = 10{,}0\ \text{A}$, est plongé dans une masse $m_e = 500\ \text{g}$ d'eau pendant un intervalle de temps $\Delta t = 30{,}0\ \text{s}$. On note Σ le système constitué par la réunion de l'eau et du conducteur ohmique. On donne : masse du conducteur $m_c = 200\ \text{g}$; capacité thermique massique du conducteur $c_c = 0{,}385\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$; capacité thermique massique de l'eau $c_e = 4{,}19\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$.



1. La température de l'ensemble est maintenue constante à $T_0 = 290\ \text{K}$ par contact avec un thermostat.
   a) Calculer la variation d'entropie de Σ ainsi que l'entropie créée.
   b) Quelle est la cause physique d'irréversibilité ?
2. Partant d'une température $T_0 = 290\ \text{K}$, on plonge le système Σ dans un calorimètre aux parois athermanes, et de capacité calorifique négligeable.
   a) Calculer la température finale du système Σ au bout de la même durée.
   b) Calculer la variation d'entropie de Σ ainsi que l'entropie créée.

❑ Exercice 20.6. Contact avec une suite de *N* thermostats**

On désire porter progressivement un solide, de capacité thermique C, de la température T_0 à la température $T_F > T_0$. Pour réaliser cette transformation, le solide est mis successivement en contact avec N thermostats de températures T_k en progression arithmétique :

$$T_k = T_0 + k\frac{T_F - T_0}{N} \quad \text{avec} \quad k = 1, 2, ..., N\ .$$

1. a) Déterminer l'entropie créée $\mathcal{S}_c^k$ au cours du k-ième contact, correspondant au passage du solide de la température T_{k-1} à la température T_k.

b) On pose $\varepsilon_k = \dfrac{T_k - T_{k-1}}{T_k}$. Donner une expression approchée de $\mathcal{S}_c^k$ dans l'hypothèse $\varepsilon_k \ll 1$.

2. Exprimer l'entropie créée $\mathcal{S}_c$ à l'issue des N contacts en utilisant une somme sur k. Quel résultat obtient-on en faisant tendre N vers l'infini ? Commentaires.

■ Corps pur diphasé

❑ Exercice 20.7. Vaporisation d'eau dans le vide

Une enceinte de volume $V = 1{,}00$ L, initialement vide, est maintenue à la température constante $T_0 = 373$ K ($\theta_0 = 100$ °C). On y introduit une masse $m = 1{,}00$ g d'eau liquide à la température $T_0 = 373$ K. La vapeur d'eau sera assimilée à un gaz parfait.

On donne : $P_{sat} = 1{,}01$ bar (pression de vapeur saturante de l'eau à T_0), $R = 8{,}31\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ (constante des gaz parfaits), $\Delta_{vap}h = 2{,}25\ \text{kJ}\cdot\text{g}^{-1}$ (enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à T_0), $M = 18{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ (masse molaire de l'eau) et $\rho = 1{,}00\ \text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$ (masse volumique de l'eau liquide).

1. a) Déterminer la composition finale du système.

b) Calculer la variation d'entropie au cours de cette transformation.

2. Reprendre les questions précédentes en considérant cette fois que la masse d'eau introduite dans les mêmes conditions est $m' = m/2$.

❑ Exercice 20.8. Surfusion de l'eau

Une masse $m = 20{,}0$ g d'eau liquide très pure a été refroidie très lentement à la température $T_1 = 261$ K ($\theta_1 = -12$ °C). Cet état dans lequel l'eau est encore à l'état liquide malgré une température inférieure à $T_0 = 273$ K ($\theta_0 = 0$ °C) est qualifié de métastable : la moindre perturbation (choc, introduction d'une poussière...) conduit à une solidification très rapide du liquide. On propose dans cet exercice d'examiner ce phénomène. On supposera que toutes les transformations ont lieu à pression atmosphérique $P = 1{,}01$ bar. En outre, compte tenu de la rapidité avec laquelle l'eau surfondue se solidifie, on considéra les transformations adiabatiques.

1. Déterminer la masse de glace m_g obtenue ainsi que la température finale T_2.

2. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation.

Données : enthalpie massique de fusion de la glace $\Delta_{fus}h = 3{,}35\cdot10^2\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ à 0 °C ; capacité thermique de l'eau liquide $c_\ell = 4{,}18\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; capacité thermique de la glace $c_s = 2{,}06\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$; masse molaire de l'eau $M = 18{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 20.3. Attention à la valeur de la pression extérieure pour le calcul du travail : elle vaut P_0 pour l'air au contact de l'atmosphère, mais elle est nulle pour l'air au contact du vide (on doit donc séparer le calcul en deux parties).
Exercice 20.4. À la question 1, appliquer le premier principe au système constitué par la réunion des deux solides.
Exercice 20.5. Penser au travail des forces électriques. À la question 2.a, appliquer le premier principe au système Σ.
Exercice 20.6. Dans la deuxième partie de la question 2, on pourra donner un majorant de l'entropie.
Exercice 20.7. À la question 1.a, calculer la pression à l'équilibre en supposant que tout le liquide s'est vaporisé, puis conclure.
Exercice 20.8. Faire une hypothèse sur l'état final, puis calculer ΔH en décomposant la transformation envisagée en étapes simples.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux

1. Le caractère quasi-statique est une condition nécessaire mais pas suffisante.

4. L'entropie est une fonction d'état, donc sa variation est indépendante du chemin suivi pour réaliser la transformation considérée.

5. L'irréversibilité d'une transformation n'impose pas le signe de ΔS : elle entraîne $\delta_c > 0$, mais on peut avoir en même temps $\delta_e < 0$ et au total $\Delta S < 0$.

7. En revanche, $\Delta S = \delta_e + \delta_c$ et bien que δ_e et δ_c ne soient pas des fonctions d'état (l'échange et la création d'entropie dépendant du chemin suivi), l'entropie S en est une.

10. Cette variation est celle de l'entropie massique, et non de l'entropie.

❑ Les erreurs classiques

– Ne pas écrire le deuxième principe avant d'avoir défini clairement à quel système on l'applique, et entre quels états (ou quels instants).

– $\Delta S = 0$ n'implique pas que la transformation associée soit réversible. Pour qu'une transformation soit réversible, il faut que $\delta_c = 0$. De la même manière, $\Delta S > 0$ ne signifie pas que la transformation soit irréversible, sauf si le système est isolé ; l'entropie d'un système non isolé peut augmenter du fait de transferts thermiques reçus de l'extérieur.

– La relation $\Delta S = \dfrac{\Delta H}{T}$ est valable uniquement pour une transition de phase à température constante : ne pas l'appliquer en dehors de ces conditions restrictives.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 20.1

1. D'après la loi des gaz parfaits à l'équilibre initial : $\boxed{n = \dfrac{P_1 V_1}{R T_1}}$. AN $\boxed{n = 3{,}22 \text{ mol}}$.

2. a) Au cours de la transformation, la variation d'énergie interne du gaz parfait contenu dans le récipient ne dépend que de la température : $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = \dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$. En outre, comme les parois du récipient et le piston sont calorifugées, la transformation est adiabatique : le premier principe pour le gaz se simplifie donc en $\Delta U = W$.
De plus, la transformation est monobare sous la pression P_2, d'où $W = -P_2(V_2 - V_1)$.

Ainsi $\dfrac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = -P_2(V_2 - V_1) = -nRT_2 + P_2 V_1 = -nRT_2 + nRT_1\dfrac{P_2}{P_1}$ d'où $\boxed{T_2 = \dfrac{2}{7}\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{P_2}{P_1}\right)T_1}$.

AN $\boxed{T_2 = 277 \text{ K}}$.

En utilisant la loi des gaz parfaits à l'état final : $\boxed{V_2 = \dfrac{nRT_2}{P_2}}$. AN $\boxed{V_2 = 7{,}42 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 74{,}2 \text{ L}}$.

b) En utilisant la variation d'entropie du gaz parfait, on obtient $\boxed{\Delta S = nR\left(\dfrac{5}{2}\ln\dfrac{T_2}{T_1} + \ln\dfrac{V_2}{V_1}\right)}$.

AN $\boxed{\Delta S = 33{,}7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 20.1*

c) La transformation est adiabatique donc l'entropie échangée $\mathcal{S}_e$ est nulle. On en déduit $\boxed{\mathcal{S}_c = \Delta S = 33{,}7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$. La cause d'irréversibilité est l'inhomogénéité de pression de part et d'autre du piston, qui provoque son déplacement brutal.

Exercice 20.2

1. La transformation AB est isentropique : la loi de Laplace donne $P_A^{1-\gamma} T_A^{\gamma} = P_B^{1-\gamma} T_B^{\gamma}$, d'où $\boxed{P_B = \left(\dfrac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_A}$. AN $\boxed{P_B = 47 \text{ bar}}$. De même, $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ d'où $\boxed{V_B = \left(\dfrac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A}$.

AN $\boxed{V_B = 32 \text{ cm}^3}$. La détente BC est isotherme, donc l'équation d'état des gaz parfaits donne : $P_B V_B = P_C V_C = P_C V_A$, d'où $\boxed{P_C = P_B \dfrac{V_B}{V_A}}$. AN $\boxed{P_C = 3{,}0 \text{ bar}}$.

2. La transformation BC est réversible donc $\delta_{cBC} = 0$, et à chaque instant on peut supposer que $T = T_{ext}$. Ainsi $\Delta S_{BC} = \delta_{eBC} = \dfrac{Q_{BC}}{T_B}$. Or, d'après le premier principe $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$.

Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, le caractère isotherme de la transformation implique que $\Delta U_{BC} = 0$ donc $Q_{BC} = -W_{BC}$. La transformation étant réversible, à chaque instant $P = P_{ext}$ d'où $\delta W = -P_{ext}\,\mathrm{d}V = -P\,\mathrm{d}V$.

Finalement, $\Delta S_{BC} = -\dfrac{1}{T_B}\displaystyle\int_B^C \delta W = \frac{1}{T_B}\int_B^C P\,\mathrm{d}V = \int_B^C nR\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{P_A V_A}{T_A}\int_B^C \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{P_A V_A}{T_A}\ln\frac{V_C}{V_B}$ soit $\boxed{\Delta S_{BC} = \dfrac{P_A V_A}{T_A}\ln\dfrac{V_A}{V_B}}$. AN $\boxed{\Delta S_{BC} = 1{,}4\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$.

Pour calculer ΔS_{CA}, on utilise la relation : $\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\ln\dfrac{T_A}{T_B} + nR\ln\dfrac{V_A}{V_B}$. Comme la transformation est isochore $V_B = V_A$ d'où $\boxed{\Delta S_{CA} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\dfrac{P_A V_A}{T_A}\ln\dfrac{T_A}{T_B}}$. AN $\boxed{\Delta S_{CA} = -1{,}4\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}}$.

⇨ *Méthode 20.1*

> *On aurait pu établir directement ce résultat en écrivant que sur le cycle $\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$. La transformation AB étant isentropique, $\Delta S_{AB} = 0$ d'où $\Delta S_{CA} = -\Delta S_{BC}$.*

L'expression de l'entropie créée δ_c au cours de la transformation CA peut être déterminée de manière indirecte par la différence $\delta_{cCA} = \Delta S_{CA} - \delta_{eCA}$.

L'expression de l'entropie échangée pour la transformation monotherme s'écrit $\delta_{eCA} = \dfrac{Q_{CA}}{T_A}$.

Or $W_{CA} = 0$ (transformation isochore) d'où $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_C)$. Finalement, on obtient $\delta_{eCA} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\dfrac{P_A V_A}{T_A}\left(1 - \dfrac{T_C}{T_A}\right)$ donc $\boxed{\delta_{cCA} = \dfrac{1}{\gamma - 1}\dfrac{P_A V_A}{T_A}\left(\dfrac{T_B}{T_A} - 1 - \ln\dfrac{T_B}{T_A}\right)}$.

AN $\boxed{\delta_{cCA} = 1{,}1\ \mathrm{J\cdot K^{-1}} > 0}$.

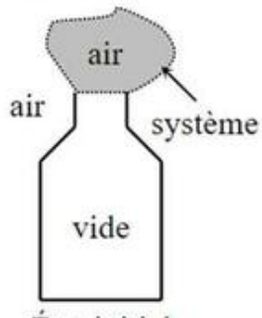
⇨ *Méthode 20.4*

> *On constate que la transformation CA est irréversible. Ce résultat était prévisible. En effet, pendant toute la transformation, le gaz est en contact avec un thermostat à la température T_A alors que sa température interne diminue pour passer de $T_C = T_B$ à T_A. Le système est donc constamment en présence d'une inhomogénéité de température, source d'irréversibilité.*

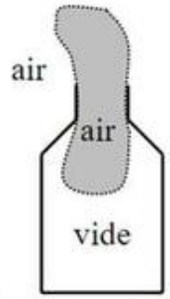
Corrigé

Exercice 20.3

1. On choisit comme système <u>la quantité totale d'air qui va entrer dans la bouteille</u>. Au départ, ce système se trouve entièrement en dehors de la bouteille.



État initial



État intermédiaire



État final

On ne peut pas choisir « la bouteille » comme système pour lui appliquer les deux principes, car ce serait un système ouvert : d'abord vide puis rempli d'air.

2. Le volume final de cette quantité d'air est celui de la bouteille, soit V_1. L'air cesse d'entrer lorsque sa pression devient égale à celle de l'air extérieur : <u>la pression finale est donc P_0</u>.
L'entrée d'air dans la bouteille vide est une <u>transformation très rapide</u> : elle est donc adiabatique car les transferts thermiques (toujours lents par rapport aux transferts mécaniques) <u>n'ont pas le temps de s'effectuer</u>.
Premier principe pour ce système, entre les états initial et final : $\Delta E = Q + W = W$.

Membre de gauche : $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p \approx \Delta U = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$ car la variation d'énergie cinétique est nulle, et on néglige celle de l'énergie potentielle (en l'absence de données).
Pour le travail des forces de pression, on divise la frontière du système en deux parties : celle en contact avec le vide (pression extérieure nulle donc pas de travail), et celle en contact avec l'air extérieur à la pression P_0 constante, qui subit une diminution de volume de V_0 à 0.

Alors $W = -\displaystyle\int_{V_0}^{0} P_0 \, \mathrm{d}V = -P_0 \int_{V_0}^{0} \mathrm{d}V = P_0 V_0$, ou encore $W = nRT_0$.

Donc $\dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = nRT_0$ d'où on tire $\boxed{T_1 = \gamma T_0}$.

3. La variation d'entropie s'écrit $\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma - 1} \ln \dfrac{T_1}{T_0} + nR \ln \dfrac{V_1}{V_0}$. Or $nR = \dfrac{P_0 V_0}{T_0}$, $\dfrac{T_1}{T_0} = \gamma$ et $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{T_1}{P_0}\dfrac{P_0}{T_0} = \dfrac{T_1}{T_0} = \gamma$ donc $\Delta S = \dfrac{P_0 V_0}{T_0}\dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \gamma$. Second principe : $\Delta S = \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c$ avec $\mathcal{S}_e = 0$ car il n'y a pas de transfert thermique, donc $\boxed{\mathcal{S}_c = \dfrac{P_0 V_0}{T_0}\dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \gamma}$ (qui est bien positive).

⇨ *Méthode 20.4*

La cause de l'irréversibilité est <u>l'inhomogénéité de densité</u> entre l'air extérieur et le vide.

Exercice 20.4

1. Au cours de la transformation, l'énergie interne de S_1 varie de $\Delta U_1 = C_1(T_f - T_{01})$, celle de S_2 varie de $\Delta U_2 = C_2(T_f - T_{02})$. Et l'énergie interne est une grandeur extensive donc pour le système global Σ : $\Delta U_\Sigma = \Delta U_1 + \Delta U_2$. Or Σ est isolé de l'extérieur par des parois rigides (donc $W = 0$) et athermanes (d'où $Q = 0$). Le premier principe appliqué à Σ donne donc $\Delta U_\Sigma = 0$ d'où on tire $\boxed{T_f = \dfrac{C_1 T_{01} + C_2 T_{02}}{C_1 + C_2}}$. En particulier, si $C_1 = C_2 = C$ on trouve $T_f = \dfrac{T_{01} + T_{02}}{2}$.

2. Les variations d'entropie des solides S_1 et S_2 au cours de la transformation sont respectivement $\Delta S_1 = C \ln \dfrac{T_f}{T_{01}}$ et $\Delta S_2 = C \ln \dfrac{T_f}{T_{02}}$. L'entropie étant une grandeur extensive, pour le système Σ on a $\Delta S_\Sigma = \Delta S_1 + \Delta S_2$, soit $\boxed{\Delta S_\Sigma = C \ln \dfrac{T_f^2}{T_{01} T_{02}} = C \ln \dfrac{(T_{01} + T_{02})^2}{4 T_{01} T_{02}}}$.

Le système Σ est isolé : sa variation d'entropie peut être assimilée à celle de l'Univers. Son entropie d'échange est nulle donc $\boxed{\mathcal{S}_c = \Delta S_\Sigma}$.

⇨ *Méthode 20.3*

Pour être en accord avec le deuxième principe, le résultat obtenu doit nécessairement conduire à une entropie créée positive. On peut vérifier la cohérence du résultat en remarquant que $(T_{01} + T_{02})^2 = T_{01}^2 + T_{02}^2 + 2T_{01}T_{02} = T_{01}^2 + T_{02}^2 - 2T_{01}T_{02} + 4T_{01}T_{02} = (T_{01} - T_{02})^2 + 4T_{01}T_{02}$.

Donc $(T_{01} + T_{02})^2 \geq 4T_{01}T_{02}$ soit $\dfrac{(T_{01} + T_{02})^2}{4T_{01}T_{02}} \geq 1$. Ainsi $\mathcal{S}_c = C \ln \dfrac{(T_{01} + T_{02})^2}{4T_{01}T_{02}} \geq 0$ comme attendu.

Exercice 20.5

1. a) La température de l'ensemble étant maintenue constante, pour le système constitué par la réunion des deux phases condensées que constituent l'eau et le conducteur ohmique, on a $\boxed{\Delta S_\Sigma = 0}$ et $\Delta U_\Sigma = 0$. Pour calculer l'entropie créée on peut remarquer que, le système global {Σ + thermostat} étant isolé par construction, la variation d'entropie de l'ensemble correspond à $\Delta S = \mathcal{S}_c$ (que l'on peut considérer comme la variation d'entropie de l'Univers). Or, comme l'entropie est une grandeur extensive, $\Delta S = \Delta S_\Sigma + \Delta S_{\text{thermostat}} = \Delta S_{\text{thermostat}}$. En outre, $\Delta S_{\text{thermostat}} = \dfrac{Q_{\text{thermostat}}}{T_0} = \dfrac{-Q_\Sigma}{T_0}$. Le premier principe appliqué au système Σ (seul) s'écrit $\Delta U_\Sigma = Q_\Sigma + W_\Sigma = Q_\Sigma + RI^2 \Delta t = 0$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}_c = \dfrac{RI^2 \Delta t}{T_0} > 0}$. AN $\boxed{\mathcal{S}_c = 1{,}13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0}$.

⇨ *Méthode 20.3*

b) La cause d'irréversibilité est ici l'effet Joule.

2. a) Compte tenu des propriétés des parois du calorimètre, on peut considérer que la transformation subie par le système Σ est adiabatique. En outre, pour les phases condensées que

constituent l'eau et le conducteur ohmique, le travail des forces de pression est négligé : seul le travail électrique est à considérer. Le premier principe appliqué à Σ s'écrit alors $\Delta U_\Sigma = RI^2\Delta t$, soit, étant donné le caractère extensif de l'énergie interne $m_e c_e (T_f - T_0) + m_c c_c (T_f - T_0) = RI^2\Delta t$.

On en déduit $\boxed{T_f = T_0 + \dfrac{RI^2\Delta t}{m_e c_e + m_c c_c}}$. AN $\boxed{T_f = 318\ \text{K}}$.

b) Les variations d'entropie de l'eau et du conducteur ohmique au cours de la transformation sont respectivement $\Delta S_{\text{eau}} = m_e c_e \ln\dfrac{T_f}{T_0}$ et $\Delta S_{\text{conducteur}} = m_c c_c \ln\dfrac{T_f}{T_0}$. L'entropie étant extensive, pour le système Σ on a $\Delta S_\Sigma = \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_{\text{conducteur}}$ soit $\boxed{\Delta S_\Sigma = \left(m_e c_e + m_c c_c\right)\ln\dfrac{T_f}{T_0}}$.

Le système Σ subit une transformation adiabatique : son entropie échangée est donc nulle d'où

$$\boxed{\mathcal{S}_c = \Delta S_\Sigma = \left(m_e c_e + m_c c_c\right)\ln\left(1 + \frac{RI^2\Delta t}{T_0\left(m_e c_e + m_c c_c\right)}\right) > 0}.$$

AN $\boxed{\mathcal{S}_c = \Delta S_\Sigma = 198\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1} > 0}$.

Exercice 20.6

1. a) Le résultat s'obtient directement à partir de l'exemple illustratif de la méthode 20.2 ou 20.3, en remplaçant T_2 par T_k et T_1 par T_{k-1}, soit $\boxed{\mathcal{S}_c^k = -C\left(\dfrac{T_k - T_{k-1}}{T_k} + \ln\dfrac{T_{k-1}}{T_k}\right)}$.

b) En posant $\varepsilon_k = \dfrac{T_k - T_{k-1}}{T_k}$, l'expression précédente devient $\mathcal{S}_c^k = -C\left[\varepsilon_k + \ln\left(1-\varepsilon_k\right)\right]$.

Pour $\varepsilon_k \ll 1$, le logarithme se développe à l'ordre 2 en $\ln\left(1-\varepsilon_k\right) = -\varepsilon_k - \dfrac{\varepsilon_k^2}{2}$ d'où $\boxed{\mathcal{S}_c^k = C\dfrac{\varepsilon_k^2}{2}}$.

2. À l'issue des N contacts, l'entropie créée est $\mathcal{S}_c = \sum_{k=1}^{N}\mathcal{S}_c^k = \dfrac{C}{2}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k^2$. En explicitant ε_k, on obtient l'expression demandée : $\boxed{\mathcal{S}_c = \dfrac{C}{2}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{\left(T_F - T_0\right)^2}{\left(NT_0 + k(T_F - T_0)\right)^2}}$.

Pour déterminer le comportement de $\mathcal{S}_c$ quand N tend vers l'infini, on peut encadrer l'entropie créée en remarquant que $0 \leq \mathcal{S}_c < \dfrac{C}{2}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{\left(T_F - T_0\right)^2}{N^2T_0^2}$, soit $0 \leq \mathcal{S}_c < \dfrac{C}{2}\dfrac{\left(T_F - T_0\right)^2}{T_0^2}\dfrac{1}{N}$. On en déduit que $\boxed{\lim_{N\to\infty}\mathcal{S}_c = 0}$: pour un contact avec un nombre infini de thermostats, de température augmentant chaque fois infiniment peu, la transformation devient réversible. On vérifie comme prévu que cette transformation réversible est un modèle obtenu par passage à la limite.

Lors du contact thermique, il a été possible d'obtenir une transformation réversible en augmentant très lentement et de manière quasi continue la température des thermostats. De même, on pourrait se demander s'il est possible de rendre réversible la détente de Joule et Gay-Lussac, en augmentant très progressivement le volume occupé par le gaz. La réponse est non. La différence essentielle entre ces deux expériences tient dans la manière dont on agit sur les inhomogénéités. Pour le contact thermique, l'utilisation d'un nombre infini de sources permet de supprimer (par passage à la limite) les inhomogénéités de température. Au cours d'une détente de Joule et Gay-Lussac, même si le volume occupé par le gaz croît infiniment lentement, celui-ci est systématiquement mis au contact du vide au cours de chaque petit accroissement de volume. Ainsi l'inhomogénéité de densité moléculaire reste présente, conduisant à une transformation toujours irréversible.

Exercice 20.7

1. a) À $T_0 = 373\,\text{K}$ $(100\,^\circ\text{C})$, la pression de vapeur saturante de l'eau est $P_{\text{sat}} = 1{,}01\,\text{bar}$. L'enceinte étant initialement vide, des molécules d'eau vont passer de la phase liquide à la phase gazeuse afin d'augmenter la pression dans l'enceinte. Deux situations peuvent se présenter :

– la masse d'eau liquide introduite n'est pas suffisante pour atteinte la pression de vapeur saturante ; tout le liquide est alors vaporisé et la pression à l'équilibre est telle que $P < P_{\text{sat}}$;

– la masse d'eau liquide introduite est suffisante pour atteinte la pression de vapeur saturante ; une fois cette pression atteinte, le liquide cesse de se vaporiser et un équilibre diphasé s'établit.

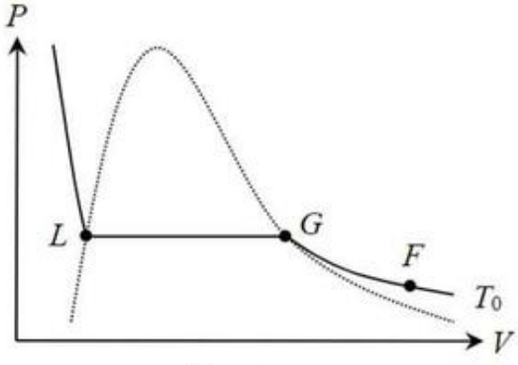
Supposons que tout le liquide se vaporise. Dans ce cas, la pression à l'équilibre est donnée par $P = \dfrac{mRT_0}{MV}$. AN $P = 1{,}72\,\text{bar}$. Cette pression est supérieure à P_{sat} : l'hypothèse de départ est donc erronée, et seule une fraction du liquide initialement introduit est vaporisée.

Dans ce cas, la fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par $x_{\text{g}} = \dfrac{v - v_\ell}{v_{\text{g}} - v_\ell}$, avec $v = \dfrac{V}{m}$, $v_\ell = \dfrac{1}{\rho}$ et $v_{\text{g}} = \dfrac{RT_0}{MP_{\text{sat}}}$. On obtient $x_{\text{g}} = 5{,}88 \cdot 10^{-2}$, soit une masse de gaz $\boxed{m_{\text{g}} = mx_{\text{g}} = 5{,}88 \cdot 10^{-1}\,\text{g}}$; la masse de liquide restant est alors $\boxed{m_\ell = m - m_{\text{g}} = 4{,}12 \cdot 10^{-1}\,\text{g}}$.

⇨ *Méthode 16.3*

b) Sur le palier de liquéfaction, $\boxed{\Delta S = mx_{\text{g}} \dfrac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_0}}$. AN $\boxed{\Delta S = 3{,}55\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1}}$.

2. Supposons que tout le liquide s'évapore. Dans ce cas, la pression à l'équilibre est donnée par $P = \dfrac{m'RT_0}{MV}$. AN $P = 0{,}861\,\text{bar}$. Cette pression est inférieure à P_{sat} : l'hypothèse de départ est donc correcte. On en déduit $\boxed{m'_{\text{g}} = m' = 5{,}00 \cdot 10^{-1}\,\text{g}}$ et $\boxed{m'_\ell = 0{,}00\,\text{g}}$.



Pour calculer la variation d'entropie, on imagine pour simplifier une transformation réversible isotherme LGF (représentée sur le diagramme ci-contre) dont l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final coïncident avec ceux de la transformation étudiée. L'entropie est une fonction d'état donc $\Delta S = \Delta S_{LG} + \Delta S_{GF}$.

Or $\Delta S_{LG} = \dfrac{m'\Delta_{\text{vap}}h}{T_0}$ et $\Delta S_{GF} = \dfrac{m'R}{M}\ln\dfrac{V_F}{V_G}$ d'où $\boxed{\Delta S = m'\left(\dfrac{\Delta_{\text{vap}}h}{T_0} + \dfrac{R}{M}\ln\dfrac{V_F}{V_G}\right)}$.

AN avec $V_F = 1{,}00\ \text{L}$ et $V_G = \dfrac{m'RT_0}{MP_s} = 0{,}850\ \text{L}$: $\boxed{\Delta S = 3{,}05\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 20.2*

Exercice 20.8

1. Les deux situations finales les plus probables sont :
- toute l'eau liquide s'est solidifiée et la température finale est inférieure à 0 °C;
- seule une partie de l'eau s'est solidifiée et l'état final est un équilibre diphasé à 0 °C.

Supposons d'abord que toute l'eau s'est solidifiée. Pour réaliser cette transformation, on imagine la succession suivante de transformations :
- l'eau liquide est d'abord réchauffée jusqu'à 0 °C : $\Delta H_1 = mc_\ell(T_0 - T_1)$;
- puis elle est entièrement solidifiée à cette température : $\Delta H_2 = m\Delta_{\text{sol}}h = -m\Delta_{\text{fus}}h$;
- enfin la glace formée est refroidie jusque T_2 : $\Delta H_3 = mc_s(T_2 - T_0)$.

La transformation est monobare et suffisamment rapide pour être considérée comme adiabatique donc $\Delta H = Q_P = 0$.

L'enthalpie est une fonction d'état. En utilisant la décomposition ci-dessus, on obtient $\Delta H = mc_\ell(T_0 - T_1) - m\Delta_{\text{fus}}h + mc_s(T_2 - T_0) = 0$, soit $T_2 = T_0 + \dfrac{\Delta_{\text{fus}}h - c_\ell(T_0 - T_1)}{c_s}$.

AN $T_2 = 460\ \text{K}$ (187 °C). À cette température, toute l'eau devrait être en phase vapeur : l'hypothèse de départ est donc incorrecte.

Supposons maintenant que seule une partie de l'eau s'est solidifiée. Pour réaliser cette transformation, on imagine la succession suivante de transformations :
- l'eau liquide est d'abord réchauffée jusqu'à 0 °C : $\Delta H_1 = mc_\ell(T_0 - T_1)$;
- une fraction x_s de liquide est solidifiée à cette température : $\Delta H_2 = x_s m\Delta_{\text{sol}}h = -x_s m\Delta_{\text{fus}}h$.

En utilisant les mêmes hypothèses que précédemment : $\Delta H = mc_\ell(T_0 - T_1) - x_s m\Delta_{\text{fus}}h = 0$, soit $x_s = \dfrac{c_\ell(T_0 - T_1)}{\Delta_{\text{fus}}h}$. AN $x_s = 15{,}0\ \%$. On trouve bien $0 \leq x_s \leq 1$ donc l'hypothèse est la bonne.

Le mélange final est donc composé de 3,0 g de glace et de 17,0 g d'eau liquide, en équilibre à la température 0 °C.

⇨ *Méthode 17.6*

2. La transformation est adiabatique donc l'entropie créée est égale à la variation d'entropie : $\mathcal{S}_c = \Delta S$. Comme l'entropie est une fonction d'état, en utilisant la décomposition précédente on obtient : $\Delta S = \Delta S_{\text{chauffage liquide}} + \Delta S_{\text{solidification partielle}} = mc_\ell \ln\dfrac{T_0}{T_1} - x_s m\dfrac{\Delta_{\text{fus}}h}{T_0}$.

Avec la valeur de x_s déterminée à la question précédente, on obtient finalement :

$\boxed{\mathcal{S}_c = \Delta S = mc_\ell\left[\ln\dfrac{T_0}{T_1} - \dfrac{T_0 - T_1}{T_0}\right]}$. AN $\boxed{\mathcal{S}_c = 8{,}32\cdot10^{-2}\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 20.2*

Cette transformation brutale, aboutissant à un équilibre stable, est bien irréversible.

Corrigé

Chapitre 21

Machines thermiques

UN SCIENTIFIQUE



L'ingénieur écossais **James Watt** (1736-1819) n'est pas un théoricien mais un inventeur de génie. Dans les années 1760, il est chargé de réparer des machines à vapeur conçues par Newcomen, ce qui l'amène à y faire de notables améliorations. Watt s'allie alors avec des industriels qui se chargent de la commercialisation de ses inventions. L'ingéniosité de Watt a contribué grandement au développement des transports et à l'avènement de la révolution industrielle.

Un peu d'histoire

La transformation d'énergie thermique en énergie mécanique a permis les premiers déplacements motorisés. Dans un article publié en 1690, Denis Papin décrit le principe de l'action de la vapeur dans un piston. Au début du XVIII^{e} siècle, l'industriel anglais Thomas Newcomen conçoit une machine à vapeur pour extraire du minerai. Conscient du manque de rendement de telles machines à vapeur dans lesquelles près des trois quarts de l'énergie étaient perdus, en particulier à cause de la condensation dans le cylindre, James Watt ajoute un récipient supplémentaire, le condenseur, ce qui améliore sensiblement le rendement. D'autres inventions permettent d'améliorer encore l'efficacité des machines. Les justifications scientifiques de ces propriétés arriveront plus tard avec Sadi Carnot, Rudolf Clausius, James Joule et William Thomson.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- L'écriture particulière des principes de la thermodynamique sur un cycle
- La définition de la performance d'une machine thermique
- Les signes des transferts thermiques et des travaux échangés par l'agent thermique dans un moteur, un réfrigérateur et une pompe à chaleur dithermes
- Le théorème de Carnot
- Des ordres de grandeur de performances de machines réelles
- Le principe de la cogénération

Ce qu'il faut savoir faire

- Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme
- Représenter le schéma de principe d'une machine thermique, en y indiquant les travaux et les transferts thermiques
- Identifier un cycle moteur ou récepteur d'après le sens de parcours du cycle sur un graphique
- Calculer la performance d'une machine thermique
- Retrouver l'expression du rendement ou de l'efficacité de Carnot

■■ Résumé de cours

■ Présentation générale

❑ Modélisation d'une machine thermique

Une **machine thermique** est un dispositif qui permet de réaliser une conversion continue d'énergie. En pratique, un fluide, appelé **agent thermique**, y décrit des transformations cycliques au cours desquelles il échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de travail et de transfert thermique.

Les étapes du cycle où ont lieu des transferts thermiques sont modélisées comme des mises en contact du fluide avec N thermostats de températures T_i ; on note Q_i les transferts thermiques correspondants, et W le travail total sur le cycle.

❑ Application des deux principes sur un cycle

Sur un cycle de fonctionnement, $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0$. Pour un contact avec N thermostats, on en déduit les relations suivantes.

- Premier principe : $\boxed{W + \sum_{i=1}^{N} Q_i = 0}$.
- Deuxième principe : $\mathcal{S}_c \geq 0$ donc $\boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0}$ (inégalité de Clausius).

❑ Travail total sur le cycle

Un cycle peut être représenté par exemple sur un diagramme de Clapeyron (P,V) ou (P,v).

– Le cycle est **moteur**, c'est-à-dire que le système fournit globalement du travail à l'extérieur ($W < 0$), si la courbe est parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre.

– Le cycle est **récepteur**, c'est-à-dire que le système reçoit globalement du travail de l'extérieur ($W > 0$), si la courbe est parcourue dans le sens trigonométrique.

❑ Performance

La **performance** d'une machine thermique est définie par le rapport positif suivant :

$$\boxed{\text{performance} = \left| \frac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}} \right|}.$$

Il est d'usage de l'appeler **efficacité** si elle peut prendre des valeurs supérieures à 1.
Si elle est par nature comprise entre 0 et 1, c'est le terme **rendement** qui est utilisé.

❑ Cogénération

La cogénération est la production simultanée d'un travail mécanique (le plus souvent transformé en travail électrique) et d'un transfert thermique, à partir d'une source unique d'énergie. Elle permet notamment d'augmenter la performance globale des équipements de production.

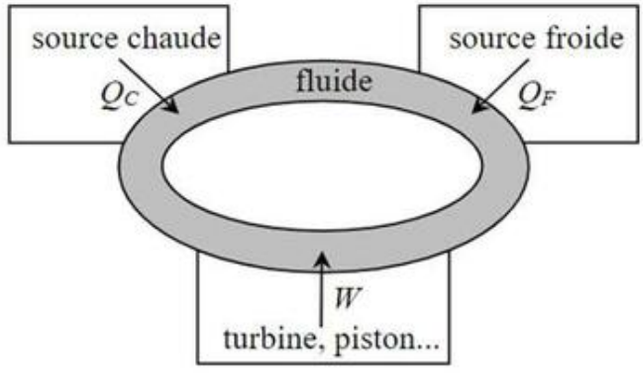
■ Machines dithermes

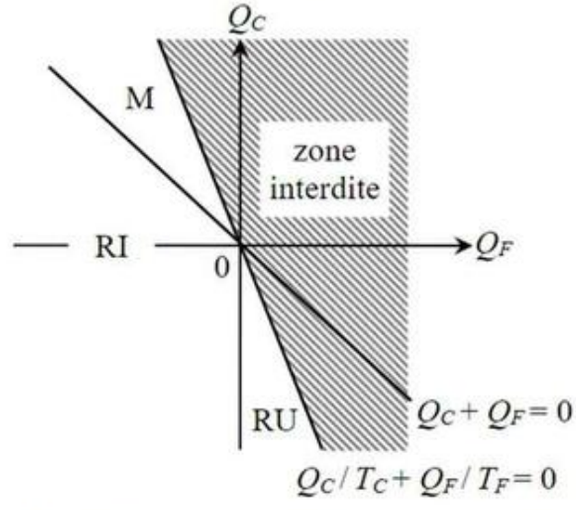
❑ Modélisation et application des principes

Les machines dithermes n'échangent de l'énergie par transfert thermique qu'avec deux thermostats : une source chaude de température T_C et une source froide de température T_F.

L'application des deux principes sur un cycle donne alors : $W + Q_C + Q_F = 0$ et $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$.

Le **diagramme de Raveau** (Q_C, Q_F) permet de classer les machines dithermes en fonction de leur utilité, notamment en fonction de leur caractère moteur ($W < 0$) ou récepteur ($W > 0$).





Les machines de la zone M sont des moteurs, celle de la zone RU des récepteurs utiles (machines frigorifiques ou pompes à chaleur), et celles de la zone RI des récepteurs inutiles d'un point de vue technologique.

❑ Moteur ditherme

Un moteur thermique a pour objectif de fournir un travail ($W < 0$). Pour ce faire, il utilise le sens spontané des transferts thermiques : il reçoit effectivement un transfert thermique de la source chaude ($Q_C > 0$), qu'il est obligé de restituer en partie à la source froide ($Q_F < 0$).

Son rendement est donc $\boxed{\eta = \frac{-W}{Q_C}}$. Il est toujours inférieur au rendement de Carnot $\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$ d'un moteur cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible : $\boxed{0 \leq \eta \leq \eta_C < 1}$.

Rendements usuels de moteurs dithermes réels : $0,2 < \eta < 0,3$ (soit entre 20 % et 30 %).

❑ Machine frigorifique et pompe à chaleur dithermes

Ces machines réceptrices dépensent un travail ($W > 0$) afin d'aller à l'encontre du sens spontané des transferts thermiques ($Q_F < 0$ et $Q_C > 0$).

– Dans une **machine frigorifique**, l'objectif est d'extraire un transfert thermique de la source froide ($Q_F > 0$), qui constitue l'espace à refroidir. L'efficacité d'une machine frigorifique est donc $\boxed{e = \frac{Q_F}{W}}$. Elle est toujours inférieure à l'efficacité de Carnot $\boxed{e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}}$ d'une machine cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible : $\boxed{0 \leq e \leq e_C}$.

Efficacités usuelles de machines frigorifiques réelles : $3 < e < 4$.

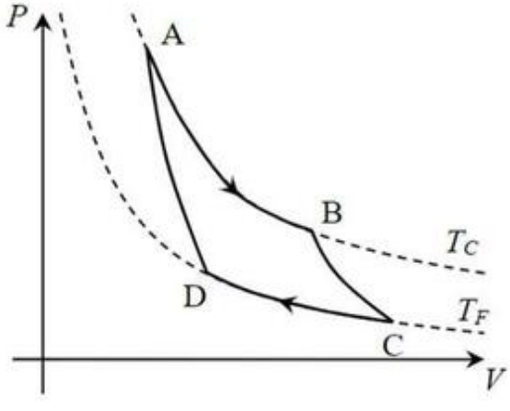
– Dans une **pompe à chaleur**, l'objectif est d'injecter un transfert thermique vers la source chaude ($Q_C < 0$), qui constitue l'espace à réchauffer. L'efficacité d'une pompe à chaleur est donc $\boxed{e = \frac{-Q_C}{W}}$. Elle est toujours inférieure à l'efficacité de Carnot $\boxed{e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F}}$ d'une pompe cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible : $\boxed{0 \leq e \leq e_C}$.

Efficacités usuelles de pompes à chaleur réelles : $2 < e < 5$.

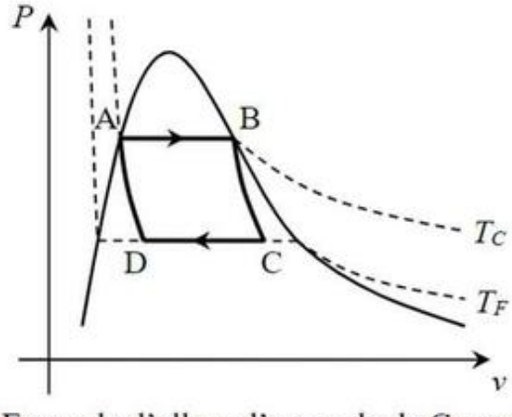
⇨ **Méthode 21.1. Calculer la performance d'une machine thermique**

❑ Cycle de Carnot

Le cycle de Carnot est un cycle *réversible* décrit par une machine ditherme. Il est composé de :
– deux isothermes aux températures des sources T_C (isotherme AB) et T_F (isotherme CD) ;
– deux adiabatiques (isentropiques) BC et DA.
Il peut être parcouru dans le sens moteur ou récepteur.



Allure d'un cycle de Carnot moteur décrit par un gaz parfait



Exemple d'allure d'un cycle de Carnot moteur décrit par un fluide diphasé

Un tel cycle permet d'atteindre les performances maximales e_C et η_C. Il présente toutefois peu d'intérêt en pratique. En effet, un cycle de Carnot est forcément décrit de manière quasi-statique : une machine utilisant ce cycle fournit donc une puissance qui tend vers zéro.

■ Les deux structures de machines

❑ Machines à cylindre et piston

Dans les moteurs à combustion interne (moteur à quatre temps, moteur Diesel…), et d'autres machines analogues, l'essentiel des transformations du fluide a lieu dans un même cylindre muni d'un piston. Dans ce cas, pour chaque transformation constituant le cycle, le travail W et le transfert thermique Q associés peuvent être déterminés par application du premier principe sous sa forme habituelle $\Delta U = W + Q$ (qui devient $\Delta H = Q$ pour une isobare).

Les travaux sont tous échangés par le fluide avec le piston, ils sont donc tous « utiles ».

Un moteur de véhicule comporte plusieurs cylindres identiques pour pouvoir fournir une puissance mécanique suffisante.



Moteur à essence à quatre cylindres en ligne

❑ Machines à circuit de fluide

Description

Dans de nombreuses machines (turbines à vapeur, machines frigorifiques, pompes à chaleur…), un fluide est en circulation et traverse successivement différents compartiments (échangeur thermique, turbine, compresseur, condenseur…) dans lesquels il subit des transformations.

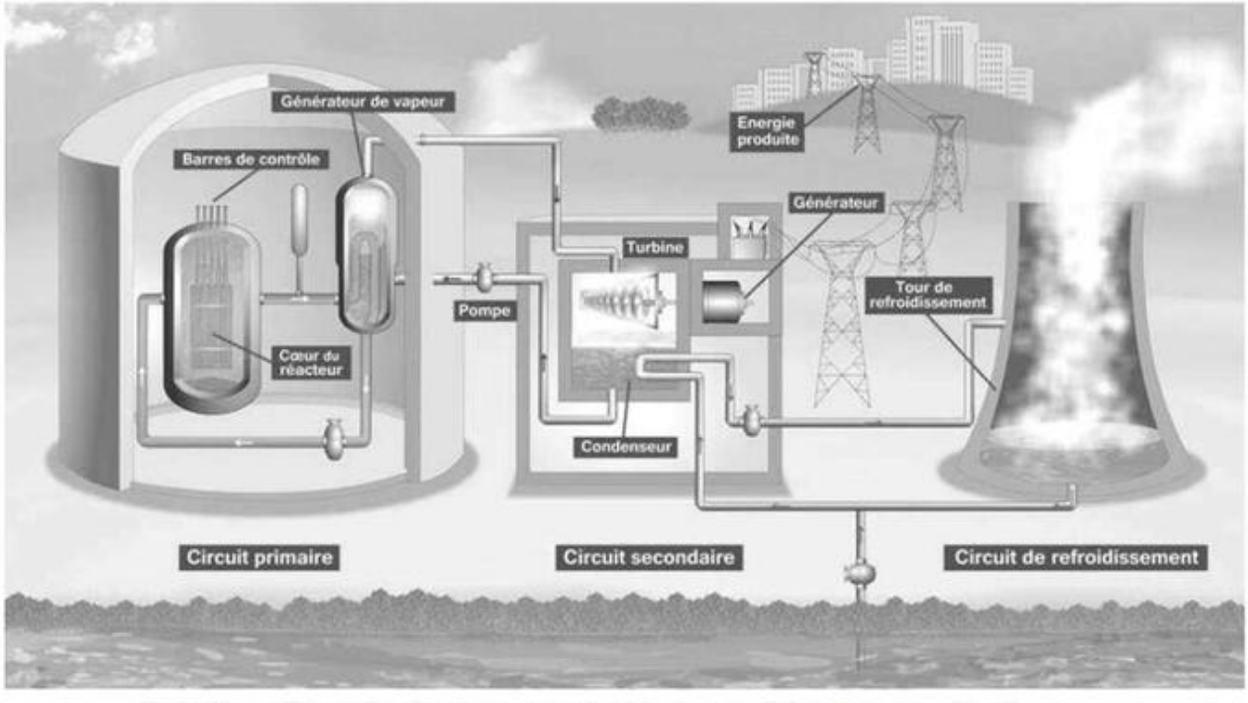


Image Corinne Beurtey/CEA

Centrale nucléaire, dont la partie centrale (circuit secondaire) est une turbine à vapeur

Écriture du premier principe pour un écoulement stationnaire

Pour un fluide s'écoulant à travers un compartiment donné d'une machine, le premier principe en régime stationnaire s'écrit : $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w'$

avec Δh la variation d'enthalpie massique entre l'amont et l'aval du compartiment, Δe_c la variation d'énergie cinétique massique, Δe_p la variation d'énergie potentielle de pesanteur massique, q le transfert thermique massique et w' le **travail utile** massique (ou **travail indiqué** massique), *échangé avec les pièces mobiles de la machine* (ce qui exclut le travail des forces de pression qu'une tranche de fluide échange avec le fluide qui la précède et avec celui qui la suit). Cette écriture sera justifiée et exploitée plus largement dans le programme de 2e année.

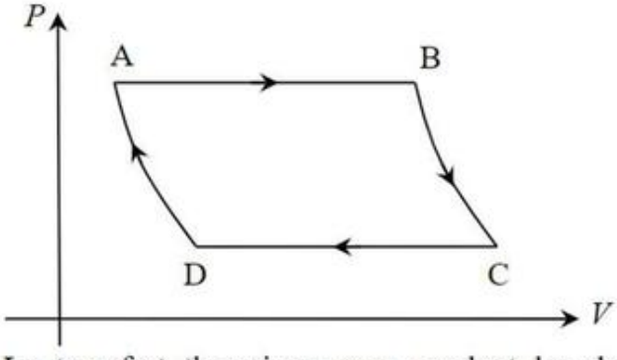
Cas particulier

Pour un écoulement qui s'effectue suffisamment lentement ($\Delta e_c \approx 0$) et dans une canalisation horizontale ou peu inclinée ($\Delta e_p \approx 0$), la relation précédente se simplifie en $\Delta h = q + w'$.

❑ Méthode 21.1. Calculer la performance d'une machine thermique

- Déterminer les transferts thermiques Q_i sur chaque étape du cycle et en déduire $Q_C = \sum_{i,\,Q_i>0} Q_i$ ou Q_F selon le cas.
- Utiliser le premier principe sur un cycle pour en déduire le travail total W.
- Connaissant la fonction attendue de la machine, adapter la définition de la performance.

⇨ Exercices 21.2 à 21.9



Un gaz parfait décrit le cycle moteur ABCDA ci-contre, composé de deux transformations adiabatiques réversibles et de deux transformations isobares.
Exprimer son rendement en fonction de γ, V_A et V_D.

Le transfert thermique reçu pendant les deux adiabatiques BC et DA est nul. Pendant la transformation isobare AB, le gaz jouant le rôle d'agent thermique reçoit un transfert thermique $Q_{AB} = \Delta H_{AB} = C_P(T_B - T_A) > 0$. De même, pendant la transformation isobare CD, le transfert thermique reçu est $Q_{CD} = \Delta H_{CD} = C_P(T_D - T_C) < 0$. En appliquant le premier principe au gaz sur un cycle, on obtient $0 = W + Q_{CD} + Q_{AB}$ d'où $-W = Q_{CD} + Q_{AB}$.

La machine thermique est un moteur : son rendement est $\eta = \dfrac{-W}{Q_{AB}} = 1 + \dfrac{Q_{CD}}{Q_{AB}}$. En explicitant les transferts thermiques, on obtient : $\eta = 1 + \dfrac{T_D - T_C}{T_B - T_A} = 1 - \dfrac{T_D}{T_A}\left(\dfrac{1 - T_C/T_D}{1 - T_B/T_A}\right)$.

Or d'après la loi de Laplace sur les adiabatiques réversibles BC et DA : $T_B{}^{\gamma} P_B{}^{1-\gamma} = T_C{}^{\gamma} P_C{}^{1-\gamma}$ et $T_D{}^{\gamma} P_D{}^{1-\gamma} = T_A{}^{\gamma} P_A{}^{1-\gamma}$. Les transformations CD et AB sont isobares donc $P_C = P_D$ et $P_A = P_B$, d'où $T_B/T_C = (P_B/P_C)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (P_A/P_D)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_A/T_D$ soit $T_C/T_D = T_B/T_A$.

L'expression du rendement se simplifie alors en $\eta = 1 - \dfrac{T_D}{T_A}$, soit finalement $\boxed{\eta = 1 - \left(\dfrac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1}}$ en utilisant la relation de Laplace $T_D V_D{}^{\gamma-1} = T_A V_A{}^{\gamma-1}$ sur l'adiabatique réversible DA.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	L'inégalité de Clausius pour un cycle est : $\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$.	☐	☐
2.	Dans un cycle de Carnot, pendant les deux isothermes, la température de l'agent thermique est forcément égale à la température des sources.	☐	☐
3.	Deux moteurs dithermes en fonctionnement réversible entre les mêmes sources ont le même rendement, quel que soit l'agent thermique utilisé.	☐	☐
4.	Le rendement d'un moteur ditherme peut être supérieur à 1.	☐	☐
5.	L'efficacité d'une pompe à chaleur peut être supérieure à 1.	☐	☐
6.	Une machine frigorifique et une pompe à chaleur dithermes, fonctionnant de manière réversible entre les mêmes sources, ont la même efficacité.	☐	☐
7.	Le cycle décrit par l'agent thermique d'un réfrigérateur est parcouru dans le sens trigonométrique dans un diagramme de Clapeyron.	☐	☐
8.	Dans une machine frigorifique, on cherche à refroidir la source froide donc $Q_F < 0$.	☐	☐
9.	Dans une machine thermique à circuit de fluide, le travail utile est le travail autre que celui des forces de pression.	☐	☐
10.	Un récepteur qui dépenserait du travail pour faire passer de la chaleur d'une source chaude à une source froide serait une machine inutile.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

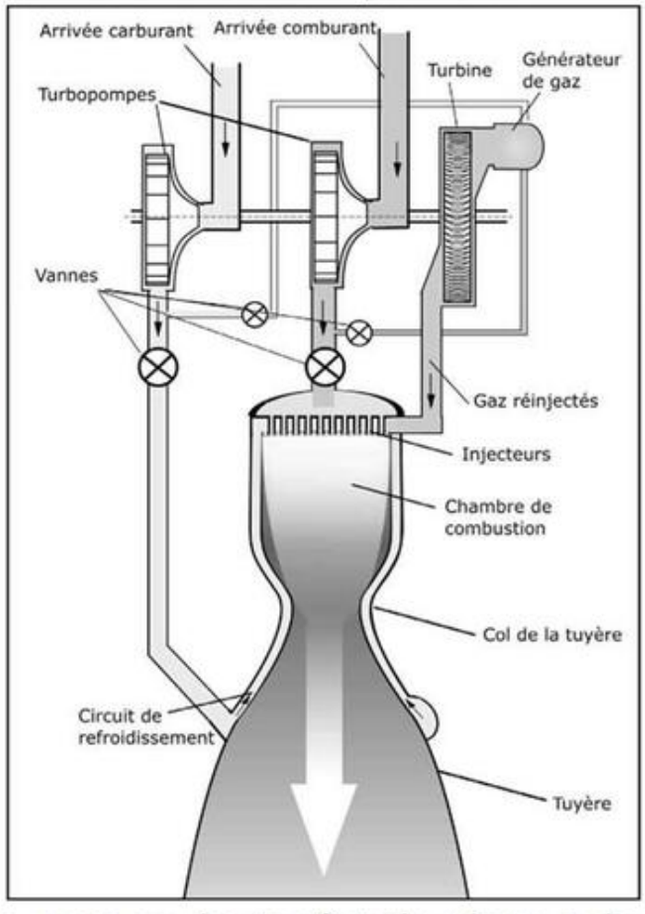
■ Transferts énergétiques et performances

❑ Exercice 21.1. Moteurs de la sonde Rosetta : étude qualitative

L'année 2014 a été marquée par la mission Rosetta au cours de laquelle la sonde du même nom est entrée en orbite autour de la comète 67P/Churyumov-Gerasimenko, surnommée Tchouri, après un voyage de 10 ans.
La propulsion de Rosetta est assurée par 24 petits moteurs-fusées à ergols liquides qui disposent de 1720 kg d'ergols (monométhyl-hydrazine et peroxyde d'azote). Les ergols sont stockés dans deux réservoirs, le premier contenant 660 kg de monométhylhydrazine (carburant), le second 1060 kg de peroxyde d'azote (comburant).

Le schéma de ce type de propulseur est présenté ci-contre.

Extrait du site :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur-fusée



1. Le principe général des moteurs thermiques repose sur des transferts thermiques et des transferts de travail. Montrer comment le premier et le second principe de la thermodynamique conduisent à l'impossibilité d'un moteur thermique fonctionnant avec une seule source thermique.

2. Sur un schéma de principe, identifier les différents transferts énergétiques, notés W, Q_c et Q_f à l'œuvre dans le moteur de fusée entre les différents éléments ci-dessous, les représenter au moyen d'une flèche et préciser le signe de chaque grandeur.

Source froide	Source chaude	Mélange de gaz	Véhicule solidaire du moteur

3. Indiquer à quel élément du schéma de principe on peut identifier la chambre de combustion présente sur le schéma du propulseur. Préciser l'élément qui fait office de source froide dans le propulseur, et indiquer le rôle des turbopompes.

D'après Agro-Véto

❑ Exercice 21.2. Cogénération dans un chalet

Considérons un chalet comportant deux installations : une chaudière utilisée pour le chauffage, et un moteur ditherme à combustion externe utilisé pour la production d'électricité. Dans les deux cas, du bois est utilisé comme combustible. Les échanges énergétiques mis en jeu quotidiennement dans les deux installations sont donnés dans le tableau suivant.

Combustible consommé par la chaudière	52 kW · h
Transfert thermique fourni par la chaudière	47 kW · h
Combustible consommé par le moteur dans une enceinte à 400 °C	48 kW · h
Travail fourni par le moteur	14 kW · h
Transfert thermique rejeté par le moteur dans l'atmosphère à 10 °C	34 kW · h

1. Supposons que la chaudière et le moteur constituent des systèmes indépendants.

a) Calculer le rendement du moteur ditherme. Le comparer au rendement maximal qu'il pourrait théoriquement atteindre.

b) Calculer le rendement de l'ensemble {chauffage + moteur}.

2. Pour améliorer le rendement global, l'énergie consommée par la chaudière est augmentée, et cette dernière est alors utilisée à la fois pour le chauffage et pour l'alimentation du moteur. Un dispositif permet en outre de récupérer 80 % du transfert thermique rejeté dans l'atmosphère par le moteur pour le réinjecter dans le réseau de chauffage. Les besoins en chauffage et en électricité restent les mêmes que précédemment.

a) Quel doit être le transfert thermique quotidien fourni directement par la chaudière au chalet ?

b) En déduire l'énergie consommée quotidiennement par la chaudière.

c) Calculer le rendement de l'association de cogénération {chauffage + moteur}, et commenter le résultat obtenu.

d) La combustion du bois libère dans la chaudière un transfert thermique massique égal à $14\ \text{MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Quelle masse de bois doit-on brûler quotidiennement pour faire fonctionner l'association {chaudière + moteur} ? On donne : $1\ \text{kW} \cdot \text{h} = 3{,}6\ \text{MJ}$.

❑ Exercice 21.3. Étude d'un congélateur

Un congélateur est placé dans une pièce à la température de 20 °C (supposée constante). Pour maintenir l'intérieur de ce congélateur à la température constante de −19 °C, il est nécessaire d'en extraire, par transfert thermique, 400 kJ par heure. Cette opération est supposée être réalisée de manière réversible.

1. Calculer le transfert thermique fourni à la pièce en une heure par l'agent thermique.

2. Calculer la puissance à fournir par heure pour réaliser cette opération.

3. Définir puis calculer l'efficacité de cette machine frigorifique.

❑ Exercice 21.4. Réchauffement d'un fleuve par une centrale nucléaire

Dans une centrale nucléaire, la turbine à vapeur est un moteur ditherme fonctionnant entre deux sources de chaleur :

- une source chaude (eau du circuit primaire) de température $T_C = 579$ K ;
- une source froide (eau d'un fleuve) de température $T_F = 283$ K .

La centrale fournit une puissance $P = 1{,}00$ GW .

1. Calculer le rendement η de la centrale sachant qu'il est égal à 60,0 % du rendement maximal de Carnot.
2. Exprimer le transfert thermique $\dot{Q}_C$ par unité de temps de la source chaude vers l'agent thermique en fonction de η et P. En déduire le transfert thermique $\dot{Q}_F$ par unité de temps de l'eau du fleuve vers l'agent thermique. Le calculer.
3. L'eau du fleuve servant de source froide a un débit volumique $D_V = 300\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la variation de température ΔT de l'eau du fleuve en contact à chaque instant avec l'agent thermique. On donne : $\rho = 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ masse volumique et $c = 4{,}18 \cdot 10^3\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ capacité thermique massique de l'eau liquide.

❑ Exercice 21.5. Chauffage d'une serre



On souhaite maintenir la température d'une serre à la valeur constante $T_1 = 293$ K . L'air extérieur est à la température $T_2 = 283$ K .

Dans ce but, on utilise une chaudière à la température $T_3 = 600$ K capable de fournir un transfert thermique $Q_3 > 0$.

On décide de ne pas utiliser directement la chaudière pour chauffer la serre mais d'adopter le dispositif suivant : la chaudière fournit le transfert thermique Q_3 à l'agent thermique d'un moteur réversible fonctionnant entre la chaudière à T_3 et l'air extérieur à T_2. Le travail récupéré est utilisé pour actionner une pompe à chaleur réversible fonctionnant entre l'air extérieur à T_2 et l'intérieur de la serre à T_1. On note Q_2 le transfert thermique algébrique de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe.

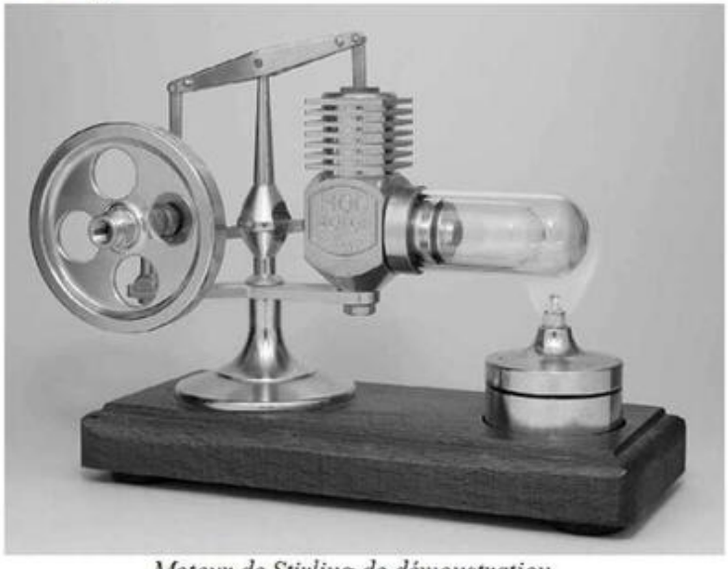
1. Reporter sur un schéma de principe les différents échanges énergétiques algébriques mis en jeu lors du chauffage.
2. Exprimer le travail algébrique W reçu par le moteur en fonction de Q_3, T_2 et T_3.

3. Exprimer le transfert thermique algébrique Q_1 de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe en fonction de W, T_1 et T_2.
4. Définir puis exprimer l'efficacité e de l'ensemble du dispositif de chauffage en fonction de T_1, T_2 et T_3.

■ Cycles de machines à cylindre

❑ Exercice 21.6. Moteur de Stirling

Un moteur de Stirling peut être réalisé très simplement. Il fonctionne entre une source chaude de température $T_C = 450$ K (flamme) et une source froide de température $T_F = 300$ K (air ambiant). L'agent thermique est constitué d'une quantité n d'air, considéré comme un gaz parfait de coefficient $\gamma = C_P/C_V = 1,40$, enfermé dans un cylindre muni d'un piston.
Il décrit de manière quasi-statique le cycle suivant :
- AB : compression à la température T_F de la source froide ;
- CD : détente à la température T_C de la source chaude ;
- BC et DA : isochores respectivement à V_1 et V_2.



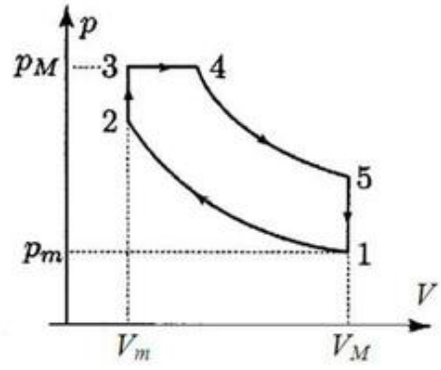
Moteur de Stirling de démonstration

On donne $R = 8,31\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\alpha = V_2/V_1 = 2,00$ (taux de compression).

1. Représenter le cycle de ce moteur dans le diagramme de Clapeyron.
2. Identifier les étapes non réversibles.
3. Calculer les différents transferts thermiques reçus par le gaz au cours du cycle.
4. Définir puis exprimer le rendement η du moteur. Le calculer.
5. Afin d'améliorer le rendement du moteur, on utilise un dispositif qui permet d'éviter les échanges thermiques avec l'extérieur en dehors des deux phases isothermes. Calculer le nouveau rendement η′ du moteur. Commenter.

❑ Exercice 21.7. Moteur Diesel à double combustion

Dans les moteurs Diesel à double combustion, le cycle décrit par l'air est celui représenté en coordonnées de Clapeyron (p,V) ci-contre. Après la phase d'admission qui amène l'air au point 1 du cycle, celui-ci subit une compression adiabatique réversible jusqu'au point 2. Après injection du carburant en 2, la combustion s'effectue d'abord de façon isochore de 2 à 3 puis se poursuit de façon isobare de 3 à 4. La phase de combustion est suivie d'une détente adiabatique réversible de 4 à 5 puis d'une phase d'échappement isochore de 5 à 1. Au point 1 du cycle, la pression p_m = 1,0 bar et la température T_m = 293 K sont minimales.



La pression maximale (aux points 3 et 4) est p_M = 60 bar et la température maximale (au point 4) est T_M = 2073 K. On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique et on notera respectivement C_p et C_v ses capacités thermiques molaires à pression et à volume constants.

On donne : le rapport volumétrique de compression $\beta = \dfrac{V_M}{v_m} = 17$, la masse molaire de l'air $M = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, la constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = 1{,}40$.

1. Calculer les températures T_2, T_3, T_5 aux points 2, 3 et 5 du cycle.
2. Calculer la quantité de chaleur Q_c reçue par 1,0 kg d'air au cours de la phase de combustion entre les points 2 et 4.
3. Calculer la quantité de chaleur Q_f échangée avec le milieu extérieur par 1,0 kg d'air entre les points 5 et 1.
4. En déduire , le travail W échangé par 1,0 kg d'air avec le milieu extérieur au cours d'un cycle.
5. Définir et calculer le rendement de ce moteur. Commenter la valeur trouvée.

D'après ENAC

■ Cycles de machines à circuit de fluide

❑ Exercice 21.8. Machine frigorifique*

1. On considère un cycle de transformations réversibles *DABCD* réalisé à partir du point *D* sur la courbe de rosée pour une masse unité de fluide :
   – *DA* : liquéfaction isotherme à la température T_1 (on parcourt la totalité du palier de liquéfaction) ;
   – *AB* : détente isentropique qui amène le fluide dans l'état *B* défini par la température T_0 et une fraction massique en gaz $x_g(B)$;

– BC : vaporisation isotherme jusqu'à l'intersection C avec la courbe isentropique passant par D ; l'état C est caractérisé par une fraction massique en vapeur $x_g(C)$.

a) Représenter le cycle $DABCD$ sur un diagramme de Clapeyron.

b) Exprimer les fractions massiques $x_g(B)$ et $x_g(C)$ en fonction de T_0, T_1, de la capacité thermique massique c du liquide, et des enthalpies massiques de vaporisation $\Delta_{vap}h(T_0)$ et $\Delta_{vap}h(T_1)$ aux températures T_0 et T_1.

c) Donner les expressions des transferts thermiques massiques q_{BC} et q_{DA} avec le milieu extérieur au cours des transformations isothermes BC et DA.

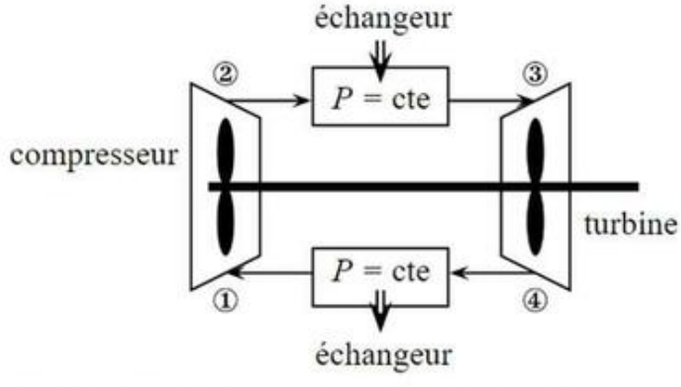
d) En déduire le travail w reçu par l'unité de masse du fluide au cours du cycle.

2. Le cycle précédent peut être utilisé pour faire fonctionner une machine frigorifique. Le travail consommé est utilisé pour refroidir la source froide de température $T_0 < T_1$. Exprimer l'efficacité e de cette machine frigorifique. Commentez le résultat obtenu.

❑ Exercice 21.9. Cycle de Brayton des centrales nucléaires*

Les centrales nucléaires de la génération 6 prévues vers les années 2030 devront être sûres et présenter un rendement important. Une option étudiée parmi six grands choix est le réacteur à très haute température refroidi à l'hélium. Ce type de réacteur offrirait l'avantage d'améliorer l'efficacité de la conversion énergétique, compte tenu de la température élevée de la source chaude et de permettre en sus la production d'hydrogène. Dans ces installations de forte puissance, on utilise le cycle de Brayton (ou cycle de Joule) pour extraire le travail et, en fin de compte, produire de l'électricité.

Un gaz parfait circule dans une installation. Il échange du travail avec l'extérieur uniquement dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. On suppose que les transferts thermiques ont lieu exclusivement dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton.



Ce cycle est constitué de deux isobares et de deux isentropiques :

- compression adiabatique réversible (dans le compresseur) du point 1 avec une température $T_1 = 300$ K et une pression $P_1 = 20 \cdot 10^5$ Pa vers le point 2 à la pression $P_2 = 80{,}0 \cdot 10^5$ Pa ;
- détente isobare (dans l'échangeur) du point 2 vers le point 3 à la température $T_3 = 1{,}30 \cdot 10^3$ K ;
- détente adiabatique réversible (dans la turbine) de 3 vers 4 (de $P_3 = P_2$ à $P_4 = P_1$) ;
- compression isobare (dans l'échangeur) de 4 vers 1.

L'hélium est un supposé être un gaz parfait monoatomique tel que $C_{Vm} = 3R/2$ et $C_{Pm} = 5R/2$ représentent respectivement les capacités thermiques molaires à volume et pression constante avec $R = 8{,}31\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. Pour une transformation isentropique, justifier que la relation entre T et P peut se mettre sous la forme : $\dfrac{T}{P^{\beta}} = \text{cte}$. Exprimer β en fonction de $\gamma = C_{Pm}/C_{Vm}$.

2. Déterminer les températures T_2 et T_4. Effectuer l'application numérique.

3. Tracer l'allure du cycle de Brayton du moteur sur un diagramme (P, V_m).

Pour l'écoulement du fluide à travers l'un des compartiments, en régime stationnaire, le premier principe s'écrit $\Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W'$, où W' est le travail utile reçu, c'est-à-dire échangé avec les pièces mobiles (hélices…).

4. Calculer les travaux utiles W'_{12} et W'_{34} échangés lors des transformations isentropiques 1−2 et 3−4 au cours desquelles le fluide circule « lentement » et horizontalement, respectivement dans le compresseur et dans la turbine. Effectuer l'application numérique pour n = 1,00 mol d'hélium.

5. Exprimer les transferts thermiques Q_{23} et Q_{41}.
Effectuer l'application numérique pour n = 1,00 mol d'hélium.

6. Montrer que le rendement η du moteur se met sous la forme : $\eta = 1 - \dfrac{1}{(r_p)^{\beta}}$ avec $r_p = \dfrac{P_2}{P_1}$.

7. Calculer numériquement ce rendement et le comparer au rendement de Carnot obtenu en utilisant les deux températures extrêmes du cycle.

D'après CCINP

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 21.3. À la question 1, appliquer le deuxième principe sur un cycle (où toutes les transformations sont réversibles).
Exercice 21.5. Question 2 : écrire les deux principes sur un cycle.
Exercice 21.6. Pour la question 3, calculer d'abord le travail sur les évolutions isothermes, et en déduire les transferts thermiques sur ces deux mêmes phases.
Exercice 21.8. Décomposer les transformations isentropiques.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai

2. Dans le cas contraire, il y aurait une inhomogénéité de température, source d'irréversibilité. Or, par définition, un cycle de Carnot est réversible.

4. Par construction, le rendement d'un moteur est inférieur à 1.

5. Elle est même *toujours* supérieure à 1, ce qui fait tout l'intérêt de la pompe à chaleur par rapport à un simple chauffage électrique.

6. L'efficacité de Carnot est $e_C = \dfrac{T_F}{T_C - T_F}$ pour une machine frigorifique, mais $e_C = \dfrac{T_C}{T_C - T_F}$ pour une pompe à chaleur.

8. On note habituellement Q_F le transfert thermique reçu par l'agent thermique de la part de la source froide : pour que l'intérieur de la machine frigorifique cède effectivement un transfert thermique à l'agent thermique, il faut $Q_F > 0$.

9. Dans une telle machine il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression. Mais le travail utile est celui que le fluide échange *avec les pièces mobiles de la machine*, tandis que le travail « inutile » est celui échangé entre une tranche donnée du fluide et le reste du fluide.

10. Ce transfert thermique peut être réalisé sans consommation de travail, par simple mise en contact des deux sources.

❑ Les erreurs classiques

– Il est essentiel de bien distinguer les *conventions algébriques* choisies pour décrire les échanges énergétiques du *sens réel* de ces échanges. Pour l'étude d'une seule machine, on définit généralement les échanges énergétiques par rapport à l'agent thermique (ils sont donc positifs lorsque l'énergie est effectivement reçue par celui-ci). En présence de plusieurs machines en interaction, on fixe les conventions au début de l'étude et on s'y tient jusqu'à la fin.
– La performance d'une machine thermique (rendement ou efficacité) est définie positive : attention de bien respecter cette contrainte.

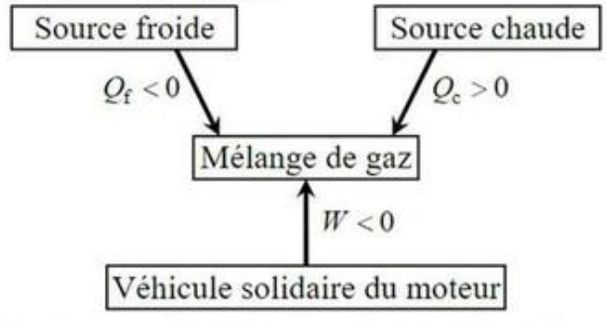
■■ Corrigé des exercices

Exercice 21.1

1. Dans une machine cyclique monotherme, l'agent thermique échange un transfert thermique Q avec une unique source à la température T_0 et un travail W avec l'extérieur. Pour qu'un fonctionnement moteur soit possible, il faut $W < 0$.
Or l'application des deux principes de la thermodynamique à l'agent thermique, sur un cycle de fonctionnement donne : $0 = W + Q$ et $\frac{Q}{T_0} \leq 0$.

Donc $\boxed{W = -Q \geq 0}$: le cycle est nécessairement récepteur, c'est-à-dire qu'un moteur cyclique monotherme est impossible.

2. On peut faire le schéma de principe suivant, où le sens des flèches indique *par rapport à qui sont définis* les trois transferts – en l'occurrence, ils sont tous définis par rapport au mélange de gaz qui constitue l'agent thermique du moteur.



Si on voulait faire apparaître le *sens effectif* de transfert de l'énergie, on mettrait une flèche de la source chaude vers le mélange de gaz (ce qui correspond au signe positif de Q_c), et deux flèches partant du mélange de gaz et allant vers la source froide et vers le véhicule (signes négatifs de Q_f et de W).

3. La chambre de combustion peut être assimilée à la source chaude.

> *C'est en fait plus exactement la réaction chimique de combustion, qui a lieu dans la chambre de combustion entre le carburant (réducteur) et le comburant (oxydant) qui joue le rôle de la source chaude, c'est-à-dire qui apporte de l'énergie à une température élevée.*

Et c'est le circuit de refroidissement qui joue le rôle de la source froide.

Les turbopompes servent à amener les deux ergols dans la chambre de combustion. Il s'agit donc d'un moteur secondaire qui s'ajoute au schéma de principe ci-dessus : il fournit du travail aux deux ergols pour les déplacer (travail cependant beaucoup plus faible que le travail de poussée qui est le but de la machine), en consommant lui-même un (petit) transfert thermique venu du générateur de gaz, et en restituant un transfert thermique à la chambre de combustion par l'intermédiaire des gaz réinjectés.

Exercice 21.2

1. a) Le rendement du moteur ditherme est donné par $\boxed{\eta_{\text{moteur}} = \frac{-W}{Q_C}}$ avec $-W = 14\ \text{kW}\cdot\text{h}$ et $Q_C = 48\ \text{kW}\cdot\text{h}$. AN $\boxed{\eta_{\text{moteur}} = 29\ \%}$. Il est toujours inférieur au rendement de Carnot $\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$, rendement théorique maximal d'un moteur cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible. Avec $T_F = 283\ \text{K}$ et $T_C = 673\ \text{K}$, on obtient $\boxed{\eta_C = 58\ \%}$. Comme prévu, on constate que $\boxed{\eta_{\text{moteur}} < \eta_C}$ (le rendement réel n'est que la moitié du rendement maximal).

b) Pour l'ensemble {chauffage + moteur}, les transferts énergétiques désirés sont le transfert thermique fourni par la chaudière et le travail fourni par le moteur ; et les transferts énergétiques dépensés résultent du combustible brûlé à la fois dans la chaudière et dans le moteur.

Donc $\eta_{\text{global}} = \left| \frac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}} \right|$. AN $\eta_{\text{global}} = \frac{47+14}{52+48}$ soit $\boxed{\eta_{\text{global}} = 61\ \%}$.

2. a) Le moteur devant toujours fournir un travail de $14\ \text{kW}\cdot\text{h}$, il rejette toujours $34\ \text{kW}\cdot\text{h}$ sous forme transfert thermique, dont on récupère 80 %, soit $Q_{\text{récup}} = 27\ \text{kW}\cdot\text{h}$. Pour le chauffage du chalet, le besoin étant toujours $Q_{\text{chalet}} = 47\ \text{kW}\cdot\text{h}$, la chaudière donc doit seulement fournir $\boxed{Q_{\text{chaud}} = Q_{\text{chalet}} - Q_{\text{récup}} = 20\ \text{kW}\cdot\text{h}}$ sous forme de chauffage direct.

b) La chaudière doit fournir en plus un autre transfert thermique $Q_{\text{ch}\to\text{mot}} = 48\ \text{kW}\cdot\text{h}$ pour faire fonctionner le moteur. D'après les données, le rendement de la chaudière est $\eta_{\text{ch}} = \frac{47}{52} = 0{,}90$.

Pour fournir $Q_{\text{tot}} = Q_{\text{chaud}} + Q_{\text{ch}\to\text{mot}} = 68\ \text{kW}\cdot\text{h}$, elle doit donc consommer $Q_{\text{conso}} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\eta_{\text{ch}}}$.

AN $\boxed{Q_{\text{conso}} = 76\ \text{kW}\cdot\text{h}}$.

c) Maintenant $Q_{\text{récup}} = 27\ \text{kW}\cdot\text{h}$ est à comptabiliser dans les transferts énergétiques désirés. Le rendement de l'association de cogénération {chauffage + moteur} est donc :

$\eta_{\text{assoc}} = \frac{Q_{\text{chaud}} + Q_{\text{récup}} + W_{\text{moteur}}}{Q_{\text{conso}}} = \frac{Q_{\text{chalet}} + W_{\text{moteur}}}{Q_{\text{conso}}}$. AN $\eta_{\text{assoc}} = \frac{47+14}{76}$, soit $\boxed{\eta_{\text{assoc}} = 80\ \%}$.

On constate bien sûr que $\boxed{\eta_{\text{assoc}} > \eta_{\text{global}}}$: le dispositif basé sur une cogénération a permis d'augmenter notablement le rendement du système global.

d) L'énergie libérée quotidiennement lors de la combustion du bois est $Q_{\text{conso}} = 76\ \text{kW}\cdot\text{h} = 270\ \text{MJ}$. Il faut donc brûler quotidiennement une masse de bois $m = \frac{Q}{q}$ avec $q = 14\ \text{MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. AN $\boxed{m = 19\ \text{kg}}$.

Exercice 21.3

1. L'agent thermique reçoit de la part de l'intérieur du congélateur à la température $T_F = 254\ \text{K}$ un transfert thermique $\dot{Q}_F = +400\ \text{kJ/heure}$. En notant $\dot{Q}_F$ le transfert thermique

horaire reçu par l'agent thermique de la part de la pièce à $T_C = 293$ K, on a pour un fonctionnement réversible $\frac{\dot{Q}_F}{T_F} + \frac{\dot{Q}_C}{T_C} = 0$, soit $\dot{Q}_C = -T_C \frac{\dot{Q}_F}{T_F}$ par heure. Le transfert thermique horaire fourni à la pièce est par conséquent $\boxed{\dot{Q}'_C = -\dot{Q}_C = +T_C \frac{\dot{Q}_F}{T_F}}$. AN $\boxed{\dot{Q}'_C = 461 \text{ kJ/heure}}$.

On peut aussi noter Q_F, Q_C et Q'_C et les exprimer en kJ.

2. En utilisant le premier principe, on obtient le travail horaire $\dot{W} = -\dot{Q}_F - \dot{Q}_C$ qui doit être reçu par l'agent thermique. Par définition, $\boxed{P = \dot{W} = -\dot{Q}_F - \dot{Q}_C}$. AN avec 1 W = 3,6 kJ/h : $\boxed{P = 17 \text{ W}}$.

3. L'efficacité du congélateur est $\boxed{e = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{W}}}$. Ainsi $e = -\frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_F + \dot{Q}_C}$ soit $\boxed{e = \frac{T_F}{T_C - T_F}}$. AN $\boxed{e = 6,51}$.

Le réfrigérateur fonctionnant de manière réversible, on retrouve bien pour l'efficacité précédente l'expression de l'efficacité (maximale) de Carnot.

Exercice 21.4

1. En fonctionnement réversible, le rendement maximal de la centrale nucléaire est celui d'un moteur de Carnot, soit $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$. On en déduit le rendement réel de la centrale : $\eta = 0,600 \cdot \eta_C$ soit $\boxed{\eta = 0,600 \cdot \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right)}$. AN $\boxed{\eta = 0,307 = 30,7\,\%}$.

2. Par définition, le rendement d'un moteur est $\eta = \frac{-W}{Q_C} = \frac{-W/\Delta t}{Q_C/\Delta t} = \frac{+P}{\dot{Q}_C}$ d'où $\boxed{\dot{Q}_C = \frac{P}{\eta}}$.

P est la puissance fournie par la centrale. Elle est donc opposée à la puissance reçue par l'agent thermique, d'où $\frac{-W}{\Delta t} = +P$.

En appliquant le premier principe (par unité de temps) à l'agent thermique sur un cycle, on obtient $\dot{Q}_F = -\dot{Q}_C + P$, soit $\boxed{\dot{Q}_F = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) P}$. AN $\boxed{\dot{Q}_F = -2,27 \text{ GW}}$.

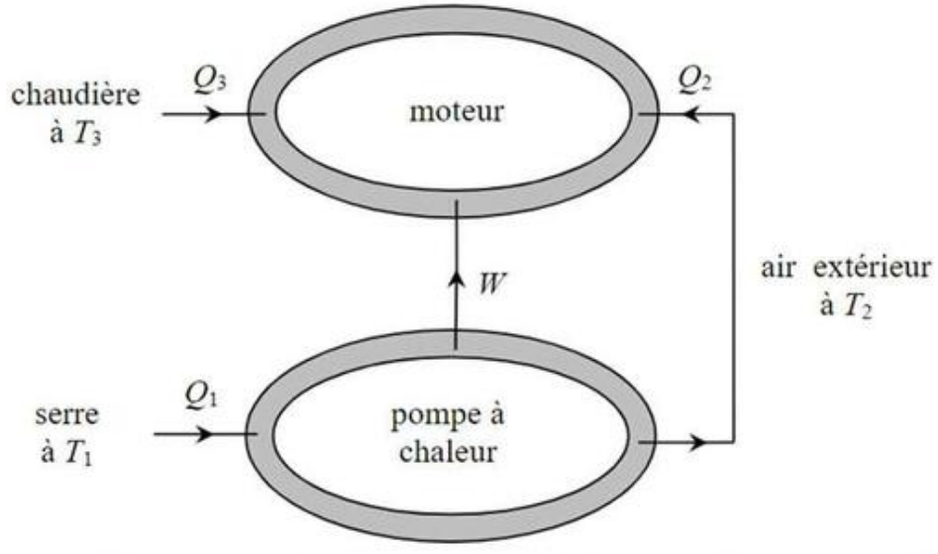
$\dot{Q}_F < 0$ donc de l'énergie est effectivement fournie à l'eau du fleuve sous forme de transfert thermique.

3. L'eau du fleuve reçoit un transfert thermique $-\dot{Q}_F > 0$ par unité de temps de la part de l'agent thermique. En considérant l'eau du fleuve comme une phase condensée idéale, on applique le premier principe au volume d'eau $D_V t$ traversant la centrale pendant une durée t :

$\Delta H = -\dot{Q}_F t$ soit $mc\Delta T = \rho D_V t\, c\, \Delta T = -\dot{Q}_F t$ d'où une augmentation de la température de l'eau du fleuve de $\boxed{\Delta T = \dfrac{-\dot{Q}_F}{c\rho D_V}}$. AN $\boxed{\Delta T = 1{,}80\ \text{K}}$.

Exercice 21.5

1.



2. Les deux principes de la thermodynamique appliqués à l'agent thermique du moteur sur un cycle réversible s'écrivent : $W + Q_2 + Q_3 = 0$ et $\dfrac{Q_2}{T_2} + \dfrac{Q_3}{T_3} = 0$. Donc $\boxed{W = -\left(1 - \dfrac{T_2}{T_3}\right) Q_3 < 0}$.

3. En utilisant les conventions algébriques fixées à la question 1, les deux principes de la thermodynamique appliqués à l'agent thermique de la pompe à chaleur sur un cycle réversible s'écrivent : $-W + Q_1 - Q_2 = 0$ et $\dfrac{Q_1}{T_1} - \dfrac{Q_2}{T_2} = 0$. On en déduit : $\boxed{Q_1 = \dfrac{W}{1 - \dfrac{T_2}{T_1}} < 0}$.

Le respect des conventions algébriques est ici essentiel pour obtenir un résultat cohérent.

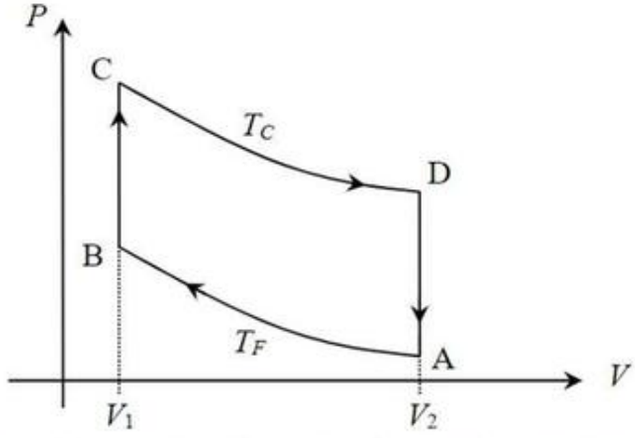
4. Par définition $e = \left| \dfrac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}} \right|$. Chauffer la serre signifie permettre un transfert thermique $-Q_1 > 0$ de l'agent thermique de la pompe à chaleur vers l'intérieur de la serre. Dans ce but, il est nécessaire d'utiliser une chaudière capable de fournir un transfert thermique $Q_3 > 0$ à l'agent thermique du moteur.

⇨ *Méthode 21.1*

Par conséquent l'efficacité est $\boxed{e = \dfrac{-Q_1}{Q_3}}$. Les questions 2 et 3 permettent d'éliminer le travail W dans l'expression de l'efficacité, d'où finalement $\boxed{e = \dfrac{1 - \dfrac{T_2}{T_3}}{1 - \dfrac{T_2}{T_1}}}$. AN $\boxed{e = 15{,}5}$.

Exercice 21.6

1.



2. Le cycle est décrit de manière quasi-statique. Sur les isothermes, la température du système est égale à celle des sources : sur ces transformations, il n'y a donc pas d'inhomogénéités de températures, sources d'irréversibilité. Les deux isothermes sont donc réversibles.

L'isochore BC fait passer le gaz de la température T_F à la température T_C au contact de la source chaude à T_C. De même, isochore DA fait passer le gaz de la température T_C à la température T_F au contact de la source froide à T_F. Bien que ces deux étapes soient réalisées de manière quasi-statique, les inhomogénéités de température empêchent qu'elles puissent être considérées comme réversibles.

En conclusion : les étapes AB et CD sont réversibles, les étapes BC et DA sont irréversibles.

3. Au cours des évolutions isochores, le travail des forces de pression est nul : le transfert thermique reçu par le gaz s'identifie donc, d'après le premier principe, à sa variation d'énergie interne. On en déduit $Q_{BC} = C_V\left(T_C - T_F\right)$ et $Q_{DA} = C_V\left(T_F - T_C\right)$, soit en explicitant $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$:

$\boxed{Q_{BC} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\left(T_C - T_F\right) > 0}$ et $\boxed{Q_{DA} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\left(T_F - T_C\right) = -Q_{BC} < 0}$.

Au cours des évolutions isothermes (réversibles), $\Delta U = 0$ donc le travail et le transfert thermique sont opposés : $W_{AB} = -nRT_F \ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right) = -Q_{AB}$ et $W_{CD} = -nRT_C \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) = -Q_{CD}$.

Finalement, on obtient $\boxed{Q_{AB} = -nRT_F \ln\alpha < 0}$ et $\boxed{Q_{CD} = nRT_C \ln\alpha > 0}$.

4. Par définition $\eta = \left| \dfrac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}} \right|$. Le transfert thermique reçu pendant les phases BC et CD permet de fournir un travail W_{cycle} sur l'ensemble du cycle. Ainsi, le rendement du moteur de Stirling est donné par $\eta = \dfrac{-W_{\text{cycle}}}{Q_C}$ avec $Q_C = \sum_{i,\, Q_i>0} Q_i = Q_{\text{BC}} + Q_{\text{CD}}$ d'où $\boxed{\eta = \dfrac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{BC}} + Q_{\text{CD}}}}$.

⇨ *Méthode 21.1*

Sur un cycle de fonctionnement, le premier principe s'écrit $-W_{\text{cycle}} = Q_{\text{AB}} + Q_{\text{BC}} + Q_{\text{CD}} + Q_{\text{DA}}$ soit $-W_{\text{cycle}} = Q_{\text{AB}} + Q_{\text{CD}}$ (car $Q_{\text{DA}} = -Q_{\text{BC}}$). On peut donc réécrire le rendement $\eta = \dfrac{Q_{\text{AB}} + Q_{\text{CD}}}{Q_{\text{BC}} + Q_{\text{CD}}}$ d'où $\boxed{\eta = \dfrac{(\gamma-1)(T_C - T_F)\ln\alpha}{T_C - T_F + (\gamma-1)T_C \ln\alpha}}$. AN $\boxed{\eta = 15{,}1\,\%}$.

5. Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, le nouveau rendement du moteur s'écrit $\eta' = \dfrac{Q_{\text{AB}} + Q_{\text{CD}}}{Q_{\text{CD}}} = 1 + \dfrac{Q_{\text{AB}}}{Q_{\text{CD}}}$. D'après la question 3, on en déduit $\boxed{\eta' = 1 - \dfrac{T_F}{T_C}}$. AN $\boxed{\eta' = 33{,}3\,\%}$.

Le rendement obtenu correspond au rendement de Carnot. En limitant les transferts thermiques aux phases isothermes, qui sont réversibles, il a été possible de s'affranchir des sources d'irréversibilité.

Exercice 21.7

1. Loi de Laplace sur la transformation 1–2 isentropique : $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$ d'où $\boxed{T_2 = T_1 \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_m \beta^{\gamma-1}}$. AN $\boxed{T_2 = 910\ \text{K}}$. Sur la transformation 2–3 isochore : $T_3 = T_2 \dfrac{p_3}{p_2}$, avec $p_3 = p_M$ et $p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$ soit $p_2 = p_1 \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = p_m \beta^{\gamma}$, d'où $\boxed{T_3 = T_2 \dfrac{p_M}{p_m} \beta^{-\gamma} = \dfrac{T_m}{\beta} \dfrac{p_M}{p_m}}$. AN $\boxed{T_3 = 1034\ \text{K}}$. Loi de Laplace sur la 4–5 isentropique : $T_5 = T_4 \left(\dfrac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1} = T_M \left(\dfrac{V_4}{V_M}\right)^{\gamma-1}$, avec $V_4 = V_3 \dfrac{T_4}{T_3} = V_m \dfrac{T_M}{T_3}$, d'où $\boxed{T_5 = T_M \left(\dfrac{1}{\beta} \dfrac{T_M}{T_3}\right)^{\gamma-1}}$. AN $\boxed{T_5 = 882\ \text{K}}$.

2. $Q_c = Q_{2-3} + Q_{3-4} = \Delta U_{2-3} + \Delta H_{3-4}$ (isochore puis isobare), soit en utilisant les expressions des capacités : $\boxed{Q_c = \dfrac{mR}{M(\gamma-1)}\left(T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)\right)}$. AN $\boxed{Q_c = 1131\ \text{kJ}}$.

3. $Q_f = Q_{5-1} = \Delta U_{5-1}$ (isochore), soit $\boxed{Q_f = \dfrac{mR}{M(\gamma-1)}(T_1 - T_5)}$. AN $\boxed{Q_f = -422\ \text{kJ}}$.

4. Premier principe appliqué au gaz sur un cycle : $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$ (puisqu'il n'y a pas d'autre transfert thermique) d'où $\boxed{W = -Q_c - Q_f}$. AN $\boxed{W = -709 \text{ kJ}}$.

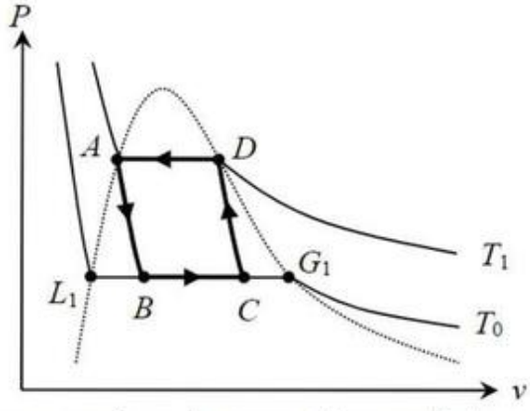
5. Rendement d'un moteur : $\boxed{r = \dfrac{-W}{Q_c}}$. AN $\boxed{r = 0,627 \text{ (soit } 62,7\ \%)}$.

⇨ *Méthode 21.1*

Ce très bon rendement a été calculé avec une modélisation extrême des transformations et du gaz. En pratique, on obtient des rendements nettement plus faibles, de l'ordre de 40 %.

Exercice 21.8

1. a)



Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique : il s'agit bien d'une machine frigorifique.

b) La transformation AB est isentropique donc $\Delta s_{AB} = 0$. Or l'entropie est une fonction d'état donc $\Delta s_{AB} = \Delta s_{AL_1} + \Delta s_{L_1B} == c \ln \dfrac{T_0}{T_1} + x_g(B) \dfrac{\Delta_{vap} h(T_0)}{T_0} = 0$.

On en déduit $\boxed{x_g(B) = \dfrac{cT_0}{\Delta_{vap} h(T_0)} \ln \dfrac{T_1}{T_0}}$.

De même, la transformation CD est isentropique donc $\Delta s_{CD} = 0$. Comme on ne dispose pas de la capacité thermique du gaz, on ne peut pas calculer $x_g(C)$ en décomposant la transformation CD et CG_1D. En revanche, l'énoncé fournit $\Delta_{vap} h(T_1)$. On décompose donc CD en CL_1AD, d'où

$\Delta s_{CD} = \Delta s_{CL_1} + \Delta s_{L_1A} + \Delta s_{AD}$, avec $\Delta s_{CL_1} = -\Delta s_{L_1C} = -x_g(C) \dfrac{\Delta_{vap} h(T_0)}{T_0}$, $\Delta s_{L_1A} = c \ln \dfrac{T_1}{T_0}$ et $\Delta s_{AD} = \dfrac{\Delta_{vap} h(T_1)}{T_1}$. On en déduit $\boxed{x_g(C) = \dfrac{T_0}{\Delta_{vap} h(T_0)} \left(c \ln \dfrac{T_1}{T_0} + \dfrac{\Delta_{vap} h(T_1)}{T_1} \right)}$.

c) Si la liquéfaction du corps pur étudié est isotherme, alors elle est également isobare (équilibre monovariant).

Ainsi $q_{BC} = \Delta h_{BC} = \Delta_{vap} h(T_0) \left(x_g(C) - x_g(B) \right)$ soit $\boxed{q_{BC} = \Delta_{vap} h(T_1) \dfrac{T_0}{T_1}}$.

De même, $q_{DA} = -q_{AD} = -\Delta_{vap}h(T_1)\left[x_g(D) - x_g(A)\right] = -\Delta_{vap}h(T_1)(1-0)$ soit $\boxed{q_{DA} = -\Delta_{vap}h(T_1)}$.

d) Les transformations AB et CD sont isentropiques et réversibles : d'après le deuxième principe, elles sont donc adiabatiques. Sur un cycle, le premier principe s'écrit alors $w + q_{DA} + q_{BC} = 0$. On en déduit $w = -q_{DA} - q_{BC}$ soit $\boxed{w = \Delta_{vap}h(T_1)\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)}$.

2. Dans cette machine frigorifique, la source froide cède effectivement un transfert thermique $q_{BC} > 0$ à l'agent thermique grâce au travail $w > 0$ effectivement reçu par celui-ci. Ainsi, l'efficacité de cette machine frigorifique est définie par $e = \frac{q_{BC}}{w}$ soit $\boxed{e = \frac{T_0}{T_1 - T_0}}$.

⇨ *Méthode 21.1*

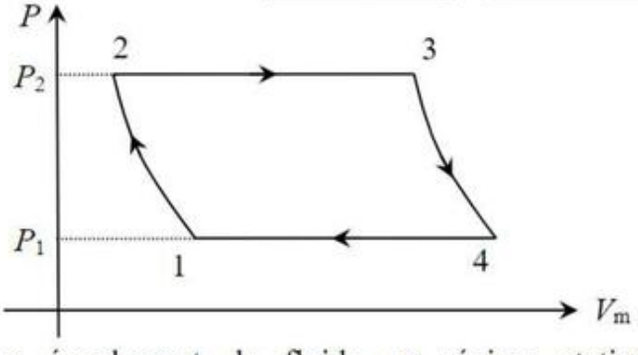
L'efficacité obtenue correspond à l'efficacité de Carnot. Ce résultat était prévisible dans la mesure où le cycle décrit par l'agent thermique de la machine est bien un cycle de Carnot (cycle *réversible* composé de deux isothermes, respectivement à T_0 et T_1, et de deux adiabatiques).

Exercice 21.9

1. Pour une évolution isentropique d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = C_{Pm}/C_{Vm}$ constant, on peut appliquer les lois de Laplace : $PV^\gamma = \text{cte}$. En utilisant l'équation d'état du gaz parfait, $V = \frac{nRT}{P}$, on en déduit $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{cte}$ soit $\boxed{\frac{T}{P^\beta} = \text{cte}}$ avec $\boxed{\beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma}}$.

2. Les transformations adiabatiques et réversibles 1−2 et 3−4 sont isentropiques. Avec les relations établies question 1 : $\boxed{T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^\beta}$ et $\boxed{T_4 = T_3\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\beta}$. AN $\boxed{T_2 = 522\ \text{K}}$ et $\boxed{T_4 = 747\ \text{K}}$.

3.



4. Pour un écoulement de fluide en régime stationnaire, le premier principe s'écrit $\Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W'$. L'écoulement dans le compresseur ou la turbine étant supposé lent ($\Delta E_c \approx 0$), horizontal ($\Delta E_p = 0$) et adiabatique ($Q = 0$), on a dans ce cas $\Delta H = W'$. On en

déduit $W'_{12} = \Delta H_{12} = nC_{pm}(T_2 - T_1)$ soit $\boxed{W'_{12} = \frac{5}{2}nRT_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\beta} - 1\right]}$. De même, on obtient $\boxed{W'_{34} = \frac{5}{2}nRT_3\left[\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\beta} - 1\right]}$. AN $\boxed{W'_{12} = 4,62 \text{ kJ}}$ et $\boxed{W'_{34} = -11,5 \text{ kJ}}$.

5. Pour les transformations isobares, on a $Q = \Delta H$. On en déduit $Q_{23} = nC_{pm}(T_3 - T_2)$ d'où $\boxed{Q_{23} = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2)}$. De même $\boxed{Q_{41} = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_4)}$. AN $\boxed{Q_{23} = 16,2 \text{ kJ} > 0}$, $\boxed{Q_{41} = -9,29 \text{ kJ} < 0}$.

6. Le rendement du moteur s'écrit $\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_C}$ d'où $\boxed{\eta = -\frac{W'_{12} + W'_{34}}{Q_{23}}}$. En utilisant les résultats établis aux questions 4 et 5, on obtient $\eta = -\frac{(T_2 - T_1) + (T_4 - T_3)}{(T_3 - T_2)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{(T_3 - T_2)}$. Or $T_1 - T_4 = \frac{1}{(r_p)^{\beta}}(T_2 - T_3)$ d'où finalement $\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{(r_p)^{\beta}}}$ avec $\boxed{r_p = \frac{P_2}{P_1}}$.

⇨ *Méthode 21.1*

7. L'application numérique donne $\boxed{\eta = 0,426}$. Le rendement de Carnot obtenu en utilisant les deux températures extrêmes du cycle serait $\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_3}}$. AN $\boxed{\eta_C = 0,769}$. On obtient comme prévu que $\eta < \eta_C$, le rendement de Carnot correspondant au rendement maximal obtenu pour une machine idéale fonctionnant de manière réversible.

Chapitre 22
Champ magnétique

UN SCIENTIFIQUE



Les premiers intérêts scientifiques de **Wilhelm Weber** (1804-1891) concernent la propagation du son. En 1831 il obtient une chaire à l'université de Göttingen grâce à Carl Friedrich Gauss. Les deux hommes entament alors des expériences sur le magnétisme ; ils élaborent ensemble le premier télégraphe électromagnétique. Les travaux de Weber ont permis de comprendre la nature électromagnétique de la lumière. L'unité de flux magnétique porte son nom dans le Système international.

Un peu d'histoire

L'existence du magnétisme est connue depuis l'Antiquité et la boussole apparaît vers l'an 1000 en Chine. Le premier exposé sur le sujet est l'œuvre de William Gilbert, daté de 1600, qui analyse les propriétés du magnétisme terrestre. Pourtant, la compréhension scientifique du phénomène ne se fait jour qu'en 1820 lorsque Hans Ørsted constate la déviation d'une aiguille aimantée placée à proximité d'un courant électrique. Dès qu'il prend connaissance de cette propriété, André-Marie Ampère en déduit l'origine électrique du magnétisme. Les connaissances avancent alors très rapidement. Michael Faraday découvre le phénomène de l'induction en 1831 et Wilhelm Weber montre que le rapport entre les unités électrostatique et électromagnétique est la vitesse de la lumière. James Maxwell établit alors, au début des années 1860, les équations qui régissent l'électromagnétisme.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'allure du champ magnétique créé par un aimant droit, une bobine plate, une bobine longue
- ▷ Un dispositif permettant de créer un champ magnétique quasi uniforme
- ▷ Des ordres de grandeur de champs magnétiques usuels
- ▷ Les propriétés de symétrie du champ magnétique
- ▷ La notion de moment magnétique et son ordre de grandeur pour un aimant
- ▷ La force de Laplace, sa résultante pour une barre rectiligne et son moment pour une spire rectangulaire
- ▷ Une description sommaire d'un moteur à courant continu et d'un moteur synchrone

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Identifier, sur une carte de champ magnétique, les zones de champ uniforme, fort ou faible, et l'emplacement des sources
- ▷ Déterminer la direction d'un champ magnétostatique, à partir des symétries de la distribution de courant
- ▷ Orienter un champ selon la règle du tire-bouchon
- ▷ Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies
- ▷ Calculer la résultante ou le moment des forces de Laplace dans des cas simples
- ▷ Calculer la puissance des forces de Laplace

■■ Résumé de cours

■ Champ magnétique

❑ Notion de champ magnétique

Le **champ magnétique** est introduit pour décrire indirectement les interactions entre des charges électriques en mouvement les unes par rapport aux autres.

– Des charges en mouvement créent un champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace.

– Une charge q en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$, en un point où le champ magnétique vaut $\vec{B}$, subit la force de Lorentz $\vec{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

❑ Sources du champ magnétique

– Le mouvement des charges à l'origine du champ magnétique est le plus souvent décrit par un courant électrique parcourant un circuit.

– Dans un **aimant** (permanent), aucun courant n'existe à l'échelle macroscopique, mais des mouvements microscopiques de charges sont à l'origine d'un champ magnétique.

❑ Lignes de champ

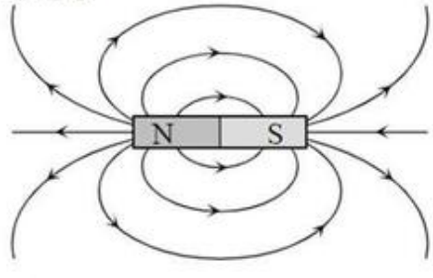
Une **ligne de champ** est une courbe tangente au champ en chacun de ses points, orientée dans le sens du champ.

D'une manière générale, les lignes de champ magnétique enlacent les courants électriques, et inversement les lignes de courant électrique enlacent le champ magnétique.

Une **carte de champ magnétique** représente l'allure de quelques lignes de champ, pour divers dispositifs créant un champ magnétique.

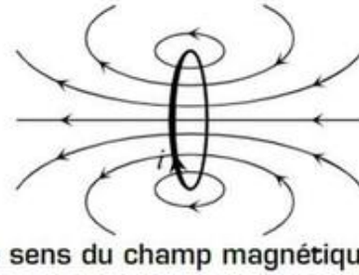
❑ Exemples de champ magnétiques

Champ créé par un aimant droit



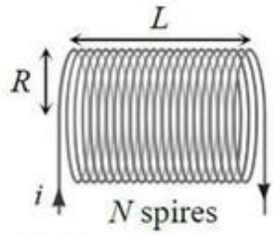
Champ créé par une spire circulaire

Une spire circulaire, ou boucle de courant, est un conducteur filiforme circulaire de rayon R et parcouru par un courant i. Le sens de ce courant et le sens du champ magnétique créé par la spire sont liés par la **règle du tire-bouchon**.



⇨ Méthode 22.2. Déterminer le sens du champ magnétique

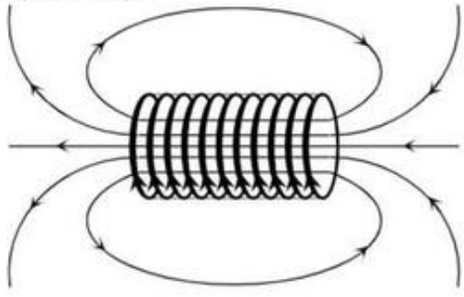
Champ créé par une bobine



Une bobine est un enroulement de fil sur un support, généralement cylindrique. L'intérêt est d'obliger le courant à faire de nombreux tours, ce qui permet d'obtenir un champ magnétique important. On caractérise une bobine par sa longueur L, son rayon R et le nombre de spires N.
On peut distinguer deux cas extrêmes.

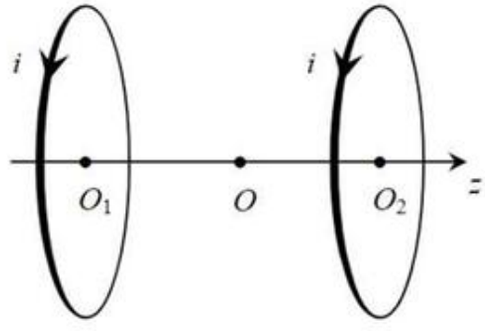
– Bobine plate ($L \ll R$) : on peut l'assimiler à N spires confondues, donc l'allure du champ créé est la même que pour une spire, il est simplement N fois plus intense.

– Bobine longue ou solénoïde ($L \gg R$) :



⇨ **Méthode 22.1. Exploiter une carte de champ magnétique**

Champ créé par des bobines de Helmholtz



Il s'agit de deux bobines plates de même rayon R et de N spires chacune, de même axe (Oz), et séparées par une distance O_1O_2 égale à leur rayon R. Un courant d'intensité i circule dans le même sens dans les deux bobines. Au voisinage du point O, ce dispositif crée un champ sensiblement uniforme : $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 N i}{R}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-3/2}\vec{e}_z$.

où $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$ est la **perméabilité du vide**.

D'une manière plus générale, le champ magnétique créé par une bobine est *proportionnel à l'intensité du courant*.

❑ Ordres de grandeur de champs magnétiques

L'unité SI de champ magnétique est le tesla (T).

Champ magnétique créé par une spire simple	~ 1 µT
Champ magnétique terrestre	~ 50 µT
Champ magnétique créé par un aimant permanent usuel	~ 10 mT
Champ magnétique créé par une bobine utilisée en TP	~ 10 mT
Champ magnétique utilisé en imagerie IRM	~ 10 T
Champs les plus intenses créés par des bobines supraconductrices	~ 50 T

■ Symétries de la distribution de courants et du champ

❑ Propriétés de symétrie du champ magnétostatique

Pour rechercher les plans de symétrie ou d'antisymétrie des courants, on associe à un courant d'intensité I en un point P un vecteur, tangent au circuit en ce point et orienté dans le sens de I.

Plan de symétrie pour les courants

Un plan de symétrie pour la distribution de courants est un plan d'*antisymétrie* pour le champ magnétostatique : pour deux points P et P' symétriques, $\vec{B}(P')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales.

En particulier, *en un point d'un plan de symétrie des courants, le champ est orthogonal à ce plan.*

Plan d'antisymétrie pour les courants

Inversement, un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants est un plan de *symétrie* pour le champ magnétostatique : pour P et P' symétriques, $\vec{B}(P')$ est le symétrique de $\vec{B}(P)$, leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles orthogonales au plan sont opposées.

En particulier, *en un point d'un plan d'antisymétrie des courants, le champ est parallèle à ce plan.*

⇨ **Méthode 22.3. Déterminer la direction du champ magnétique à partir des symétries**

❑ Invariances

Invariance par translation

Si la distribution de courants est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un axe (symétrie de révolution)

Si la distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi, dans une base adaptée (cylindrique ou sphérique) : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

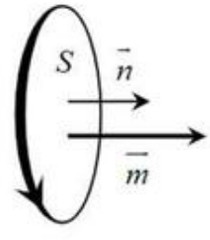
⇨ **Méthode 22.4. Déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ**

■ Moment magnétique

❑ Moment magnétique d'une boucle de courant plane

Le **moment magnétique** (ou moment dipolaire magnétique) associé à une spire est défini par la relation $\boxed{\vec{m} = iS\vec{n}}$, où i est l'intensité du courant, S la surface de la spire et $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la surface, orienté selon la règle du tire-bouchon.

Unité SI du moment magnétique : l'ampère-mètre carré ($\mathrm{A \cdot m^2}$).



❑ Moment magnétique d'un aimant

Les atomes possèdent un moment magnétique (de l'ordre de $10^{-23}\,\mathrm{A\cdot m^2}$), mais en général dans la matière les champs magnétiques créés par ces moments magnétiques s'annulent, car leur orientation est aléatoire. En revanche, dans un aimant permanent, tous les moments magnétiques sont sensiblement alignés, et leurs effets s'ajoutent, un aimant permanent est donc à l'origine d'un champ magnétique.

Une aiguille de boussole possède un moment magnétique de l'ordre de $10\,\mathrm{A\cdot m^2}$.

Dans les aimants permanents les plus puissants, le moment magnétique moyen par unité de volume est de l'ordre de $10^6\,\mathrm{A\cdot m^{-1}}$.

■ Forces de Laplace

❑ Expression

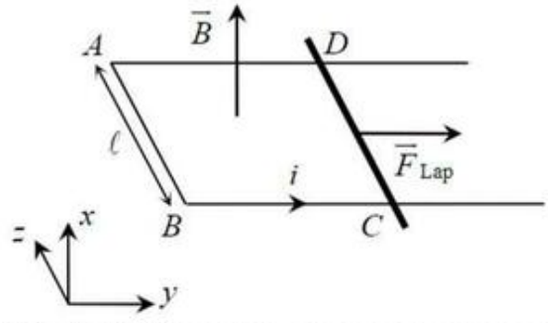
Une force de Laplace s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. L'expression la plus générale est : $\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{Lap}} = \int i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}}$.

Dans le cas particulier important où le champ $\overrightarrow{B}$ est uniforme, $\overrightarrow{F}_{\mathrm{Lap}} = \left(\int i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\right) \wedge \overrightarrow{B}$.

Dans ce cas, sur un circuit fermé dans lequel l'intensité est partout la même, la résultante des forces de Laplace est nulle car $\int \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \overrightarrow{0}$ pour un circuit fermé.

❑ Expérience des rails de Laplace

On fait circuler un courant i dans un barreau mobile CD placé dans un champ magnétique constant et uniforme $\overrightarrow{B}$, les sens étant indiqués sur le schéma. On observe une déviation du barreau vers la droite, due à une force de Laplace $\overrightarrow{F}_{\mathrm{Lap}} = i\ell B\overrightarrow{e_y}$.



⇨ **Méthode 22.5. Calculer la résultante des forces de Laplace**

❑ Moteur à courant continu

Une application importante des forces de Laplace est la possibilité d'obtenir un mouvement à partir d'un courant électrique, ce qui constitue un moteur électrique. Les rails de Laplace constituent ainsi un moteur électrique très rudimentaire.

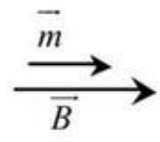
Il est cependant plus efficace d'utiliser un mouvement de rotation, ce qui conduit à une géométrie du dispositif (notamment du champ magnétique) plus compliquée, mais il s'agit toujours d'un champ magnétique indépendant du temps. Celui-ci est créé par une partie fixe, le **stator**, et il met en mouvement un **rotor** comportant des conducteurs rectilignes (analogues au barreau sur les rails de Laplace) ; le contact électrique entre ces conducteurs et leur circuit

d'alimentation est assuré par des balais en carbone frottant sur des lamelles. La vitesse de rotation obtenue est proportionnelle à la tension d'alimentation.
Les moteurs à courant continu sont utilisés dans divers appareils usuels : lecteur de disques, démarreur de voiture, modélisme, outillage portatif, gros engin de levage ou d'enroulage.

❑ Effet d'un champ magnétique uniforme sur un moment magnétique

Un moment magnétique est associé à un circuit fermé, ainsi, avec un champ magnétique uniforme, la résultante des forces de Laplace est nulle. En revanche, le moment des forces de Laplace est en général non nul, et vaut $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

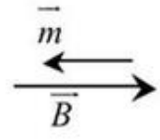
Équilibre stable



Leur moment par rapport à un axe Δ est alors $\boxed{\mathcal{M}_\Delta = \left(\vec{m} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{e_\Delta}}$.

Il y a donc deux situations d'équilibre (où le couple est nul), stable si le moment et le champ sont dans le même sens et instable s'ils sont en sens opposé. D'une manière générale, *le moment a tendance à s'aligner sur le champ*.

Équilibre instable

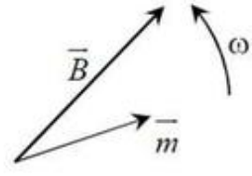


C'est notamment ce qui se passe pour un aimant permanent, que l'on peut en première approximation assimiler à un moment magnétique. L'aiguille d'une boussole, qui est un aimant permanent, « indique le nord » parce qu'elle s'aligne sur le champ magnétique terrestre.

⇨ **Méthode 22.6. Calculer le moment du couple des forces de Laplace sur une spire rectangulaire en rotation**

❑ Moteur synchrone

On peut mettre à profit l'effet d'alignement d'un moment magnétique sur le champ en créant un champ tournant au moyen de bobines fixes (constituant le stator), et en plaçant un rotor (moment permanent pouvant tourner : aimant permanent ou bobine alimentée en continu) dans ce champ magnétique. Le rotor tourne alors à la même vitesse angulaire que le champ (dite *vitesse de synchronisme*), d'où le nom de moteur *synchrone*.



⇨ **Méthode 22.7. Calculer la puissance des forces de Laplace**

Les moteurs synchrones sont utilisés dans des installations industrielles travaillant à vitesse constante (pompe, concasseur, laminoir…).
Par ailleurs, les machines synchrones sont réversibles, et sont surtout utilisées comme alternateurs (voir chapitre suivant).

■ Comment identifier les caractéristiques du champ magnétique ?

❑ Méthode 22.1. Exploiter une carte de champ magnétique

Le plus souvent, ce sont les lignes de champ qui sont représentées. On relève évidemment la direction et le sens du champ, mais aussi des informations relatives à la valeur du champ.

– Dans une zone où les lignes de champ sont parallèles, le champ est uniforme.
– Le champ est d'autant plus intense que les lignes de champ sont rapprochées

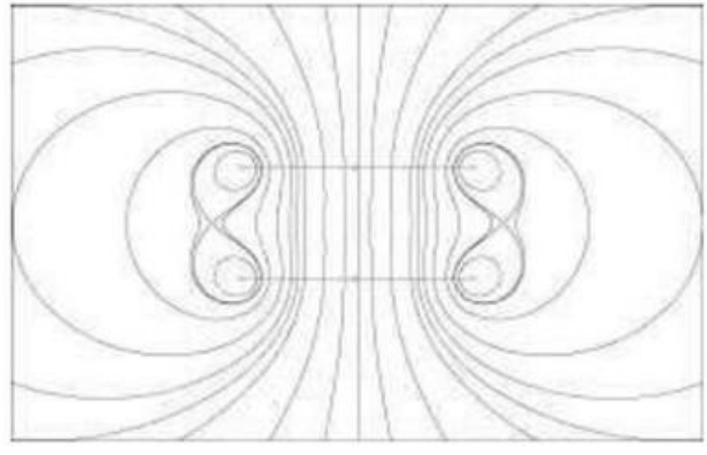
(Ces deux affirmations découlent d'une propriété très générale du champ magnétique qui sera vue en détails en 2e année : le flux du champ magnétique au travers de toute surface fermée est nul.)

Par ailleurs, à l'intérieur d'une ligne de champ fermée, il y a nécessairement un courant qui traverse.

Exemple 1 : bobines de Helmholtz

On remarque que le champ est uniforme sur une assez large zone autour du centre du dispositif. Il est ensuite moins intense lorsque l'on s'éloigne des bobines (et la direction change). Le champ est faible sur les cotés.

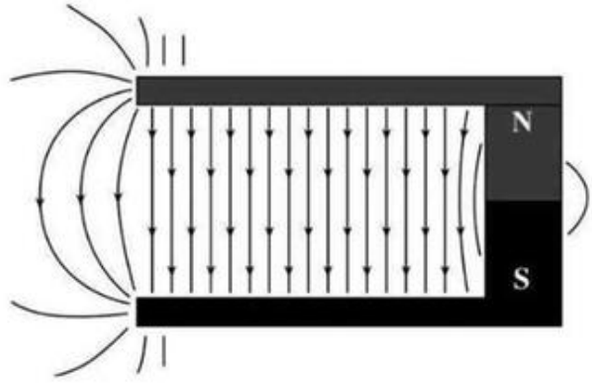
On repère également les endroits où les courants traversent le plan de la figure.



Exemple 2 : aimant en U

On remarque là encore une zone de champ uniforme, dans l'entrefer de l'aimant.

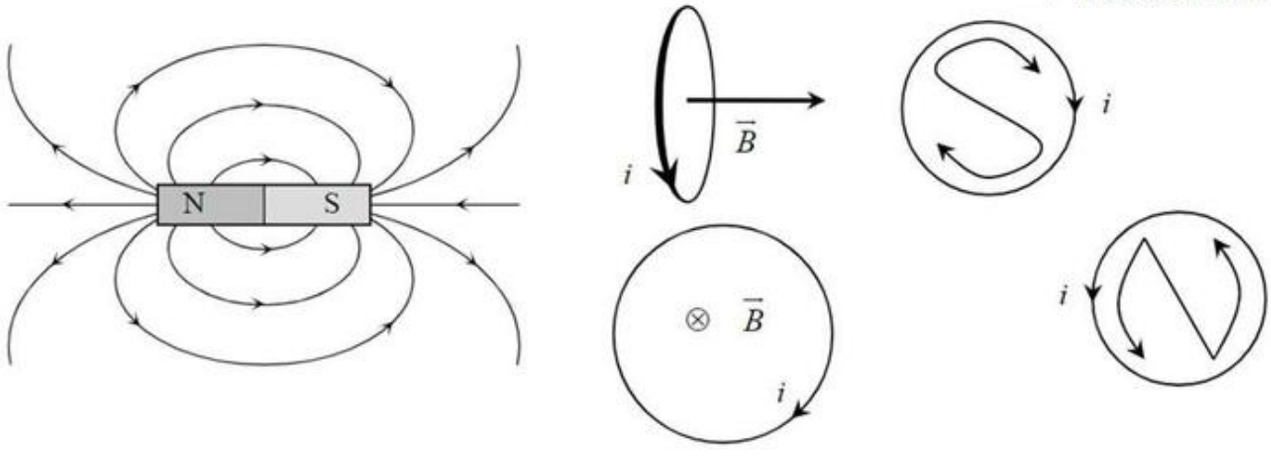
Les bobines de Helmholtz et l'aimant en U sont deux exemples courants de dispositifs permettant d'obtenir un champ magnétique uniforme.



❑ Méthode 22.2. Déterminer le sens du champ magnétique

– Dans le cas d'un aimant permanent, ayant un pôle nord (N) et un pôle sud (S), le champ magnétique va du pôle nord vers le pôle sud à l'extérieur de l'aimant.
– S'il s'agit d'une bobine, on utilise la règle du tire-bouchon de Maxwell. On peut également nommer nord et sud les faces d'une bobine, par analogie avec l'aimant : la face où le courant est vu dans le sens horaire est la face sud, l'autre est la face nord.

⇨ Exercice 22.6



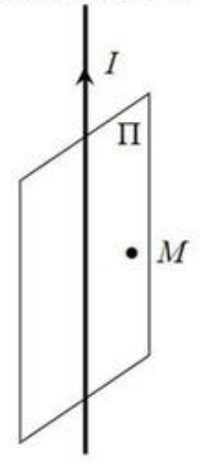
❑ Méthode 22.3. Déterminer la direction du champ magnétique à partir des symétries

– Préciser d'abord en quel point on recherche la direction du champ magnétostatique.
– Si on trouve un plan de symétrie des courants *qui passe par le point considéré*, la direction du champ est orthogonale à ce plan.
– Si on trouve un plan d'antisymétrie des courants *qui passe par le point considéré*, la direction du champ est parallèle à ce plan.

⇨ Exercices 22.7, 22.8

Exemple 1 : fil infini

Le modèle est celui d'un fil rectiligne infini, parcouru par un courant I. Il constitue une bonne approximation d'une situation où l'on considère le champ à une distance d'un fil faible devant son rayon de courbure.
Tout plan qui contient le fil est un plan de symétrie de cette distribution de courant, donc d'antisymétrie pour le champ magnétostatique. Donc si on considère un point M et un tel plan Π passant par M, le champ sera orthogonal à Π. Si l'on repère la position de M en coordonnées cylindriques (r,θ,z) et que l'on note $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_z}$ les vecteurs de base associés, le champ magnétostatique en M est dirigé selon $\vec{e_\theta}$, c'est-à-dire de la forme $\vec{B}(M) = B_\theta \vec{e_\theta}$: on dit qu'il est *orthoradial*.

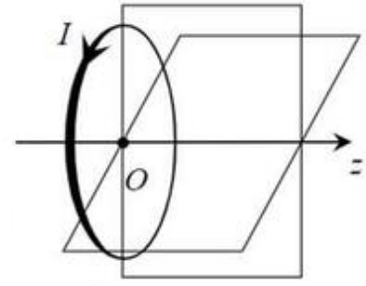


Exemple 2 : spire circulaire

C'est un conducteur filiforme circulaire de centre O, de rayon R et parcouru par un courant I.

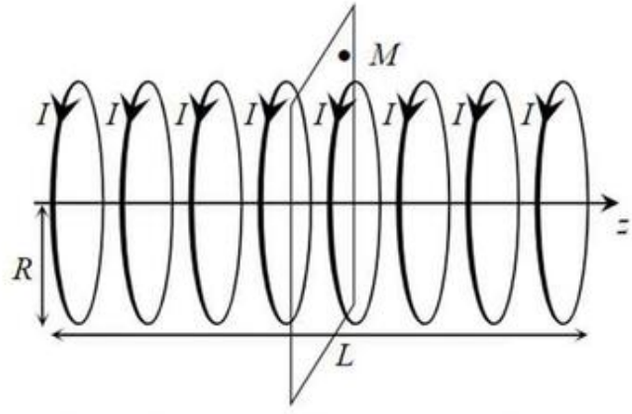
On note (Oz) l'axe de la spire et on s'intéresse au champ magnétostatique créé par la spire en un point M sur cet axe, dont la position est caractérisée par la coordonnée z.

Tout plan qui contient l'axe est plan d'antisymétrie de cette distribution de courant, donc en un point situé sur l'axe le champ est selon l'axe, donc selon $\overrightarrow{e_z}$: $\overrightarrow{B}(M) = B_z \overrightarrow{e_z}$.



Exemple 3 : solénoïde infini

Pour $L \gg R$ (typiquement $L \approx 10R$), le modèle de solénoïde infini (longueur L infinie) donne une bonne approximation du champ magnétostatique dans un solénoïde réel au voisinage de son milieu (mais elle devient moins bonne près des extrémités).



On considère le solénoïde comme un ensemble de spires planes, ce qui est correct si les spires sont jointives (mais le courant suit en réalité une trajectoire en hélice). Comme la longueur du solénoïde est infinie, tout plan orthogonal à l'axe (Oz) du solénoïde est plan de symétrie de la distribution de courant. Donc, quel que soit le point M de l'espace (à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde), il existe un plan de symétrie des courants passant par M, auquel le champ magnétostatique est orthogonal. Le champ est donc dans tout l'espace selon l'axe du solénoïde, soit selon $\overrightarrow{e_z}$: $\overrightarrow{B}(M) = B_z \overrightarrow{e_z}$.

> *Tout point M est aussi dans un plan d'antisymétrie du courant : c'est le plan (MOz). Mais ce plan n'apporte aucune information supplémentaire, puisqu'il nous permet juste de dire que le champ est parallèle à ce plan, ce qu'on a déjà trouvé.*

❑ Méthode 22.4. Déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ

La méthode est en tous points semblables à celle de l'électrostatique : rechercher les invariances de la distribution de courants puis déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ.

– Invariance par rotation autour d'un axe (Oz) : utiliser les coordonnées cylindriques (r,θ,z). Les composantes du champ (donc sa norme) ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ.

– Invariance par translation le long d'un axe : utiliser la coordonnée linéaire sur cet axe. Le champ ne dépend pas de cette coordonnée.

⇨ **Exercices 22.7, 22.8**

Exemple 1 : fil infini

On note (Oz) l'axe du fil et on repère la position de M en coordonnées cylindriques (r,θ,z). La distribution de courants est invariante par rotation autour de (Oz), la norme du champ ne dépend donc pas de θ. Elle est aussi invariante par translation le long de (Oz), le champ ne dépend donc pas de z. Finalement, en combinant avec le résultat de la méthode précédente (direction du champ selon $\overrightarrow{e_\theta}$), on trouve que le champ magnétostatique est de la forme : $\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$.

Le calcul de la fonction $B_\theta(r)$ sera vu en 2e année.

Exemple 2 : solénoïde infini

Là encore il y a invariance de la distribution par rotation autour de l'axe du solénoïde et par translation le long de cet axe (le solénoïde étant infini), les conclusions sont donc les mêmes que dans l'exemple précédent. Cependant, pour ce cas on avait trouvé avec la méthode précédente une direction du champ selon $\overrightarrow{e_z}$. Le champ est donc finalement de la forme : $\overrightarrow{B}(M) = B_z(r)\overrightarrow{e_z}$.

■ Comment calculer l'effet total des forces de Laplace ?

❑ Méthode 22.5. Calculer la résultante des forces de Laplace

Il s'agit d'utiliser la relation $\overrightarrow{F}_{\text{Lap}} = \int i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}$.

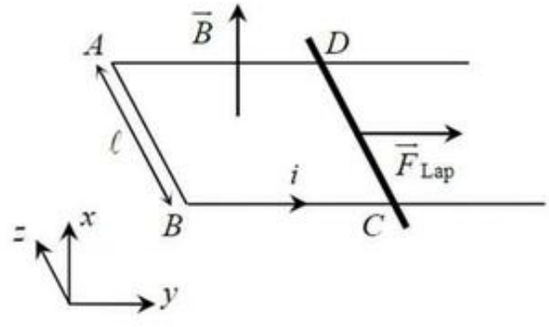
Il suffit généralement de décomposer le circuit en plusieurs morceaux pour lesquels la force est simple à calculer. Enfin, se souvenir que pour un circuit fermé avec le même courant en tous points du circuit et dans un champ magnétique uniforme, la résultante des forces de Laplace est nulle.

⇨ Exercices 22.9, 22.10, 22.11, 22.14

Exemple 1 : rails de Laplace

On cherche ici à calculer la force sur le barreau mobile CD. Sur ce morceau de circuit, $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$ (attention, $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ doit être orienté dans le sens du courant, donc ici $\mathrm{d}z > 0$: on intégrera de C à D).

D'autre part le champ est $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_x}$, donc $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} = B\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = B\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_y}$.



Donc $\overrightarrow{F}_{\text{Lap}} = \int_C^D iB\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_y} = iB\overrightarrow{e_y}\int_C^D \mathrm{d}z$ avec $\int_C^D \mathrm{d}z = z_D - z_C = CD = \ell$, c'est-à-dire la longueur du barreau mobile où circule le courant. On obtient finalement $\overrightarrow{F}_{\text{Lap}} = i\ell B\overrightarrow{e_y}$. Cette expression se retrouve très souvent, mais selon les notations le signe peut être différent. Ici, si le courant i est positif et que le champ est vers le haut, la force de Laplace est bien vers la droite.

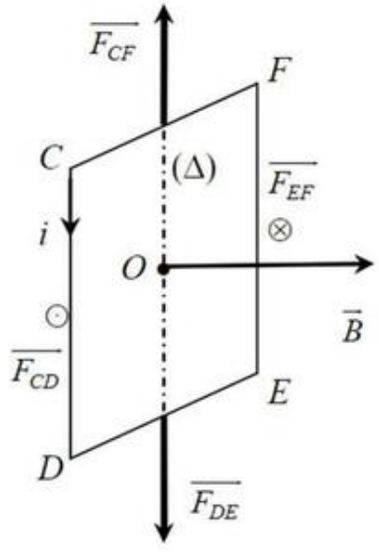
Exemple 2 : spire rectangulaire (champ uniforme)

Comme une spire (rectangulaire ou non) est un circuit fermé, on sait que la résultante va être nulle. Néanmoins, il est intéressant de le vérifier sur un exemple.

On considère une spire rectangulaire $CDEF$, de cotés $CD = EF = a$ et $DE = CF = b$, le champ $\vec{B}$ est orthogonal à l'axe de symétrie (Δ) de la spire.

Ici, on décompose le circuit en ses quatre cotés, on écrit donc $\vec{F}_{\text{Lap}} = \int i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{CD} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{DE} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{EF} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{FC} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

Commençons par le coté CD : $\overrightarrow{F_{CD}} = \int_{CD} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\left(\int_{CD} \mathrm{d}\vec{\ell}\right) \wedge \vec{B}$ puisque i ne varie pas entre C et D et que $\vec{B}$ est uniforme.



Comme $\int_{CD} \mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{CD}$, on obtient $\overrightarrow{F_{CD}} = \int_{CD} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$.

De la même manière, $\overrightarrow{F_{EF}} = \int_{EF} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\overrightarrow{EF} \wedge \vec{B}$.

La somme de ces deux contributions est $\overrightarrow{F_{CD}} + \overrightarrow{F_{EF}} = i\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{EF} \wedge \vec{B} = i(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{EF}$.

De même, $\overrightarrow{F_{DE}} + \overrightarrow{F_{CF}} = \int_{DE} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{FC} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

La résultante des forces de Laplace sur la spire est donc bien nulle.

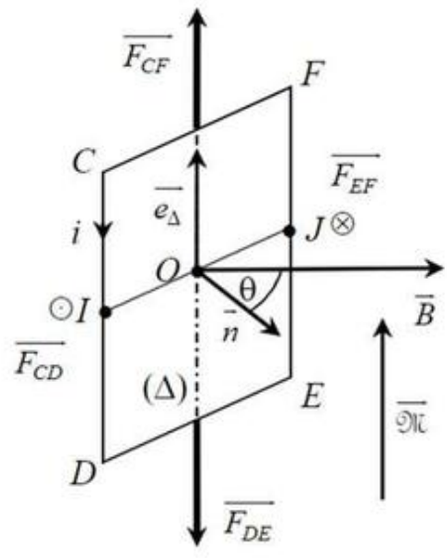
❑ Méthode 22.6. Calculer le moment du couple des forces de Laplace sur une spire rectangulaire en rotation

Comme on peut associer un moment magnétique à une spire, la réponse est directement donnée par l'expression du couple subi par un moment magnétique dans un champ uniforme : $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

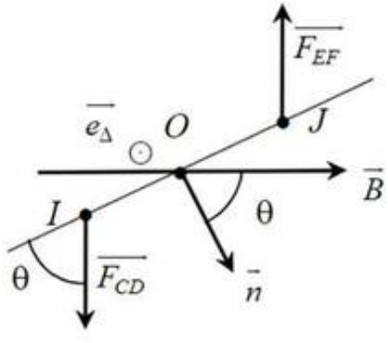
On va ici détailler le calcul pour une spire rectangulaire ce qui permet, dans ce cas particulier, de vérifier la relation.

⇨ Exercices 22.9, 22.13, 22.14

On reprend la situation et les calcule de la méthode 22.4.
On sait que la résultante des forces de Laplace est nulle, leur moment est donc indépendant du point choisi pour le calculer : le plus simple est d'utiliser le point O, centre de la spire. On considérera que le point d'action de chaque force est le milieu du coté sur lequel elle s'exerce. Il est clair que le moment des forces $\overrightarrow{F_{CF}}$ et $\overrightarrow{F_{DE}}$ en O est nul, leur droite d'action passant par O.
Pour $\overrightarrow{F_{CD}}$, le moment vaut $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{F_{CD}} = OI\, F_{CD} \sin(\theta) \overrightarrow{e_\Delta}$ (car $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{F_{CD}}}) = \theta$).
On avait obtenu $\overrightarrow{F_{CD}} = i\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$, comme $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux, $F_{CD} = i\, a\, B$ (on note a la longueur CD).
De plus, $OI = b/2$ (on note b la longueur DE).



Le moment par rapport à O de $\overrightarrow{F_{CD}}$ est donc $\frac{iabB}{2}\sin(\theta)\overrightarrow{e_\Delta}$. Le moment associé à $\overrightarrow{F_{EF}}$, égal à $\overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{F_{EF}}$, est égal à la même chose, les signes des deux vecteurs étant inversés.
On a au total : $\overrightarrow{\mathcal{M}} = iabB\sin(\theta)\overrightarrow{e_\Delta}$.
On peut maintenant vérifier que cela coïncide avec $\vec{m} \wedge \vec{B}$: $\vec{m} \wedge \vec{B} = iS\vec{n} \wedge \vec{B} = iab\sin(\theta)\overrightarrow{e_\Delta}$, la relation est vérifiée.



❑ Méthode 22.7. Calculer la puissance des forces de Laplace

Une fois la résultante ou le moment des forces de Laplace calculé(e), il suffit d'exploiter les relations vues en mécanique : dans le cas d'un mouvement de translation, $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}$; et dans le cas d'une rotation, $\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega}$ ou $\mathcal{P} = \pm\mathcal{M}_\Delta \cdot \omega$.

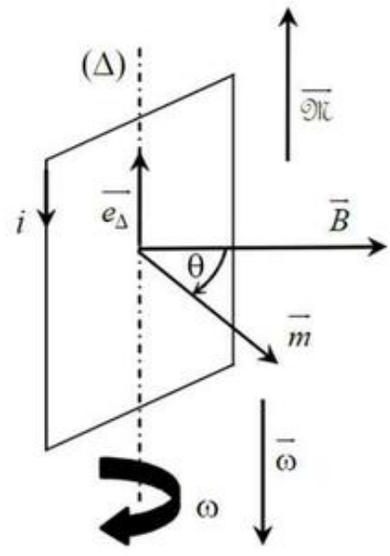
⇨ Exercices 22.10, 22.13

Prenons comme exemple la puissance des forces de Laplace sur une spire rectangulaire en rotation. On verra qu'on peut l'identifier à $-\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$ en définissant une énergie potentielle E_p.
(Voir schéma page suivante.)

Avec les notations ci-contre, $\mathcal{P} = \overline{\mathfrak{M}} \cdot \overline{\omega} = -\mathfrak{M}\,\omega$ (c'est-à-dire que l'on pose $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\overline{e_\Delta}$ et $\overline{\omega} = \omega\,\overline{e_\Delta}$). On peut reprendre l'expression de $\mathfrak{M}$ obtenue précédemment : $\mathfrak{M} = iSB\sin(\theta)$, on arrive ainsi à $\mathcal{P} = -iSB\sin(\theta)\,\omega$. En remarquant que $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, on a $\mathcal{P} = -iSB\sin(\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-iSB\cos(\theta)\right)$.

On voit alors que l'on peut identifier l'expression de l'énergie potentielle associée à l'orientation du moment magnétique de la spire relativement au champ $\overline{B}$: $E_\mathrm{p} = -iSB\cos(\theta)$, ce qui correspond à l'expression générale $E_\mathrm{p} = -\overline{m} \cdot \overline{B}$.

On retrouve bien la stabilité ou non des positions d'équilibre : E_p est minimale lorsque $\overline{m}$ et $\overline{B}$ sont colinéaires et dans le même sens, maximale lorsque $\overline{m}$ et $\overline{B}$ sont colinéaires et de sens contraires.



■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Le champ magnétique créé par une bobine est toujours uniforme.	☐	☐
2.	Le champ magnétique créé par une bobine est proportionnel au courant.	☐	☐
3.	Un champ magnétique est toujours dû à un courant, même dans le cas d'un aimant permanent.	☐	☐
4.	Le champ magnétique terrestre est suffisamment intense pour modifier l'orientation d'un petit aimant.	☐	☐
5.	Le sens du champ magnétique créé par une bobine ne dépend pas du sens du courant.	☐	☐
6.	Les champs magnétiques les plus intenses que l'on est capables de produire actuellement sont de l'ordre d'un million de fois plus grands que le champ magnétique terrestre.	☐	☐
7.	Le dispositif des rails de Laplace peut être considéré comme un moteur électrique très rudimentaire.	☐	☐
8.	L'effet d'un champ magnétique sur un moment magnétique est d'aligner le moment magnétique sur le champ.	☐	☐
9.	Dans un champ magnétique uniforme, la résultante des forces de Laplace sur un moment magnétique est nulle.	☐	☐
10.	Il existe une énergie potentielle associée au moment des forces de Laplace sur un moment magnétique.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Bobines et champs magnétiques

❑ Exercice 22.1. Solénoïde*

Avec un solénoïde de longueur $L = 41,2\,\text{cm}$ et dont le rayon des spires vaut $R = 2,5\,\text{cm}$, une source de courant et un teslamètre on fait les expériences suivantes.

Expérience 1 – On place la sonde au centre du solénoïde et on alimente seulement une partie des spires, sur une longueur l de part et d'autre du centre. On mesure l'intensité du champ B.

l (cm)	1,0	2,1	4,1	6,2	10,3	14,4	20,6
B (mT)	1,2	2,0	2,6	2,8	3,0	3,0	3,0

Expérience 2 – On place la sonde au centre du solénoïde que l'on alimente sur toute sa longueur et on fait varier le courant i. On mesure l'intensité du champ B.

i (A)	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	4,5	5,0
B (mT)	0,4	0,7	1,4	2,0	2,7	3,0	3,4

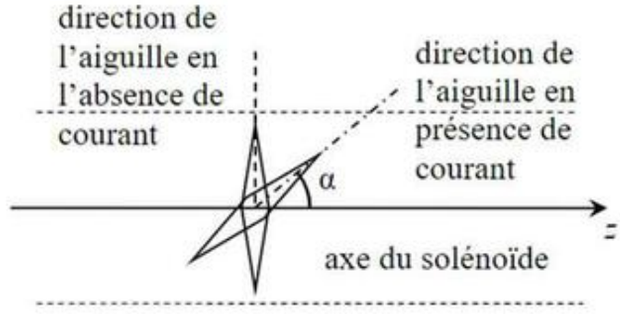
Expérience 3 – On alimente le solénoïde sur toute sa longueur et on place la sonde à une distance d du centre. On mesure l'intensité du champ B.

d (cm)	0,0	5,1	10,3	12,6	15,2	17,8	20,6
B (mT)	3,0	3,0	3,0	3,0	2,9	2,5	1,8

1. Quel est le nombre de spires N du solénoïde ? On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.
2. Quelle est la valeur du courant dans les première et troisième expériences ?
3. À partir de quel rapport entre la longueur (alimentée) du solénoïde et le rayon des spires le champ au centre est-il donné par l'approximation du solénoïde infini avec un écart relatif inférieur à 10 % ?
4. Lorsque toutes les spires sont alimentées, sur quelle proportion de la longueur du solénoïde cette approximation est-elle vérifiée avec un écart relatif inférieur à 10 % ?

❑ Exercice 22.2. Mesure du champ magnétique terrestre

Pour mesurer approximativement la composante horizontale du champ magnétique terrestre, on utilise le dispositif suivant : une petite aiguille aimantée est placée à l'intérieur d'un solénoïde (pour les calculs, on se place dans l'approximation du solénoïde infini), de manière à ce que, en l'absence de courant dans le solénoïde, l'aiguille soit orthogonale à son axe.

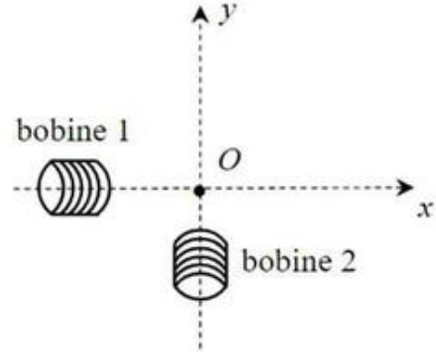


On donne le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini : $\overrightarrow{B_s} = \dfrac{\mu_0 N i}{L}\overrightarrow{e_z}$.

1. Indiquer qualitativement ce qui se produit lorsqu'un courant circule dans le solénoïde.
2. Avec un courant $i = 96$ mA, on relève $\alpha = 37°$. Sachant que le solénoïde est constitué de $N = 130$ spires et que sa longueur est de $L = 60$ cm, calculer la valeur de la composante horizontale du champ terrestre.
3. On estime que l'incertitude sur l'angle α est de 2°, et on néglige les incertitudes sur les autres grandeurs. Quelle est l'incertitude sur la valeur du champ ?

❑ Exercice 22.3. Réalisation d'un champ tournant

Les deux bobines représentées ci-contre ont même rayon, même hauteur et même nombre de spires. Elles sont parcourues par des courants $i_1 = I_m \cos(\omega t)$ et $i_2 = I_m \sin(\omega t)$.



1. Quel est le déphasage entre ces deux courants ?
2. Montrer que le champ en O a une valeur constante et qu'il tourne à la vitesse angulaire ω (dans quel sens ?).
3. On envisage un dispositif similaire utilisant trois bobines. Comment doit-on disposer les bobines et quel doivent être les déphasages entre les courants ?

❑ Exercice 22.4. Spires concentriques*

Une bobine circulaire plate est considérée comme un ensemble de N spires circulaires concentriques dont les rayons sont régulièrement répartis entre deux valeurs extrêmes R_1 et R_2. On note i le courant dans la bobine, et on prendra pour les applications numériques :
$N = 100$, $i = 100$ mA, $R_1 = 19{,}0$ cm et $R_2 = 21{,}0$ cm.

1. Donner l'expression du champ créé au centre de la bobine, sachant que le champ au centre d'une spire de rayon R est égal à $\dfrac{\mu_0 i}{2R}$.
2. Calculer numériquement le champ au centre de la bobine.
3. Calculer l'écart relatif entre cette valeur et celle que l'on obtiendrait en considérant N spires de rayon égal à la moyenne de R_1 et R_2.

❑ Exercice 22.5. Bobine plate* *

On qualifie de plate une bobine dont la hauteur h est très inférieure au rayon des spires R.
La bobine plate considérée comporte N spires et est parcourue par un courant i.
Pour les applications numériques, on prendra $R = 20$ cm, $h = 1$ cm, $N = 200$ et $i = 500$ mA.

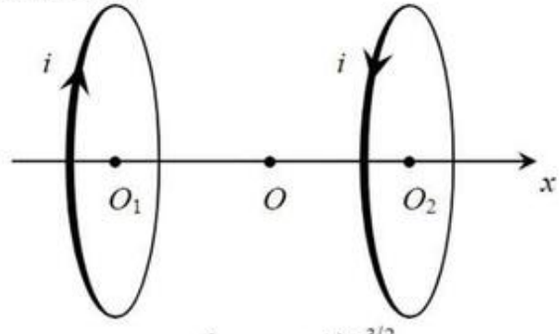
1. L'approximation faite généralement pour une bobine plate est de considérer que toutes les spires sont confondues et donc que le champ créé est égal à N fois celui d'une spire. Donner l'expression du champ créé sur l'axe de la bobine et calculer sa valeur numérique au centre de la bobine. On utilisera l'expression du champ créé par une spire sur son axe (Oz) :

$$\vec{B} = \pm\frac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\vec{e_z}.$$

2. On prend maintenant en compte la hauteur h de la bobine. En la considérant comme un ensemble de spires planes régulièrement réparties, donner l'expression du champ au centre de la bobine. Faire l'application numérique et calculer l'écart relatif avec la valeur approchée précédente. Conclure quant à la validité de l'approximation dans ce cas.

❑ Exercice 22.6. Création d'un champ linéaire* *

On considère un dispositif analogue aux bobines de Helmholtz : deux bobines plates de rayon R de N spires chacune, de même axe (Ox) et séparées par une distance $d = O_1O_2$. La différence est que le courant d'intensité i (positive) circule en sens opposé dans les deux bobines. On s'intéresse au champ magnétique créé par ce dispositif au voisinage du point O, milieu de $[O_1O_2]$.



On donne le champ créé par *une* spire sur son axe (Ox) : $\vec{B} = \pm\frac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\vec{e_x}$

avec dans cette formule un signe + ou – selon le sens de i.

1. À laquelle des deux bobines correspond le signe + ? Vérifier que le champ créé par les deux bobines est nul au point O.

2. En considérant chaque bobine comme N spires circulaires confondues, donner l'expression du champ en un point M sur l'axe (Ox).

3. Montrer que si $d = R\sqrt{3}$ le champ au voisinage du point O varie linéairement avec x, à des termes du cinquième ordre en x près.

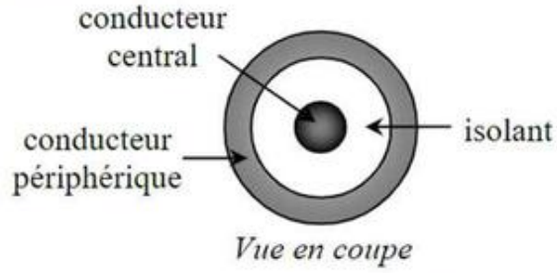
4. On veut un champ au voisinage de O dont la pente (variation du champ avec x) vaut $a = 10\ \text{T}\cdot\text{m}^{-1}$ avec un courant d'intensité $i = 10$ mA et des bobines de rayon $R = 10$ cm. Calculer le nombre N de spires que doit comporter chaque bobine.

■ Propriétés de symétrie

❑ Exercice 22.7. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs concentriques, séparés par un isolant, parcourus par des courants égaux et de sens opposés. Le conducteur central est un fil fin et le conducteur périphérique est très mince, de rayon R ; le courant qui circule dans le conducteur périphérique est réparti uniformément sur toute sa surface.
On considère que le câble coaxial est rectiligne et infiniment long.



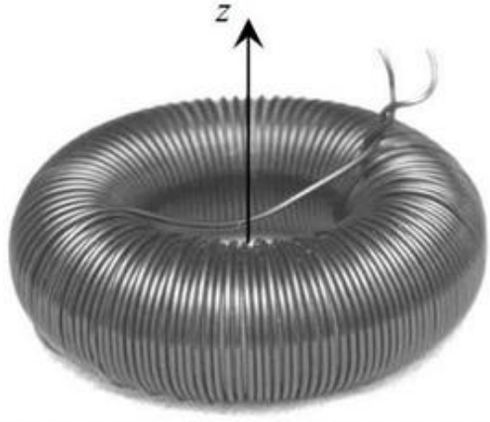


Vue en coupe

Étudier les symétries et invariances de cette distribution de courant, et conclure sur la forme du champ $\vec{B}(M)$ qu'elle crée.

❑ Exercice 22.8. Bobine torique

Une bobine torique est un enroulement sur un support de forme torique (la forme d'une bouée).



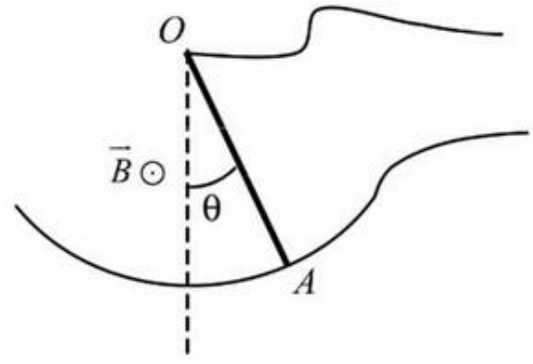
Le support torique est caractérisé par un rayon R autour de son axe de symétrie (Oz) et une section circulaire de rayon a. L'enroulement comporte N spires que l'on considérera comme des spires planes, circulaires de rayon a. Les spires sont jointives et leur nombre N est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires comme continûment réparties le long du tore.
On repère la position d'un point M en coordonnées cylindriques (r,θ,z) autour de l'axe de symétrie du tore.

Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine est orthoradial (selon $\vec{e}_\theta$) et que sa norme ne dépend pas de la coordonnée θ.

■ Forces de Laplace, moments magnétiques

❑ Exercice 22.9. Équilibre d'une tige

Une tige rectiligne de longueur $\ell = OA$ fixée en O et parcourue par un courant i (il y a un contact mobile en A) est plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$.



1. Quel doit être le sens du courant pour que la position d'équilibre corresponde à ce qui est indiqué sur le schéma ?
2. Donner l'expression de l'angle d'équilibre $\theta_{éq}$ en fonction de B, i, ℓ, la masse m de la tige et l'accélération de la pesanteur g.

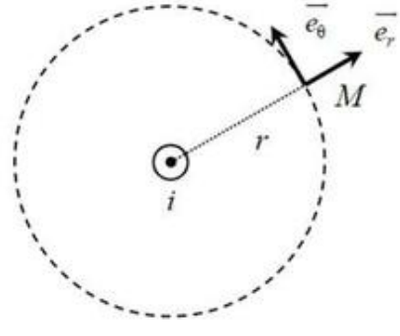
❑ Exercice 22.10. Rails de Laplace en pente

On reprend la situation des rails de Laplace, mais au lieu d'être horizontaux, ils font un angle α avec l'horizontale. Le champ magnétique est constant et uniforme, vertical, dirigé vers le haut. On prendra $B = 150\,\text{mT}$, $m = 8{,}0\,\text{g}$, $\ell = 12\,\text{cm}$ (masse et longueur du barreau mobile), $\alpha = 30°$ et $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$. On néglige les frottements.

1. Faire un schéma en précisant le sens du courant pour que la force permette au barreau mobile de monter le long des rails.
2. Calculer la valeur de i pour que le barreau monte à vitesse constante (on imagine qu'il a une vitesse initiale…)
3. Calculer la puissance des forces de Laplace sur le barreau s'il met 0,5 s pour augmenter son altitude de 10 cm.

❑ Exercice 22.11. Forces de Laplace entre deux fils parallèles*

Deux fils parallèles distants de a sont parcourus par le même courant i. Pour évaluer le champ magnétique créé par l'un des fils, on se placera dans l'approximation d'un fil infini, le champ est alors donné par la relation : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{e_\theta}$.



1. Pour que la force soit attractive, les courants doivent-ils être dans le même sens ou en sens inverse ?
2. Donner l'expression de la force sur une longueur ℓ de fil. Comment cette force dépend-elle du courant i ?
3. Calculer numériquement cette force pour une longueur $\ell = 20\,\text{cm}$ de fil, les fils étant distants de $a = 1\,\text{cm}$ et le courant valant $i = 12\,\text{A}$.
4. Calculer la valeur de l'intensité i nécessaire pour que, la distance entre les fils étant de 1 mètre, la force d'attraction entre les deux fils soit égale à $2 \cdot 10^{-7}\,\text{N}$ par mètre de fil.

❑ Exercice 22.12. Magnéton de Bohr*

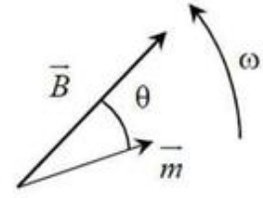
On adopte pour l'atome d'hydrogène le modèle de Bohr. Dans ce modèle, l'électron gravite autour du proton avec un mouvement circulaire uniforme de rayon a_0, et le moment cinétique L associé à ce mouvement (dit orbital) est quantifié : $L = n\hbar$ où n est un entier et $\hbar$ la constante de Planck réduite. On notera m_e la masse de l'électron pour ne pas confondre avec son moment magnétique m. On donne $m_e = 9{,}11.10^{-31}\,\text{kg}$ et $\hbar = 1{,}055\cdot10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$.

1. Montrer que l'on peut associer au mouvement orbital de l'électron un courant d'intensité $i = \dfrac{ev}{2\pi a_0}$ et en déduire le moment magnétique m associé.
2. Exprimer m en fonction du moment cinétique orbital L de l'électron, en déduire l'expression du magnéton de Bohr μ_B, qui est le moment magnétique de l'électron dans son état fondamental. Calculer numériquement μ_B.

❑ Exercice 22.13. Moteur synchrone*

On considère un modèle simple pour décrire le moteur synchrone.

Le rotor, décrit par un moment magnétique $\vec{m}$, tourne avec la même vitesse angulaire (constante) ω que le champ magnétique $\vec{B}$ qui l'entraîne. On s'intéresse à l'*angle interne* du moteur $\theta = \widehat{\vec{m},\vec{B}}$ et au couple $\vec{\mathcal{M}}$ exercé par le champ sur le moment magnétique.

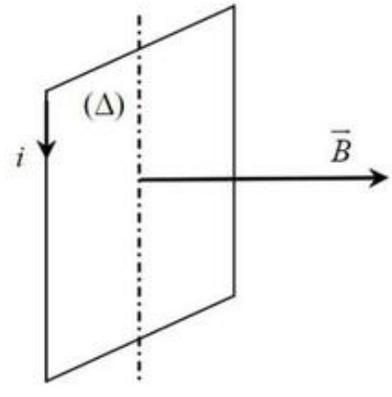


On prendra $B = 0{,}2\ \text{T}$, $m = 8{,}0\ \text{A}\cdot\text{m}^2$ et $f = 50$ tours/s.

1. Donner l'expression de $\mathcal{M}$ en fonction de θ.
2. Que vaut θ si le moteur fonctionne « à vide » (il n'entraîne rien), dans l'hypothèse où on néglige tout frottement ?
3. Le moteur doit entrainer un dispositif mécanique (charge) qui exerce un couple résistant $\mathcal{M}_r = 0{,}65\ \text{N}\cdot\text{m}$. Calculer l'angle interne et la puissance fournie par le moteur.
4. La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

❑ Exercice 22.14. Cadre mobile en courant alternatif*

Une spire rectangulaire de surface S, dans laquelle circule un courant i sinusoïdal, d'amplitude I_m et de pulsation ω, est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ constant et uniforme, orthogonal à son axe de rotation (Δ).



1. En considérant la spire dans une position quelconque et $i = I_m$, indiquer les sens des forces de Laplace et du couple.
2. Expliquer qualitativement pourquoi, si la spire tourne à la vitesse angulaire ω, le couple moyen des forces de Laplace sur la spire est non nul.

3. Quelle doit être la position de la spire lorsque $i = I_m$ pour que le couple soit maximal ? Dans quel sens doit-elle tourner ?

4. Dans ce cas, calculer la valeur moyenne du couple des forces de Laplace sur la spire.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 22.1. Penser à dessiner des graphes à partir des données.
Exercice 22.3. Écrire le champ créé par chaque bobine, puis faire la somme.
Exercice 22.4. Exprimer le champ créé par une petite épaisseur de spires comprises entre r et $r + \mathrm{d}r$ en faisant intervenir une densité radiale de spires $\dfrac{N}{R_2 - R_1}$.
Exercice 22.5. Même principe, avec une petite épaisseur de spires comprises entre z et $z + \mathrm{d}z$. Pour calculer l'intégrale, poser $\tan(\theta) = \dfrac{z}{R}$ et intégrer sur θ.
Exercice 22.6. Question 3 : calculer un développement limité.
Exercice 22.12. Calculer l'intensité moyenne sur le trajet suivi par l'électron en écrivant que la charge de l'électron traverse une petite surface toutes les périodes.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

1. C'est évidemment faux, le champ est éventuellement uniforme dans certaines zones de l'espace (à l'intérieur d'un solénoïde, au voisinage du centre des bobines de Helmholtz).

3. Il existe des courants à l'échelle atomique, dits courants ampériens, responsables du champ magnétique créé par un aimant.

4. C'est ce qui se passe avec l'aiguille d'une boussole…

5. Le sens est donné par les règles d'orientation (tire-bouchon de Maxwell et équivalents).

7. On obtient effectivement un mouvement à partir d'un courant électrique… l'inconvénient est que cela ne peut pas fonctionner très longtemps !

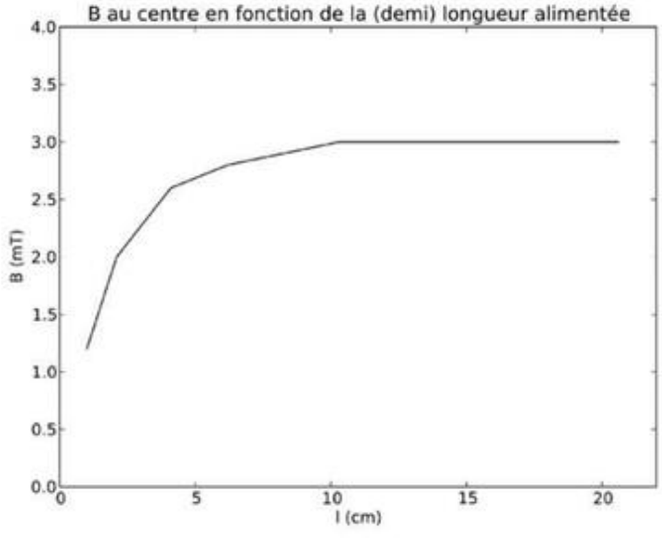
10. L'expression est $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$.

❑ Les erreurs classiques

– Les notions de pôles nord et sud d'un aimant peuvent prêter à confusion. Bien se rappeler que le champ magnétique est dirigé du pôle nord vers le pôle sud à l'extérieur de l'aimant (et donc du pôle sud vers le pôle nord à l'intérieur de l'aimant, « à l'intérieur » signifiant dans la matière qui compose l'aimant).
– Il faut bien distinguer le champ magnétique qui agit sur un circuit parcouru par un courant (souvent qualifié de champ extérieur) du champ magnétique créé par le circuit lui-même (auquel on ne s'intéresse pas en général, si le but est de calculer la force de Laplace subie *par* ce circuit).
– Il faut faire attention à la portion de circuit sur laquelle on calcule la force de Laplace. Par exemple, dans le cas des rails de Laplace, il est inutile de calculer la force sur les rails eux-mêmes (sauf si on veut calculer la force qui tend à les écarter l'un de l'autre…).

Exercice 22.1

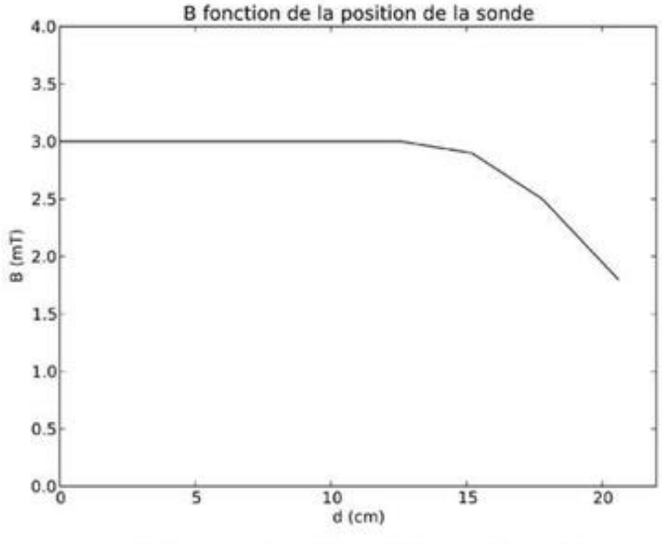
1. On remarque, d'après le graphe ci-contre issu de la première série de données, que lorsque plus de la moitié de la longueur du solénoïde est alimentée, la longueur alimentée n'a plus d'influence, et donc l'approximation du solénoïde infini est satisfaite.
Si on traite ensuite la deuxième série de mesures en effectuant une régression linéaire (ce qui donne une pente de 0,661 mT/A, une ordonnée à l'origine de 0,038 mT, négligeable, et un coefficient de corrélation de 0,999), on peut en déduire le nombre de spires : dans l'approximation du solénoïde infini $B = \mu_0 \frac{N}{L} i$, la pente trouvée ci-dessus est donc égale à $\mu_0 \frac{N}{L}$ et on en déduit $\boxed{N = 220}$.



2. Dans ces deux expériences, on a un champ de 3,0 mT lorsque $B = \mu_0 \frac{N}{L} i$ est vérifiée. On en déduit que $\boxed{i = 4{,}5 \text{ A}}$.

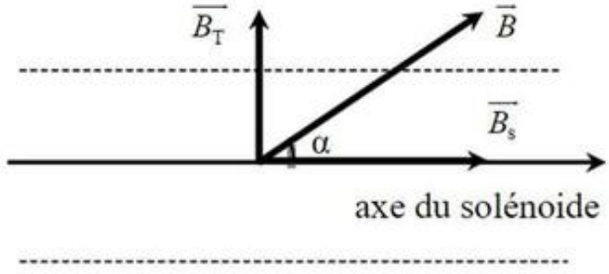
3. On exploite là encore la première série de mesures : pour avoir 90 % de la valeur maximale du champ, il faut environ 10 cm de solénoïde alimenté ($l \approx 5$ cm), donc un rapport de l'ordre de 4.

4. Le graphe ci-contre est issu de la troisième série de mesures, on constate que le champ devient inférieur à 90 % de sa valeur au centre pour une distance d'environ 17 cm. Le critère est donc vérifié sur 34 cm environ, de l'ordre de 80 % de la longueur du solénoïde.



Exercice 22.2

1. L'aiguille, que l'on peut assimiler à un moment magnétique, s'aligne toujours sur le champ. En l'absence de courant dans le solénoïde, le champ est orthogonal à son axe (il s'agit seulement du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_T}$).
Lorsqu'un courant circule, le solénoïde créé un champ parallèle à son axe $\overrightarrow{B_s}$, et le champ total résulte de la superposition des deux champs : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_T} + \overrightarrow{B_s}$, sur lequel s'aligne l'aiguille aimantée.



2. Le champ créé par le solénoïde (approximation du solénoïde infini) vaut $B_s = \dfrac{\mu_0 N i}{L}$.

De plus $\tan(\alpha) = \dfrac{B_T}{B_s}$, on en déduit que $\boxed{B_T = \dfrac{\mu_0 N i}{L}\tan(\alpha)}$. AN $\boxed{B_T = 20\ \mu T}$.

3. En calculant B_T pour les valeurs extrêmes (35° et 39°) on trouve des valeurs de 18,3 µT et 21,1 µT, ainsi l'incertitude est de l'ordre de 1,5 µT, que l'on doit arrondir par excès à 2 µT (un seul chiffre significatif avec nos méthodes simples). On peut donc écrire : $\boxed{B_T = 20 \pm 2\ \mu T}$.

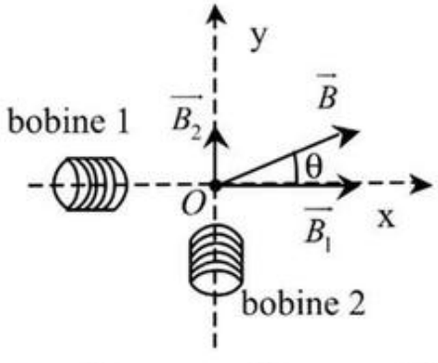
C'est effectivement le bon ordre de grandeur pour la composante horizontale du champ magnétique terrestre à Paris ; la composante verticale est plus élevée (vers le bas) puisque le champ est de l'ordre de 50 µT.

Exercice 22.3

1. Le courant i_1 est en avance de $\dfrac{\pi}{2}$ sur i_2 : $\boxed{\varphi_{i_1/i_2} = +\dfrac{\pi}{2}}$.

2. Les deux bobines étant identiques (ainsi que les amplitudes des courants qui les traversent), les champs créés ont la même amplitude, que l'on note B_m.

Comme le point O est sur l'axe de la bobine (1) le champ créé en O est selon cet axe, et on suppose que si le courant i_1 est positif le champ est vers les x positifs, on peut donc écrire $\overrightarrow{B_1} = B_m \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$. À partir de considérations analogues pour la bobine (2), $\overrightarrow{B_2} = B_m \sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$.
Le champ total en O est la somme de ces deux contributions : $\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} = B_m\left(\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}\right)}$.



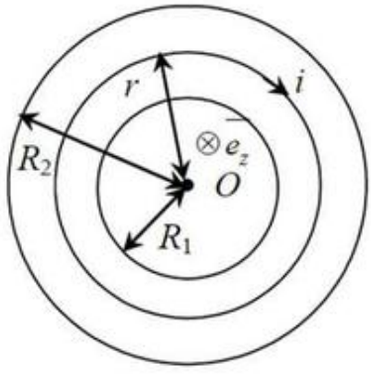
On identifie le terme entre parenthèses à un vecteur unitaire radial $\overrightarrow{e_r} = \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$ qui fait un angle $\theta = \omega t$ avec l'axe (Ox), et qui tourne donc avec une vitesse angulaire ω, dans le sens trigonométrique avec ce schéma (tous ces calculs on été vus en cinématique).

On a donc $\boxed{\vec{B} = B_m \vec{e_r}}$, ce qui correspond bien à un champ de norme constante, tournant à la vitesse angulaire ω (dans le sens trigonométrique).

3. S'il y a trois bobines au lieu de deux, on remplace $\frac{\pi}{2}$ par $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$ dans les calculs : les axes des bobines doivent faire des angles de $\frac{2\pi}{3}$ entre eux, et les déphasages doivent être de $\frac{2\pi}{3}$ d'une bobine à la suivante.

Exercice 22.4

1. Le champ créé par une spire de rayon R et d'axe (Oz) parcourue par un courant I est, en son centre O, $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{2R}\vec{e_z}$.



Les N spires sont régulièrement réparties sur la distance $R_2 - R_1$, donc si on considère une largeur radiale $\mathrm{d}r$ de bobine, elle comporte $\frac{N\,\mathrm{d}r}{R_2 - R_1}$ spires et sa contribution au champ en O est $\mathrm{d}\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{2r}\frac{N\,\mathrm{d}r}{R_2 - R_1}\vec{e_z}$.

On intègre sur r entre R_1 et R_2 pour faire la somme de toutes ces contributions :

$$\vec{B}(O) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 i}{2r}\frac{N\,\mathrm{d}r}{R_2 - R_1}\vec{e_z} = \frac{\mu_0 N i}{2(R_2 - R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}\vec{e_z} = \frac{\mu_0 N i}{2(R_2 - R_1)}\left(\ln(R_2) - \ln(R_1)\right)\vec{e_z}$$

soit finalement $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N i}{2(R_2 - R_1)}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\vec{e_z}}$.

2. AN $\boxed{B(O) = 3{,}144 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}}$.

3. On aurait $R_{moy} = \frac{R_1 + R_2}{2} = 20\ \mathrm{cm}$ et $\boxed{B'(O) = \frac{\mu_0 N i}{2R_{moy}} = 3{,}141 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}}$.

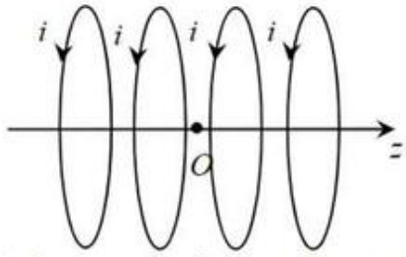
L'écart relatif est : $\boxed{\frac{B(O) - B'(O)}{B'(O)} = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{soit } 0{,}1\ \%}$.

Exercice 22.5

1. Le champ créé par une spire de rayon R d'axe (Oz) parcourue par un courant i est $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2R}\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\vec{e_z}$. Si l'on considère la bobine plate comme N spires confondues, le champ créé vaut N fois le champ d'une spire, donc $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{N\mu_0 i}{2R}\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\vec{e_z}}$.

Au centre, on a donc $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 N i}{2R} = 3{,}15 \cdot 10^{-4}\ \text{T}}$.

2. Une longueur $\mathrm{d}z$ de bobine située en z comporte $\dfrac{N\,\mathrm{d}z}{h}$ spires et crée donc en O un champ égal à $\dfrac{N\,\mathrm{d}z}{h}$ fois le champ créé par une spire, à une distance z avant la spire (on doit donc remplacer z par $-z$ dans l'expression du champ créé par une spire). La contribution au champ en O d'une longueur $\mathrm{d}z$ de bobine est donc $\dfrac{N\,\mathrm{d}z}{h}\dfrac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\left(\dfrac{-z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\overrightarrow{e_z}$.



Il faut ensuite intégrer sur z de $-\dfrac{h}{2}$ à $+\dfrac{h}{2}$, le champ total en O est donc :

$$\overrightarrow{B}(O) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{N}{h}\frac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z} = \frac{N}{h}\frac{\mu_0 i}{2R}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}\ .$$

En effectuant les changements de variable $y = \dfrac{z}{R}$ puis $\tan\theta = y$, on trouve :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(1+\left(\frac{-z}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}z = R\int_{-\frac{h}{2R}}^{\frac{h}{2R}}\left(1+y^2\right)^{-3/2}\mathrm{d}y = R\int_{\arctan\left(-\frac{h}{2R}\right)}^{\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)}\left(1+\tan^2\theta\right)^{-3/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= R\int_{\arctan\left(-\frac{h}{2R}\right)}^{\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = R\sin\left(\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)\right) - R\sin\left(\arctan\left(-\frac{h}{2R}\right)\right)$$

$$= 2R\sin\left(\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)\right) = 2R\sqrt{\frac{\left(\frac{h}{2R}\right)^2}{1+\left(\frac{h}{2R}\right)^2}} = 2R\sqrt{\frac{h^2}{h^2+4R^2}}$$

d'où finalement $\overrightarrow{B}(O) = \dfrac{N}{h}\dfrac{\mu_0 i}{2R}2R\sqrt{\dfrac{h^2}{h^2+4R^2}}\overrightarrow{e_z}$, soit $\boxed{\overrightarrow{B}(O) = \dfrac{\mu_0 N i}{h}\sqrt{\dfrac{h^2}{h^2+4R^2}}\overrightarrow{e_z}}$.

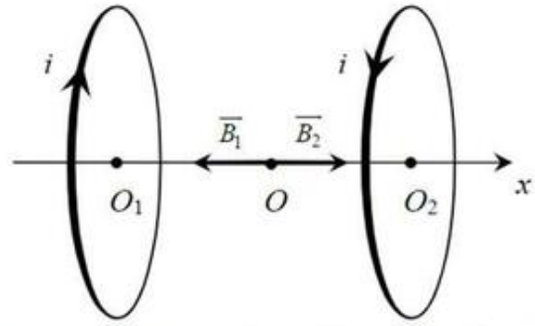
AN $\boxed{B(O) = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{T}}$.

L'approximation faite dans la première question donne donc le bon résultat à 0,3 % près.

Exercice 22.6

1. L'intensité i étant positive, le signe + dans la formule donne un champ orienté vers la droite (sens positif de l'axe (Ox)). Cela correspond au sens du courant dans la bobine 2.

D'après l'expression donnée, la norme du champ en O est la même pour les deux bobines.
La direction est également la même mais les sens sont opposés, ainsi les deux contributions $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ s'annulent au point O.



⇨ *Méthode 22.2*

2. On considère un point M de coordonnée x. Par rapport aux points O_1 et O_2 il est respectivement situé en $\frac{d}{2}+x$ et $\frac{d}{2}-x$. La première bobine créé en M un champ $\overrightarrow{B_1}=-\frac{\mu_0 N i}{2R}\left(1+\left(\frac{d/2+x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\overrightarrow{e_x}$ et la seconde crée $\overrightarrow{B_2}=\frac{\mu_0 N i}{2R}\left(1+\left(\frac{d/2-x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\overrightarrow{e_x}$.

Champ créé par l'ensemble : $\boxed{\overrightarrow{B}=\frac{\mu_0 N i}{2R}\left(-\left(1+\left(\frac{d/2+x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}+\left(1+\left(\frac{d/2-x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\right)\overrightarrow{e_x}}$.

3. On peut poser $\overrightarrow{B}=B_x(x)\overrightarrow{e_x}$. $B_x(x)$ est une fonction impaire, on en déduit que les termes d'ordre pair du développement au voisinage de 0 sont nuls. Comme on veut développer jusqu'au quatrième ordre, il faut calculer les termes d'ordre 1 et 3 en $\frac{x}{R}$.

On pose donc $y=\frac{x}{R}$, alors $B_x(y)=\frac{\mu_0 N i}{2R}\left(-\left(1+\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)^{-3/2}+\left(1+\left(\frac{d}{2R}-y\right)^2\right)^{-3/2}\right)$ et

$B_x(y)\approx\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}y}(0)\,y+\frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3B_x}{\mathrm{d}y^3}(0)\,y^3$.

On commence par calculer les dérivées de $\left(1+\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)^{-3/2}$:

la dérivée première est égale à $-3\left(1+\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)^{-5/2}\left(\frac{d}{2R}+y\right)$;

la dérivée seconde à $-3\left(1+\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)^{-7/2}\left(1-4\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)$;

et la dérivée troisième à $15\left(1+\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)^{-9/2}\left(\frac{d}{2R}+y\right)\left(3-4\left(\frac{d}{2R}+y\right)^2\right)$.

Donc en $y=0$ les dérivées première et troisième valent respectivement $-3\left(1+\left(\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{-5/2}\frac{d}{2R}$ et $15\left(1+\left(\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{-9/2}\left(\frac{d}{2R}\right)\left(3-4\left(\frac{d}{2R}\right)^2\right)$. Pour le terme en $\left(1+\left(\frac{d}{2R}-y\right)^2\right)^{-3/2}$, on trouve les mêmes expressions avec les signes opposés. On remarque alors que si $d=R\sqrt{3}$, $3-4\left(\frac{d}{2R}\right)^2=3-\left(\frac{R\sqrt{3}}{R}\right)^2=0$ et les dérivées troisièmes sont donc nulles en $y=0$.

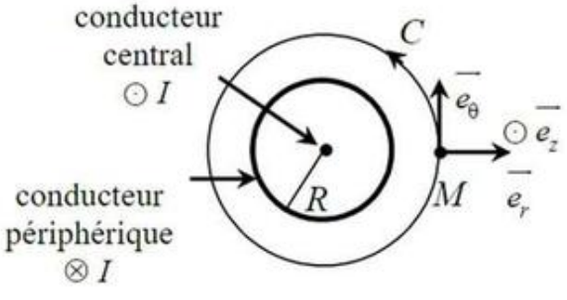
En rassemblant tous ces résultats, on obtient finalement $\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}y}(0)=\frac{\mu_0 NI}{2R}-\left(\left(-3\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{-5/2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(3\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{-5/2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}\,\mu_0 NI}{2R}\left(\frac{4}{7}\right)^{5/2}$, le développement recherché est $\boxed{B_x(x)\approx\frac{3\sqrt{3}\,\mu_0 NI}{2R^2}\left(\frac{4}{7}\right)^{5/2}x}$. La variation du champ avec x est donc bien linéaire, à des termes du cinquième ordre en $\frac{x}{R}$ près.

4. D'après l'expression précédente, $a=\frac{3\sqrt{3}\,\mu_0 NI}{2R^2}\left(\frac{4}{7}\right)^{5/2}$. On en déduit $\boxed{N=\frac{2R^2 a}{3\sqrt{3}\,\mu_0 I}\left(\frac{7}{4}\right)^{5/2}}$.

AN $\boxed{N=12400}$, ce qui semble assez élevé mais pas irréaliste…

Exercice 22.7

On note (Oz) l'axe du câble coaxial et on repère la position d'un point M en coordonnées cylindriques (r,θ,z). Le courant dans le conducteur central circule dans le sens des z positifs, et celui du conducteur périphérique dans le sens des z négatifs. Tout plan qui contient l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courants, et donc du champ magnétostatique, qui lui est alors orthogonal.



Le champ magnétostatique est donc selon $\vec{e}_\theta$. Par ailleurs la distribution de courants est invariante par translation selon (Oz) et par rotation autour de (Oz), la norme du champ est donc indépendante de θ et z. En conclusion, $\boxed{\vec{B}(M)=B_\theta(r)\vec{e}_\theta}$.

⇨ *Méthodes 22.3, 22.4*

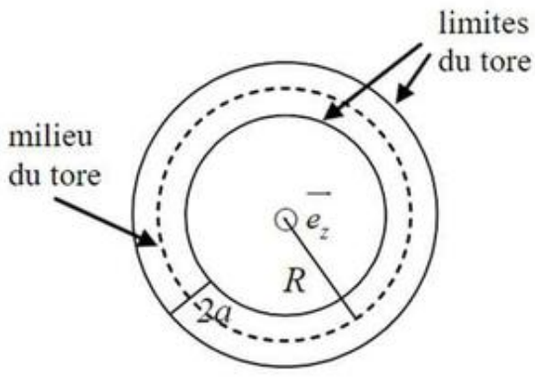
Exercice 22.8

Tout plan qui contient l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courants, donc d'antisymétrie pour le champ magnétostatique : il est orthogonal à ce plan, donc selon $\vec{e}_\theta$.

Par ailleurs, cette distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), dans la mesure où l'on considère les spires comme continûment réparties le long du tore. La norme du champ ne dépend donc pas de θ.

On peut donc écrire $\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r,z)\vec{e_\theta}}$.

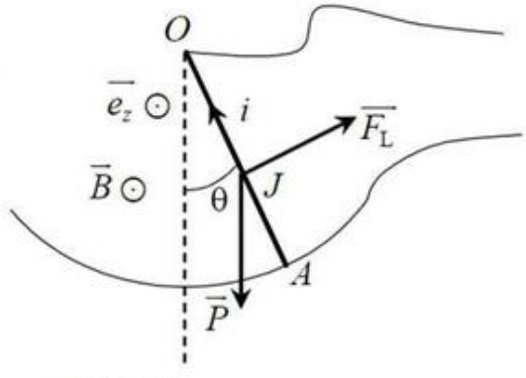
⇨ *Méthodes 22.3, 22.4*



Exercice 22.9

1. Le courant doit aller de A vers O, d'après la règle d'orientation du produit vectoriel.

2. La force de Laplace sur la tige OA est orthogonale à (OA), vers la droite et vaut $F_L = i\ell B$. Comme cette force est uniformément répartie sur toute la longueur de la tige, pour calculer le moment on peut considérer que la totalité de la force s'exerce au milieu de la tige. Le moment en O des forces de Laplace s'écrit donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_L} = \overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{F_L} = \dfrac{i\ell^2 B}{2}\vec{e_z}$.



Par ailleurs, le moment du poids est $\overrightarrow{\mathcal{M}_p} = \overrightarrow{OJ} \wedge \vec{P} = -\dfrac{mg\ell\sin(\theta)}{2}\vec{e_z}$ (là encore, le poids est uniformément réparti sur la longueur de la tige). À l'équilibre la somme des moments est nulle : $\overrightarrow{\mathcal{M}_L} + \overrightarrow{\mathcal{M}_p} = \vec{0}$ donne $\boxed{\sin\theta_{éq} = \dfrac{i\ell B}{mg}}$.

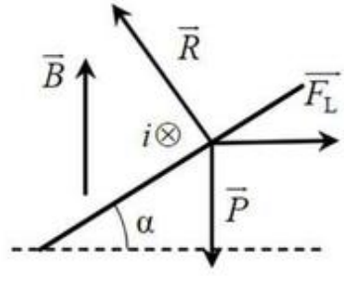
⇨ *Méthode 22.6*

Exercice 22.10

1. Le courant dans le barreau mobile (qui est orthogonal au plan de la figure) doit être vers l'arrière.

2. Le barreau se déplace à vitesse constante si la résultante des forces est nulle : $\vec{R} + \overrightarrow{F_L} + \vec{P} = \vec{0}$, ce qui donne en projetant sur (Ox), c'est-à-dire la direction des rails : $F_L\cos\alpha = mg\sin\alpha$.

Comme $F_L = i\ell B$, on obtient $\boxed{i = \dfrac{mg\tan\alpha}{\ell B}}$ AN $\boxed{i = 2{,}5\text{ A}}$.

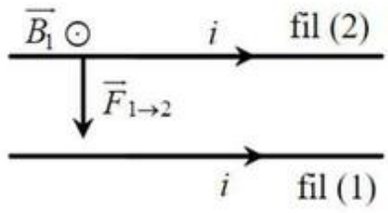


3. Si l'altitude augmente de 10 cm en 0,5 s, la vitesse verticale est de $v_z = 0{,}2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La vitesse le long des rails est donc $v_x = \dfrac{v_z}{\sin(\alpha)} = 0{,}4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La puissance de la force de Laplace est donnée par $\boxed{\mathcal{P}_L = \overrightarrow{F_L}\cdot\vec{v} = F_L v_x}$. On trouve ainsi $\boxed{\mathcal{P}_L = 18\text{ mW}}$.

⇨ *Méthode 22.7*

Exercice 22.11

1. Les courants doivent être dans le même sens. On peut l'illustrer en considérant le champ magnétique $\overline{B_1}$ créé par le fil (1) et la force de Laplace $\overline{F}_{1\to 2}$ qui en résulte.



2. Comme le champ magnétique $\overline{B_1}$ est le même sur toute la longueur du fil (2) et qu'il est orthogonal au fil, $F_{1\to 2} = i\,\ell\,B_1$. D'après la formule donnée dans l'énoncé, $B_1 = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi a}$.

On a donc $\boxed{F_{1\to 2} = \dfrac{\mu_0 i^2 \ell}{2\pi a}}$: la force est proportionnelle au carré de l'intensité (on obtient évidemment le même résultat pour $F_{2\to 1}$).

3. An $\boxed{F_{1\to 2} = 5{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{N}}$.

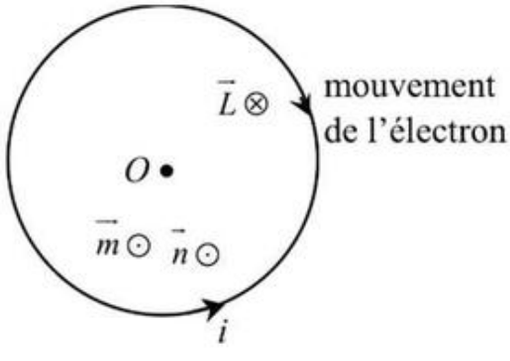
Cette force est très peu intense (malgré deux fils relativement proches et un courant assez élevé), ce qui fait qu'elle est délicate à mettre en évidence expérimentalement.

4. En reprenant le relation du 2. on obtient $\boxed{i = \sqrt{\dfrac{2\pi a F_{1\to 2}}{\mu_0 \ell}}}$, et l'application numérique donne exactement 1 A. En effet, cette situation sert à définir l'ampère.

Exercice 22.12

1. On considère une petite surface traversée par l'électron lors de son mouvement orbital.

À chaque période T la charge e traverse la surface, l'intensité moyenne est donc $i = \dfrac{e}{T}$. Le mouvement étant circulaire uniforme $v = \dfrac{2\pi a_0}{T}$, et donc $\boxed{i = \dfrac{ev}{2\pi a_0}}$. Comme par définition $m = iS$, où S est l'aire entourée par la trajectoire de l'électron (donc $S = \pi {a_0}^2$), finalement $\boxed{m = \dfrac{ev a_0}{2}}$.



2. Cette situation est habituelle en mécanique, $L = m_e v a_0$ donc $m = \dfrac{eL}{2m_e}$. Dans l'état fondamental décrit par le modèle de Bohr, $L = \hbar$ ($n = 1$) d'où $\boxed{\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}}$.

L'application numérique (avec deux chiffres significatifs) donne $\boxed{\mu_B = 9{,}3.10^{-24}\ \text{A}\cdot\text{m}^2}$.

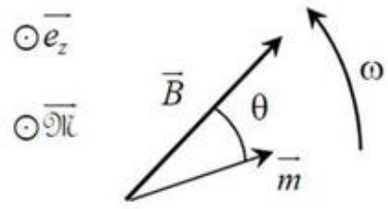
Corrigé

Exercice 22.13

1. $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$, donc $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = m B \sin\theta \overrightarrow{e_z}}$.

2. Dans ce cas, le couple est nul, donc $\theta = 0$: le moment reste aligné sur le champ.

3. Le couple moteur et le couple résistant se compensent (vectoriellement), donc ils ont la même valeur. D'où $m B \sin\theta = \mathcal{M}_r$, soit $\boxed{\sin\theta = \dfrac{\mathcal{M}_r}{m B}}$.



La puissance est donnée par $\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\omega}$, avec $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{e_z}$, donc $\boxed{\mathcal{P} = m B \omega \sin\theta}$.

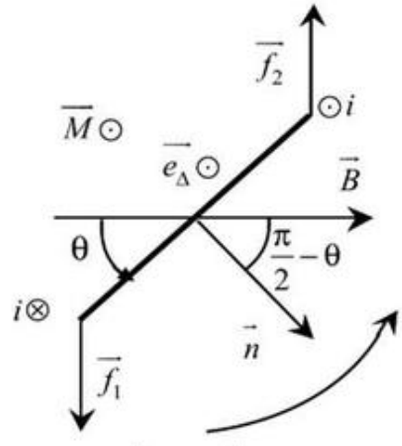
Les applications numériques donnent $\boxed{\theta = 24°}$ et $\boxed{\mathcal{P} = 205\ \text{W}}$. Lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important.

4. La vitesse de rotation est indépendante de la charge, qui n'influe que sur l'angle interne (c'est un avantage du moteur synchrone par rapport au moteur à courant continu).

Le couple maximal correspond à un angle interne de 90°. On a donc ici $\boxed{\mathcal{M}_{max} = m B = 1{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}}$.

Exercice 22.14

1. Les forces de Laplace sur les parties du cadre qui sont orthogonales à l'axe (Δ) sont parallèles à celui-ci et ne contribuent pas au couple. Les forces sur les parties du cadre parallèles à (Δ) $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ sont représentées.



2. Imaginons la situation un demi-tour plus tard : les parties verticales du cadre sont échangées, mais le courant i a changé de signe ce qui fait que les forces, et donc le couple, sont dans le même sens. On peut aussi remarquer que le moment magnétique de la spire reste, en moyenne, dans le même sens car la spire tourne mais le courant varie sinusoïdalement avec la même période.

3. Il faut que $\boxed{\theta = 0}$ et que le vecteur rotation soit dans le même sens que le couple.

4. On utilise le moment magnétique $\overrightarrow{m}$ associé à la spire : $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B} = i S B \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \overrightarrow{e_\Delta}$,

donc $\overrightarrow{\mathcal{M}} = i S B \cos\theta \overrightarrow{e_\Delta}$. De plus, comme on doit avoir $i = I_m$ lorsque $\theta = 0$, on peut écrire $i = I_m \cos\theta$, ce qui conduit à $\overrightarrow{\mathcal{M}} = I_m S B \cos^2\theta \overrightarrow{e_\Delta}$.

On veut la valeur moyenne sur une période, c'est-à-dire pour θ variant entre 0 et 2π :

$\left\langle \cos^2\theta \right\rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \dfrac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta$ étant nulle.

Finalement : $\boxed{\left\langle \overrightarrow{\mathcal{M}} \right\rangle = \dfrac{I_m S B}{2} \overrightarrow{e_\Delta}}$.

Chapitre 23
Induction électromagnétique

UN SCIENTIFIQUE



Michael Faraday (1791-1867) découvre la physique et la chimie dans les livres qu'il consulte dans l'atelier de reliure où il est embauché. Il se passionne rapidement pour cette discipline et en devient rapidement un très grand spécialiste. Son œuvre est immense : il étudie l'électromagnétisme, montre que l'on peut transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique. Il découvre en 1831 le phénomène d'induction puis les lois de l'électrolyse et en fin de carrière l'électroluminescence.

Un peu d'histoire

En 1831, Michael Faraday enroule sur un anneau de fer deux bobines de fil de cuivre en spirales isolées par de la ficelle. Il connecte l'une de ces bobines à une pile et l'autre à un galvanomètre. Il constate qu'à chaque ouverture du circuit, l'aiguille aimantée dévie. Un courant est apparu, qu'il nomme induit : c'est la découverte de l'induction. Peu après, il découvre un courant induit dans un solénoïde. En fin d'année, il fait part de ces découvertes.

Le physicien américain Joseph Henry découvre, indépendamment de Faraday, le phénomène d'induction électromagnétique mais tarde à publier ses résultats. Deux ans plus tard, le savant russe Heinrich Lenz précise cette propriété. C'est un Allemand, Franz Neumann qui établit, dans deux articles publiés en 1845 et 1847, une théorie mathématique de ce thème et donne une formule donnant la force électromotrice.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La notion de flux d'un champ à travers une surface orientée
- ▷ La loi de modération de Lenz
- ▷ La loi de Faraday pour le calcul algébrique d'une FÉM induite
- ▷ Les notions de coefficients d'inductance (inductance propre, inductance mutuelle)
- ▷ Le principe de fonctionnement d'un transformateur de tension, d'un alternateur
- ▷ L'origine des courants de Foucault et des exemples de leur utilisation

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer une FÉM induite, dans le cas du circuit fixe dans un champ magnétique variable et dans le cas du circuit mobile dans un champ magnétique constant
- ▷ Obtenir un schéma électrique équivalent : utiliser la FÉM induite pour un circuit orienté et écrire avec les signes corrects la loi des mailles
- ▷ Calculer les coefficients d'inductance dans les cas simples
- ▷ Utiliser les coefficients d'inductance pour obtenir les schémas électriques équivalents de circuits couplés
- ▷ Effectuer un bilan d'énergie (obtenu a priori et retrouvé à partir des équations électromécaniques)

■■ Résumé de cours

■ Phénomène d'induction électromagnétique

❑ Description

L'induction électromagnétique est l'apparition d'un courant électrique, appelé **courant induit**, dans un circuit placé dans un champ magnétique, ceci se produisant dans deux types de situations :

– si le champ magnétique est variable au cours du temps ;
– si le circuit n'est pas fixe (il se déplace, il tourne autour d'un axe, il se déforme…).

❑ Loi de modération de Lenz

On constate expérimentalement que le sens du courant induit est tel qu'il tend toujours à s'opposer, par ses effets, à la cause qui l'a produit :

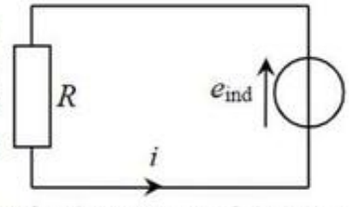
– dans le cas d'un champ magnétique variable, le champ créé par le courant induit lui-même s'oppose à la variation du champ initial ;
– dans le cas d'un circuit mobile, les forces de Laplace dues au courant induit s'opposent au mouvement initial du circuit.

■ Force électromotrice induite et loi de Faraday

❑ Force électromotrice (FÉM) induite

Le courant induit dans un circuit fermé est lié à l'apparition d'une force électromotrice induite, qui joue le même rôle que la FÉM d'un générateur électrochimique.

La FÉM est répartie sur toute la longueur du circuit siège du phénomène d'induction, mais pour en tenir compte dans les lois de l'électricité, il est commode de la représenter par une source idéale de tension, localisée en un point du circuit ; on l'oriente dans le même sens que celui qui définit l'intensité du courant induit.



On peut ainsi donner un schéma équivalent du circuit en représentant également sa résistance par un dipôle ohmique (et d'autres caractéristiques éventuelles du circuit par d'autres dipôles).

❑ Flux du champ magnétique au travers d'une surface

Flux du champ magnétique au travers d'une surface Σ : $\boxed{\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}s}$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire localement orthogonal à la surface, et dont le sens définit une orientation de la surface (le flux est donc une grandeur *algébrique*).

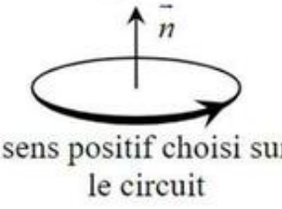
Dans le cas où la surface est plane et le champ uniforme, l'expression devient simplement : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} \, S$ où S est l'aire de la surface.

❑ Loi de Faraday

Les observations expérimentales montrent que le phénomène d'induction n'a lieu que si quelque chose varie (champ magnétique variable, circuit en mouvement…). Plus précisément, ce qui est important est la variation du flux du champ magnétique au travers du circuit.

C'est le contenu de la loi de Faraday relative à un circuit fermé : $\boxed{e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$.

Cette formule suppose que l'orientation choisie pour le vecteur normal (servant à calculer le flux) soit cohérente avec le sens positif choisi sur le circuit (servant à orienter la FÉM induite et le courant), selon la règle habituelle d'orientation de l'espace (règle du tire-bouchon).



sens positif choisi sur le circuit

➪ **Méthode 23.1. Orienter arbitrairement un circuit et appliquer la loi des mailles**

Lien avec la loi de Lenz

Le signe moins dans la loi de Faraday est lié au fait que les courants induits s'opposent par leurs effets à la cause qui les produit, c'est-à-dire à la variation du flux magnétique.

■ Circuit fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann)

❑ Auto-induction

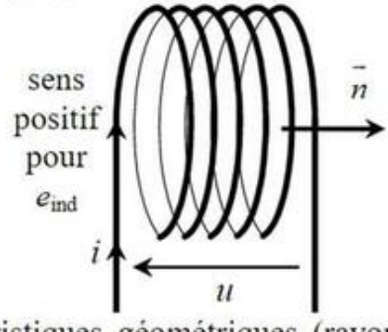
Lorsque le courant dans une bobine est variable, le flux du champ magnétique créé par la bobine elle-même, appelé **flux propre**, est variable, ce qui induit une FÉM dans la bobine, dite **FÉM d'auto-induction**. Conformément à la loi de Lenz, celle-ci s'oppose à la variation de courant qui lui a donné naissance, ce qui explique notamment le phénomène de retard à l'allumage dans un circuit comportant des bobines.

Inductance propre

L'inductance propre L d'une bobine est définie par la relation : $\boxed{\Phi = L\,i}$

où i est l'intensité du courant dans la bobine et Φ le flux propre, en utilisant des orientations pour le flux et pour le courant cohérentes entre elles. L'inductance propre est *toujours positive*.

La loi de Faraday $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ associée à la définition de l'inductance $\Phi = L\,i$ conduit à la relation $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ utilisée en électrocinétique, en posant $u = -e_{\text{ind}}$ (la tension u aux bornes de la bobine étant assimilée à la FÉM induite, mais en sens inverse en convention récepteur).



On peut relier l'inductance propre d'une bobine à ses caractéristiques géométriques (rayon, longueur, nombre de spires). L'unité SI d'inductance est le henry (H). Les bobines usuelles ont des inductances allant de quelques mH à quelques H.

➪ **Méthode 23.2. Déterminer le coefficient d'inductance propre d'un long solénoïde**

❑ Inductance mutuelle

Lorsque deux circuits sont en présence, le flux magnétique à travers l'un d'eux comporte non seulement son flux propre, mais aussi le flux du champ magnétique créé par l'autre circuit. Le flux Φ_{12} à travers le circuit (C_2) du champ généré par le courant circulant dans le circuit (C_1) s'écrit $\boxed{\Phi_{12} = M\, i_1}$ où M est le **coefficient d'inductance mutuelle**. De même $\boxed{\Phi_{21} = M\, i_2}$.

Le signe de M dépend de l'orientation relative des deux circuits.

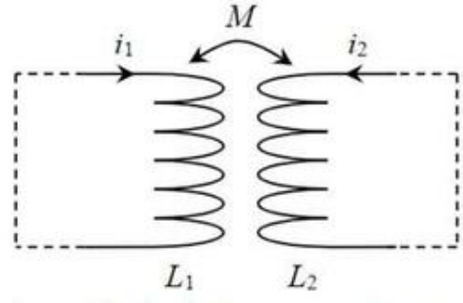
Les inductances propres L_1 et L_2 et l'inductance mutuelle M vérifient l'inégalité : $\boxed{M^2 \leq L_1 L_2}$.

Le cas où $M^2 = L_1 L_2$ correspond au meilleur couplage possible entre les circuits.

⇨ **Méthode 23.3. Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe**

❑ Circuits électriques couplés par inductance mutuelle

La représentation conventionnelle est indiquée ci-contre.



Les FÉM d'induction des deux circuits sont dues à la fois aux flux propres et aux flux mutuels :

$$\begin{cases} e_{1\,\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ e_{2\,\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Il suffit de prendre en compte ces FÉM dans les circuits électriques équivalents pour mettre en équation des circuits couplés par mutuelle.

⇨ **Méthode 23.4. Mettre en équation deux circuits couplés par mutuelle**

❑ Appareils usuels avec induction de Neumann

Application principale : transformateur de tensions (bobines primaire et secondaire).

Appareils avec bobines émettrice et réceptrice : boucle auditive (émettrice dans les murs d'une pièce, réceptrice dans une prothèse), détecteur de métaux, appareil de contrôle de pièces métalliques (voir ci-après).

Appareil avec bobine émettrice et masse métallique : chauffage par induction.

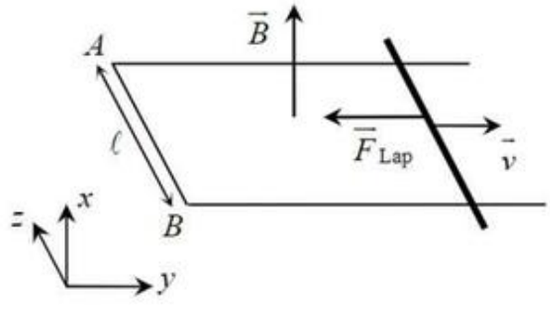
■ Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz)

❑ Rails de Laplace

Ce dispositif a été vu au chapitre précédent.

Lorsqu'un courant i parcourt la tige, celle-ci subit une force de Laplace : $\overrightarrow{F}_{\text{Lap}} = \pm i B \ell \overrightarrow{e_y}$.

D'autre part, lorsque la tige est en mouvement à une vitesse $\vec{v}$, la variation de la surface du circuit, donc du flux magnétique, crée une FÉM d'induction $e_{\text{ind}} = \pm v B \ell$.



On peut écrire deux équations électromécaniques couplées, reliant les grandeurs $i(t)$ et $v(t)$, en appliquant à ce dispositif une loi électrique (loi des mailles) et une loi mécanique (TQM).

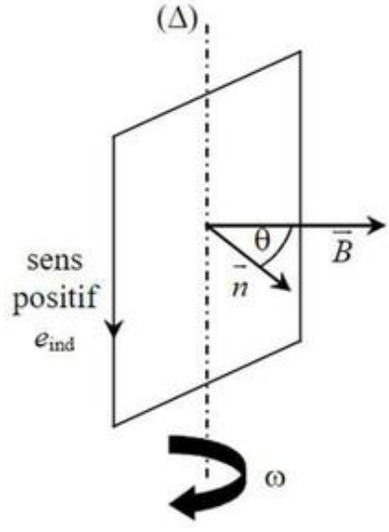
⇨ **Méthode 23.5. Obtenir les équations couplées d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique**

❑ Spire rectangulaire en rotation

Une spire de surface S est en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Δ), dans un champ magnétique constant et uniforme orthogonal à (Δ). Le flux au travers de la spire est égal à $\Phi = BS\cos(\omega t)$, donc d'après la loi de Faraday : $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\omega\sin(\omega t)$.

On néglige dans ce calcul l'auto-induction.

Comme pour les rails de Laplace, on peut établir un système d'équations électromécaniques couplées.



❑ Bilans énergétiques

Dans tous les dispositifs correspondant au cas de Lorentz (circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire), la puissance électrique fournie par la FÉM d'induction et la puissance mécanique de la résultante des forces de Laplace vérifient : $\boxed{\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + \mathcal{P}_{\text{fém}} = 0}$.

Cette relation traduit le fait que la puissance de la force de Lorentz sur un porteur de charge est nulle. Ainsi, le fait que la puissance mécanique des forces de Laplace et la puissance électrique associée au phénomène d'induction soient non nulles n'est pas en contradiction avec la puissance nulle de la force de Lorentz, simplement ces deux puissances se compensent systématiquement.

⇨ **Méthode 23.6. Effectuer un bilan énergétique**

❑ Alternateur

La conversion de travail mécanique en travail électrique est mise en œuvre dans les alternateurs. La situation de la spire en rotation dans un champ magnétique constant constitue un alternateur rudimentaire, avec lequel on obtient une tension sinusoïdale.

On retrouve cette idée de circuit en rotation (rotor) dans un champ magnétique statique (créé par le stator) dans les alternateurs utilisés industriellement, notamment dans les centrales électriques. Cependant, pour être réellement efficace, la géométrie d'un alternateur est beaucoup plus complexe.



Mise en place du rotor dans un alternateur de centrale nucléaire

❑ Courants de Foucault

Des courants induits peuvent apparaître dans tout le volume d'un conducteur non filiforme, on les appelle alors **courants de Foucault**. Du fait de l'effet Joule, ces courants conduisent à un échauffement plus ou moins important du conducteur.

– Souvent, cet échauffement n'est pas souhaitable : c'est le cas, par exemple, quand le conducteur est le noyau d'un transformateur. On évite alors ces courants en feuilletant le noyau pour gêner leur circulation, ou en utilisant un noyau en ferrite, non conductrice.

– Au contraire, on exploite cet effet Joule dans un dispositif de chauffage par induction.

– Dans un détecteur de métaux ou un appareil de contrôle de pièces métalliques, une bobine émettrice crée des courants de Foucault dans la pièce métallique, puis une bobine réceptrice capte le champ créé par ces courants.

– Enfin, lorsque le phénomène d'induction résulte d'un déplacement du conducteur, les courants de Foucault conduisent à un effet de freinage par les forces de Laplace. Ce freinage électromagnétique est utilisé par exemple dans les gros véhicules.

■ Comment obtenir l'équation électrique d'un circuit en présence d'induction ?

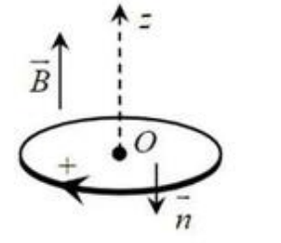
❑ Méthode 23.1. Orienter arbitrairement un circuit et appliquer la loi des mailles

Avant tout, il faut choisir une orientation pour les circuits. Le choix de cette orientation est arbitraire.
Il est préférable de choisir la même orientation pour la FÉM et pour le courant.
Le choix de cette orientation fixe l'orientation de la normale sur une surface qui s'appuie sur le circuit par la règle du tire-bouchon de Maxwell.
Le circuit électrique équivalent s'obtient alors en « ajoutant » une source de tension e_{ind} orientée dans le sens positif choisi. On raisonne alors sur ce circuit équivalent comme on raisonnait auparavant en l'absence d'induction.

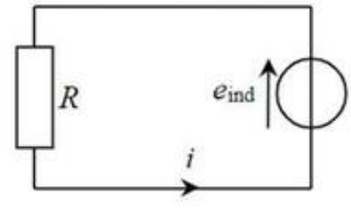
⇨ Exercices 23.1, 23.7, 23.8

On cherche l'intensité qui circule dans une spire circulaire de rayon a, de résistance totale R placée dans un champ magnétique uniforme et parallèle à l'axe de la spire $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e_z}$.

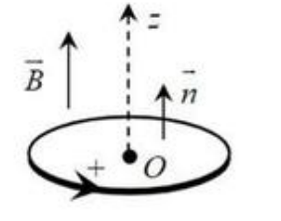
– On oriente le circuit comme indiqué sur la figure et l'on choisit comme surface fermée s'appuyant sur le circuit un disque de surface totale $S = \pi a^2$. Avec l'orientation indiquée, la normale est $\vec{n} = -\vec{e_z}$. Comme le champ magnétique est uniforme, le flux du champ magnétique est simplement : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = -\pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$.



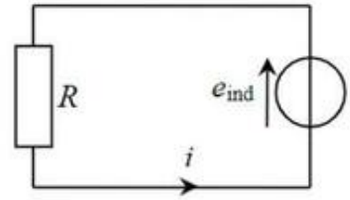
La FÉM induite est $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t)$ et le circuit électrique équivalent est représenté ci-contre. L'équation électrique est $e_{\text{ind}} = Ri$ ce qui donne : $\boxed{i(t) = \dfrac{-\pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t)}{R}}$.



– Imaginons maintenant que l'on oriente (c'est arbitraire !) le circuit dans l'autre sens. Avec cette nouvelle orientation, la normale est $\vec{n} = +\vec{e_z}$. Le flux du champ magnétique s'écrit alors $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = \pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$.



La FÉM induite est $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi a^2 B_0\,\omega\cos(\omega t)$ et le circuit électrique équivalent est le suivant. C'est le même que précédemment ! L'équation électrique est donc encore $e_{\text{ind}} = Ri$ mais comme la FÉM est de signe opposé, on trouve une intensité de signe opposé $\boxed{i(t) = \dfrac{+\pi a^2 B_0\,\omega\cos(\omega t)}{R}}$, ce qui correspond néanmoins (heureusement !) à une même situation physique.



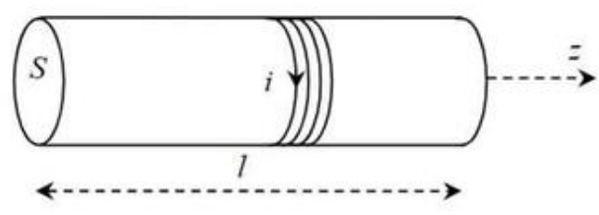
■ Comment déterminer et utiliser les coefficients d'inductance ?

❑ Méthode 23.2. Déterminer le coefficient d'inductance propre d'un long solénoïde

C'est l'exemple le plus important de circuit dont on peut calculer simplement le coefficient d'inductance propre à partir du flux propre.
Il faut chercher le champ créé par le solénoïde puis sont flux à travers une surface limitée par le circuit.

⇨ Exercice 23.2

Le solénoïde est caractérisé par sa section, sa longueur l et le nombre de spires par unité de longueur n. Il est supposé « long » de sorte que l'on peut négliger la contribution des bords dans le calcul du flux (on dit encore qu'il est infiniment long). À l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique est uniforme et s'écrit $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e_z}$. Le flux du champ $\vec{B}$ à travers une spire est donc $\Phi_{1\,\text{spire}} = \mu_0 n i \vec{e_z} \cdot S\vec{e_z} = \mu_0 niS$. Comme il y a nl spires, le flux total à travers le circuit est $\Phi = nl\Phi_{1\,\text{spire}} = nl\mu_0 niS = \mu_0 n^2 lSi$.



Le coefficient d'inductance propre, coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité est ainsi : $\boxed{L = \mu_0 n^2 lS}$.

Bien noter que son signe ne serait pas modifié par un changement de l'orientation du solénoïde : cela changerait à la fois le signe de $\vec{B}$ et celui de $\vec{n}$, ce qui n'aurait pas d'influence sur L.

Pour donner un ordre de grandeur, considérons une bobine de 1000 spires réparties sur 10 cm de longueur avec une section de 5 cm^2 : on a $n = 10^4$ spires par mètre et $L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 0{,}1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-3}\,\text{H} = 6\,\text{mH}$.

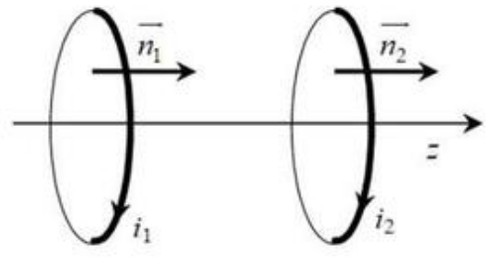
On voit que le henry représente un ordre de grandeur d'inductance assez élevé ; pour des bobines à air usuelles, on trouve généralement quelques mH ou dizaines de mH.

❑ Méthode 23.3. Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe

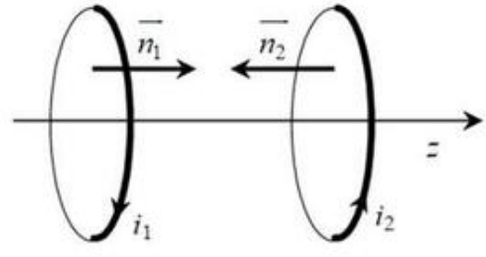
On n'envisage que le cas de deux bobines de même axe et de grande longueur en « influence totale ». Dans l'approximation du solénoïde infini, le champ créé par l'un des deux enroulements est facile à exprimer, et son flux au travers de l'autre enroulement l'est aussi puisque le champ est uniforme à l'intérieur. Le signe dépend de l'orientation relative de ces deux circuits. Le coefficient d'inductance mutuelle doit obligatoirement être associé à un choix de cette orientation relative.

⇨ Exercices 23.3, 23.4

Les deux enroulements (respectivement N_1 et N_2 spires) sont bobinés sur le même support de longueur ℓ et de section S. Il faut d'abord choisir l'orientation relative des deux enroulements : si les courants (donc les vecteurs unitaires normaux utilisés pour calculer les flux) sont orientés dans le même sens, l'inductance mutuelle est positive ; s'ils sont en sens contraires, elle est négative. Les schémas ci-contre illustrent ces conventions, en ne représentant qu'une seule spire de chaque enroulement.



Convention pour laquelle $M > 0$



Convention pour laquelle $M < 0$

Pour effectuer le calcul, on se place dans le cas où M est positive et on calcule par exemple M_{12} (sachant que $M_{12} = M_{21} = M$), c'est-à-dire que l'on exprime le champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ créé par le premier enroulement et que l'on calcule ensuite son flux Φ_{12} au travers du deuxième enroulement : $\overrightarrow{B_1} = \mu_0 \dfrac{N_1}{\ell} i_1 \overrightarrow{e_z}$ et $\Phi_{12} = N_2 \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{n_2} S$ (on calcule le flux au travers d'une spire et on multiplie par le nombre de spires), ce qui donne finalement $\Phi_{12} = \mu_0 \dfrac{N_1 N_2}{\ell} S i_1$. On en déduit $\boxed{M = \mu_0 \dfrac{N_1 N_2}{\ell} S}$.

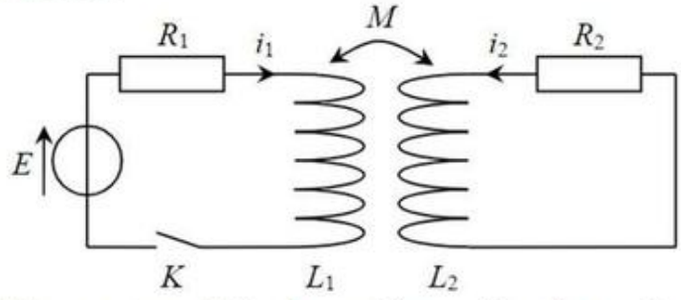
On remarque que dans cette situation on a bien $L_1 L_2 = M^2$, le terme « influence totale » correspond au meilleur couplage possible entre les deux circuits.

❑ Méthode 23.4. Mettre en équation deux circuits couplés par mutuelle

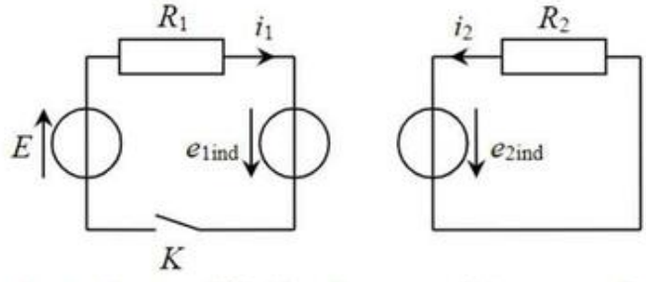
Une fois les circuits orientés, le coefficient d'inductance mutuelle est fixé *avec son signe*. Il n'y a plus qu'à appliquer la méthode 23.1 pour obtenir les schémas électriques équivalents et leur appliquer la loi des mailles.

⇨ Exercices 23.5, 23.6

On considère le circuit suivant :



Après fermeture de l'interrupteur (K), les schémas électriques équivalents s'obtiennent immédiatement suivant la méthode 23.1.



Dans ces schémas équivalents, il est préférable de ne pas faire apparaître à part les inductances propres L_1 et L_2.

– Calcul des FÉM induites

Les flux totaux $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}$ et $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12}$ sont reliés aux intensités par les coefficients d'inductance : $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$. La loi de Faraday conduit aux FÉM induites : $e_{1ind} = -\dfrac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt}$ et $e_{2ind} = -\dfrac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt}$.

– Équations électriques des deux circuits

Par application de la loi des mailles : $E + e_{1ind} = R_1 i_1$ et $e_{2ind} = R_2 i_2$. En remplaçant les FÉM par leurs valeurs on obtient finalement : $\boxed{E = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt}}$ et $\boxed{0 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt}}$.

■ Comment aborder les problèmes faisant intervenir un conducteur en mouvement ?

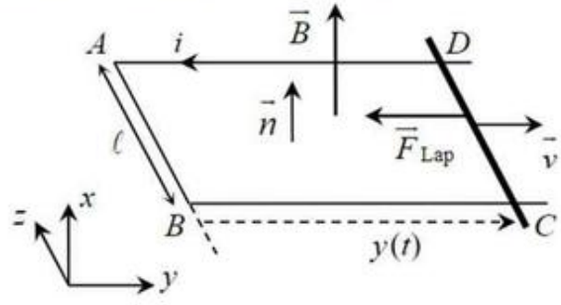
❑ Méthode 23.5. Obtenir les équations couplées d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique

– Le calcul de la FÉM induite permet d'obtenir le circuit électrique équivalent et l'équation électrique associée. Comme la FÉM dépend de la vitesse, on arrive à une première équation électromécanique.
– L'autre équation électromécanique s'obtient en écrivant le théorème de la résultante cinétique (ou, en rotation, le théorème du moment cinétique). Comme la force de Laplace dépend de l'intensité qui circule dans le circuit, on obtient une deuxième équation électromécanique.

⇨ Exercices 23.9, 23.10

Prenons l'exemple des rails de Laplace. Le barreau de masse m est lancé initialement avec la vitesse $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e_y}$, et seule la force de Laplace agit ensuite, il n'y a pas de force supplémentaire pour maintenir la vitesse constante. On choisit l'origine de sorte que $y(0) = 0$.

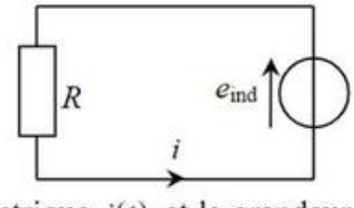
La partie mobile du circuit, de longueur « utile » (c'est-à-dire entre les points C et D) notée ℓ, se déplace à la vitesse v. Le champ magnétique, constant et uniforme, est orthogonal au plan du circuit. On cherche à déterminer le mouvement ultérieur du rail supposé glisser sans frottement.



– Équation d'origine électrique

On calcule tout d'abord la FÉM d'induction. Le flux du champ magnétique au travers du circuit (orienté par $\vec{n}$, comme indiqué sur le schéma) vaut $\Phi = +BS$, où S est la surface du rectangle $ABCD$. La FÉM induite, avec le sens positif choisi, vaut donc (loi de Faraday) $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$; et comme $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = v\ell$, on obtient finalement $e_{\text{ind}} = -vB\ell$. On néglige dans ce calcul l'auto-induction.

Le circuit électrique équivalent comporte simplement, en plus de e_{ind}, une résistance R modélisant la résistance de l'ensemble des fils. L'équation électrique correspondante est donnée par la loi des mailles : $e_{\text{ind}} = Ri(t)$ soit $\boxed{-B\ell v(t) = Ri(t)}$.



C'est bien une équation électromécanique, qui couple la grandeur électrique $i(t)$ et la grandeur mécanique $v(t)$.

– Équation d'origine mécanique

On calcule tout d'abord la résultante $\vec{F}_{\text{Lap}}$ des forces de Laplace sur le rail :

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_C^D \left(i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) = \int_C^D \left(i\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_x \right) = \int_C^D i B\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y = iB\ell\vec{e}_y .$$

La deuxième équation électromécanique s'obtient en appliquant le théorème de la résultante cinétique au rail, soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale des rails $\vec{R}$ et à la résultante $\vec{F}_{\text{Lap}}$ des forces de Laplace : $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Lap}} + \vec{P} + \vec{R}$. Projection sur (Oy) : $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iB\ell}$.

– Découplage

Pour obtenir la vitesse $v(t)$, il suffit d'éliminer l'intensité $i(t)$ entre ces deux équations : $i(t) = -\dfrac{B\ell v(t)}{R}$ donc $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B\ell v(t)}{R}B\ell = -\dfrac{B^2\ell^2}{R}v(t)$ ou encore $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B^2\ell^2}{mR}v(t)}$.

On voit que finalement, le rail est soumis à une force de freinage proportionnelle à la vitesse. Dans la constante de proportionnalité, le champ magnétique apparaît au carré si bien que la force reste une force de freinage quel que soit le signe de B. C'est conforme à la loi de Lenz : la force de Laplace s'oppose au mouvement du rail et donc à la variation de flux.

On retrouve le point très important : le choix de l'orientation du circuit (arbitraire) conditionne le signe de la FÉM induite (avec un choix opposé, on trouverait une FÉM opposée), mais cela ne changerait rien à la physique du problème ; dans cet exemple, on a dans tous les cas une force de freinage.

❑ Méthode 23.6. Effectuer un bilan énergétique

– La relation $P_{\text{fém}} + P_{\text{Laplace}} = 0$, qui traduit la puissance nulle de la force magnétique, peut se démontrer à partir des équations électromécaniques couplées. Elle permet d'éliminer le champ magnétique qui assure le couplage électromécanique.

– Le bilan final pour l'ensemble du système fait alors apparaître les autres puissances mises en jeu (effet Joule, frottements éventuels…) et les différentes formes d'énergie emmagasinées dans le système (cinétique, électromagnétique dans une bobine ou un condensateur…). Il est toujours prévisible sans connaissance préalable des équations électromécaniques couplées.

⇨ **Exercices 23.7, 23.9, 23.10, 23.11**

– Puissances de la FÉM et de la force de Laplace

Reprenons la situation des rails de Laplace d'un point de vue énergétique. Si on prend en compte la résistance R du circuit, on a obtenu l'équation électrique : $e_{\text{ind}} = -B\ell v(t) = Ri(t)$.

La puissance dissipée dans la résistance est égale à la puissance reçue par le circuit via le phénomène d'induction, que l'on notera $P_{\text{fém}}$: $P_{\text{fém}} = e_{\text{ind}}\, i = -i\ell B v$.

Calculons par ailleurs la puissance des forces de Laplace qui s'exercent sur le barreau mobile : $\overrightarrow{F}_{\text{Lap}} = i\ell B\overrightarrow{e_y}$, ce qui donne $P_{\text{Laplace}} = \overrightarrow{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{v} = i\ell B\overrightarrow{e_y} \cdot v\overrightarrow{e_y} = +i\ell Bv$.

On constate ainsi que P_{Laplace} et $P_{\text{fém}}$ sont opposées, ce que l'on peut écrire $\boxed{P_{\text{Laplace}} + P_{\text{fém}} = 0}$.

– Bilan global

Les deux équations électromécaniques couplées sont $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iB\ell$ et $-B\ell v = Ri$. On multiplie la première par v et la seconde par i puis l'on fait la somme, ce qui élimine le terme en B : $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = 0$, ou encore : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = -Ri^2}$.

Cette relation était attendue et pouvait s'écrire directement sans faire appel aux équations couplées. Elle traduit simplement la conversion de l'énergie cinétique du rail en énergie thermique ou lumineuse via l'effet Joule. Notons enfin que ce bilan doit lui aussi servir à éviter de regrettables erreurs de signes. Un bilan de la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = +Ri^2$ doit conduire à s'interroger sur l'écriture de la loi des tensions ou le calcul du produit vectoriel en ce qui concerne la force de Laplace !

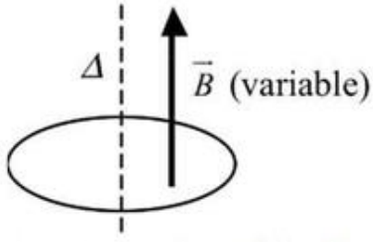
■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Pour observer un courant induit, il suffit de placer un circuit électrique fermé dans un champ magnétique.	☐	☐
2.	Le signe du coefficient d'inductance propre dépend du choix de l'orientation du circuit.	☐	☐
3.	Le signe du coefficient d'inductance mutuelle dépend du choix de l'orientation des circuits.	☐	☐
4.	Si l'on inverse le choix d'orientation du circuit, la FÉM induite change de signe.	☐	☐
5.	Si l'on inverse le choix d'orientation du circuit, le courant induit change de signe.	☐	☐
6.	Pour un circuit en mouvement dans un champ magnétique permanent, celui-ci est à l'origine du couplage électromécanique mais disparaît du bilan d'énergie.	☐	☐
7.	Un transformateur réalise une conversion de travail électrique en travail mécanique.	☐	☐
8.	Un alternateur réalise une conversion de travail mécanique en travail électrique.	☐	☐
9.	Les courants de Foucault sont des courants induits circulant dans tout le volume d'une pièce métallique.	☐	☐
10.	Les courants de Foucault peuvent être utilisés pour réaliser un système de freinage.	☐	☐

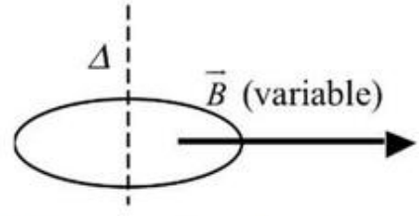
■ Loi de Faraday

❑ Exercice 23.1. Calculs de courants induits

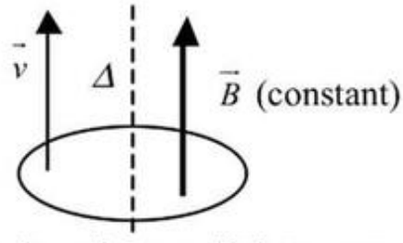
Dans chacun des six cas suivants, calculer la valeur efficace du courant induit dans la spire d'axe (Δ) de surface $10\,\text{cm}^2$ et de résistance $0{,}5\,\Omega$.



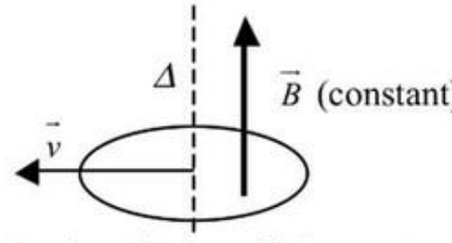
Cas 1 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe, d'amplitude $0{,}1\,\text{T}$ et de fréquence $50\,\text{Hz}$.



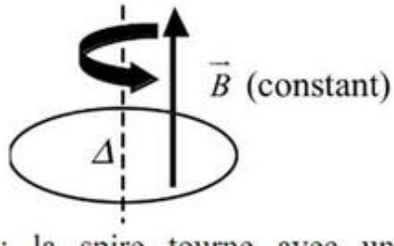
Cas 2 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son axe, d'amplitude $0{,}1\,\text{T}$ et de fréquence $50\,\text{Hz}$.



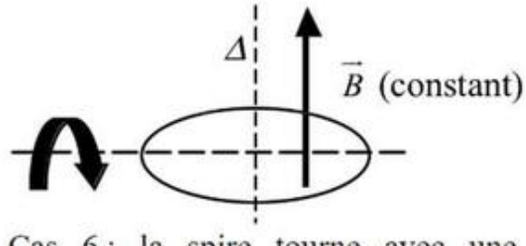
Cas 3 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse de $2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ parallèle à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de $0{,}1\,\text{T}$.



Cas 4 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse $2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ orthogonale à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de $0{,}1\,\text{T}$.



Cas 5 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de $5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ autour de son axe dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de $0{,}1\,\text{T}$.



Cas 6 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de $5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ autour d'un de ses diamètres dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de $0{,}1\,\text{T}$.

■ Circuit fixe dans un champ variable

❑ Exercice 23.2. Comparaison entre induction par un champ « extérieur » et auto-induction dans une spire

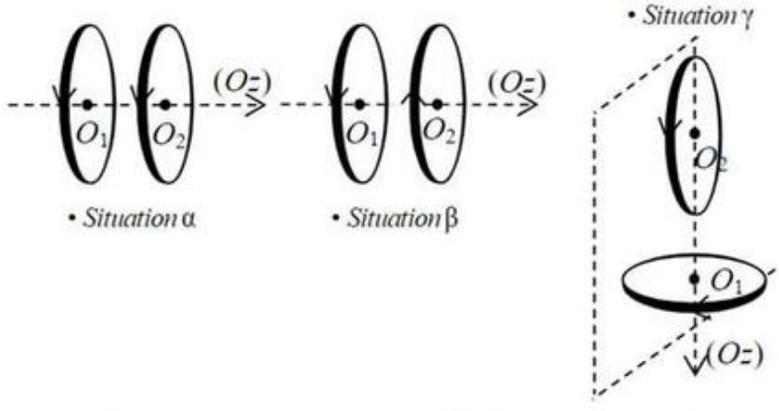
Lorsque l'on considère une spire unique, on peut généralement négliger la FÉM induite devant celle qui est due à un champ « extérieur », c'est-à-dire créé par une autre bobine, variable.
On considère ici une spire circulaire de rayon $R = 5\,\text{cm}$ et de résistance interne $r = 1\,\Omega$.
Le champ « extérieur » variable est uniforme, orthogonal au plan de la spire, sinusoïdal de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$ et d'amplitude $B_0 = 50\,\text{mT}$.

1. Calculer l'amplitude de la FÉM induite dans la bobine du fait du champ extérieur.
2. En déduire (en négligeant l'auto-induction) l'amplitude du courant induit.
3. Expliquer pourquoi, en négligeant ainsi l'auto-induction, on surestime le courant induit.
4. L'expression de l'inductance propre d'une spire est délicate à établir, car on ne peut utiliser une modélisation filiforme des conducteurs (dans une telle modélisation, le champ diverge au voisinage des conducteurs) et il faut donc prendre en compte le rayon du fil, que l'on note a.
On donne l'expression : $L = \mu_0 R\left(\ln\left(\dfrac{8R}{a}\right) - 2\right)$. Calculer L pour cette spire, avec $a = 0{,}1\,\text{mm}$.

5. Calculer l'amplitude E'_{ind} de la FÉM associé à l'auto-induction et conclure.

❑ Exercice 23.3. Signe d'une inductance mutuelle*

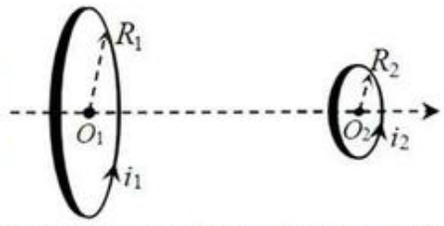
Deux spires circulaires filiformes orientées notées (1) et (2), de centres O_1 et O_2, sont représentées ci-dessous dans trois situations. Ces spires sont perpendiculaires au plan de la figure, la partie en gras étant située en avant de ce plan. L'orientation choisie pour chaque circuit est indiquée par une flèche. Dans les deux premières dispositions, notées α et β, les deux spires sont coaxiales. Dans la dernière, leurs axes sont coplanaires et orthogonaux.



Indiquer si possible le signe de leur inductance mutuelle dans les trois cas.

❑ Exercice 23.4. Calcul d'une inductance mutuelle et vérification de l'égalité $M_{12} = M_{21}$

On considère deux spires circulaires coaxiales (C_1) et (C_2) de centres O_1 et O_2 et de rayons R_1 et R_2. On suppose que la distance O_1O_2 est grande devant R_1 et R_2. On se propose de calculer l'inductance mutuelle de ces deux spires en adoptant les deux points de vue (on calcule M_{12} ou M_{21}).



On rappelle l'expression du champ créé par une spire de rayon R sur son axe, à une distance z de son centre : $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2}\left(R^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

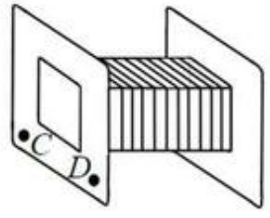
1. On admettra que le champ magnétique créé par (C_1) au niveau de (C_2) est pratiquement $\overline{B_1}(O_2)$. En déduire le flux Φ_{12} puis le coefficient M_{12} tel que $\Phi_{12} = M_{12}\, i_1$.

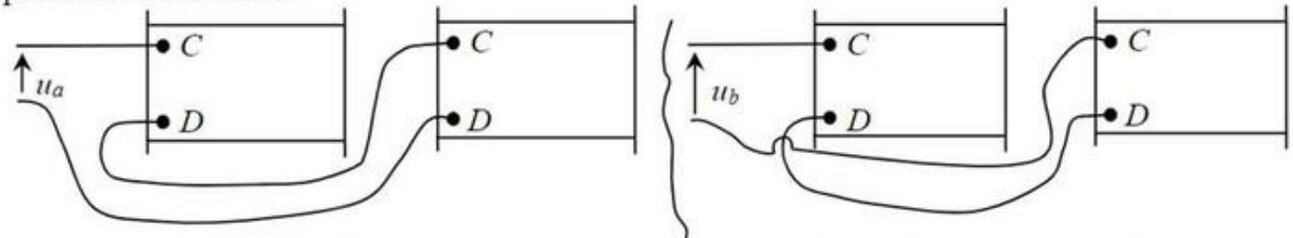
2. De la même manière, calculer Φ_{21} et en déduire M_{21} tel que $\Phi_{21} = M_{21}\, i_2$.

3. Vérifier qu'on retrouve bien $M_{12} \simeq M_{21}$ dans la mesure où $O_1O_2 >> R_1$ et R_2.

❑ Exercice 23.5. Couplage entre deux bobines*

On dispose de deux bobines identiques (S_1) et (S_2) chacune d'inductance propre L et de résistance ohmique $r = 8\,\Omega$. On repère les bornes de chaque bobine par les lettres C et D. Les deux bobines sont placées à proximité l'une de l'autre. On les connecte en série sans les déplacer de manière à créer un nouveau dipôle. La connexion se fait selon les deux possibilités suivantes :





Dipôle (a) : la borne D de (S_1) est reliée à la borne C de (S_2)

Dipôle (b) : la borne D de (S_1) est reliée à la borne D de (S_2)

On alimente successivement chacun des dipôles (a) et (b) par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 2$ KHz. La mesure du module de l'impédance donne $Z_a = 375\,\Omega$ et $Z_b = 225\,\Omega$. En déduire les valeurs de l'inductance propre L de chaque bobine et de l'inductance mutuelle M des deux bobines (on précisera les orientations choisies).

❑ Exercice 23.6. Régime transitoire dans deux circuits couplés par mutuelle

On reprend l'exemple traité à la méthode 23.4. On suppose pour simplifier $R_1 = R_2 = R$ et $L_1 = L_2 = L$. L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$ et l'on suppose qu'avant fermeture, les intensités étaient nulles.

1. Écrire le système d'équations différentielles couplées vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2. La symétrie de ce système différentiel permet de le découpler en introduisant les fonctions intermédiaires $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$.
   Écrire les équations différentielles vérifiées par $S(t)$ et $D(t)$.
3. Résoudre les équations différentielles précédentes. Déterminer enfin les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Représenter l'allure des courbes de ces intensités.
   (On notera que toutes les inductances imposent la continuité des intensités à la fermeture de l'interrupteur.)

■ Circuit mobile dans un champ stationnaire

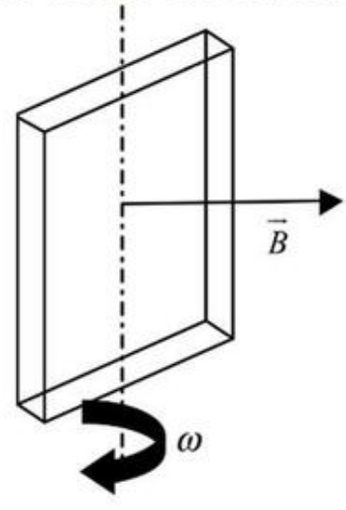
❑ Exercice 23.7. Énergie dissipée dans une bobine plate*

Une bobine plate comportant N spires rectangulaires de surface S tourne à une vitesse angulaire constante ω dans un champ magnétique constant et uniforme d'intensité B. Ses bornes sont reliées à une résistance R, et la résistance interne de la bobine est r. Pour les calculs, on assimilera la bobine plate à N spires confondues. On néglige le phénomène d'auto-induction.

1. Faire un schéma en indiquant notamment les directions du champ magnétique et du vecteur rotation de la bobine, de manière à ce que le courant induit soit le plus élevé possible.
2. Donner (relativement au sens de la rotation) la direction et le sens du couple nécessaire pour maintenir la vitesse angulaire constante de la spire (on le notera $\overrightarrow{M}_{op} = M_{op}\overrightarrow{e_z}$).
3. Donner le schéma électrique équivalent de l'ensemble et expliciter l'expression de la FÉM induite.
4. Établir l'expression du courant induit et en déduire la puissance dissipée par effet Joule.
5. À partir d'un bilan d'énergie, en déduire l'expression du couple $\overrightarrow{M}_{op}$.
6. Retrouver cette expression en calculant le moment des forces de Laplace.

❑ Exercice 23.8. Établissement du courant dans une bobine en rotation

On considère une bobine plate comportant $N = 500$ spires rectangulaires de surface $S = 25\,\text{cm}^2$, d'inductance $L = 54\,\text{mH}$ et de résistance interne $r = 15\,\Omega$. Elle est refermée sur une résistance $R = 100\,\Omega$ et tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 100\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un champ magnétique constant et uniforme d'intensité $B = 300\,\text{mT}$.



On s'intéresse à l'évolution du courant dans la bobine à partir d'un instant initial où il est nul (par exemple, la bobine est connectée à un interrupteur, et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur).

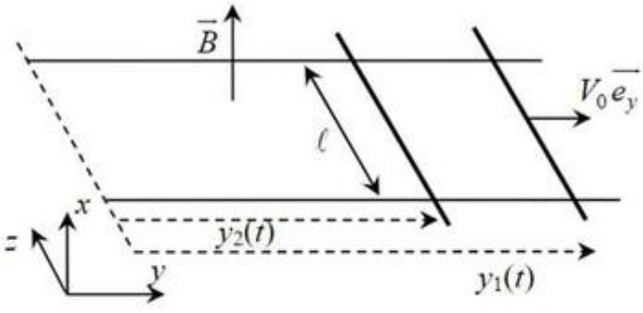
1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant qui circule dans la bobine.

2. Donner l'expression la plus générale de la solution (sans chercher à calculer les constantes), et interpréter les différents termes. Après combien de temps le régime permanent est-il atteint ?

3. Calculer la valeur efficace du courant une fois le régime permanent atteint.

❑ Exercice 23.9. Rails de Laplace à deux barreaux * *

Deux barreaux conducteurs peuvent glisser sans frottement suivant l'axe (Oy) sur des rails de Laplace, formant ainsi un circuit fermé. On note R la résistance électrique de l'ensemble, supposée constante. L'inductance propre du circuit fermé est négligée. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{e_x}$.



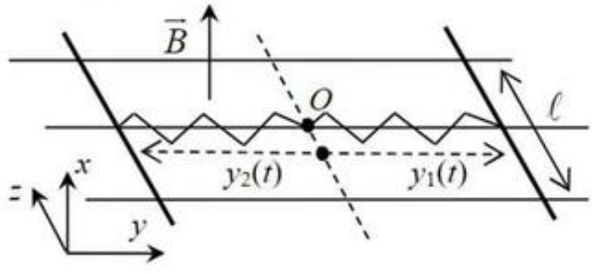
Les deux barreaux coïncident initialement à la cote nulle $y_1(0) = y_2(0) = 0$. À cet instant initial, le barreau (2) est au repos alors que le barreau (1) est animé d'une vitesse uniforme $V_0\vec{e_y}$ imposée par une force extérieure.

1. Expliquer pourquoi le barreau (2) se met en mouvement.

2. Déterminer l'expression de $y_2(t)$. Décrire la situation de régime permanent. L'évolution du système est-elle en accord avec la loi de Lenz ?

3. Écrire sans utiliser ce qui précède un bilan énergétique, en faisant intervenir la puissance de la force extérieure qui agit sur le barreau (1). Retrouver ce bilan à partir de l'écriture des équations électromécaniques appliquées aux barreaux.

❑ Exercice 23.10. Oscillations de deux barreaux de Laplace couplés par induction*



Les deux barreaux identiques à ceux de l'exercice précédent sont liés (séparément) au point O fixe par deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On repère leurs positions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ par rapport au point de fixation commun O. (Noter que $y_2(t)$ est négatif sur le schéma.)

À l'instant $t = 0$, le barreau (1) est écarté vers la droite de sa position d'équilibre, d'une distance a, et lâché sans vitesse initiale. Au même instant, le barreau (2) est immobile à sa position d'équilibre.

1. Écrire les trois équations électromécaniques couplées liant les positions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ ainsi que l'intensité $i(t)$.

2. Éliminer l'intensité $i(t)$ pour obtenir deux équations différentielles couplées vérifiées par $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

3. La symétrie du système différentiel précédent permet de le découpler en introduisant les fonctions intermédiaires $S(t) = y_1(t) + y_2(t)$ et $D(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Écrire les équations différentielles vérifiées par $S(t)$ et $D(t)$.

4. Résoudre l'équation vérifiée par $S(t)$ et discuter rapidement les différents cas pour celle vérifiée par $D(t)$. Dans tous les cas, quelle est la limite de $D(t)$ au bout d'un temps suffisamment long ? Décrire le mouvement des deux barreaux quand ce régime permanent est atteint. La loi de Lenz est-elle vérifiée ?

5. Déterminer l'énergie mécanique du système au départ et au bout d'un temps assez long pour n'avoir que le régime permanent de la question précédente. Qu'est devenue l'énergie mécanique manquante ?

❑ Exercice 23.11. Freinage par induction * *

Les freins à induction (ou ralentisseurs électromagnétiques), utilisés sur divers véhicules, sont avantageux par rapport aux freins mécaniques classiques : étant sans frottement, ils ne s'usent pas et ne produisent pas de particules fines. On présente ici une modélisation simple de leur principe de fonctionnement.

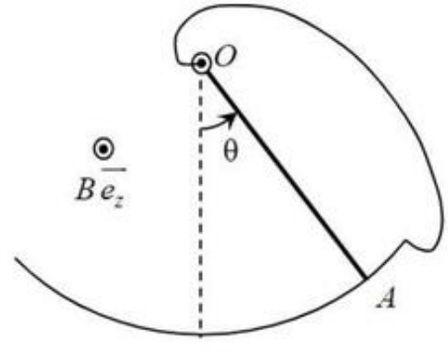


Frein à induction de l'entreprise française Telma, leader mondial du secteur

Une tige métallique OA de masse m, de résistance R et de longueur a oscille sans frottement (liaison pivot parfaite) autour d'un axe fixe (Oz), perpendiculaire au plan de figure.

Le moment d'inertie de la tige autour de (Oz) est $J = \frac{1}{3}ma^2$.

La tige est en contact en A avec un rail métallique, formant ainsi un circuit électrique dont le seul élément résistant est la tige OA. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme $B\overrightarrow{e_z}$ normal au plan du système.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ avec la verticale.

2. On se limite à de petites oscillations autour de la position d'équilibre. Linéariser l'équation différentielle précédente. Déterminer la valeur minimale $B_{\min}$ de B pour que la tige atteigne sa position d'équilibre sans oscillation.

3. Écrire sans calcul l'expression du taux de variation de l'énergie mécanique du pendule $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de l'intensité $i(t)$ qui circule dans la tige. Retrouver la relation précédente à partir des deux équations électromécaniques couplées utilisées à la question **1**.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 23.1. Le courant induit est nul dans plusieurs cas. Il faut se demander si le flux au travers de la spire varie.
Exercice 23.3. Bien réfléchir à la forme du champ magnétique généré par une spire.
Exercice 23.5. Commencer par bien préciser les orientations pour lesquelles on définit l'inductance mutuelle M. Appliquer ensuite la méthode 23.6. Quand on permute les branchements, il suffit d'inverser les orientations pour revenir à la situation précédente. Que devient alors M ?
Exercice 23.9. Orienter le circuit fermé le long duquel circule le courant.
Exercice 23.10. Orienter le circuit fermé le long duquel circule le courant. Pour écrire la force exercée par un ressort, utiliser rigoureusement la formule générale vue au chapitre **10**.
Exercice 23.11. Orienter le circuit fermé le long duquel circule le courant. Attention au fait que, en rotation, la vitesse n'est plus uniforme !

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai

1. Le flux du champ magnétique doit être variable.

2. Le coefficient d'inductance propre est toujours positif.

4. Le flux change de signe, sa dérivée aussi.

5. La FÉM change de signe, l'intensité aussi. Comme l'orientation est opposée, cela correspond à la même situation physique !

7. Un transformateur ne comporte pas de pièces mobiles, donc il ne fournit ni ne reçoit de travail mécanique. Son rôle est d'augmenter ou de diminuer l'amplitude d'une tension.

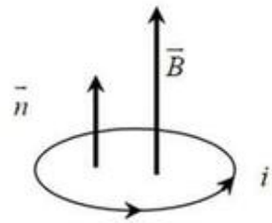
❑ Les erreurs classiques

– L'erreur la plus grave et la plus fréquente est de ne pas choisir une orientation pour les circuits. Toutes les relations sont algébriques et supposent le choix de cette orientation ! Quand le circuit est orienté, le flux est algébrique, la FÉM est algébrique ainsi que l'écriture de la loi des mailles.
– Il faut prendre garde à ne pas compter deux fois les inductances propres par utilisation d'un schéma électrique faux dans lequel on dessinerait à la fois la FÉM induite totale et la bobine symbolisant l'inductance propre.
– Beaucoup d'étudiant(e)s ne pensent pas à introduire un courant électrique si le sujet ne l'indique pas. Il faut se souvenir que si l'on a un circuit en mouvement dans un champ permanent, la FÉM induite sera à l'origine d'un courant si le circuit est fermé. Et ce courant entraîne lui-même l'existence d'une force de Laplace.
– Enfin, dans l'intégration des équations électromécaniques couplées, l'intensité est une fonction inconnue et non pas une constante !

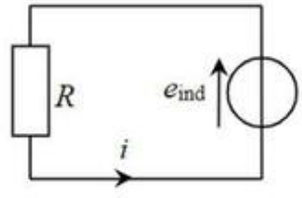
Exercice 23.1

– Cas 1

On retrouve la situation simple vue dans le résumé de cours : avec les orientations indiquées ci-contre, on a $\Phi = B\,S = B_0\,S\cos(\omega t)$, et la loi de Faraday donne $e_{\text{ind}} = \omega B_0\,S\cos(\omega t)$. On peut alors modéliser le comportement électrique de la spire par une source de tension en série avec une résistance, et on obtient $i = \dfrac{e_{\text{ind}}}{R} = \dfrac{\omega B_0\,S\cos(\omega t)}{R}$.



Sens positif e_{ind}



La valeur efficace d'un courant sinusoïdal est égale à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$, donc $\boxed{I_{\text{eff}} = \dfrac{\omega B_0\,S}{R\sqrt{2}}}$.

AN $\boxed{I_{\text{eff}} = 45\,\text{mA}}$ ($\omega = 2\pi f = 315\,\text{rad.s}^{-1}$).

– Cas 2

Le champ magnétique est orthogonal à l'axe de la spire, donc le flux au travers de la spire est nul. Il n'y a donc pas de variation de flux : la FÉM induite est nulle, le courant induit est nul également.

– Cas 3 et 4

Le champ étant uniforme et la spire ne changeant pas d'orientation, le flux ne varie pas quel que soit le mouvement. Le courant induit est nul.

> *On peut retenir que d'une manière générale un mouvement de **translation** d'un circuit dans un champ magnétique **uniforme** n'engendre pas de phénomène d'induction.*

– Cas 5

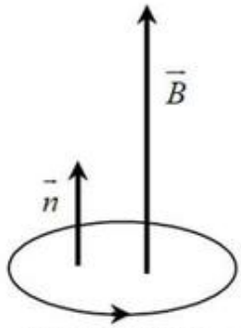
Là encore il n'y a aucune variation du flux au travers de la spire et donc le courant induit le long de la spire est nul.

– Cas 6

On retrouve la situation classique d'une spire en rotation dans un champ uniforme. Des calculs analogues à ceux développés dans le résumé de cours (que la spire soit circulaire ou rectangulaire, ou de toute autre forme pourvu qu'elle soit plane, n'a aucune importance) conduisent à $e_{\text{ind}} = B\,S\,\omega\sin(\omega t)$, où ω est la vitesse angulaire. On conclut ensuite comme dans le cas 1, et on obtient $\boxed{I_{\text{eff}} = \dfrac{\omega B\,S}{R\sqrt{2}}}$. L'application numérique donne $\boxed{I_{\text{eff}} = 0,71\,\text{mA}}$.

Exercice 23.2

1. On note $B = B_0 \cos(\omega t)$ et le flux est égal à $\Phi = B\,S = B_0\,S\cos(\omega t)$, en utilisant la loi de Faraday on obtient $e_{\text{ind}} = \omega B_0\,S\sin(\omega t)$, c'est-à-dire que l'amplitude est $\boxed{E_{\text{ind}} = \omega B_0\,S}$. AN $\boxed{E_{\text{ind}} = 0{,}12\,\text{V}}$.



Sens positif e_{ind}

2. Le circuit électrique équivalent est simplement une source de tension e_{ind} aux bornes d'une résistance. On en déduit que le courant (orienté dans le même sens que e_{ind}) est $i = \dfrac{e_{\text{ind}}}{r}$, d'où son amplitude : $\boxed{I_{\text{m}} = \dfrac{\omega B_0\,S}{r}}$. AN $\boxed{I_{\text{m}} = 0{,}12\,\text{A}}$.

3. Le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux (loi de Lenz), de ce fait en négligeant le champ magnétique qu'il crée on surestime la variation de flux, donc la FÉM induite et donc le courant induit.

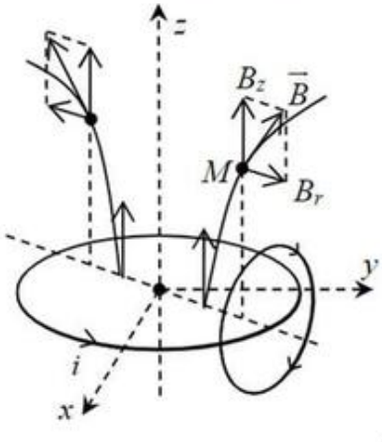
4. L'application numérique donne $\boxed{L = 0{,}39\,\mu\text{H}}$.

5. Le flux associé à l'auto-induction est donné par $\Phi' = Li$ et la FÉM correspondante est donc $e'_{\text{ind}} = -\dfrac{\text{d}\Phi'}{\text{d}t} = -L\dfrac{\text{d}i}{\text{d}t}$. Comme i est sinusoïdal, on en déduit $\boxed{E'_{\text{ind}} = L\,\omega\,I_{\text{m}}}$. L'application numérique donne $\boxed{E'_{\text{ind}} = 15\,\mu\text{V}}$, l'auto-induction est ici effectivement négligeable.

Exercice 23.3

Pour bien aborder cet exercice, il faut avoir une vision claire du champ magnétique créé par une spire. Les lignes de champ sont des courbes fermées entourant la spire. Une ligne passant par un point M est contenue dans le plan passant par M et contenant l'axe de la spire.

En coordonnées cylindriques, on a : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{e_r} + B_z(r,z)\vec{e_z}$. Les symétries, suggérées dans le schéma ci-dessous, imposent : $B_z(r,-z) = B_z(r,z)$.



Avec les choix d'orientations de la figure, la composante $B_z(r,\,z)$ est du même signe que l'intensité i.

– Disposition α

Pour calculer le flux du champ magnétique à travers une spire, on peut prendre comme surface fermée s'appuyant sur la spire le disque plan qu'elle limite. Seul intervient alors dans le calcul du flux la composante de $\vec{B}$ normale à ce disque.

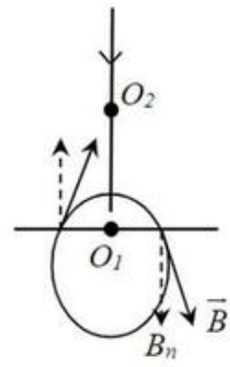
Dans la disposition α, on voit que si i_1 est positif, B_{z1} est positif et donc le flux $\Phi_{12} = \iint_{\text{disque }\Sigma_2} \vec{B_1}\cdot\text{d}S_2\vec{e_z} = \iint_{\text{disque }\Sigma_2} B_{1z}\,\text{d}S_2$ est positif. On en déduit que $\boxed{M_\alpha = M_{12\alpha} \geq 0}$.

– Dans la disposition β, on inverse une des deux orientations et donc on change le signe du coefficient de mutuelle $\boxed{M_\beta \leq 0}$.

– Dans la situation γ, on peut commencer par chercher le flux Φ_{12}. Comme la spire (2) est entièrement contenue dans un plan contenant l'axe de la spire (1), le champ $\overline{B_1}$ est entièrement dans ce plan et donc le produit scalaire $\overline{B_1} \cdot \mathrm{d}\overline{S_2}$ est nul. Le flux total Φ_{12} est nul, comme le coefficient d'inductance mutuelle : $\boxed{M_\gamma = 0}$.

On peut changer de point de vue et chercher le flux Φ_{21}. Le schéma ci-contre, en coupe, montre pourquoi ce flux est nul.

Une ligne de champ qui traverse la spire (2) coupe le disque qui s'appuie sur la spire (1) en deux points symétriques pour lesquels la composante utile, normale au disque, change se signe.



Exercice 23.4

1. Le champ magnétique créé en O_2 par la bobine 1 s'écrit : $\overline{B_1}(O_2) = \dfrac{\mu_0 i_1}{2} \dfrac{R_1^2}{\left(R_1^2 + O_1O_2^2\right)^{3/2}} \overline{e_z}$.

Avec l'approximation $\overline{B_1}(M) \approx \overline{B_1}(O_2)$ pour un point M du disque qui s'appuie sur C_2, le flux de $\overline{B_1}$ à travers ce disque orienté suivant $+\overline{e_z}$ sera :

$$\Phi_{12} \approx \overline{B_1}(O_2) \cdot \pi R_2^2 \overline{e_z} = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{\left(R_1^2 + O_1O_2^2\right)^{3/2}} \pi R_2^2 .$$

On en déduit immédiatement le coefficient d'inductance : $\boxed{M_{12} \approx \dfrac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2\left(R_1^2 + O_1O_2^2\right)^{3/2}}}$.

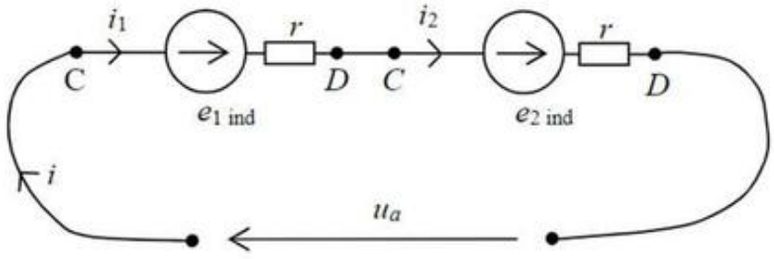
2. De la même manière, on obtient : $\boxed{M_{12} \approx \dfrac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2\left(R_2^2 + O_1O_2^2\right)^{3/2}}}$.

3. Dans la mesure où $O_1O_2 \gg R_1$ et $O_1O_2 \gg R_2$, les dénominateurs des deux expressions sont quasiment égaux (à la valeur $2O_1O_2^3$) et on a bien $M_{12} \approx M_{21} \approx \dfrac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2O_1O_2^3}$.

On ne retrouve pas exactement l'égalité, c'est lié à l'approximation faite dans le calcul. Cet exemple montre que le calcul sans approximation du coefficient d'inductance mutuelle de deux spires de même axe est délicat. Il nécessite en effet d'utiliser le champ magnétique d'une spire en dehors de son axe.

Exercice 23.5

Notons M l'inductance mutuelle algébrique des deux solénoïdes quand les intensités i_1 et i_2 qui circulent sont comptées positivement de C vers D. Le circuit électrique équivalent au dipôle (a) sera le suivant :



avec les relations : $i_1 = i_2 = i$ et $e_{1\,\text{ind}} = -L\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ ainsi que $e_{2\,\text{ind}} = -L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.

Finalement l'équation électrique est : $u = -e_{1\,\text{ind}} + r\,i_1 - e_{2\,\text{ind}} + r\,i_2$.

En remplaçant, avec $i_1 = i_2 = i$, il vient :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri = 2(L+M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2ri\,.$$

On voit que l'association des deux bobines dans la configuration (a) est équivalente à une unique bobine d'inductance $L_{\text{éq}\,a} = 2(L+M)$ et de résistance $r_{\text{éq}\,a} = 2r$. Pour le dipôle (b), on se ramène à la configuration du dipôle (a) si l'on change l'orientation du deuxième bobinage. Cela conduit simplement à changer le signe de l'inductance mutuelle qui devient $-M$. On en déduit que l'association des deux bobines dans la configuration (b) est équivalente à une unique bobine d'inductance $L_{\text{éq}\,b} = 2(L-M)$ et de résistance $r_{\text{éq}\,b} = 2r$.

En régime sinusoïdal forcé, on passe aux impédances complexes : $\underline{Z_a} = 2(L+M)\,j\omega + 2r$ et $\underline{Z_b} = 2(L-M)\,j\omega + 2r$.

En passant aux modules : $\left|\underline{Z_a}\right|^2 = Z_a^2 = \left(\left(2(L+M)\omega\right)^2 + \left(2r\right)^2\right) = 4(L+M)^2\omega^2 + 4r^2$, et $\left|\underline{Z_b}\right|^2 = Z_b^2 = 4(L-M)^2\omega^2 + 4r^2$. On en déduit $L+M = \sqrt{\dfrac{Z_a^2 - 4r^2}{4\omega^2}}$ et $L-M = \sqrt{\dfrac{Z_b^2 - 4r^2}{4\omega^2}}$.

En prenant la racine, on n'a pas à s'inquiéter du signe car on sait que $L+M$ est toujours positif, quel que soit le signe de M. On a en effet le résultat général $\left|\dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}\right| = \left|\dfrac{M}{L}\right| \leq 1$ ou encore, comme L est toujours positive : $|M| \leq L$.

Finalement : $\boxed{L = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Z_a^2 - 4r^2}{4\omega^2}} + \sqrt{\frac{Z_b^2 - 4r^2}{4\omega^2}}\right)}$ et $\boxed{L = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Z_a^2 - 4r^2}{4\omega^2}} - \sqrt{\frac{Z_b^2 - 4r^2}{4\omega^2}}\right)}$.

AN $\boxed{L = 11{,}9\ \text{mH}}$ et $\boxed{M = 2{,}99\ \text{mH}}$.

Corrigé

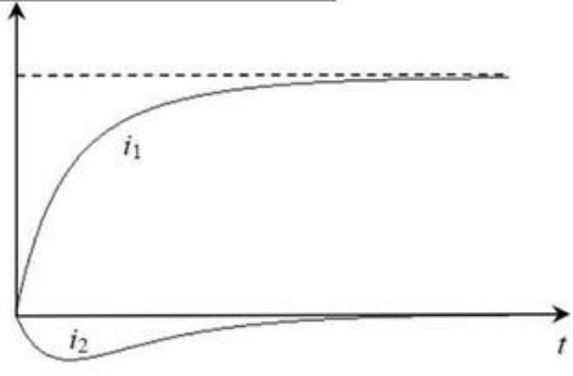
Exercice 23.6

1. Le système d'équation à résoudre, après fermeture de l'interrupteur, est donné par la loi des mailles : $\boxed{E = Ri_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$ et $\boxed{0 = Ri_2 + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$.

2. C'est un système d'équations différentielles couplées. La symétrie du système permet de le découpler simplement en introduisant les fonctions $S = i_1 + i_2$ et $D = i_1 - i_2$. En faisant la somme et la différence des équations différentielles, on trouve :

$$\boxed{E = RS + (L+M)\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}} \text{ et } \boxed{E = RD + (L-M)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}}.$$

3. Les solutions sont : $S(t) = \frac{E}{R} + A\exp(-t/\tau_1)$ et $D(t) = \frac{E}{R} + B\exp(-t/\tau_2)$ où A et B sont des constantes d'intégration, et $\tau_1 = \frac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \frac{L-M}{R}$ sont des temps caractéristiques de variation des courants. Ces deux temps sont bien positifs d'après la remarque de l'exercice précédent. La continuité des intensités i_1 et i_2 entraîne celle de S et D. On doit donc avoir immédiatement après fermeture de l'interrupteur $S(0^+) = 0$ et $D(0^+) = 0$ ce qui fixe les constantes : $S(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau_1))$ et $D(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau_2))$. On en tire ainsi les expressions des intensités : $\boxed{i_1(t) = \frac{1}{2}(S+D) = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\exp(-t/\tau_1) - \frac{1}{2}\exp(-t/\tau_2)\right)}$ et $\boxed{i_2(t) = \frac{1}{2}(S-D) = \frac{E}{2R}(-\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2))}$.



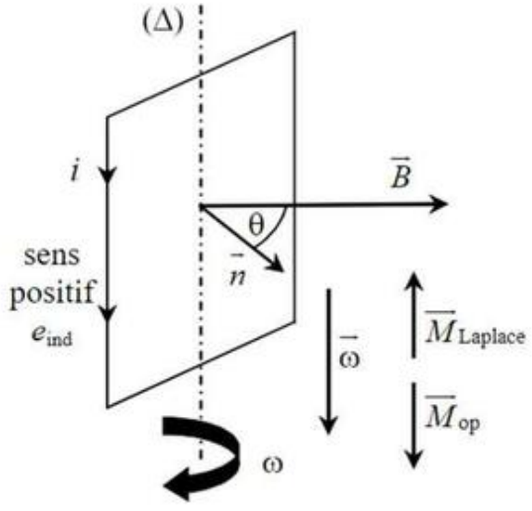
Dans le cas $M \geq 0$, on a $\tau_1 \geq \tau_2$. Le terme en $\exp(-t/\tau_1)$ est donc toujours supérieur à celui en $\exp(-t/\tau_2)$. L'intensité i_2 est donc négative ce qui est conforme à la loi de Lenz : le flux correspondant $\Phi_{21} = Mi_2$ s'oppose au flux $\Phi_{12} = Mi_1$. Dans le cas $M \leq 0$, l'intensité i_2 reste au contraire positive. Une fois le régime permanent atteint, le couplage disparaît.

Exercice 23.7

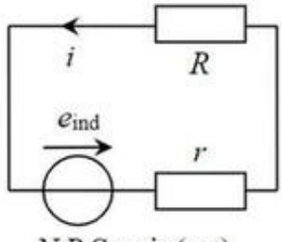
1. Il faut que le flux du champ magnétique au travers des spires soit le plus élevé possible d'où, par exemple, la configuration suivante.

2. D'après la loi de Lenz, le courant induit tend à s'opposer à la cause qui lui donne naissance, c'est-à-dire ici la rotation de la bobine. Le moment des forces de Laplace est donc de sens opposé au vecteur rotation, et le couple qui permet de maintenir la rotation est dans le même sens que le vecteur rotation.

3. On néglige l'auto-induction dans la bobine, on la modélise donc par une source de tension e_{ind} associée au mouvement de rotation en série avec sa résistance interne r.



On calcule e_{ind} avec la loi de Faraday : avec les notations du schéma, $e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ et $\Phi = N\vec{B}\cdot\vec{n}S = NBS\cos\theta$, d'où $e_{\text{ind}} = -NBS\dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}$ soit $\boxed{e_{\text{ind}} = NBS\,\omega\sin(\omega t)}$ puisque, ω étant constante, $\theta = \omega t$.



4. Le schéma électrique équivalent permet d'obtenir $i = \dfrac{e_{\text{ind}}}{r+R}$, et donc $i = \dfrac{NBS\,\omega\sin(\omega t)}{r+R}$.

La puissance dissipée par effet Joule dans l'ensemble (bobine et résistance R) est donnée par $P_{\text{J}} = (r+R)i^2$, soit $\boxed{P_{\text{J}} = \dfrac{\left(NBS\,\omega\sin(\omega t)\right)^2}{r+R}}$.

5. D'un point de vue mécanique la puissance du couple P_{op} est égale, en valeur absolue, à celle des forces de Laplace (puisque, la vitesse angulaire étant constante, $\vec{M}_{\text{op}} + \vec{M}_{\text{Laplace}} = \vec{0}$). D'un point de vue électrique, toujours en valeur absolue, la puissance associée à la FÉM est égale à la puissance dissipée par effet Joule. Étant donné que d'une manière générale $\left|P_{\text{Laplace}}\right| = \left|P_{\text{fém}}\right|$, on en déduit que $P_{\text{op}} = P_{\text{J}}$. Enfin, $P_{\text{op}} = \vec{M}_{\text{op}}\cdot\vec{\omega} = \omega M_{\text{op}}$.

On en déduit que $\boxed{M_{\text{op}} = \dfrac{\omega\left(NBS\sin(\omega t)\right)^2}{r+R}}$.

Ce moment est algébrique, ce n'est pas la norme de $\vec{M}_{\text{op}}$ mais sa projection sur la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\vec{\omega}}{\omega}$: $\vec{M}_{\text{op}} = M_{\text{op}}\vec{u}$.

6. On peut assimiler la bobine à un moment magnétique $\vec{m} = NiS\vec{n}$ (l'orientation de $\vec{n}$ est cohérente avec celle du courant) et le moment des forces de Laplace est donné par

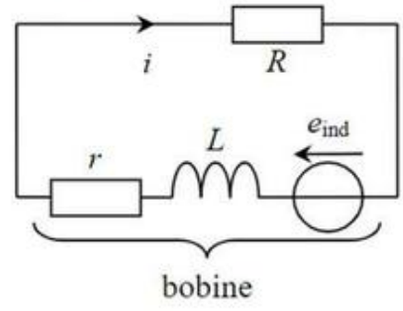
Corrigé

$\overrightarrow{M}_{\text{Laplace}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$, d'où $\overrightarrow{M}_{\text{Laplace}} = NiS\vec{n} \wedge \overrightarrow{B} = NiSB\sin\theta\left(-\vec{u}\right)$ et comme $\overrightarrow{M}_{\text{op}}$ en est l'opposé, on a finalement $\overrightarrow{M}_{\text{op}} = NiSB\sin\theta\,\vec{u}$, donc $M_{\text{op}} = NiSB\sin\theta$ et on retrouve le résultat de la question précédente en remplaçant i par son expression.

Exercice 23.8

On peut reprendre les notations de l'exercice précédent, la situation étant très proche (la principale différence étant que l'on prend ici en compte le phénomène d'auto-induction).

1. Pour modéliser la bobine, on associe en série la résistance interne, une inductance pure et la FÉM induite du fait de la rotation notée e_{ind} (on aurait pu aussi ne pas faire figurer l'inductance et prendre en compte dans e_{ind} les deux contributions, celle associée à la rotation et celle associée à l'auto-induction). Le calcul de e_{ind} a déjà été fait plusieurs fois (voir résumé de cours ou exercice précédent) et donne : $e_{\text{ind}} = NBS\omega\sin(\omega t)$. Loi des mailles :



$e_{\text{ind}} = (r+R)i + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. L'équation différentielle vérifiée par i est donc, en posant $\tau = \dfrac{L}{r+R}$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}i = \dfrac{NBS\omega}{L}\sin(\omega t)}$.

2. La solution la plus générale est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière sinusoïdale : $\boxed{i = \lambda e^{-t/\tau} + I_{\text{m}}\cos(\omega t + \varphi)}$. La solution homogène correspond à un régime transitoire, qui tend vers 0, alors que la solution particulière correspond au régime permanent sinusoïdal (tout cela revient à considérer la réponse d'un circuit *RL* à une excitation sinusoïdale). Le régime permanent est atteint au bout de quelques τ, avec $\boxed{\tau = 0{,}47\,\text{ms}}$.

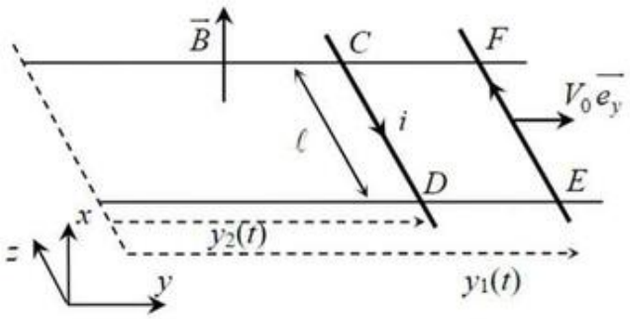
3. Il faut calculer $I_{\text{eff}} = \dfrac{I_{\text{m}}}{\sqrt{2}}$, et pour cela on utilise la notation complexe en posant $i_{\text{p}}(t) = I_{\text{m}}\cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\left[\underline{i}_{\text{p}}(t)\right]$ avec $\underline{i}_{\text{p}}(t) = I_{\text{m}}e^{j\omega t}e^{j\varphi}$. L'équation vérifiée par $\underline{i}_{\text{p}}$ est $\dfrac{\mathrm{d}\underline{i}_{\text{p}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\underline{i}_{\text{p}} = \dfrac{NBS\omega}{L}(-j)e^{j\omega t}$ soit $I_{\text{m}}e^{j\omega t}e^{j\varphi}\left(j\omega + \dfrac{1}{\tau}\right) = \dfrac{NBS\omega}{L}(-j)e^{j\omega t}$. L'égalité des modules donne $I_{\text{m}} = \dfrac{NBS\omega}{L\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}}$ et finalement $\boxed{I_{\text{eff}} = \dfrac{NBS\omega}{L\sqrt{2\left(\omega^2 + (1/\tau)^2\right)}}}$. AN $\boxed{I_{\text{eff}} = 0{,}23\,\text{A}}$.

Exercice 23.9

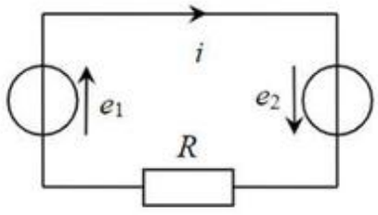
1. On a un conducteur en mouvement dans un champ magnétique permanent. Il est le siège d'une FÉM induite qui génère un courant électrique dans le circuit fermé limité par les deux barreaux. Le barreau (2) parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique est soumis à la force de Laplace qui le met en mouvement.

2. Il faut obtenir les deux équations électromécaniques couplées pour le barreau (2).

– Pour trouver l'équation électrique, il faut obtenir le schéma électrique équivalent. Chaque barreau est le siège d'une FÉM induite. Comme toujours, la première chose à faire est d'orienter le circuit, par exemple comme indiqué sur le schéma ci-contre.



On calcule la FÉM induite e_1+e_2 sur tout le circuit fermé en utilisant la loi de Faraday. Comme le champ magnétique est uniforme, le flux à travers une surface orientée qui s'appuie sur le circuit fermé s'écrit encore $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}$ avec ici $\vec{S}=(y_1-y_2)\ell\vec{e_x}$, soit $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\vec{e_x}\cdot(y_1-y_2)\ell\vec{e_x}=B\ell(y_1-y_2)$



d'où $e=e_1+e_2=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-B\ell\left(\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\right)=-B\ell\left(V_0-\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\right)$. L'application de la loi des mailles donne finalement : $\boxed{-B\ell\left(V_0-\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\right)=Ri}$.

– L'équation mécanique s'obtient en projetant sur (Oy) le théorème de la résultante cinétique appliqué au barreau (2). La résultante des forces de Laplace sur ce barreau s'écrit :

$\vec{R_2}=\displaystyle\int_C^D i\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}=\int_\ell^0 i\,\mathrm{d}z\,\vec{e_z}\wedge B\vec{e_x}=-i\ell B\vec{e_y}$. Ainsi, en projection sur (Oy), on obtient l'autre équation électromécanique : $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}t^2}=-i\ell B}$.

– Il reste à éliminer l'intensité entre ces deux équations couplées, ce qui ici est immédiat :

$i=\dfrac{1}{R}\left(-V_0\ell B+\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\ell B\right)$ donc $m\dfrac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}t^2}=-\ell B\dfrac{1}{R}\left(-V_0\ell B+\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\ell B\right)=-\dfrac{B^2\ell^2}{R}\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}+\dfrac{B^2\ell^2}{R}V_0$.

On introduit la vitesse $v_2=\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}$ du barreau (2) ce qui conduit à : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v_2}{\tau}=\dfrac{V_0}{\tau}}$.

Avec le temps caractéristique $\boxed{\tau=\dfrac{B^2\ell^2}{mR}}$ qui a sa forme habituelle, invariante dans un changement de signe de B. Comme la vitesse initiale du barreau (2) est nulle, la solution est immédiate : $\boxed{v_2(t)=V_0\left(1-\exp(-t/\tau)\right)}$. Puis, par une intégration supplémentaire, en prenant en compte la condition initiale $y_2(0)=0$:

$y_2(t)=\displaystyle\int_0^t v_2(u)\,\mathrm{d}u=V_0\left(t+\tau\left(\exp(-t/\tau)-1\right)\right)$, soit $\boxed{y_2(t)=V_0\left(t-\tau\right)+V_0\tau\exp(-t/\tau)}$.

Le terme en exponentielle traduit un régime transitoire de durée typique τ. Au bout d'un temps très supérieur à cette durée, il reste : $y_2(t)\approx V_0\left(t-\tau\right)$, ce qui signifie que le barreau (2) avance lui aussi à la vitesse V_0.

Corrigé

Lors de la phase transitoire de mise en vitesse il a pris un retard spatial $V_0\tau$ sur le barreau (1) (l'ordre de grandeur de ce retard était aisément prévisible à partir d'arguments dimensionnels). En ce qui concerne le barreau (2), les effets des courants induits ne sont pas des effets de freinage. La loi de Lenz est cependant vérifiée car le système évolue dans le sens qui annule la variation de flux associée aux vitesses différentes des deux barreaux.

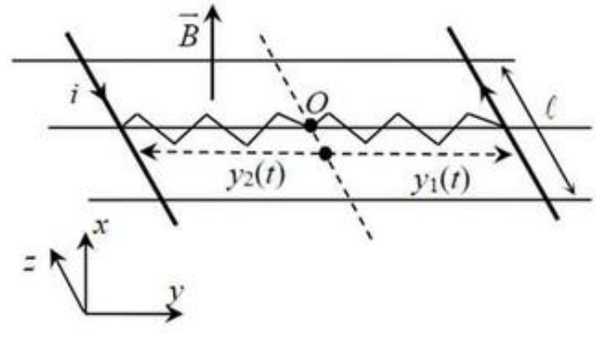
3. La puissance $P_{op} = FV_0$ sert à modifier l'énergie cinétique du barreau (2) et à produire de l'effet Joule. Le bilan global doit donc prendre la forme suivante : $\boxed{P_{op} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) + Ri^2}$.

Pour retrouver ce bilan, il faut faire intervenir le théorème de la résultante cinétique appliquée au barreau (1). La résultante des forces de Laplace sur ce barreau s'écrit :

$\overrightarrow{R_1} = \int_E^F i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_0^\ell i\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z} \wedge B\overrightarrow{e_x} = +i\ell B\overrightarrow{e_y}$. Comme le barreau est en mouvement rectiligne uniforme, l'opérateur exerce une force opposée : $\overrightarrow{F}_{op} = -i\ell B\overrightarrow{e_y}$ et $P_{op} = -i\ell BV_0$. L'équation électrique $-V_0\ell B + \frac{dy_2}{dt}\ell B = Ri$ permet d'exprimer V_0 : $V_0 = V_2 - Ri/\ell B$. Que l'on substitue dans $P_{op} = -i\ell BV_0$: $P_{op} = -i\ell\left(V_2 - Ri/\ell B\right) = Ri^2 - i\ell BV_2$. On a aussi $m\frac{dV_2}{dt} = -i\ell B$ ce qui donne finalement : $P_{op} = -i\ell B\left(V_2 - Ri/\ell B\right) = Ri^2 + m\frac{dV_2}{dt}V_2 = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV_2^2\right)$, qui est bien le bilan attendu.

Exercice 23.10

1. Si l'on oriente le circuit comme dans l'exercice précédent, les FÉM induites s'expriment de la même manière et l'équation électrique est inchangée à condition de remplacer la vitesse V_0 par la vitesse $V_1 = \frac{dy_1}{dt}$ du barreau (1) : $\boxed{-\frac{dy_1}{dt}\ell B + \frac{dy_2}{dt}\ell B = Ri}$.



Pour obtenir les équations mécaniques, il faut encore appliquer à chaque tige le théorème de la résultante cinétique puis le projeter suivant (Oy), en prenant en compte les actions des ressorts en plus des forces de Laplace.

Sur le barreau (1), la résultante des forces de Laplace est encore $\overrightarrow{R_1} = +i\ell B\overrightarrow{e_y}$ et l'action du ressort est traduite par la force $\overrightarrow{F}_{1\,ressort} = -k\left(y_1 - \ell_0\right)\overrightarrow{e_y}$. On obtient donc : $\boxed{m\frac{dV_1}{dt} = -k\left(y_1 - \ell_0\right) + i\ell B}$.

Sur le barreau (2), la résultante des forces de Laplace est $\overrightarrow{R_2} = -i\ell B\overrightarrow{e_y}$ et l'action du ressort est traduite par la force $\overrightarrow{F_{2\,\text{ressort}}} = -k(-y_2 - \ell_0)\overrightarrow{e_y}$. Donc $\boxed{m\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = +k(-y_2 - \ell_0) - i\ell B}$.

> *L'allongement du ressort est bien $\Delta l = -y_2 - l_0$ puisque y_2 est négatif sur le schéma. D'autre part, quand le ressort est allongé, la force qu'il exerce est visiblement dirigée suivant les y positifs. La difficulté provient du choix peu intuitif (mais formateur !) des abscisses y_1 et y_2.*

2. On élimine l'intensité i dans les deux équations mécaniques en utilisant l'équation électrique $i = \frac{B\ell}{R}(V_2 - V_1)$:

$\boxed{m\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = -k(y_1 - \ell_0) + \frac{B^2\ell^2}{R}(V_2 - V_1)}$ et $\boxed{m\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = +k(-y_2 - \ell_0) - \frac{B^2\ell^2}{R}(V_2 - V_1)}$.

3. On fait la somme et la différence des deux équations précédentes :

$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2} = -kS}$ et $\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}t^2} = -kD - \frac{B^2\ell^2}{R}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}}$.

4. La solution de l'équation pour $S(t)$ est de la forme : $S(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Les constantes d'intégration A et B s'obtiennent en utilisant les conditions initiales $S(0) = a$ et $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(0) = 0$, ce qui conduit à $B = 0$ et $A = a$: $\boxed{S(t) = a\cos(\omega t)}$. L'équation vérifiée par $D(t)$ est une équation du second ordre amortie de la forme : $\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\omega_0\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2D = 0$.

La nature précise de la solution dépend du signe du discriminant réduit $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0{}^2$.

Si $\Delta' < 0$, le régime est pseudo-périodique amorti. Si $\Delta' = 0$ (cas théorique), le régime est critique. Si $\Delta' > 0$, le régime est apériodique.

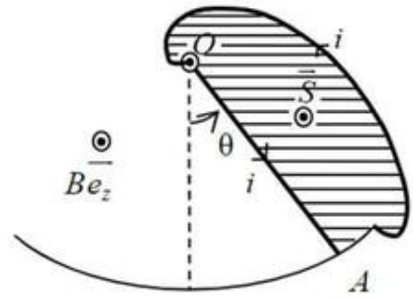
Dans tous les cas, $D(t)$ tend vers 0. Au bout d'un temps suffisant, on a donc $y_1(t) \approx y_2(t)$ et comme $S(t) = y_1(t) + y_2(t) = a\cos(\omega t)$, il vient : $\boxed{y_1(t) \approx y_2(t) \approx \frac{a}{2}\cos(\omega t)}$. En régime permanent, les deux barreaux ont des mouvements identiques, si bien que le flux à travers le circuit ne varie plus : la loi de Lenz est bien vérifiée !

5. Pour un système masse-ressort d'amplitude maximale x_0, l'énergie mécanique est $E_\text{m} = \frac{1}{2}kx_0{}^2$. L'énergie mécanique initiale est donc : $\boxed{E_{\text{m initiale}} = \frac{1}{2}ka^2}$. L'énergie mécanique une fois le régime permanent atteint est : $E_{\text{m finale}} = \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2$ soit $\boxed{E_{\text{m finale}} = \frac{1}{4}ka^2}$.

L'énergie mécanique manquante $E_{\text{m finale}} - E_{\text{m initiale}} = \frac{1}{4}ka^2 - \frac{1}{2}ka^2 = -\frac{1}{4}ka^2$ a été transformée par effet Joule, dans la résistance R, en énergie interne de la résistance et en transfert thermique fourni à l'extérieur.

Exercice 23.11

1. Comme toujours, il faut commencer par introduire l'intensité i qui circule et choisir un sens positif. On choisit (par exemple !) le sens positif indiqué sur le schéma ci-après. Pour obtenir l'équation électrique, il faut calculer la FÉM induite. On utilise la loi de Faraday.



Avec le sens positif choisi, la normale à la surface plane qui s'appuie sur le circuit est $\vec{n}=\vec{e_z}$ et le flux du champ magnétique s'écrit, comme $\vec{B}$ est uniforme : $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}$ avec $\vec{S}=S\vec{e_z}$ si S est l'aire hachurée sur le schéma.

En notant S_0 est l'aire limitée par l'axe vertical en pointillé et le circuit fixe, on a algébriquement : $S=S_0-\dfrac{1}{2}a^2\theta$, car $\dfrac{1}{2}a^2\theta$ est l'aire limité par le secteur circulaire d'angle θ.

Le flux est finalement : $\Phi=B\left(S_0-\dfrac{1}{2}a^2\theta\right)$. La loi de Faraday conduit à : $e_{\text{ind}}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=+\dfrac{1}{2}Ba^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Le schéma électrique équivalent est du même type que celui des exercices précédents. Il conduit à l'équation électrique habituelle : $e_{\text{ind}}=+\dfrac{1}{2}Ba^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=Ri$.

Il reste à obtenir l'autre équation électromécanique. Pour cela, on applique le théorème du moment cinétique en projection suivant (Oz). Comme la liaison est pivot parfaite, le moment en projection suivant (Oz) des actions de liaison est nul. Il en va de même pour les actions associées au contact glissant en A, supposé ponctuel et sans frottement. Les seuls moments à prendre en compte sont ceux du poids et des forces de Laplace.

Pour le poids, on sait qu'il est équivalent à une force ponctuelle unique appliquée au centre de gravité : $\overrightarrow{M_{O\,\text{poids}}}=\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{g}=\dfrac{a}{2}\vec{e_r}\wedge mg(\cos(\theta)\,\vec{e_r}-\sin(\theta)\,\vec{e_\theta})=-mg\dfrac{a}{2}\sin(\theta)\,\vec{e_z}$.

En projection suivant (Oz) : $M_{(Oz)\text{poids}}=-mg\dfrac{a}{2}\sin\theta$. Le moment des forces de Laplace nécessite a priori de revenir à la définition du moment d'un système de force : $\overrightarrow{M_{O\,\text{Laplace}}}=\displaystyle\int_O^A\overrightarrow{OP}\wedge\mathrm{d}\vec{f}(P)$ avec $\mathrm{d}\vec{f}=i\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}$.

En coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}\vec{f}=i\,\mathrm{d}r\,\vec{e_r}\wedge B\,\vec{e_z}=-iB\,\mathrm{d}r\,\vec{e_\theta}$ et donc :

$$\overrightarrow{M_{O\,\text{Laplace}}}=\int_0^a r\vec{e_r}\wedge\left(-iB\,\mathrm{d}r\,\vec{e_\theta}\right)=-iB\vec{e_z}\int_0^a r\,\mathrm{d}r=-iB\frac{a^2}{2}\vec{e_z}.$$

Et en projection suivant (Oz) : $M_{(Oz)\text{Laplace}}=-iB\dfrac{a^2}{2}$.

On remarque que le moment précédent aurait pu s'obtenir en considérant que l'on a affaire à une force ponctuelle égale à la résultante des forces de Laplace $\overline{R}_{\text{Laplace}} = \int_O^A \mathrm{d}\overline{f} = -i\,l\,B\,\overline{e_\theta}$, *appliquée au centre de gravité de la tige. C'était prévisible car la force de Laplace est ici répartie uniformément le long de la tige. Mais ce résultat n'est pas général. Il est donc prudent de savoir calculer le moment des forces à partir de sa définition !*

Le théorème du moment cinétique en projection suivant (Oz) s'écrit alors :

$J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = M_{(Oz)} = -mg\dfrac{a}{2}\sin\theta - iB\dfrac{a^2}{2}$. En remplaçant l'expression de i obtenue avec l'équation électrique, $i = +\dfrac{1}{2R}Ba^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, il vient finalement : $\boxed{J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\dfrac{a}{2}\sin\theta - \dfrac{B^2a^4}{4R}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$.

On voit que les courants induits se traduisent par un terme de freinage proportionnel à la vitesse angulaire. C'est un cas classique de freinage par induction.

2. Si l'on se limite à de petites oscillations autour de $\theta = 0$, on peut linéariser le sinus en $\sin(\theta) \approx \theta$ et on est conduit à l'équation linéaire du second ordre : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{B^2a^4}{4RJ}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \dfrac{mga}{2J}\theta = 0}$.

La forme des solutions dépend du signe du discriminant $\Delta = \left(\dfrac{B^2a^4}{4RJ}\right)^2 - 4\dfrac{mga}{2J}$. La limite entre le régime oscillant et le régime apériodique correspond au régime (apériodique) critique, pour lequel on a un retour le plus rapide possible sans oscillation : $\Delta = \left(\dfrac{B_{\min}^2a^4}{4RJ}\right)^2 - 4\dfrac{mga}{2J} = 0$, ce qui donne la valeur $\boxed{B_{\min} = \sqrt{\dfrac{8R}{a^4}\sqrt{\dfrac{mgaJ}{2}}}}$.

3. L'énergie mécanique du pendule est dissipée par l'effet Joule (c'est-à-dire transformée en transfert thermique et en énergie interne). On doit donc avoir : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -Ri^2}$. L'expression de l'énergie mécanique est $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$ avec $E_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}J\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$ et $E_{\mathrm{p}} = mg\dfrac{a}{2}(1-\cos\theta)$, en prenant l'origine de l'énergie potentielle en $\theta = 0$, donc $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}J\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mg\dfrac{a}{2}(1-\cos\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = J\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\dfrac{a}{2}\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. L'équation qui traduit le théorème du moment cinétique en projection suivant (Oz) multipliée par $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ conduit à : $J\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mg\dfrac{a}{2}\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -iB\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Et l'équation électrique $\dfrac{1}{2}Ba^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = Ri$ donne immédiatement le résultat attendu.

Corrigé

Chapitre 24

Introduction à la physique quantique

UN SCIENTIFIQUE



Historien de formation, **Louis de Broglie** (1892-1987) se tourne vers la physique au début des années 1910, sous l'impulsion de son frère Maurice qui dirige à Paris un laboratoire de rayons X. Il étudie la mobilité des ions et l'électrisation des particules fines de matière. Il révolutionne la perception de la matière en affirmant que « *non seulement les photons de lumière mais toutes les autres particules de la matière, comme les électrons, sont accompagnés d'une onde.* »

Un peu d'histoire

La description adéquate du monde microscopique date seulement du tout début du XX^e siècle. Max Planck, lors de son travail sur les corps noirs, puis Albert Einstein, avec son interprétation de l'effet photoélectrique, ont montré la nature corpusculaire de la lumière en mettant en évidence des « grains d'énergie », appelés plus tard *photons* par Gilbert Lewis. Louis de Broglie a mis en évidence en 1923 la double nature de la matière, qui peut se concevoir, elle aussi, comme une onde. Peu après, Werner Heisenberg énonce en 1927 le principe d'incertitude suivant lequel on ne peut connaître précisément la position exacte et la vitesse d'une particule. En un quart de siècle, ce monde de l'infiniment petit a dévoilé des propriétés très différentes des concepts physiques connus et de nombreuses propriétés se sont révélées peu intuitives, mais parfaitement en accord avec les observations expérimentales.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les relations de Planck–Einstein et de Louis de Broglie exprimant la dualité onde/corpuscule pour la lumière et la matière
- ▷ L'interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde
- ▷ La quantification de l'énergie dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène
- ▷ L'inégalité de Heisenberg spatiale (en ordre de grandeur)

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon
- ▷ Décrire un exemple d'expérience illustrant la notion d'ondes de matière
- ▷ Évaluer des ordres de grandeur typiques dans des phénomènes quantiques
- ▷ Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes
- ▷ Obtenir les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr en exploitant la quantification du moment cinétique
- ▷ Établir l'inégalité de Heisenberg spatiale en ordre de grandeur par analogie avec la diffraction des ondes lumineuses

■■ Résumé de cours

■ Dualité onde/corpuscule de la lumière et de la matière

❑ Dualité du comportement de la lumière : relations de Planck–Einstein

Albert EINSTEIN a mis en évidence que lors de l'interaction de la lumière avec la matière, un rayonnement de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, se comporte comme s'il était constitué de « grains d'énergie » appelés **photons** et possédant les propriétés suivantes :

– ce sont des particules de masse nulle, de charge nulle, se déplaçant dans le vide à la vitesse $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

– ils possèdent une **énergie** $\boxed{E = h\nu}$ et une **quantité de mouvement** $\boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k} = \dfrac{h}{\lambda}\vec{e}}$ avec $\vec{k}$ le vecteur d'onde orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}$ donnant le sens de propagation de la lumière, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s la **constante de Planck** et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

❑ Dualité du comportement de la matière : relation de Louis de Broglie

Louis DE BROGLIE a postulé qu'à toute particule matérielle de quantité de mouvement de norme p, on peut associer une **onde de matière** de longueur d'onde $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{p}}$.

⇨ Méthode 24.1. Évaluer des ordres de grandeur de longueurs d'onde de De Broglie

■ La fonction d'onde et son interprétation probabiliste

❑ Fonction d'onde

La description complète de l'état d'une particule dans l'espace à l'instant t se fait à l'aide d'une **fonction d'onde** complexe $\psi(x, y, z, t)$, continue par rapport aux variables d'espace.

❑ Interprétation probabiliste de la fonction d'onde

La fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ correspond à une amplitude de probabilité de présence. Plus précisément, la **probabilité** de trouver la particule dans un volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ autour d'un point M de coordonnées (x, y, z) est donnée par $\boxed{\mathrm{d}^3P = |\psi|^2\,\mathrm{d}^3\tau}$. La particule étant avec certitude dans tout l'espace, on a donc $\iiint |\psi|^2\,\mathrm{d}^3\tau = 1$ (fonction d'onde « normée »).

La fonction d'onde contenant toute l'information disponible, le caractère probabiliste et aléatoire ne résulte pas d'une mauvaise connaissance initiale du système, mais fait partie intégrante du formalisme quantique.

⇨ **Méthode 24.2. Interpréter une expérience d'interférences « particule par particule » en termes probabilistes**

■ Quantification de l'énergie : modèle de Bohr

Niels BOHR propose en 1913 un modèle planétaire semi-classique de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron est en orbite autour du noyau. Le modèle repose sur trois grandes hypothèses :
– il existe des orbites circulaires stables sur lesquelles l'électron ne rayonne pas d'énergie ;
– l'électron peut passer d'une orbite stable à une autre par absorption ou émission d'un photon ;
– la norme du moment cinétique orbital de l'électron est quantifiée : $\left\|\overrightarrow{L_O}(M)\right\| = n\hbar \ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Le succès de ce modèle tient principalement au fait qu'il rend compte de manière satisfaisante, par le biais d'une quantification de l'énergie dans l'atome d'hydrogène, des spectres d'émission et d'absorption observés expérimentalement. Cependant, il échoue sur les atomes polyélectroniques. En outre, par son nombre important d'hypothèses, il soulève de nombreuses questions auxquelles seul l'avènement de la mécanique quantique permettra de répondre de manière claire.

⇨ **Méthode 24.3. Obtenir les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène**

■ Inégalité de Heisenberg spatiale

Il est impossible de connaître simultanément, avec une précision aussi grande qu'on le souhaite, la position et la quantité de mouvement (ou impulsion) d'une particule.
Pour un problème caractérisé par une unique variable x, les incertitudes Δx sur la position et Δp_x sur la quantité de mouvement vérifient l'**inégalité de Heisenberg** :

$$\Delta p_x \, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

En pratique, on utilisera souvent l'**inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur** :

$$\boxed{\Delta p_x \, \Delta x \geq \hbar}.$$

Cette relation ne correspond pas à une limitation due à la résolution des appareils de mesure (largeur des canaux des histogrammes par exemple), mais elle est une conséquence de la nature intrinsèquement quantique des particules.

⇨ **Méthode 24.4. Établir l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur à l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses**

■ Comment déterminer si un objet a un comportement quantique observable ?

❑ Méthode 24.1. Évaluer des ordres de grandeur de longueurs d'onde de De Broglie

On relie tout d'abord la quantité de mouvement p aux données du problème :
- pour une particule non relativiste (c'est-à-dire de vitesse v telle que $(v/c)^2 \ll 1$), $p = mv = \sqrt{2mE_c}$ où E_c est son énergie cinétique ;
- pour une particule libre relativiste d'énergie totale E et de masse au repos m, $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = E_c + mc^2$.

Puis on utilise la relation de Louis de Broglie $\lambda = \dfrac{h}{p}$.

⇨ Exercices 24.2, 24.3, 24.4, 24.6

– Déterminer la longueur d'onde d'une personne de 50 kilogrammes se déplaçant à la vitesse de 1,0 mètre par seconde. Observera-t-on un phénomène d'interférences avec un flot d'individus se précipitant vers les deux portes d'entrée (situées sur la même façade) d'un grand magasin un jour de soldes ?

La longueur d'onde est donnée par $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$. AN $\boxed{\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-35}\ \text{m}}$. Cette longueur d'onde est infiniment plus petite que toutes les dimensions des objets macroscopiques de notre quotidien : le caractère ondulatoire d'un individu n'est en pratique jamais observé.

– Déterminer de même la longueur d'onde d'un neutron de masse $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, d'énergie cinétique égale à 0,00843 eV. Justifier que l'on peut observer le comportement ondulatoire de ces neutrons en les envoyant sur un cristal dont les atomes sont distants de $a = 398$ pm.

La longueur d'onde est : $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2mE_c}}$. AN $\boxed{\lambda = 3{,}12 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 312\ \text{pm}}$, sachant que $1\ \text{eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J.

La longueur d'onde λ du neutron et les distances interatomiques a dans le cristal sont du même ordre de grandeur avec $\lambda \leq a$. Le comportement ondulatoire peut donc se manifester à travers le phénomène de diffraction des neutrons par le cristal.

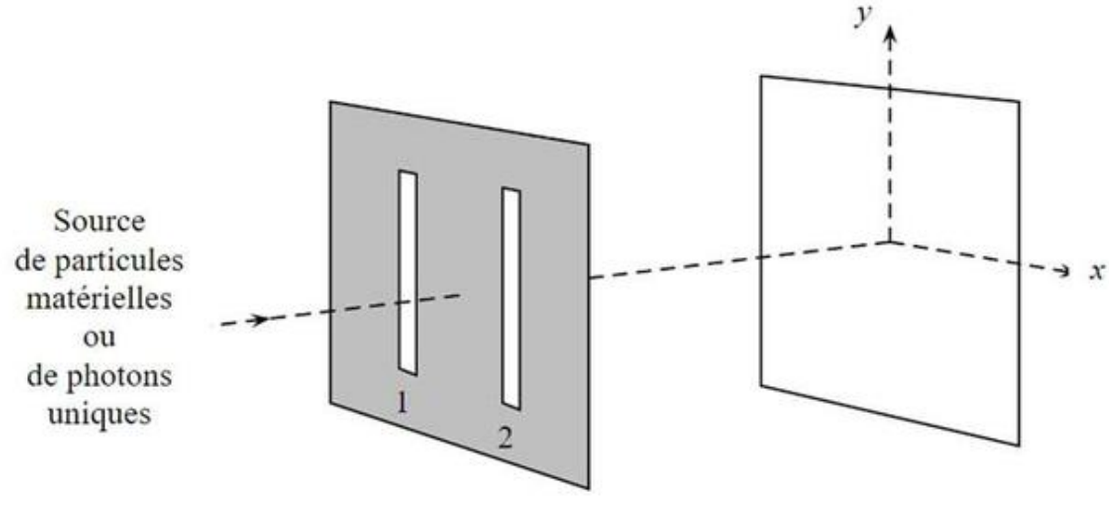
■ Comment utiliser la notion de fonction d'onde ?

❑ Méthode 24.2. Interpréter une expérience d'interférences « particule par particule » en termes probabilistes

L'analyse d'une expérience d'interférences quantiques se fait au moyen de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde $\psi(x,y,z,t)$.

⇨ Exercice 24.6

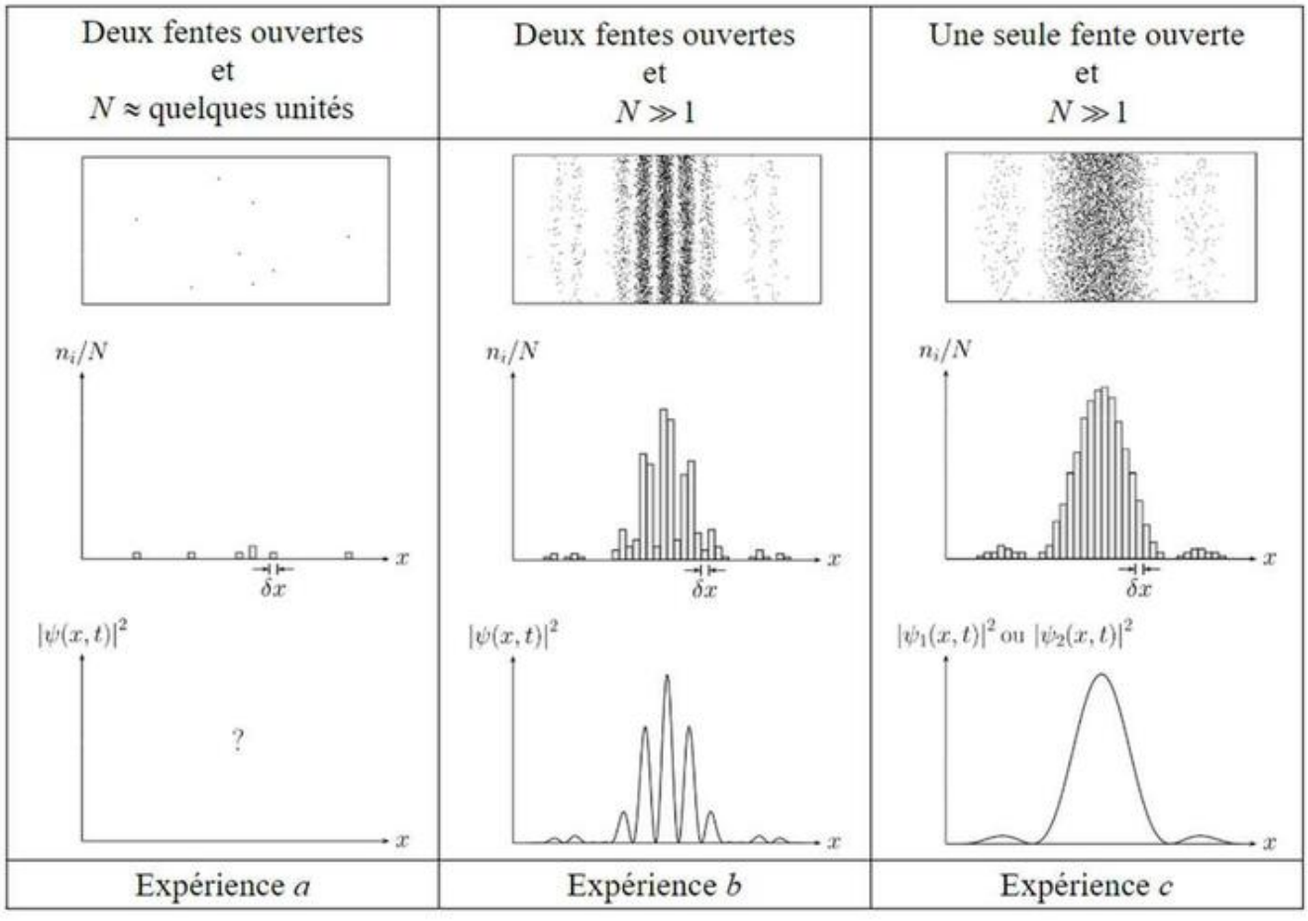
Supposons que des particules (photons ou particules matérielles), toutes préparées dans le même état quantique, sont envoyées une par une sur un dispositif interférentiel de type fentes de Young. Après les fentes, on place un détecteur de particules (figure ci-dessous). Les résultats obtenus pour différentes expériences sont résumés dans le tableau page suivante.



– Dualité onde/corpuscule

Chaque particule individuelle allume un seul pixel de l'écran : *elle se comporte donc comme un corpuscule* (expériences *a*, *b* et *c*). Quand on répète l'expérience avec un grand nombre de particules, toutes préparées dans le même état, le *comportement ondulatoire* se révèle avec la présence de franges d'interférences (expérience *b*). On retrouve le fait que la particule est à la fois une onde et un corpuscule.

> *Le comportement ondulatoire est ici indiscutable dans la mesure où la figure d'interférences obtenue sur l'écran quand les deux fentes sont ouvertes ne se réduit pas à la superposition des deux figures obtenues quand une seule des deux fentes est successivement ouverte (expérience b pour les interférences et expérience c pour les figures de diffraction, centrées respectivement sur les fentes 1 et 2).*



– Analyse en termes probabilistes

Le point d'impact est *aléatoire*, c'est-à-dire que pour des particules préparées toutes dans le même état, on ne peut pas prévoir à l'avance la position du pixel qui sera allumé sur le détecteur.

Mais si on fait une mesure de la position de chaque particule avec un détecteur de résolution spatiale δx (largeur d'un canal), à condition de répéter l'expérience un grand nombre de fois, l'histogramme des résultats représentant le nombre n_i de particules (sur un total de N) détectées dans chaque canal i présente une forme caractéristique, qui n'est autre que celle de la *densité de probabilité de présence* $|\psi(x,t)|^2$ (expériences *b* et *c*).

> *Si $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$ sont les fonctions d'ondes correspondant aux particules dans les configurations où respectivement seules les fentes 1 et 2 sont ouvertes, la mécanique quantique prévoit que pour les deux fentes ouvertes simultanément $\psi(x,t) \propto \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ (principe de superposition); on en déduit la relation entre les densités de probabilité de présence :*
>
> $$|\psi(x,t)|^2 \propto |\psi_1(x,t)|^2 + |\psi_2(x,t)|^2 + \text{terme d'interférences.}$$

■ Comment obtenir les niveaux d'énergie électroniques d'un édifice quantique ?

❑ Méthode 24.3. Obtenir les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr

– On commence par exprimer l'accélération de l'électron, en mouvement circulaire de rayon r à la vitesse v autour du proton, dans la base polaire (ou dans la base de Frenet).
– On applique le PFD à l'électron et on le projette sur cette base, ce qui permet de relier la norme v de la vitesse au rayon r de la trajectoire.
– La relation de quantification du moment cinétique fournit une autre relation entre r et v.
– Finalement, les expressions classiques des énergies cinétique et potentielle conduisent à l'expression des niveaux d'énergie.

⇨ Exercice 24.7

– L'accélération de l'électron M en mouvement circulaire de rayon r et de vitesse $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ s'écrit, dans la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ centrée sur le proton : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = -\dfrac{v^2}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta}$.

– Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel galiléen lié au proton s'écrit : $m_e\vec{a} = \vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$. La projection sur $\vec{e_\theta}$ conduit à $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cte}$: le mouvement de l'électron est uniforme. La projection sur $\vec{e_r}$ est $m_e\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ d'où $v^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$ (1).

– Par ailleurs, la norme du moment cinétique orbital de l'élection s'écrit : $\left\|\vec{L_O}(M)\right\| = \left\|\overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v}\right\| = \left\|r\vec{e_r} \wedge m_e v\vec{e_\theta}\right\| = m_e r v$ d'où $m_e r v = n\hbar$ (2) avec $n \in \mathbb{N}^*$ d'après l'hypothèse de Bohr.

On identifie v^2 dans les expressions (1) et (2) : $\dfrac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$ d'où $r = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{m_e e^2}$ (3).

– L'énergie totale (mécanique) est $E = E_c + E_p$ avec $E_c = \dfrac{1}{2}m_e v^2$ et $E_p = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Cela donne, en exploitant l'expression (1) : $E = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$.

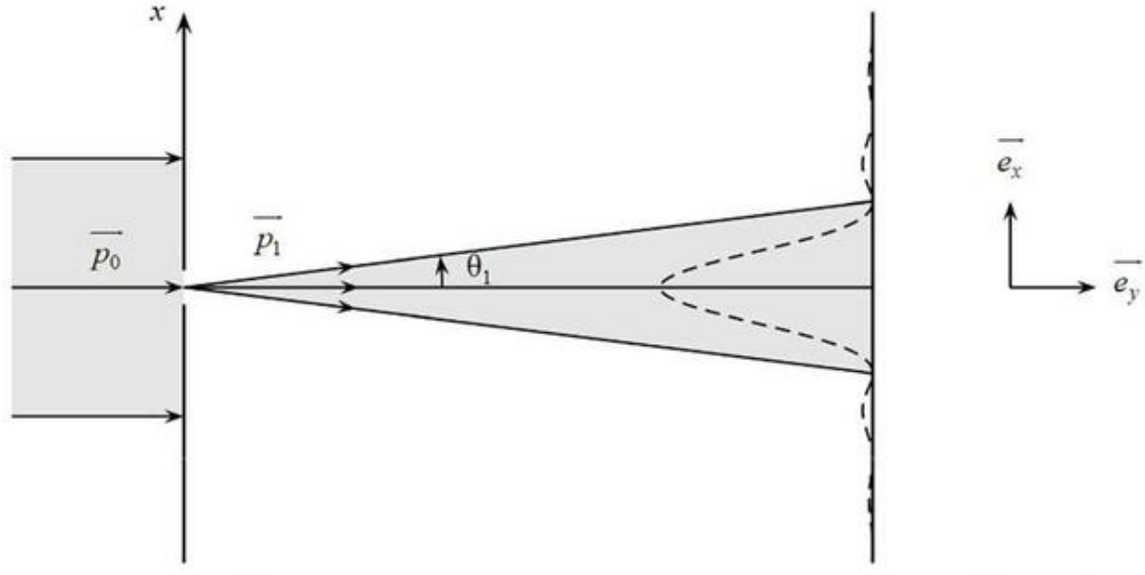
– En utilisant finalement la relation (3) : $E = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}\right) = -\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}$ ou encore, avec $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $\boxed{E = E_n = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

■ Comment établir l'inégalité de Heisenberg spatiale ?

❑ Méthode 24.4. Établir l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur à l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses

On exprime la demi-largeur angulaire θ_1 de la tache centrale de diffraction :
– en fonction de la longueur d'onde λ et de la largeur $a = \Delta x$ de la fente diffractante (aspect ondulatoire) dans l'approximation des petits angles ;
– en fonction de la quantité de mouvement incidente $\vec{p}$ du photon et de la variation Δp_x de sa composante sur $\vec{e_x}$ due au passage par la fente (aspect corpusculaire).
On identifie ensuite ces deux expressions de θ_1 et on utilise la relation de Louis de Broglie pour éliminer λ.

⇨ Exercice 24.8



Considérons un faisceau lumineux arrivant sur une plaque percée d'une fente de largeur a. Expérimentalement, on observe l'apparition d'une figure de diffraction sur un écran placé derrière la fente. La demi-largeur angulaire θ_1 de la tache centrale est donnée, d'après la théorie ondulatoire, par la relation $\sin\theta_1 \approx \dfrac{\lambda}{a}$ (1) pour θ_1 suffisamment petit. En utilisant des considérations corpusculaires, le passage d'un photon dans la fente, en changeant sa direction, provoque une variation de sa quantité de mouvement : dans le faisceau incident, elle est donnée par $\vec{p_0} = p\vec{e_y}$; dans le faisceau émergent, sur les bords de tache centrale, elle s'écrit $\vec{p_1} = p\vec{e}$ avec $\vec{e} = \cos\theta_1 \vec{e_y} + \sin\theta_1 \vec{e_x}$. Dans ce cas, la composante de la quantité de mouvement selon $\vec{e_x}$ a varié au passage de la fente de $\Delta p_x = p_{x1} - p_{x0} = p\sin\theta_1$; on a donc $\sin\theta_1 = \dfrac{\Delta p_x}{p}$ (2).

De plus, le passage d'un photon dans la fente correspond à une incertitude $\Delta x = a$ sur sa position dans la direction des x. En identifiant les relations (1) et (2), on obtient $\frac{\Delta p_x}{p} \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$.

Finalement, en utilisant la relation de Louis de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$, on aboutit à l'(in)égalité de Heisenberg spatiale en ordres de grandeur (avec h au lieu de $\hbar = h/2\pi$) : $\boxed{\Delta x \Delta p_x \approx h}$.

■■ Vrai/Faux

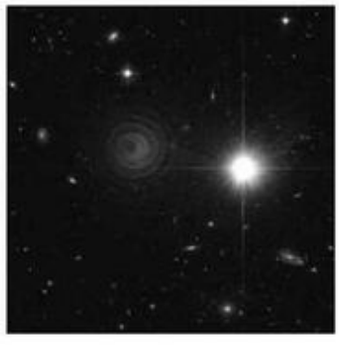
		Vrai	Faux
1.	Plus la longueur d'onde d'un photon diminue, plus l'énergie qu'il transporte augmente.	☐	☐
2.	La masse d'un photon étant nulle, sa quantité de mouvement l'est également.	☐	☐
3.	Si on multiplie par deux la vitesse d'un électron non relativiste, on divise par deux sa longueur d'onde.	☐	☐
4.	La dimension du produit d'une quantité de mouvement par une longueur est la même que la dimension du produit d'une énergie par un temps.	☐	☐
5.	La fonction d'onde $\psi(x,y,z,t)$ représente la probabilité de trouver la particule en (x,y,z).	☐	☐
6.	Dans une expérience d'interférences quantiques, des particules préparées de manière rigoureusement identiques ne seront pas forcément détectées en un même point de l'écran après passage dans le dispositif interférentiel.	☐	☐
7.	Le caractère ondulatoire d'une particule ne peut être révélé dans une expérience d'interférences quantiques que si le nombre de particules envoyées sur le dispositif interférentiel est suffisamment grand.	☐	☐
8.	Le modèle de Bohr utilise la notion de fonction d'onde.	☐	☐
9.	Le modèle de Bohr utilise la notion de quantification du moment cinétique.	☐	☐
10.	Une particule décrite par la mécanique quantique peut être immobile.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Dualité onde/corpuscule

❑ Exercice 24.1. Flux de photons d'une étoile

Une étoile émet un flux lumineux constant reçu sur Terre $\varphi = 1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$ à une longueur d'onde moyenne de $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$. On donne $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ la célérité de la lumière dans le vide et $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ la constante de Planck.



1. Calculer le nombre de photons traversant chaque seconde la pupille de l'œil de rayon $r = 4\ \mathrm{mm}$.
2. Calculer la pression de radiation $P = \frac{1}{S}\frac{N}{\Delta t}p$ exercée par ce flux constant issu de l'étoile sur la surface S de la pupille (supposée totalement absorbante), où p représente la quantité de mouvement d'un photon et N le nombre de photons arrivant sur la pupille durant l'intervalle de temps Δt.

Calculer de même la pression de radiation $P_{\odot}$ du Soleil, de flux sur Terre $\varphi_{\odot} = 1 \cdot 10^{4}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Comparer ces résultats à la pression atmosphérique $P_{\mathrm{atm}} = 1 \cdot 10^{5}\ \mathrm{Pa}$.

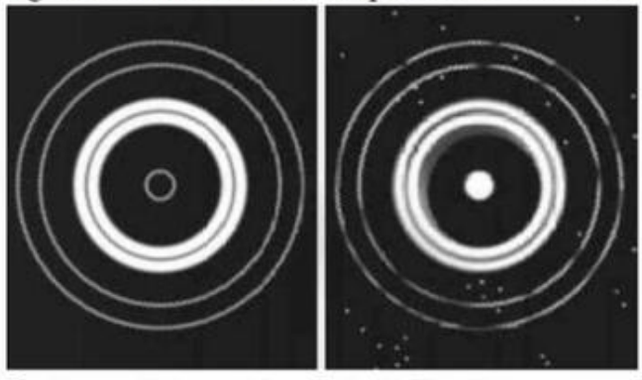
❑ Exercice 24.2. Des neutrons pour la recherche

Le réacteur haut flux de l'institut Laue-Langevin de Grenoble produit un flux de neutrons très intense grâce à la fission d'uranium enrichi. À proximité du cœur du réacteur, ces neutrons sont ralentis par refroidissement dans différents dispositifs. En particulier, une sphère de graphite maintenue à $T_{\mathrm{c}} = 2{,}00 \cdot 10^{3}\ \mathrm{K}$ produit des neutrons « chauds » et une sphère de deutérium à $T_{\mathrm{f}} = 20{,}0\ \mathrm{K}$ constitue une source de neutrons « froids ». La relation thermodynamique définissant la température T à partir de l'énergie cinétique de translation est $\frac{1}{2}mv^{2} = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$, avec $k_{\mathrm{B}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ la constante de Boltzmann et $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ la masse des neutrons en mouvement à la vitesse v. On donne $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ la constante de Planck.

1. Déterminer les vitesses des neutrons « chauds » et « froids », notées v_{c} et v_{f} respectivement. Justifier que ces derniers peuvent être considérés comme non relativistes.
2. Calculer les longueurs d'ondes de ces neutrons. Laquelle des deux sources est la mieux adaptée pour étudier la formation de gouttelettes micrométrique d'anéthol (huile essentielle issue de l'anis étoilé) en suspension dans un mélange eau-alcool ?

❑ Exercice 24.3. Expérience de G. P. Thomson

En 1927, les physiciens américains DAVISSON et GERMER fournissaient la preuve expérimentale de l'hypothèse de Louis DE BROGLIE en mettant en évidence le phénomène de diffraction d'électrons sur un échantillon monocristallin de nickel. Quelques mois plus tard, le Britannique G. P. THOMSON confirmait ce résultat en faisant passer un faisceau d'électrons monocinétique à travers une mince feuille de métal. Avec des électrons accélérés par une tension de l'ordre de la dizaine de kilovolts (kV), il obtint sur une plaque photographique placée derrière la cible une figure de diffraction identique à celle observée avec des rayons X de même énergie.



La figure ci-contre représente les anneaux concentriques obtenus par diffraction sur un mince feuillet métallique :
– de rayons X (à gauche) ;
– d'électrons (à droite).

1. En quoi l'expérience de G. P. Thomson confirma-t-elle la nature ondulatoire des électrons ?

2. Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons X. L'utilisation de ces derniers vous semble-t-elle adaptée pour mener une étude cristallographique par diffraction ?

3. Soumis à une différence de potentiel $U>0$, un électron de charge $q=-e=-1{,}60\cdot10^{-19}$ C et de masse $m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$ kg, initialement au repos acquiert une énergie cinétique égale à eU. Établir la relation numérique approchée $\lambda\approx\dfrac{1{,}23}{\sqrt{U}}$ nm où U est la tension accélératrice en volts (V). En déduire la longueur d'onde des électrons utilisés par Thomson. Commenter.
On donne $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s la constante de Planck.

❑ Exercice 24.4. Microscope électronique à balayage

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique des plus petits détails qu'il permet d'observer, est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée. On donne $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s la constante de Planck.



Image de Y. & R. Thomann

1. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope ?

2. Rappeler les valeurs des longueurs d'ondes extrêmes (dans le vide) du spectre visible et déterminer les énergies en eV des photons correspondants.

3. La taille des grains de pollen d'orchidée dont l'image est fournie ci-contre est de l'ordre de 10 µm.

a) Expliquer pourquoi cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique, sachant qu'en grossissant l'image ci-contre, on peut observer des détails 100 fois plus petits que la taille des grains de pollen.

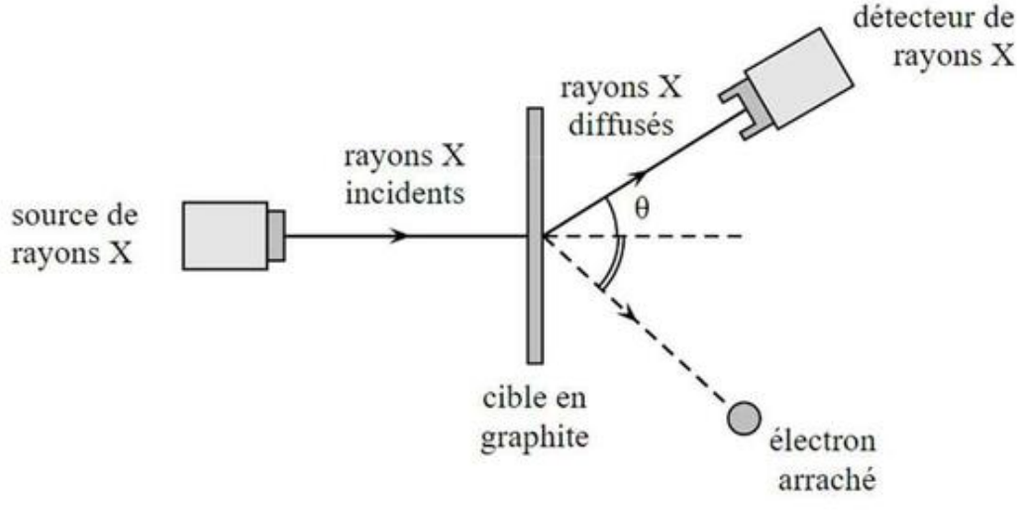
b) Cette image a été obtenue à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB), dans lequel un faisceau d'électrons est envoyé sur l'échantillon à analyser. Après interaction avec la matière, ces électrons sont récupérés par des capteurs dont les informations permettent de reconstruire l'image. Évaluer l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique minimale des électrons qui ont été utilisés pour obtenir ce « cliché ». On donne $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg la masse de l'électron.

❑ Exercice 24.5. Effet Compton*

La nature corpusculaire des rayonnements électromagnétiques, et en particulier l'existence d'un quantum d'énergie, le photon, doté d'une énergie et d'une quantité de mouvement bien définies, a été mise en évidence expérimentalement en 1922 par le physicien américain Arthur COMPTON. Dans son expérience de diffusion schématisée ci-dessous, il bombarde une mince feuille de graphite avec des rayons X. Derrière cette cible, il place un détecteur de rayons X qu'il peut faire tourner d'un angle θ par rapport à la direction des rayons incidents. Il constate alors que des électrons sont arrachés de la cible. De plus, il observe que les rayons X incidents sont diffusés dans toutes les directions avec une longueur d'onde λ′, fonction de l'angle θ, différente de leur longueur d'onde incidente λ. Il justifie plus tard ses observations dans le cadre d'un modèle théorique de collision relativiste entre un photon incident et un électron « libre », supposé initialement immobile et faiblement lié aux atomes de carbone dans la cible graphite. Il obtient ainsi la relation, conforme aux données expérimentales :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

avec $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s la constante de Planck, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg la masse de l'électron et $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1} la célérité de la lumière dans le vide.



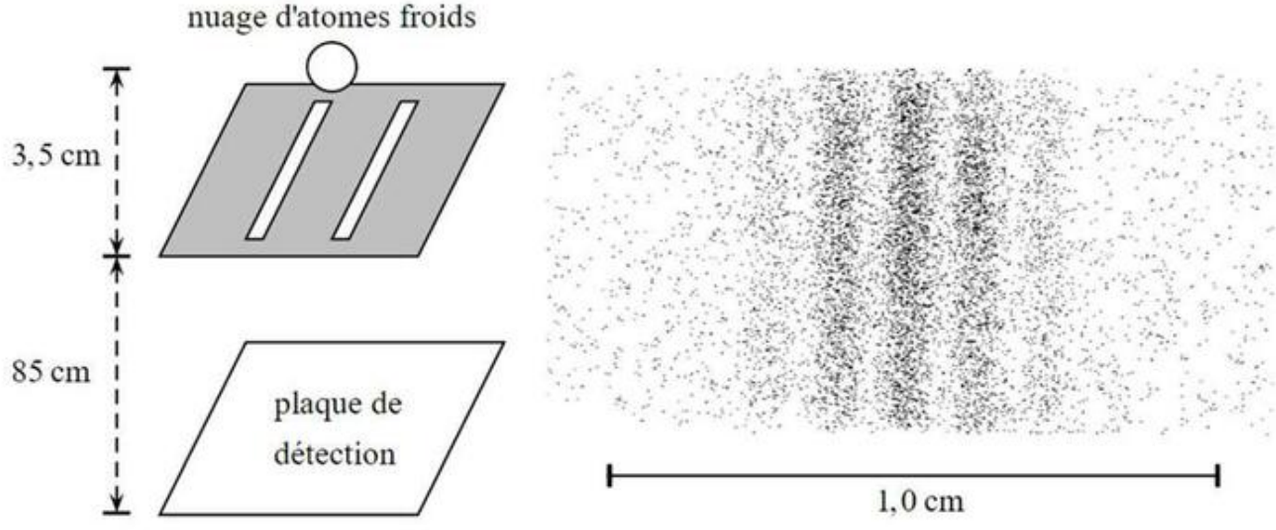
Pour démontrer l'expression précédente, on note $\overrightarrow{p}$ la quantité de mouvement du photon avant le choc, $\overrightarrow{p'}$ la quantité de mouvement du photon après le choc et $\overrightarrow{p_e}$ la quantité de mouvement de l'électron après le choc. L'électron est supposé initialement immobile dans le référentiel de

la cible. De plus, ce dernier étant considéré relativiste dans l'expérience, son énergie totale est donnée par $E = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}$.

1. Exprimer la conservation de la quantité de mouvement du système {photon + électron} entre avant et après le choc.
2. Exprimer de même la conservation de l'énergie totale du système {photon + électron} entre avant et après le choc.
3. Déduire des deux lois de conservation précédentes l'expression de la variation de longueur d'onde $\lambda' - \lambda$ du photon X telle qu'obtenue par Compton, en fonction de h, c, m_e et θ. Calculer $\lambda' - \lambda$ pour un angle $\theta = 30°$.

❑ Exercice 24.6. Expérience de Shimizu et Takuma

En 1992, les physiciens japonais SHIMIZU et TAKUMA réalisaient une expérience d'interférences atomiques : un nuage d'atomes de néon est lâché sans vitesse initiale à 3,5 cm au-dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur égale à 2,0 µm et distantes de $d = 6{,}0$ µm . Les atomes sont alors détectés sur une plaque située à une distance $D = 85$ cm à l'aplomb du plan des fentes. Chaque point noir sur la plaque réceptrice représente l'impact d'un atome (voir figure ci-dessous, à droite).



1. Comment se manifestent respectivement les caractères corpusculaire et ondulatoire des atomes de néon dans cette expérience ?
2. Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des atomes de néon dans ce dispositif interférentiel. On donne l'expression de l'interfrange i dans une expérience de type fentes de Young avec écran à grande distance : $i = \dfrac{\lambda D}{d}$.
3. En déduire un ordre de grandeur de la vitesse v des atomes de néon au cours de leur chute. On donne $\mathcal{N}_A = 6{,}0 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ le nombre d'Avogadro, $M = 20\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire du néon et $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s la constante de Planck.

■ Quantification de l'énergie

❑ Exercice 24.7. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron décrit une trajectoire circulaire autour du noyau composé d'un unique proton. On donne $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg la masse de l'électron, $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C la charge du proton, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1} la permittivité diélectrique du vide, $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1} la célérité de la lumière dans le vide et $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s la constante de Planck. On étudie le mouvement de l'électron M dans le référentiel du proton supposé galiléen. On note $(\vec{n}, \vec{\tau})$ la base de Frenet liée à la trajectoire circulaire de l'électron.

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb exercée par le proton sur l'électron.

2. Établir l'expression de la vitesse v de l'électron sur son orbite circulaire en fonction de m_e, e, ε_0 et du rayon r de la trajectoire.

3. Exploiter l'hypothèse de quantification $\left\| \overrightarrow{L_O}(M) \right\| = n\dfrac{h}{2\pi}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la norme du moment cinétique orbital de l'électron pour fournir une relation entre m_e, r, v, h et n.

4. Déduire de ce qui précède l'expression des rayons possibles r_n de l'orbite circulaire en fonction de m_e, e, h et n. Calculer numériquement la valeur de r_1 correspondant à $n = 1$.

5. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron et montrer qu'elle se met sous la forme $E = E_n = \dfrac{E_1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec E_1 l'énergie (négative) du niveau fondamental, qu'on exprimera en fonction des données du problème. Calculer numériquement E_1 en joules puis en électronvolts ($1{,}00$ eV $= 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J).

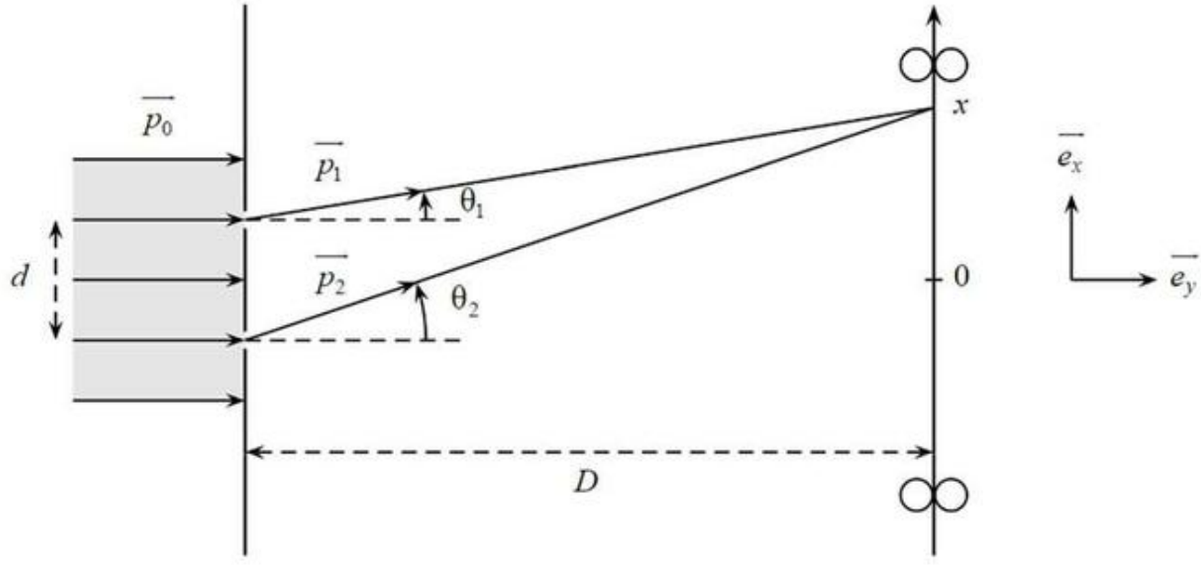
6. Un atome d'hydrogène peut émettre ou absorber un photon de longueur d'onde $\lambda_{n,k}$ si l'écart $E_n - E_k$ $(n > k)$ entre deux niveaux d'énergie de l'édifice quantique vérifie la relation $E_n - E_k = \dfrac{hc}{\lambda_{n,k}}$. Retrouver la formule établie expérimentalement par Ritz en 1908 : $\dfrac{1}{\lambda_{n,k}} = R_H\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ avec R_H la constante de Rydberg de l'hydrogène, dont on donnera l'expression littérale et la valeur numérique.

7. Les raies d'émission ou d'absorption dans le visible de l'atome d'hydrogène appartiennent à la série de Balmer caractérisée par $k = 2$. Calculer les longueurs d'onde de ces raies et préciser pour chacune d'elle la couleur associée.

■ Inégalité de Heisenberg spatiale

❑ Exercice 24.8. Une question fondamentale, une expérience de pensée*

Posons-nous la question suivante : dans une expérience d'interférences de type fentes de Young, est-il possible d'observer à la fois la figure d'interférences et de savoir par quelle fente est passée la particule ? Pour y répondre, imaginons une expérience de pensée utilisant le fait que la quantité de mouvement mesurée au niveau de l'écran dépend de la fente par laquelle est passée la particule. En mesurant cette quantité de mouvement, on sait donc si la particule est passée par la fente 1 ou 2. Notons $\overrightarrow{p_0} = p\overrightarrow{e_y}$ la quantité de mouvement de la particule incidente, $\overrightarrow{p_1}$ sa quantité de mouvement lorsqu'elle émerge de la fente 1 et $\overrightarrow{p_2}$ sa quantité de mouvement lorsqu'elle émerge de la fente 2.



L'écran d'observation est monté sur « roulettes » pour pouvoir se déplacer dans la direction de $\overrightarrow{e_x}$ sous l'effet de l'impact d'une particule. Il est placé à une distance D des fentes, ces dernières étant distantes de d $(d \ll D)$. La position du point d'observation sur l'écran est caractérisée par la variable x $(x \ll D)$.

1. Exprimer la composante p_{x1} de la quantité de mouvement de la particule selon $\overrightarrow{e_x}$ lorsqu'elle émerge de la fente 1 en fonction de p et $\sin\theta_1$. Dans l'approximation des petits angles où $\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \theta_1$, en déduire l'expression de p_{x1} en fonction de p, x, a et D. Exprimer de même la composante p_{x2} de la quantité de mouvement de la particule selon $\overrightarrow{e_x}$ lorsqu'elle émerge de la fente 2.
2. Déduire de la question précédente que la différence $\Delta p_x = p_{x2} - p_{x1}$ des quantités de mouvement transférées à l'écran dans la direction de $\overrightarrow{e_x}$ s'écrit $\Delta p_x = p\dfrac{d}{D}$.

Pour savoir par quelle fente la particule est passée, il faut donc connaître la quantité de mouvement de l'écran avec une précision $\Delta p_{x,\text{écran}}$ telle que $\Delta p_{x,\text{écran}} \ll p\dfrac{d}{D}$.

3. Après l'impact d'une particule, l'écran s'est légèrement translaté dans la direction de $\overline{e_x}$. Pour espérer observer une figure d'interférences d'interfrange $i = \dfrac{\lambda D}{d}$, il faut donc le remettre en place avant l'impact suivant avec une précision $\Delta x_{\text{écran}}$ telle que $\Delta x_{\text{écran}} \ll i$. Comparer dans ce cas le produit $\Delta x_{\text{écran}}\,\Delta p_{x,\text{écran}}$ à la constante de Planck h. Conclure sur la faisabilité de cette expérience de pensée et répondre à la question initiale.

❑ Exercice 24.9. Énergie minimale d'un atome d'hydrogène*

Considérons un atome d'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron. Le proton est supposé fixe et constitue l'origine du repère. L'électron possède une énergie potentielle $E_\text{p} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ du fait de son interaction électrostatique avec le proton, avec r la distance entre les deux particules, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C la charge élémentaire et $\varepsilon_0 = 8{,}9\cdot10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ la permittivité du vide. L'électron possède également une énergie cinétique E_c. On donne $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J·s la constante de Planck.

1. Supposons que l'électron est confiné au voisinage du proton dans une région d'extension spatiale notée a. Établir l'inégalité sur l'énergie cinétique $E_\text{c} \geq \dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$.

2. Déterminer la valeur a_1 de a pour laquelle l'énergie totale est minimale. Exprimer l'énergie correspondante, notée E_1. Calculer a_1 en picomètres (1 pm = 10^{-12} m) et E_1 en électron-volts ($1{,}0\ \text{eV} = 1{,}6\cdot10^{-19}$ J). Commenter les résultats obtenus.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 24.1. Écrire de deux façons l'énergie reçue par la pupille pendant Δt et identifier les expressions obtenues.

Exercice 24.5. Pour commencer la résolution, exprimer $\overline{p_\text{e}}\cdot\overline{p_\text{e}}$ et utiliser la définition du produit scalaire $\overline{p}\cdot\overline{p'} = pp'\cos\theta$.

Exercice 24.9. Exprimer E_c en fonction de Δp dans l'hypothèse $\langle p\rangle = 0$ et exploiter l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux

2. Un photon de masse nulle transporte une quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\vec{e}$ avec $\vec{e}$ un vecteur unitaire donnant le sens de propagation de la lumière. La formule $\vec{p} = m\vec{v}$ ne concerne que des particules matérielles non relativistes.

5. La fonction d'onde $\psi(x,y,z,t)$ n'est qu'une *amplitude* de probabilité de présence. La probabilité de trouver la particule dans un volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ autour d'un point M de coordonnées (x,y,z) est donnée par $\mathrm{d}^3P = |\psi|^2\,\mathrm{d}^3\tau$.

8. Ce modèle utilise les lois de la mécanique classique pour faire les calculs, mais y ajoute une hypothèse de quantification du moment cinétique.

10. Pour une particule immobile on aurait une incertitude nulle sur sa position et sur sa quantité de mouvement, ce qui serait contraire à l'inégalité de Heisenberg.

❑ Les erreurs classiques

– La relation $\lambda = \frac{c}{\nu}$ n'est vraie que pour le photon : elle n'est pas utilisable pour une particule matérielle de masse m.
– La mécanique quantique est probabiliste par nature, contrairement à la mécanique classique qui est déterministe. La connaissance complète de l'état quantique d'une particule donné par sa fonction d'onde ne donnera ainsi accès qu'à des probabilités de présence.
– Lorsqu'on doit exprimer la quantité de mouvement d'une particule, ne pas oublier de vérifier s'il faut se placer dans le cadre relativiste ou non relativiste (pour ce dernier il faut vérifier $(v/c)^2 \ll 1$).

■■ Corrigé des exercices

Exercice 24.1

1. L'énergie reçue par l'œil pendant un intervalle de temps Δt est égale à $E = \varphi S \Delta t = \pi r^2 \varphi \Delta t$. Si N photons arrivent sur la pupille pendant Δt, on a également $E = N\dfrac{hc}{\lambda}$. En identifiant ces deux formules, on en déduit la quantité recherchée $\boxed{\dfrac{N}{\Delta t} = \dfrac{\pi r^2 \varphi \lambda}{hc}}$. AN $\boxed{\dfrac{N}{\Delta t} = 1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}}$.

> *La quantité recherchée correspond à un nombre de photons par seconde : elle s'exprime en* s^{-1}.

2. Un photon transporte une quantité de mouvement $p = \dfrac{h}{\lambda}$. En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit $P = \dfrac{1}{S}\dfrac{N}{\Delta t} p = \dfrac{1}{S}\dfrac{S\varphi\lambda}{hc}\dfrac{h}{\lambda}$ soit $\boxed{P = \dfrac{\varphi}{c}}$. AN $\boxed{P = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Pa}}$.

Pour le Soleil, on trouve une pression de radiation $P_\odot = 3 \cdot 10^{-5}$ Pa. Ces deux pressions sont comme prévues négligeables devant la pression atmosphérique : le fameux « coup » de Soleil ne résulte pas d'un transfert de quantité de mouvement mais plutôt d'un transfert énergétique.

Exercice 24.2

1. En utilisant la relation fournie $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m}}}$, on obtient $\boxed{v_c = 7{,}04 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$ et $\boxed{v_f = 704 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Ces vitesses étant très petites devant $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}, les neutrons sont considérés comme des particules non relativistes dans cette expérience.

2. La longueur d'onde est donnée par la relation de Louis de Broglie : $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}}$.

AN $\boxed{\lambda_f = 5{,}64 \cdot 10^{-10} \text{ m}}$ et $\boxed{\lambda_c = 5{,}64 \cdot 10^{-11} \text{ m}}$. La longueur d'onde des neutrons « froids » est inférieure à la taille caractéristique des gouttelettes tout en étant plus proche de celle-ci en ordre de grandeur que la longueur d'onde des neutrons « chauds ». Les neutrons « froids » sont donc mieux adaptés à l'étude de la dynamique de formation de gouttelettes micrométriques. Ce sont d'ailleurs ces microgouttelettes d'anéthol, huile essentielle peu soluble dans l'eau, qui troublent une célèbre boisson anisée alcoolisée quand on y ajoute de l'eau.

⇨ *Méthode 24.1*

Exercice 24.3

1. L'expérience de G. P. Thomson montra que la figure de diffraction obtenue avec un faisceau d'électrons avait les mêmes caractéristiques que celle obtenue avec des rayons X dont le

caractère ondulatoire était bien connu à l'époque : les électrons avaient donc eux aussi une nature ondulatoire.

2. Les rayons X ont une longueur d'onde λ comprise entre 10^{-11} et 10^{-8} m. Les distances caractéristiques a entre les atomes dans un cristal étant de l'ordre de quelques 10^{-10} m, la condition $\lambda \leq a$ tout en ayant λ et a du même ordre de grandeur, permettant une étude cristallographique par diffraction, peut être vérifiée.

3. La relation de Louis de Broglie $\lambda = \dfrac{h}{p}$ fournit, compte tenu de la relation $E_c = \dfrac{p^2}{2m} = eU$, l'égalité $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2meU}}$. Évaluation numérique : $\lambda = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9{,}11 \cdot 10^{-31} \times 1{,}60 \cdot 10^{-19} \times U}} \times 10^9$ nm soi $\boxed{\lambda \approx \dfrac{1{,}23}{\sqrt{U}} \text{ nm}}$. Avec $U = 1{,}00 \cdot 10^4$ V, on trouve $\boxed{\lambda = 0{,}0123 \text{ nm} = 12{,}3 \text{ pm}}$: cette longueur d'onde se situe dans le domaine des rayons X.

⇨ *Méthode 24.1*

Exercice 24.4

1. La diffraction limite le pouvoir de résolution d'un microscope. En effet, à cause de la diffraction, l'image d'un point n'est plus un point mais une tache d'extension spatiale inversement proportionnelle à la taille de l'objet diffractant. Si deux détails d'un objet sont trop proches, leurs images se chevauchent et il devient alors impossible de les distinguer.

2. Le spectre de la lumière visible est compris entre $\lambda_V = 400$ nm pour l'extrémité violette et $\lambda_R = 800$ nm pour l'extrémité rouge. Les énergies correspondantes s'obtiennent par la relation $\boxed{E = \dfrac{hc}{\lambda}}$. AN $\boxed{E_V = 4{,}97 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3{,}11 \text{ eV}}$ et $\boxed{E_R = 2{,}49 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}55 \text{ eV}}$.

3. a) D'après l'énoncé, la taille des détails que l'on peut distinguer sur les grains de pollen est de l'ordre de $d = 100$ nm. Cette longueur étant plus petite que les longueurs d'ondes du spectre visible, cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique.

b) En posant $\lambda = d$ dans la relation de Louis de Broglie, on obtient $p = \dfrac{h}{d} \Leftrightarrow \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{h^2}{2md^2}$ soit $\boxed{E_c = \dfrac{h^2}{2md^2}}$. AN $\boxed{E_c = 1{,}51 \cdot 10^{-4} \text{ eV}}$. Notons que les MEB actuels permettent en fait de détecter des détails de l'ordre de 0,1 nm, ce qui correspond à une énergie cinétique de 150 eV.

⇨ *Méthode 24.1*

Exercice 24.5

1. Conservation de la quantité de mouvement du système {photon + électron} entre avant et après le choc : $\boxed{\vec{p} = \vec{p'} + \vec{p_e}}$ (1).

2. Conservation de l'énergie totale du système {photon + électron} entre avant et après le choc :

$$\boxed{\frac{hc}{\lambda}+m_e c^2=\frac{hc}{\lambda'}+\sqrt{p_e^2c^2+m_e^2c^4}}\ (2).$$

☛ *L'électron libre au repos possède quand même une énergie de masse* $m_e c^2$.

3. La relation (1) se réécrit :

$$\vec{p}-\vec{p'}=\vec{p_e}$$
$$\left(\vec{p}-\vec{p'}\right)^2=\vec{p_e}^2$$
$$\vec{p}^2+\vec{p'}^2+2\vec{p}\cdot\vec{p'}=\vec{p_e}^2$$
$$p^2+p'^2-2pp'\cos\theta=p_e^2$$
$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2-2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta=p_e^2$$
$$\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2-2\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta=p_e^2c^2\ (3)$$

La relation (2) fournit :

$$\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}+m_e c^2=\sqrt{p_e^2c^2+m_e^2c^4}$$
$$\left(\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}\right)^2+m_e^2c^4+2m_ec^2\left(\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}\right)=p_e^2c^2+m_e^2c^4$$
$$\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2-2\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}+2m_ec^2\left(\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}\right)=p_e^2c^2\ (4)$$

En identifiant les relations (3) et (4), on obtient $-\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta=-\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}+m_ec^2\left(\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}\right)$

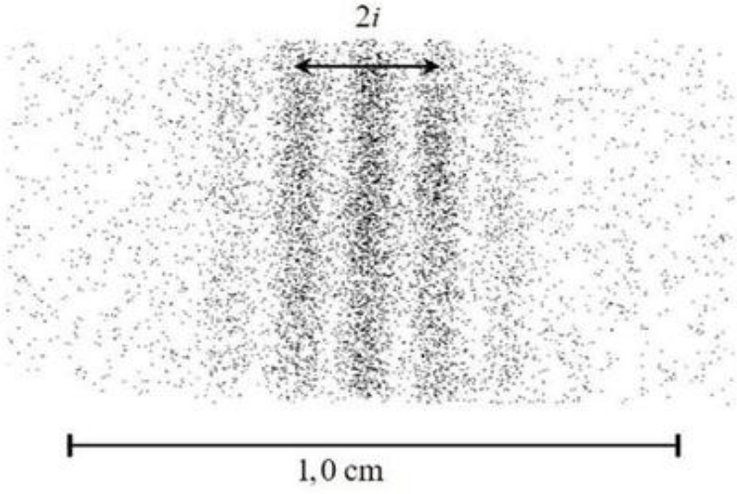
d'où finalement : $\boxed{\lambda'-\lambda=\frac{h}{m_ec}\left(1-\cos\theta\right)}$. AN pour $\theta=30°$: $\boxed{\lambda'-\lambda=0{,}32\text{ pm}}$.

Exercice 24.6

1. La présence d'impacts de faible extension spatiale sur la plaque de détection prouve le caractère corpusculaire des particules. L'apparition de franges d'interférences pour un nombre suffisant de particules envoyées vers les fentes est quant à elle une manifestation de la nature ondulatoire des particules.

⇨ *Méthode 24.2*

2. En utilisant la figure d'interférences, on trouve une interfrange de l'ordre de $\boxed{i=1{,}2\text{ mm}}$. En utilisant la formule $\boxed{\lambda=\frac{id}{D}}$, on obtient la valeur demandée : $\boxed{\lambda=8{,}5\cdot10^{-9}\text{ m}}$.



3. La formule de L. de Broglie s'écrit $p = \dfrac{h}{\lambda}$. Avec $p = mv = \dfrac{M}{\mathcal{N}_A} v$, on en déduit $\boxed{v = \dfrac{h\mathcal{N}_A}{M\lambda}}$.

AN $\boxed{v = 2{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$. Cette valeur n'est qu'une moyenne : atomes sont lâchés sans vitesse initiale et accélèrent au cours de leur chute sous l'effet du champ de pesanteur.

⇨ *Méthode 24.1*

Exercice 24.7

1. Dans la base de Frenet $(\vec{n}, \vec{\tau})$ liée à la trajectoire circulaire, la force de Coulomb exercée par le proton sur l'électron s'écrit $\boxed{\vec{F} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{n}}$.

2. Étudions le mouvement de l'électron M dans le référentiel du proton supposé galiléen. Le poids étant négligé, la seule force qui s'applique sur l'électron est la force de Coulomb. Dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire de rayon r, on a $\overrightarrow{OM} = -r\vec{n}$, $\vec{v}(M) = v\vec{\tau}$ et $\vec{a}(M) = \dfrac{v^2}{r}\vec{n} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$. Le PFD appliqué à l'électron s'écrit : $m_e\vec{a}(M) = \vec{F}$. La projection sur $\vec{\tau}$ conduit à $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cte}$: le mouvement de l'électron est uniforme. La projection sur $\vec{n}$ s'écrit $m_e\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ soit $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}}$.

⇨ *Méthode 24.3*

3. Pour exploiter l'hypothèse de quantification, écrivons la norme du moment cinétique orbital de l'électron : $\left\|\overrightarrow{L_O}(M)\right\| = \left\|\overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v}\right\| = \left\|-r\vec{n} \wedge m_e v\vec{\tau}\right\| = m_e r v$ d'où $\boxed{m_e r v = n\dfrac{h}{2\pi}}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

4. Identifions les expressions de v^2 fournies par les questions 2 et 3 : $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} = \dfrac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2}$. En simplifiant cette expression, on trouve les rayons quantifiés des orbites : $\boxed{r_n = n^2 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}}$. Pour $n=1$, on trouve $r_1 = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$, quantité appelée *rayon de Bohr*. AN $\boxed{r_1 = 52{,}9 \text{ pm}}$.

5. L'énergie totale de l'électron est définie par $E = E_c + E_p$, avec $E_c = \dfrac{1}{2} m_e v^2$ l'énergie cinétique et $E_p = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ l'énergie potentielle associée à la force de Coulomb. D'après le résultat de la question 2, $E_c = \dfrac{1}{2} m_e \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} \right) = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right)$ d'où $E = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$. En utilisant l'expression $r = r_n$ de la question 4, on obtient $E = E_n$ avec $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$. Par identification avec la formule de l'énoncé, on aboutit finalement à $\boxed{E_n = \dfrac{E_1}{n^2}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) avec $\boxed{E_1 = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}}$.
AN $\boxed{E_1 = -2{,}17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13{,}6 \text{ eV}}$.

⇨ *Méthode 24.3*

6. D'après l'énoncé, l'émission ou l'absorption de photons vérifie la relation $E_n - E_k = \dfrac{hc}{\lambda_{n,k}}$. Or, en utilisant la question précédente, on peut écrire $E_n - E_k = E_1 \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2} \right)$. Identifions les deux expressions : $\dfrac{hc}{\lambda_{n,k}} = E_1 \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2} \right)$ ou encore $\dfrac{hc}{\lambda_{n,k}} = -E_1 \left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2} \right)$. En simplifiant membre à membre par hc, on obtient la relation demandée : $\boxed{\dfrac{1}{\lambda_{n,k}} = R_H \left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2} \right)}$ avec $R_H = -\dfrac{E_1}{hc}$ soit $\boxed{R_H = \dfrac{m_e e^4}{8c\varepsilon_0^2 h^3}}$. AN $\boxed{R_H = 1{,}09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}$.

7. La série de Balmer correspond à $k=2$. Les longueurs d'onde $\lambda_{n,2}$ des raies associées vérifient donc $\dfrac{1}{\lambda_{n,2}} = R_H \left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2} \right)$ avec n un entier strictement supérieur à 2. Une exploitation numérique de cette relation fournit les longueurs d'onde des raies situées dans le spectre visible : $\boxed{\lambda_{3,2} = 660 \text{ nm}}$ (rouge), $\boxed{\lambda_{4,2} = 490 \text{ nm}}$ et $\boxed{\lambda_{5,2} = 437 \text{ nm}}$ (bleu), $\boxed{\lambda_{6,2} = 413 \text{ nm}}$ et $\boxed{\lambda_{7,2} = 400 \text{ nm}}$ (violet). Les longueurs d'ondes prédites par le modèle de Bohr correspondent à celle observées dans les expériences de spectroscopie de l'atome d'hydrogène.

Exercice 24.8

1. Par projection de $\overrightarrow{p_1}$ sur $\overrightarrow{e_x}$, on trouve $\boxed{p_{x1} = p\sin\theta_1}$. Dans l'approximation des petits angles, on a $\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \theta_1$. Or $\tan\theta_1 = \dfrac{x - d/2}{D}$ d'où $\boxed{p_{x1} \approx p\dfrac{2x-d}{2D}}$.

De même, on trouve $\boxed{p_{x2} \approx p\dfrac{2x+d}{2D}}$. ⇨ *Méthode 24.4*

2. On déduit des résultats de la question précédente que $\boxed{\Delta p_x = p\dfrac{d}{D}}$.

3. $\Delta x_{\text{écran}}\,\Delta p_{x,\text{écran}} \ll \dfrac{\lambda D}{d}\dfrac{pd}{D} = p\lambda$ se simplifie compte tenu de la relation de L. de Broglie $p = \dfrac{h}{\lambda}$ en $\boxed{\Delta x_{\text{écran}}\,\Delta p_{x,\text{écran}} \ll h}$. Cette inégalité est l'opposée de la relation de Heisenberg en ordre de grandeur. La mécanique quantique interdit donc la réalisation d'une telle expérience : dans une expérience d'interférences de type fentes de Young, il est donc impossible d'observer à la fois la figure d'interférences et de savoir par quelle fente est passée la particule.

Exercice 24.9

1. L'énergie cinétique est égale à $E_c = \dfrac{p^2}{2m}$. Or $p = \langle p\rangle + \Delta p = \Delta p$ car $\langle p\rangle = 0$ ici. On en déduit $E_c = \dfrac{(\Delta p)^2}{2m}$. De plus, d'après l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur, $\Delta p \geq \dfrac{\hbar}{a}$.

Finalement, on trouve l'inégalité demandée : $\boxed{E_c \geq \dfrac{\hbar^2}{2ma^2} = E_{c,\min}}$.

2. L'énergie potentielle est de l'ordre de $E_p \approx -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$. On en déduit l'énergie totale minimale : $E_{\min} = \dfrac{\hbar^2}{2ma^2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Cette fonction de a présente un minimum. En effet, $\dfrac{\mathrm{d}E_{\min}}{\mathrm{d}a} = -\dfrac{\hbar^2}{ma^3} + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ s'annule pour $\boxed{a = a_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}}$. On en déduit l'énergie minimale du système compatible avec la relation de Heisenberg : $\boxed{E_{\min}(a_1) = E_1 = -\dfrac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2}}$.

AN $\boxed{a_1 = 53\text{ pm}}$ et $\boxed{E_1 = -14\text{ eV}}$. Ces valeurs sont identiques à celles que donnerait un traitement quantique exact dans l'atome d'hydrogène. La longueur a_1 est appelée rayon de Bohr ; elle caractérise bien les dimensions atomiques. L'énergie E_1 est exactement celle du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire le niveau de plus basse énergie.

Chapitre 25
Solides cristallins

UN SCIENTIFIQUE



D'abord intéressé par la physique, **René-Just Haüy** (1743-1822) se passionne ensuite pour la botanique. Sa rencontre avec Louis Daubenton l'amène à s'intéresser à la minéralogie. Dans chacune des disciplines qu'il étudie, il cherche à classifier les éléments qu'il rencontre. On lui doit ainsi une méthode pour faire des herbiers puis plusieurs mémoires sur la cristallographie couronnés par un ouvrage sur la classification des cristaux.

Un peu d'histoire

Descartes, Kepler, Huygens et Hooke avaient déjà jeté un regard scientifique sur les cristaux. Le minéralogiste Jean-Baptiste Romé de l'Isle (1736-1790), rédige en 1772 le premier ouvrage consacré à ce sujet, dans lequel il cherche à classer les cristaux suivant leur forme.

René-Just Haüy publie en 1784 son *Essai d'une théorie des crystaux* considéré comme l'acte fondateur d'une véritable théorie scientifique sur ce thème. Il met en lumière l'existence d'une cellule constitutive fondamentale, qui est un polyèdre simple avec des angles immuables, et il en étudie les symétries et met en lumière six types primitifs comme le parallélépipède et le dodécaèdre. Après lui, William Miller publie en 1839 un ouvrage détaillant ces propriétés, et Auguste Bravais (1811-1863) développe des outils mathématiques pour les étudier qui s'insèrent dans la théorie des groupes tout juste naissante.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Le modèle du cristal parfait et ses limites
- ▷ Les notions de compacité et de coordinence
- ▷ La maille conventionnelle cubique à faces centrées (CFC)
- ▷ Les différents types de cristaux (métallique, ionique, covalent, moléculaire)

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer la population, la coordinence, la compacité d'une structure cristalline
- ▷ Calculer la masse volumique d'un matériau à partir d'une structure cristalline
- ▷ Localiser et dénombrer les sites interstitiels tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC, et déterminer leur habitabilité
- ▷ Positionner dans le tableau périodique et reconnaître métaux et non-métaux
- ▷ Relier les caractéristiques d'une structure cristalline aux propriétés macroscopiques du solide correspondant

■■ Résumé de cours

■ Description d'un solide cristallin

❑ État cristallin

L'état solide est un état physique condensé, avec de fortes interactions entre les entités qui le constituent. Selon le degré d'organisation microscopique des solides, on distingue en général :
– les solides **amorphes**, dans lesquels l'arrangement des entités est totalement désordonné ;
– les solides **cristallins**, constitués d'un arrangement ordonné d'entités dans l'espace ;
– les solides **semi-cristallins**, dans lesquels seules certaines zones sont ordonnées.
La plupart des solides cristallins sont en réalité **polycristallins** : ils sont constitués d'un assemblage de cristaux, de tailles, de formes et d'orientations variées.
Un corps pur peut présenter des structures cristallines différentes, dites **variétés allotropiques**.

❑ Modèle du cristal parfait

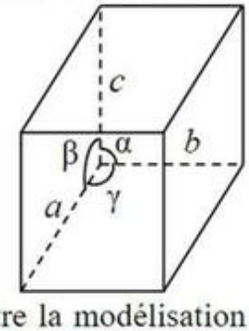
Un **cristal parfait** est modèle idéal constitué d'un arrangement infini, périodique, donc parfaitement ordonné, d'entités.

Description de la structure cristalline

Les positions des entités sont distribuées de façon périodique dans les trois dimensions : elles occupent les **nœuds** d'un **réseau cristallin**. On appelle **motif** la description de l'agencement des entités constitutives du cristal (atomes, ions, molécules).
La structure cristalline peut ainsi être décrite à l'aide de la connaissance du réseau et du motif.

Maille

La maille est l'unité de base permettant de reconstruire le cristal par translation selon les directions des axes cristallins. Trois longueurs (a, b, c) – les **paramètres de maille** – et trois angles (α, β, γ) permettent de décrire la maille. Le volume de la maille dépend de ces six grandeurs.



Le cristal parfait peut être ainsi décrit comme *un assemblage de mailles parallélépipédiques*.
La connaissance des caractéristiques d'une maille permet de faire le lien entre la modélisation *microscopique* du cristal et les propriétés *macroscopiques* du solide correspondant.

Modèle des sphères dures

Chaque entité chimique constitutive d'un cristal est modélisée par une **sphère dure**, indéformable et impénétrable, de rayon r. Ce rayon est, selon la nature du cristal étudié :
– le **rayon métallique** de l'atome dans un cristal métallique, défini comme la demi-distance entre les noyaux de deux atomes plus proches voisins dans le cristal ;
– le **rayon covalent** de l'atome dans un cristal covalent, défini comme la demi-distance entre les noyaux de deux atomes liés par une liaison covalente ;
– le **rayon ionique** dans un cristal ionique, la distance entre un anion et un cation voisins étant la somme de leurs rayons ioniques (le rayon ionique est donc une grandeur relative) ;

– le **rayon de Van der Waals** dans un cristal moléculaire, la distance entre deux molécules plus proches voisines étant la somme de leurs rayons de Van der Waals.
L'ordre de grandeur de tous ces rayons est de 10^{-10} m.
Les espaces restants entre les sphères sont appelés **sites interstitiels** : des atomes d'autres éléments peuvent venir s'y loger.

Population de la maille

Il s'agit du nombre N d'entités (atomes, motifs ioniques, molécules) présentes dans la maille, en tenant compte du fait qu'une entité peut être partagée entre plusieurs mailles voisines.

⇨ **Méthode 25.1. Déterminer la population d'une maille**

Coordinence

C'est le nombre de plus proches voisins d'une sphère donnée.

Compacité

La compacité C est le rapport du volume occupé par les entités (modélisées par des sphères) sur le volume total de la maille.

⇨ **Méthode 25.2. Déterminer la compacité d'une structure**

Masse volumique

L'expression de la masse volumique est : $$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{N \cdot M}{\mathcal{N}_A \cdot V}$$

où M est la masse molaire des entités constitutives du cristal, V le volume d'une maille, N la population de la maille et $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ la constante d'Avogadro.

⇨ **Méthode 25.3. Déterminer la masse volumique d'un cristal**

Condition de contact

Selon la direction selon laquelle s'effectue le contact entre les sphères modélisant les entités, il est possible d'établir la relation entre le rayon r de la sphère et les paramètres de la maille.

⇨ **Méthode 25.4. Relier le rayon des sphères au paramètre de maille**

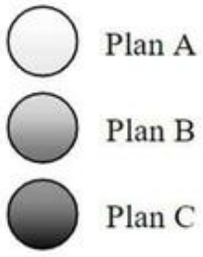
❑ Limites du modèle du cristal parfait

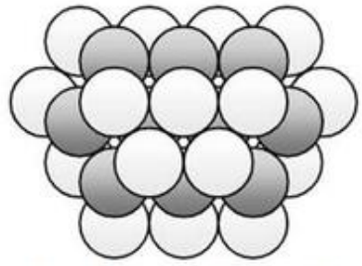
Le cristal parfait n'est qu'un modèle. Un cristal réel n'est pas infini, et comporte des défauts (défauts ponctuels, dislocations…). Un défaut ponctuel peut être dû à l'absence d'une entité (lacune), à l'insertion d'une entité dans le réseau cristallin (défaut interstitiel), ou à la substitution d'une entité par une autre. La modification locale de l'arrangement tridimensionnel des entités du cristal modifie les propriétés macroscopiques du solide.

■ Empilement compact de sphères identiques

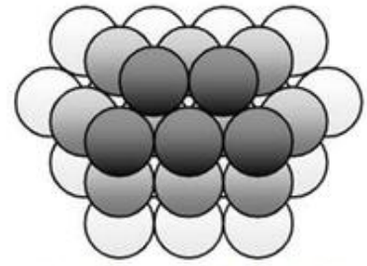
❑ Modèles d'empilement compact

Un empilement **compact** maximise les contacts entre sphères et minimise le volume. Dans un plan compact, une sphère est tangente à six sphères voisines. Un empilement compact est obtenu en empilant des plans compacts successifs, un plan se positionnant dans les creux formés par le plan précédent. Il y a deux types principaux d'empilements compacts.





Empilement ABABAB



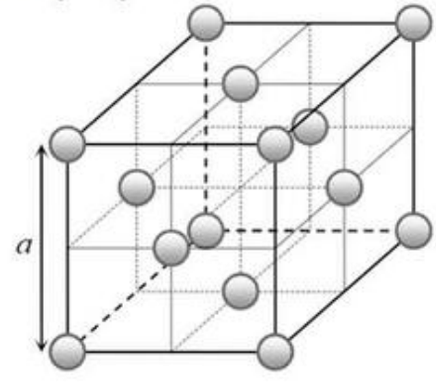
Empilement ABCABC

Coordinence et compacité

Pour les assemblages compacts la coordinence est de 12, la compacité est $C = 0,74$ (soit 74 %).

❑ Maille conventionnelle cubique à face centrée (CFC)

Les entités sont situées aux sommets du cube et au centre des faces.
Le paramètre de maille a permet de décrire la structure.
La condition de contact entre atomes s'écrit $4r = a\sqrt{2}$.
Cet empilement est parfois nommé *cubique compact* ; il correspond au modèle ABCABC ci-dessus (les plans étant obliques sur cette figure).

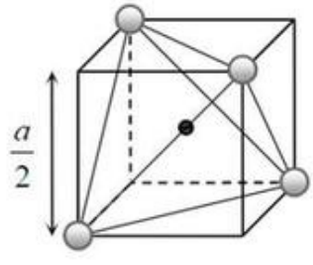


❑ Sites interstitiels de la structure CFC

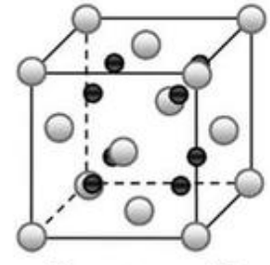
Site tétraédrique

On peut décomposer la structure CFC en huit cubes d'arête $a/2$. Le centre de chaque cube (en noir sur les schémas ci-dessous) correspond à un site tétraédrique. Il y a huit sites tétraédriques par maille. Le rayon maximal d'un atome pouvant s'insérer dans un site tétraédrique est $r_t = \left(\sqrt{3/2} - 1\right)r \approx 0,225r$.

Visualisation d'un site tétraédrique

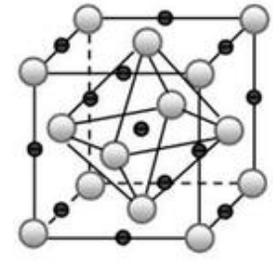


Position des sites tétraédriques dans la maille CFC



Site octaédrique

Le centre de la maille CFC est dans un environnement octaédrique, de même que le milieu de chaque arête, avec la participation des mailles ayant cette arête en commun. Il y a quatre sites octaédriques par maille. Le rayon maximal d'un atome pouvant s'insérer dans un site octaédrique est $r_o = \left(\sqrt{2} - 1\right)r \approx 0,414r$.

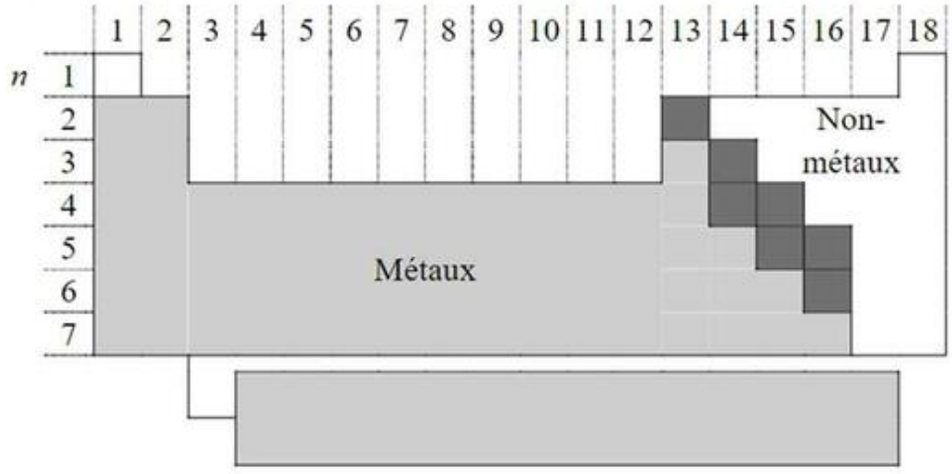


⇨ **Méthode 25.5. Déterminer la dimension des sites interstitiels**

■ Métaux

❑ Métaux et liaison métallique

Les éléments positionnés dans la partie gauche du tableau périodique (en gris clair ci-dessous) sont des **métaux**. À température ambiante et sous pression atmosphérique, ils sont stables à l'état solide (à l'exception du mercure). Ils possèdent une faible électronégativité, associée à un caractère réducteur. Les corps simples issus des **non-métaux** (en blanc ci-dessous) sont en général de bons isolants et possèdent plutôt un caractère oxydant.



La cohésion d'un cristal métallique est assurée par la nature de la **liaison métallique**. Dans un modèle simple, les électrons de valence des atomes sont délocalisés sur l'ensemble du cristal (**gaz d'électrons**), interagissant avec les cations métalliques situés aux nœuds du réseau.

❑ Propriétés macroscopiques des métaux

La liaison métallique est forte (énergie de 100 à 800 $kJ \cdot mol^{-1}$) et non directionnelle. Elle est à l'origine de certaines propriétés macroscopiques des métaux :

- température de fusion élevée ;
- conductivités électrique et thermique élevées (grâce aux électrons délocalisés) ;
- propriétés mécaniques de dureté (résistance à la pénétration), de malléabilité (aptitude à la déformation sans se rompre) et de ductilité (aptitude au laminage et au filage) ;
- propriétés optiques d'opacité et de pouvoir réflecteur.

■ Solides macrocovalents et moléculaires

❑ Propriétés macroscopiques des solides covalents

La cohésion des cristaux covalents est assurée par des liaisons covalentes fortes (énergie de 200 à 800 $kJ \cdot mol^{-1}$) et directionnelles entre atomes. La nature des liaisons est à l'origine de certaines propriétés macroscopiques des solides covalents : température de fusion élevée ; faible conductivité électrique en général ; dureté.

Exemple

Le carbone possède plusieurs variétés allotropiques : le diamant est un solide covalent, le graphite peut être considéré comme tel mais met aussi en jeu des interactions de Van der Waals.

❑ Propriétés macroscopiques des solides moléculaires

La cohésion des cristaux moléculaires est assurée par des interactions faibles, mettant en jeu des énergies de l'ordre de 5 à 10 $kJ \cdot mol^{-1}$ (interactions de Van der Waals, non directionnelles) ou de 10 à 30 $kJ \cdot mol^{-1}$ (liaison hydrogène, directionnelle). Ceci explique certaines propriétés macroscopiques de ces solides : température de fusion faible ; caractère isolant ; faible dureté.

Exemples

La glace $H_2O_{(s)}$ et la carboglace $CO_{2(s)}$ sont deux exemples de cristaux moléculaires.

■ Solides ioniques

❑ Modèle ionique parfait

– Deux éléments d'électronégativités différentes peuvent établir une liaison ionique, par transfert d'un ou plusieurs électrons de l'atome le moins électronégatif à l'atome le plus électronégatif. Les interactions électrostatiques entre ions assurent la cohésion du cristal ionique.

– La description de la maille cristalline se fait en général en considérant un réseau hôte d'anions, les cations se logeant dans les sites interstitiels de la structure. On définit généralement la coordinence d'un ion comme le nombre de plus proches voisins de signe opposé (coordinence de l'anion par rapport aux cations et coordinence du cation par rapport aux anions). La structure est d'autant plus stable que la coordinence est plus élevée.

Exemples

Parmi de nombreux cristaux ioniques, on peut citer des oxydes (Li_2O, MnO, TiO_2…), des halogénures (NaCl, CsCl, CaF_2…), ou encore des sulfures (ZnS, PbS…).

❑ Propriétés macroscopiques des solides ioniques

La liaison ionique est forte (énergie de 100 à 600 $kJ \cdot mol^{-1}$) et non directionnelle. Elle est à l'origine de certaines propriétés macroscopiques des solides ioniques : température de fusion élevée ; dureté ; solubilité dans un solvant polaire.

■■ Méthodes

■ Comment caractériser une structure cristalline ?

❑ Méthode 25.1. Déterminer la population d'une maille

Une entité peut appartenir à plusieurs mailles. Afin de déterminer combien d'entités appartiennent en propre à une maille, on doit compter :

- $\frac{1}{8}$ pour une entité au sommet d'une maille, qui participe à huit autres mailles
- $\frac{1}{4}$ pour une entité présente sur une arête
- $\frac{1}{2}$ pour une entité présente sur une face
- 1 pour une entité présente à l'intérieur de la maille.

⇨ Exercices 25.2, 25.3

La maille CFC contient 8 entités aux sommets et 6 entités sur les faces, soit $8\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{2}=4$ entités.

❑ Méthode 25.2. Déterminer la compacité d'une structure

- Déterminer le nombre N d'entités par maille, le volume V d'une maille, et le rayon r des sphères.
- Dans le modèle des sphères dures, la compacité vaut : $C=\dfrac{N\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{V}$.

⇨ Exercices 25.6, 25.8 à 25.12

Pour la maille CFC : $N=4, V=a^3$. De plus, la condition de compacité permet de déterminer la relation entre a et r : $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. On en déduit $C=\dfrac{4\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3}{a^3}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}\approx 0,74$.

❑ Méthode 25.3. Déterminer la masse volumique d'un matériau

- Déterminer le nombre N d'entités par maille et le volume V d'une maille.
- Déterminer la masse volumique $\rho = \dfrac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \dfrac{N \cdot M}{\mathcal{N}_A \cdot V}$.

⇨ Exercices 25.2, 25.3, 25.4 à 25.8, 25.11

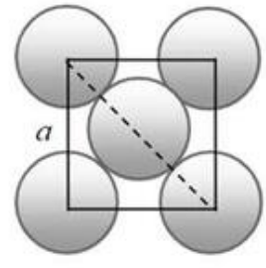
L'argent cristallise dans une maille CFC. Sa masse molaire atomique est $M_{Ag} = 108\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, et son rayon atomique $R_{Ag} = 144\ \text{pm}$. Pour une structure CFC, $N = 4$ et $V = a^3 = \left(\dfrac{4R_{Ag}}{\sqrt{2}}\right)^3$. Alors la masse volumique est $\rho = \dfrac{N \cdot M}{\mathcal{N}_A \cdot V} = \dfrac{4 \cdot 108 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \left(\dfrac{4 \cdot 144 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{2}}\right)^3} = 10{,}6 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

❑ Méthode 25.4. Relier le rayon des sphères au paramètre de maille

Déterminer la direction selon laquelle se fait le contact entre les sphères.
En déduire la relation entre le rayon des sphères et les paramètres de maille.

⇨ Exercices 25.2, 25.5

Pour la maille CFC : le contact se fait sur la diagonale d'une face (schéma ci-contre). La diagonale d'un carré de côté a étant de longueur $a\sqrt{2}$, on en déduit $4r = a\sqrt{2}$.



❑ Méthode 25.5. Déterminer la dimension des sites interstitiels

Représenter les sphères du réseau hôte constituant le site interstitiel.
En déduire une relation entre le rayon du site interstitiel, le rayon des sphères hôtes et les paramètres de maille.

⇨ Exercices 25.1, 25.2, 25.5

On cherche à déterminer l'habitabilité des sites interstitiels d'une maille CFC.

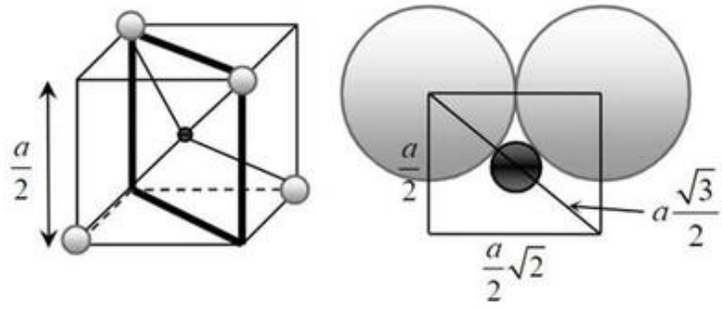
– Site tétraédrique : on représente la vue dans le plan diagonal d'un petit cube d'arête $\frac{a}{2}$.

En notant r le rayon des sphères et r_t le rayon du site tétraédrique, on obtient la relation suivante :

$$a\frac{\sqrt{3}}{4} = r + r_t .$$

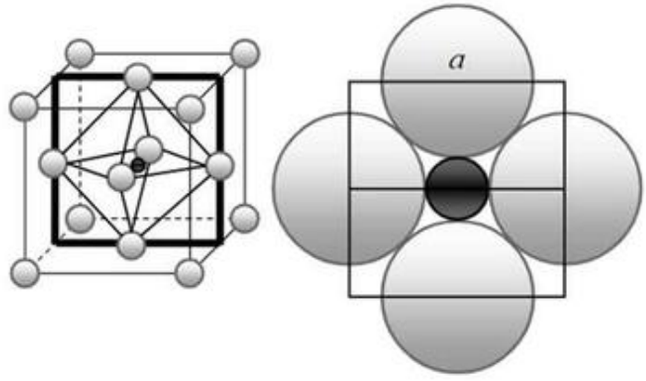
Sachant que $4r = a\sqrt{2}$, on obtient finalement :

$$r_t = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) \cdot r \approx 0{,}225 \cdot r .$$



– Site octaédrique : on représente la vue dans le plan médian.

On note r_o le rayon du site octaédrique. On obtient directement $2r + 2r_o = a$, ce qui donne, avec la condition de compacité $4r = a\sqrt{2}$, $r_o = \left(\sqrt{2} - 1\right) r \approx 0{,}414 \cdot r$.



■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Dans une structure compacte, la coordinence est égale à 12.	☐	☐
2.	Dans la détermination de la population d'une maille, une entité sur un sommet de la maille compte pour 1/4.	☐	☐
3.	La population d'une maille cubique à faces centrées est égale à 14.	☐	☐
4.	Il y a un site tétraédrique au centre de la maille cubique à faces centrées.	☐	☐
5.	La compacité d'une structure cristalline constituée d'entités identiques ne peut pas être supérieure à 0,74.	☐	☐
6.	Les constantes physiques élevées d'un métal peuvent être reliées à la force de la liaison métallique.	☐	☐
7.	La liaison métallique est directionnelle.	☐	☐
8.	Au sein d'un cristal ionique, les interactions anion/cation sont maximisées et les interactions anion/anion et cation/cation minimisées.	☐	☐
9.	Le graphite et le diamant sont des variétés allotropiques du carbone.	☐	☐
10.	Les solides ioniques ont généralement des températures de fusion élevées.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

Donnée commune à tous les exercices : constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$.

■ Cristaux métalliques

❑ Exercice 25.1. Structure du plomb

Le plomb ($M_{Pb} = 207{,}2\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$) cristallise dans un réseau cubique à faces centrées de paramètre de maille $a = 495$ pm. On mesure une masse volumique de $\rho = 11{,}34\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

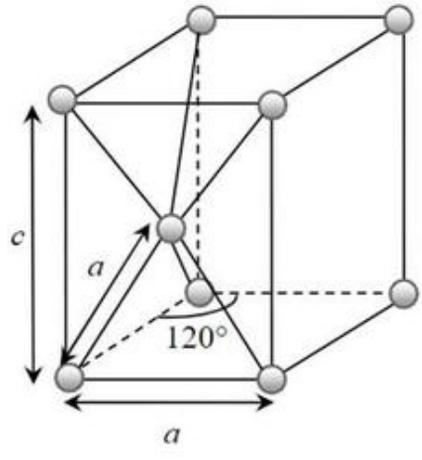
1. Quel type de liaison est mis en jeu ? Donner les caractéristiques d'une telle liaison.

2. Calculer le rayon atomique r_{Pb} du plomb.

3. Donner la position et calculer le rayon des sites interstitiels dans cette structure.

❑ Exercice 25.2. Cristal de magnésium*

Le magnésium cristallise dans une structure hexagonale compacte (HC). La maille est un prisme droit à base losange, caractérisé par les paramètres de maille a (longueur d'un côté du losange) et c (hauteur du prisme). Les positions des atomes sont indiquées sur le schéma ci-contre.



Le rayon atomique du magnésium est de 160 pm, sa masse molaire atomique est $M_{Mg} = 24{,}3\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

1. a) Déterminer la population de la maille.

b) Déterminer la valeur du paramètre de maille a.

c) Montrer qu'il existe une relation entre a et c à l'aide du schéma de la maille. En déduire la valeur de c.

d) Calculer le volume de la maille HC et en déduire la masse volumique du magnésium.

2. Que peut-on prévoir concernant l'habitabilité des sites interstitiels de la structure HC, par comparaison avec la structure CFC ?
Mettre en évidence un site interstitiel tétraédrique contenu dans la maille.

❑ Exercice 25.3. Étude de la structure cubique centrée

Le sodium ($M_{Na} = 23{,}0\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$) cristallise dans une structure cubique centrée. La maille est cubique, de paramètre de maille a, et comporte un atome à chaque sommet et un atome au centre du cube.

1. Dessiner schématiquement cette structure. Déterminer la population d'une maille, ainsi que la coordinence de cette structure. Quelle est la relation entre le paramètre de maille a et le rayon métallique ?

2. On détermine la densité du sodium cristallisé : $d_{Na} = 0{,}968$.

a) En déduire la valeur du paramètre de maille et du rayon atomique du sodium.

b) Comment évoluerait la masse volumique si la maille devenait plus compacte, sous l'influence de la pression par exemple ? Déterminer la masse volumique ρ' d'une structure CFC du sodium.

❑ Exercice 25.4. Le cuivre et ses alliages

Le cuivre peut être utilisé pur, notamment dans des pièces exploitant sa haute conductivité électrique, ou bien en alliage, tel que le laiton (cuivre–zinc) ou le bronze (cuivre–étain).

1. Le cuivre pur cristallise dans un réseau cubique compact (CFC). Représenter la maille, déterminer la population de la maille, la coordinence et la compacité de la structure. La masse volumique du cuivre étant $\rho_{Cu} = 8960\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, déterminer le paramètre de maille a, puis en déduire la valeur du rayon atomique r_{Cu}.

2. Lorsqu'un atome a un rayon atomique voisin de celui du cuivre, il peut former des alliages dits de substitution, où l'atome remplace un ou plusieurs atomes de cuivre par maille.

a) L'alliage Cu–Ag est utilisé pour augmenter la résistance à la température du matériau. Dans cette structure, les atomes d'argent remplacent les atomes de cuivre aux sommets de la maille CFC.
Faire un schéma de la maille. Quelle est la stœchiométrie de l'alliage ? Déterminer le nouveau paramètre de maille a' ainsi que la masse volumique ρ' de l'alliage.

b) Le laiton, alliage Cu–Zn, est l'alliage le plus fabriqué. Il permet d'augmenter la résistance mécanique et la dureté du cuivre, mais diminue la densité et la conductivité thermique. La structure du laiton peut être décrite par un réseau cubique hôte d'atomes de cuivre, avec un atome de zinc au centre du cube. Faire un schéma de la maille. Déterminer le nouveau paramètre de maille a'' et la masse volumique ρ'' du laiton.

c) Les différences structurales induites par la substitution sont responsables d'une modification des propriétés de conduction électrique et de résistance mécanique. Proposer une explication.

Données : masse molaires $M_{Cu} = 63{,}5\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{Ag} = 108\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{Zn} = 65{,}4\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; rayons métalliques $r_{Ag} = 144\ \text{pm}$, $r_{Zn} = 134\ \text{pm}$.

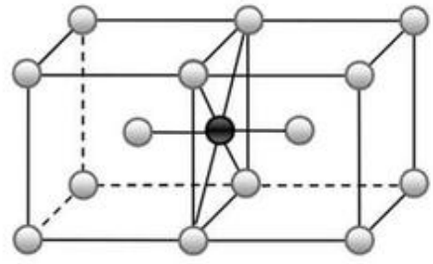
❑ Exercice 25.5. Chimie du fer et de l'acier* *

Le fer α cristallise dans une structure cubique centrée, où les atomes de fer occupent tous les sommets et le centre d'une maille cubique.
Cette structure est représentée par le célèbre Atomium de Bruxelles, conçu par l'ingénieur André Waterkeyn et réalisé par les architectes André et Jean Polak, pour l'Exposition universelle de 1958.



1. Sachant que la masse volumique du fer α est $\rho_{Fe\alpha} = 7868\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, déterminer le rayon atomique du fer dans cette structure.

2. On s'intéresse maintenant aux sites interstitiels de cette structure. Afin de mieux les visualiser, on représente sur un schéma la position des atomes dans deux mailles adjacentes.



a) Sur la représentation ci-contre, un site interstitiel a été mis en évidence (en noir). De quel type de site s'agit-il ? Le polyèdre associé est-il régulier ?

b) On trouve un autre site interstitiel au centre de l'octaèdre défini par les deux extrémités d'une arête et les centres des quatre cubes ayant cette arête en commun. Mettre en évidence ce type de site sur un schéma.

c) Calculer le nombre de sites octaédriques dans une maille. Déterminer la taille de ces sites.

d) Sachant qu'un site tétraédrique se situe au centre du polyèdre délimité par deux atomes centraux et deux atomes d'une même arête, et que le site tétraédrique se situe sur une face, déterminer la position, le nombre et le rayon des sites tétraédriques dans la structure.

3. L'insertion de carbone dans le fer α permet de former un alliage appelé ferrite. Le carbone a un rayon atomique de 77 pm.

a) Le carbone peut-il s'insérer dans un site interstitiel ?

b) On suppose que toutes les mailles subissent la même expansion lorsqu'un atome de carbone s'insère dans le cristal de fer. Quelle valeur prend alors le paramètre de maille lorsque l'atome de carbone s'insère dans un site octaédrique ? Quelle variation relative de volume cela entraîne-t-il ?

Donnée : $M_{Fe} = 55{,}8\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

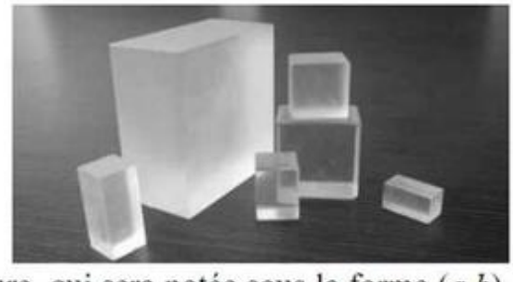
D'après E3A-Polytech

■ Cristaux ioniques

❑ Exercice 25.6. Iodure de césium

L'iodure de césium CsI est un cristal utilisé dans des détecteurs à scintillation, car il présente dans certaines conditions la propriété de phosphorescence.

Il possède une structure cristalline où les ions iodure I^- occupent les sommets d'une maille cubique et un ion Cs^+ le centre de la maille.



1. Dessiner la maille. Donner la coordinence de la structure, qui sera notée sous la forme (a,b), avec a la coordinence du cation par rapport aux anions et b la coordinence de l'anion par rapport aux cations.

2. La densité vaut $d_{CsI} = 4{,}570$. En déduire la valeur du paramètre de maille a, connaissant les masses molaires atomiques $M_I = 127\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Cs} = 133\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Cette valeur est elle compatible avec les rayons ioniques $r_{Cs^+} = 169\ \text{pm}$ et $r_{I^-} = 220\ \text{pm}$?

3. Calculer la compacité du cristal.

❑ Exercice 25.7. Oxyde de nickel * *

L'oxyde de nickel NiO cristallise selon un réseau CFC d'ions O^{2-}, avec occupation de tous les sites octaédriques par les ions Ni^{2+}.

1. Dessiner la maille. Quelle est la nature du polyèdre de coordination de chacun des ions ? Quel type de liaison est mis en jeu ?

2. La masse volumique de NiO vaut $6{,}910\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$; en déduire la valeur du paramètre de maille. Comparer à la valeur calculée à partir des rayons ioniques des ions Ni^{2+} ($r_+ = 69$ pm) et O^{2-} ($r_- = 140$ pm). On donne également $M_{Ni} = 59{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M_O = 16{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

3. Quelle condition doit satisfaire le rapport des rayons du cation et de l'anion $\frac{r_+}{r_-}$ pour qu'un cristal ionique de stœchiométrie 1 : 1 (1 anion pour 1 cation) puisse adopter une telle structure ? Cette condition est-elle vérifiée pour NiO ?

D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 25.8. Chlorure de cuivre(I)

La structure du chlorure de cuivre(I) peut être décrite par un réseau CFC d'anions, les cations occupant un site tétraédrique sur deux (en alternance).

1. Dessiner la maille correspondante.

2. Déterminer la population de la maille et la coordinence de l'anion et du cation dans cette structure. Le taux d'occupation est le pourcentage de sites occupés par rapport aux sites disponibles. Quel est le taux d'occupation des cations Cu^+ ?

3. On donne les rayons ioniques du cation $r_+ = 96{,}0$ pm et de l'anion $r_- = 181$ pm. Déterminer le paramètre de maille a, la compacité de la structure et la masse volumique du chlorure de cuivre(I).

Données : $M_{Cu} = 63{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M_{Cl} = 35{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 25.9. Le trioxyde de tungstène

Le trioxyde de tungstène WO_3 solide est, en première approximation, un oxyde ionique. Il présente une structure cubique telle que les ions tungstène W^{6+} occupent les sommets de la maille et les ions oxyde O^{2-} le milieu des arêtes. On note a le paramètre de maille.

1. Dessiner une maille et vérifier la stœchiométrie du cristal.

2. On admet une tangence anion-cation. Calculer la compacité du cristal WO_3. Conclure.

3. Le centre du cube et les centres des faces de la maille dessinée au **1** sont vides.

a) Calculer le rayon maximal des cations M^+ qui pourraient s'insérer dans ces deux sites sans déformation de la structure.

b) On observe expérimentalement que les cations M^+ (où M peut être H, Li, Na, K) peuvent s'insérer dans le cristal et qu'ils s'insèrent tous dans le même type de site. En déduire le type de site occupé.

Espèce	H^+	Li^+	Na^+	K^+	O^{2-}	W^{6+}
Rayon ionique (pm)	10^{-3}	78,0	98,0	133	132	62,0

D'après Centrale-Supélec

■ Cristaux covalents

❑ Exercice 25.10. Le silicium

Le silicium cristallise dans une structure de type « diamant ». Les atomes de silicium forment un réseau cubique à faces centrées, avec occupation d'un site tétraédrique sur deux par un atome de silicium.

1. Dessiner la maille correspondante. Déterminer la population d'une maille, la coordinence, ainsi que la compacité de la structure.

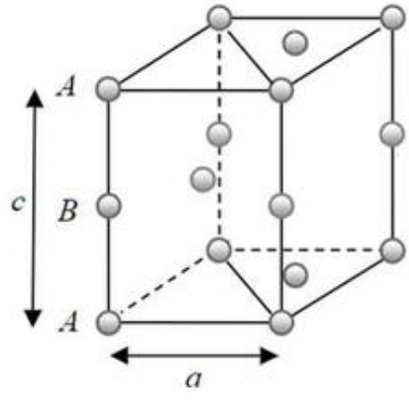
2. La masse volumique du silicium est de $2329\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Déterminer le rayon de covalence du silicium, ainsi que le paramètre de maille de la structure.

3. Déterminer la position, le nombre et le rayon des sites interstitiels tétraédriques et octaédriques vacants de cette structure.

Donnée : $M_{Si} = 28{,}1\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 25.11. Le carbone graphite

Le carbone graphite est constitué d'un empilement de feuillets, dans lesquels la structure est hexagonale et régulière. Les plans A et B sont distants de 335 pm. La plus courte distance séparant deux atomes de carbone d'un même plan est de 142 pm.



1. Quelle est la coordinence du carbone dans cette structure ?

2. Déterminer la valeur des paramètres de maille a et c.

3. Déterminer la compacité du carbone graphite, ainsi que sa masse volumique.

Donnée : $M_C = 12{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

■ Cristaux moléculaires

❑ Exercice 25.12. Structure de la carboglace

À 195 K, le dioxyde de carbone se solidifie dans une structure cristalline appelée carboglace.

1. Rappeler la géométrie de la molécule de dioxyde de carbone CO_2.

2. Les atomes de carbone occupent un réseau CFC, de paramètre de maille $a = 558\ \text{pm}$. Les molécules s'orientent ensuite selon les diagonales des faces du cube.

a) Représenter cette maille. Déterminer la population d'une maille.

b) Déterminer la distance d entre deux atomes de carbone voisins. Commenter cette valeur, par comparaison avec la longueur de la liaison C=O dans la molécule de CO_2 : $d_{C=O} = 120\ \text{pm}$.

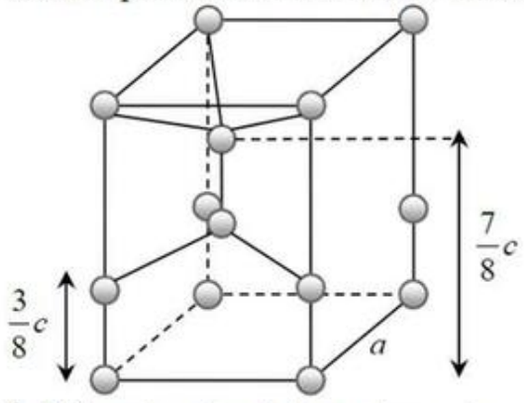
3. Déterminer la compacité de cette structure. On considèrera que le modèle des sphères dures s'applique aux atomes et non à la molécule.

4. Déterminer la densité de la carboglace.

Données : $M_C = 12{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M_O = 16{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $r_C = 77{,}0\ \text{pm}$; $r_O = 73{,}0\ \text{pm}$.

❑ Exercice 25.13. Étude de la glace**

La glace est présente sous plusieurs variétés allotropiques. À 273 K et sous 1 bar, l'eau se solidifie pour donner la structure cristalline appelée glace I, de densité 0,92.

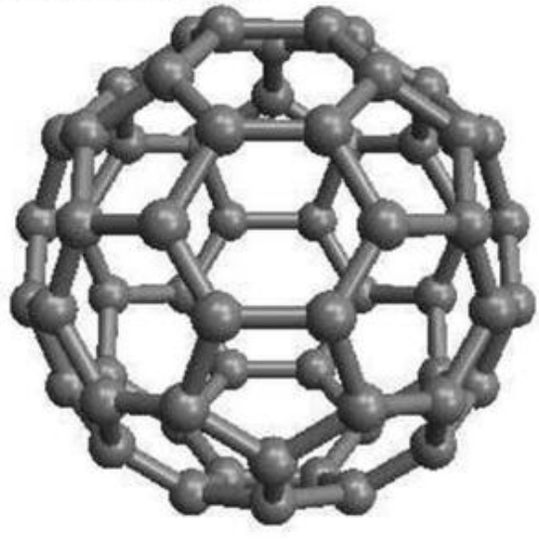


On donne la représentation de sa structure tridimensionnelle ci-contre.
Pour plus de clarté, on a uniquement représenté les atomes d'oxygène.
Il s'agit d'une structure de type hexagonal compact, de paramètres de maille a et c, avec occupation d'un site tétraédrique sur deux.

1. Déterminer la relation entre c et a.
2. Combien de molécules d'eau sont contenues dans une maille ?
3. À partir de la valeur de la densité, déterminer la distance l entre deux atomes d'oxygène.
4. Chaque atome d'oxygène est entouré de quatre atomes d'hydrogène, dont deux sont liés à O par une liaison covalente, avec $l_{O-H} = 96$ pm.
a) Dessiner l'environnement local d'un atome d'oxygène.
b) En déduire la distance d entre un atome O et un atome H non liés de façon covalente.
c) Conclure sur les interactions responsables de la cohésion de la glace.

❑ Exercice 25.14. Insertion dans un cristal de fullerène**

Les *fullerènes* sont des variétés polymorphes du carbone, nommées en hommage à l'ingénieur et philosophe Richard Buckminster Fuller, qui a construit un dôme géodésique pour l'Exposition universelle de Montréal de 1967. Le premier fullerène a été découvert en 1985 en faisant jaillir un arc électrique entre deux tiges de carbone dans une atmosphère partiellement composée d'hélium. Il existe plusieurs variétés de fullerènes selon le nombre d'atomes de carbone dans la structure. Nous allons nous limiter ici au fullerène C_{60}, molécule pratiquement sphérique appelée aussi *footballène* (car elle comporte 20 hexagones et 12 pentagones, comme un ballon de football).



À température ambiante, l'état stable du carbone C_{60} est un cristal moléculaire cubique à faces centrées de densité 1,744. L'insertion de potassium dans ce cristal peut conduire au composé K_3C_{60} : le buckide de potassium.

Déterminer si le potassium est dans ce cristal sous forme d'ions ou d'atomes.

Données : $r_K = 230$ pm et $r_{K^+} = 130$ pm.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 25.7. Question 3 : penser à déterminer le rapport limite minimal r_+/r_- pour une structure de coordinence (6,6) ; il s'agit du rapport limite maximal r_+/r_- pour une structure de coordinence (8,8).
Exercice 25.13. Question 4.a : les trois atomes participant à la liaison hydrogène sont alignés.
Exercice 25.14. Attention, les entités constitutives du cristal sont des molécules de C_{60}, et non des atomes de carbone.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai

2. Elle compte pour 1/8.

3. Il y a $8\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{2}=4$ entités dans une maille CFC (les entités situées sur des sommets ou des faces sont partagées par plusieurs mailles, il faut en tenir compte dans le calcul).

4. Il y a un site octaédrique au centre de la maille cubique à faces centrées.

5. Il s'agit d'une caractéristique d'un empilement compact de sphères identiques.

7. Dans un métal, les électrons sont délocalisés sur l'ensemble de la structure, et la liaison forte électrons/cations qui assure la cohésion du cristal n'est pas directionnelle.

❑ Les erreurs classiques

– Faire attention aux unités lors des applications numériques, notamment avec les masses molaires ($g\cdot mol^{-1}$), les rayons (pm) et la masse volumique ($kg\cdot m^{-3}$ ou $g\cdot cm^{-3}$ selon les énoncés).
– Lors du calcul de la population d'une maille, ne pas oublier de tenir compte de la participation d'une entité à plusieurs mailles (si elle est sur une face, sur une arête ou sur un coin).
– Dans les exercices, l'expression « cubique compact » fait référence à une structure CFC, et non cubique centrée ou cubique simple.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 25.1

1. Le plomb est un élément métallique, et possède une faible électronégativité. La cohésion du cristal de plomb est donc assurée par la liaison métallique, forte et non directionnelle.

2. Dans la structure CFC, les atomes sont tangents selon la diagonale d'une face de la maille cubique. On a donc : $4 \cdot r_{Pb} = a\sqrt{2}$, soit $\boxed{r_{Pb} = 175 \text{ pm}}$.

⇨ *Méthode 25.4*

3. Les sites tétraédriques sont situés au centre des cubes d'arête $\frac{a}{2}$ contenus dans la maille. On décompte 8 sites tétraédriques par maille.

En notant r_t le rayon du site tétraédrique, on obtient la relation suivante : $a\frac{\sqrt{3}}{4} = r_{Pb} + r_t$.

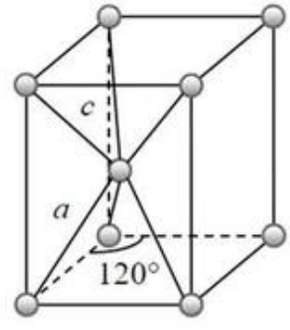
Sachant que $4r_{Pb} = a\sqrt{2}$, on obtient $\boxed{r_t = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) \cdot r_{Pb} = 0{,}225 \cdot r_{Pb}}$. AN $\boxed{r_t = 39{,}3 \text{ pm}}$.

Les sites octaédriques sont situés au milieu des arêtes et au centre du cube. On décompte $12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4$ sites octaédriques par maille. En notant r_o le rayon du site octaédrique, on a $2r_{Pb} + 2r_o = a$ soit $\boxed{r_o = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot r_{Pb}}$. AN $\boxed{r_o = 72{,}5 \text{ pm}}$.

⇨ *Méthode 25.5*

Exercice 25.2

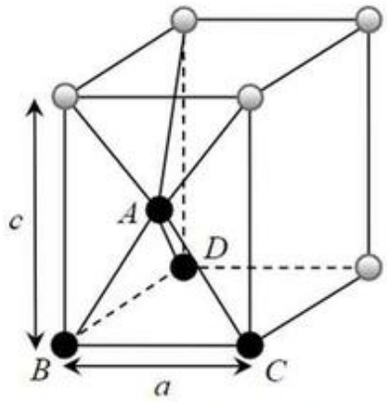
1. a) La maille HC est représentée ci-contre.

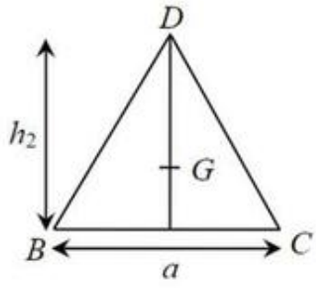


La maille HC contient 8 entités aux sommets, 1 entité à l'intérieur, soit une population de $8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2$ entités.

b) Le contact entre les sphères se fait selon une arête de la base du prisme, on a donc $a = 2r$. AN $\boxed{a = 320 \text{ pm}}$.

c) Pour déterminer la relation liant c à a, on doit considérer le tétraèdre formé par les sphères A, B, C et D (voir page suivante). La projection orthogonale de A sur le triangle équilatéral BCD est notée G.





On note h_1 la longueur AG et h_2 la hauteur du triangle équilatéral BCD. Alors $c = 2h_1$, $h_2 = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $DG = \dfrac{2}{3}h_2$. AGD étant un triangle rectangle, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $a^2 = h_1^2 + \left(\dfrac{2}{3}h_2\right)^2$. On en déduit $h_1 = \sqrt{a^2 - \dfrac{1}{3}a^2} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, d'où $\boxed{c = 2h_1 = 2a\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$.

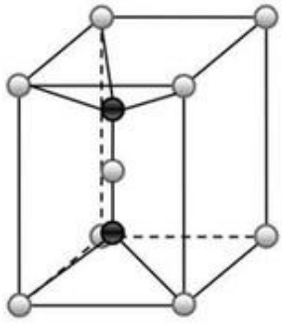
AN $\boxed{c = 523 \text{ pm}}$.

d) Pour calculer le volume de la maille HC, on multiplie l'aire de la base $a^2 \sin(120°)$ par la hauteur c, soit $V = a^2 c \sin(120°)$. Or la détermination de la condition de compacité a conduit aux relations $c = 4\sqrt{\dfrac{2}{3}}r$ et $a = 2r$. On en déduit donc $V = 4r^2 \times 4\sqrt{\dfrac{2}{3}}r \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\boxed{V = 8\sqrt{2}\,r^3}$.

La masse volumique est égale à $\rho = \dfrac{N \cdot M_{Mg}}{\mathcal{N}_A \cdot V}$, avec une population égale à $N = 2$ atomes par maille. AN $\boxed{\rho = 1,74 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

⇨ *Méthodes 25.2, 25.3 et 25.4*

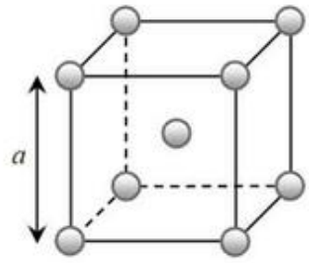
2. Les structures HC et CFC étant deux structures compactes, on peut prévoir que les sites interstitiels ont la même dimension : pour un site tétraédrique $r_t = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1\right) \cdot r$ soit pour le cristal de magnésium $\boxed{r_t = 36,0 \text{ pm}}$; pour un site octaédrique, $r_o = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot r$, soit $\boxed{r_o = 66,3 \text{ pm}}$ pour le cristal de magnésium. On distingue deux sites tétraédriques particuliers sur la maille HC, au centre de deux tétraèdres :



Il existe d'autres sites tétraédriques dans cette structure, situés sur les arêtes.

Exercice 25.3

1. La structure cubique centrée est représentée ci-contre. Elle comporte des atomes de sodium à chaque sommet et au centre du cube. On décompte donc $8\times\frac{1}{8}+1=2$ atomes par maille. L'atome central possède 8 plus proches voisins (situés aux sommets de la maille), la coordinence est donc de 8. Il ne s'agit donc plus d'une structure compacte.



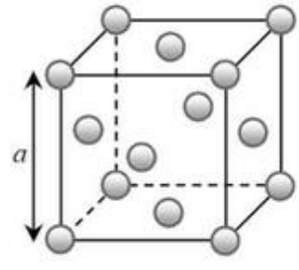
Le contact entre atomes se fait selon la diagonale du cube, de longueur $a\sqrt{3}$. On obtient donc $4\cdot r=a\sqrt{3}$.

2. a) La densité est égale à $d_{Na}=\frac{\rho_{Na}}{\rho_{eau}}=\frac{N\cdot M_{Na}}{\mathcal{N}_A\cdot V\cdot\rho_{eau}}$. Pour la structure cubique centrée, $V=a^3=\left(\frac{4r_{Na}}{\sqrt{3}}\right)^3$. On en déduit $r_{Na}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{N\cdot M_{Na}}{\mathcal{N}_A\cdot d_{Na}\cdot\rho_{eau}}\right)^{\frac{1}{3}}$. AN $\boxed{r_{Na}=186\text{ pm}}$ et $\boxed{a=429\text{ pm}}$.

b) Lorsque la maille devient plus compacte, le rapport de la masse des entités contenues dans une maille sur le volume de la maille augmente, donc la masse volumique augmente.
Si le sodium cristallise dans une structure CFC, comportant 4 atomes par maille, on a à présent $4\cdot r=a\sqrt{2}$. Alors $\boxed{\rho'=1{,}05.10^3\text{ kg.m}^{-3}}$. On observe bien une augmentation de la masse volumique.

Exercice 25.4

1.



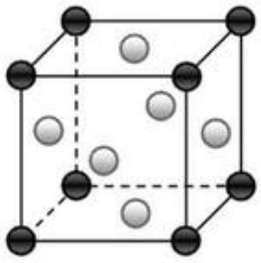
La structure CFC est représentée ci-contre. Elle comporte 4 atomes par maille. Un atome de cuivre a une coordinence de 12. La compacité vaut $C=\frac{4\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3}{a^3}=\frac{\pi\sqrt{2}}{6}\approx 0{,}74$.

La masse volumique est $\rho_{Cu}=\frac{N\cdot M_{Cu}}{\mathcal{N}_A\cdot a^3}$, d'où $\boxed{a=\sqrt[3]{\frac{N\cdot M_{Cu}}{\mathcal{N}_A\cdot\rho_{Cu}}}}$. AN $\boxed{a=361\text{ pm}}$.

On en déduit $r_{Cu}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. AN $\boxed{r_{Cu}=128\text{ pm}}$.

⇨ *Méthodes 25.2 et 25.4*

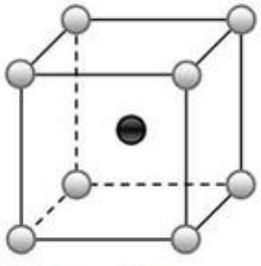
2. a)



Il y a trois atomes de cuivre et un atome d'argent par maille. Il s'agit de l'alliage Cu_3Ag. Selon la diagonale d'une face, $2 \cdot r_{Ag} + 2 \cdot r_{Cu} = a'\sqrt{2}$. Le nouveau paramètre de maille est $a' = 385\ \text{pm}$. On observe une expansion de la maille, due à la substitution du cuivre par un atome plus gros. La masse volumique est $\rho' = \dfrac{N_{Cu} \cdot M_{Cu} + N_{Ag} \cdot M_{Ag}}{\mathcal{N}_A \cdot V}$, avec $V = a'^3$.

AN $\boxed{\rho' = 8{,}71 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$. La masse volumique de l'alliage est inférieure à celle du cuivre pur.

b)



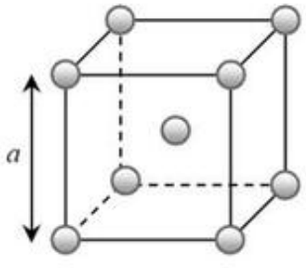
On décompte un atome de zinc et un atome de cuivre par maille, il s'agit bien de l'alliage CuZn. Selon la diagonale du cube, $2 \cdot r_{Zn} + 2 \cdot r_{Cu} = a''\sqrt{3}$, soit $a'' = 303\ \text{pm}$. La masse volumique est $\rho'' = \dfrac{N_{Cu} \cdot M_{Cu} + N_{Zn} \cdot M_{Zn}}{N_A \cdot V}$, avec $V = a''^3$.

AN $\boxed{\rho'' = 7{,}73 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

c) Les exemples précédents montrent qu'il y a déformation de la maille. Par conséquent la circulation des électrons est affectée, ce qui entraîne une modification des propriétés de conduction électrique du matériau. Par ailleurs, si les déformations de la maille limitent le glissement des plans d'atomes les uns par rapport aux autres, le matériau devient plus résistant d'un point de vue mécanique.

Exercice 25.5

1. La structure cubique centrée est représentée ci-contre.



On décompte $N = 2$ atomes par maille.

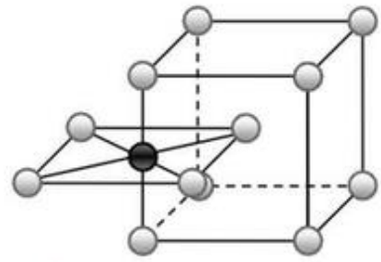
Il y a contact selon la diagonale du cube, la condition de compacité est donc $a\sqrt{3} = 4r$, soit $V = a^3 = \left(\dfrac{4r}{\sqrt{3}}\right)^3$.

La masse volumique est $\rho_{Fe\alpha} = \dfrac{N \cdot M_{Fe}}{\mathcal{N}_A \cdot V}$.

On en déduit $r = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{N \cdot M_{Fe}}{\mathcal{N}_A \cdot \rho_{Fe\alpha}}\right)^{1/3}$. AN $\boxed{r = 124\ \text{pm}}$.

2. a) Il s'agit d'un site octaédrique. Il ne s'agit pas d'un octaèdre régulier, puisque l'octaèdre possède 4 arêtes de longueur a (arête de la maille cubique) et 8 arêtes de longueur $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (demi-diagonale d'une maille).

b) On a représenté ci-contre le deuxième type de site octaédrique.



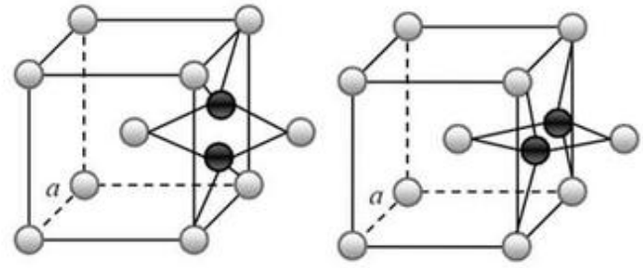
c) On décompte au total $6\times\frac{1}{2}+12\times\frac{1}{4}=6$ sites octaédriques.

On détermine le rayon maximal r_o de l'atome pouvant s'insérer dans un site octaédrique.

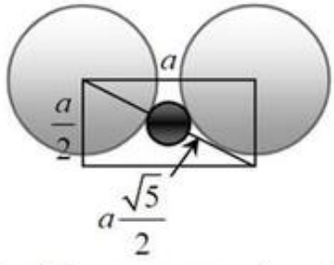
Il y a tangence selon l'arête : $2\cdot r_o+2\cdot r=a$. Or on a également $a=\frac{4r}{\sqrt{3}}$.

On obtient finalement $r_o=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\cdot r$, soit $\boxed{r_o=19{,}2\text{ pm}}$.

d) On dénombre quatre sites tétraédriques par face, comme représenté ci-contre. Au total, il y a $4\times6\times\frac{1}{2}=12$ sites tétraédriques.



Déterminons le rayon r_t d'un site tétraédrique. Considérons le rectangle de longueur a et de largeur $\frac{a}{2}$ représenté ci-dessous.



Selon la diagonale, $r_t+r=a\frac{\sqrt{5}}{4}=r\sqrt{\frac{5}{3}}$, d'où

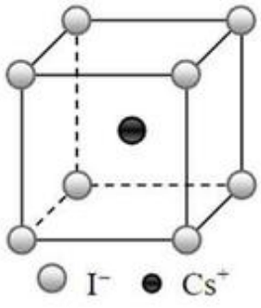
$$\boxed{r_t=\left(\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right)\cdot r=36{,}1\text{ pm}}.$$

3. a) Le rayon atomique du carbone est supérieur aux rayons des sites interstitiels tétraédriques et octaédriques. Le carbone s'insèrera par conséquent difficilement dans un cristal de fer, et préférentiellement dans un site tétraédrique. L'insertion du carbone entraînera une forte déformation de la structure cristalline.

b) Si les atomes de carbone s'insèrent dans les sites octaédriques, la relation obtenue au 2.c devient $r_{Fe}+r_C=\frac{a'}{2}$, avec a' la valeur du nouveau paramètre de maille. On obtient $a'=402\text{ pm}$. Soit V' le volume de la maille de l'alliage. La variation relative de volume est $\boxed{\frac{V'-V}{V}=1{,}75=175\ \%}$ (le volume a pratiquement triplé).

Exercice 25.6

1. La maille est représentée ci-contre. Le cation Cs^+ est entouré de huit anions, la coordinence a est de 8. De même, l'anion I^- est entouré de huit cations : la coordinence b est de 8. On a donc une coordinence (8,8).



2. La densité vaut $d = \dfrac{\rho_{CsI}}{\rho_{eau}}$, avec $\rho_{CsI} = \dfrac{N_I M_I + N_{Cs} M_{Cs}}{\mathcal{N}_A \cdot V}$. La maille comporte un ion iodure et $8 \times \dfrac{1}{8} = 1$ ion césium : $N_I = N_{Cs} = 1$.

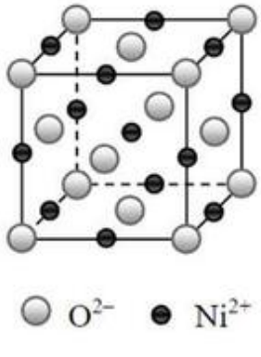
De plus, le volume de la maille cubique est $V = a^3$. Ainsi $a = \sqrt[3]{\dfrac{M_I + M_{Cs}}{\mathcal{N}_A \cdot \rho_{eau} \cdot d}}$. AN $\boxed{a = 455 \text{ pm}}$.

Considérons la ligne de contact selon la diagonale du cube : $2 \cdot r_{I^-} + 2 \cdot r_{Cs^+} = a\sqrt{3}$. On obtient une valeur du paramètre de maille a de 449 pm. On trouve une valeur légèrement inférieure à celle obtenue précédemment à l'aide de la valeur expérimentale de la masse volumique. Le faible écart traduit les limites du modèle ionique parfait.

3. Compacité : $C = \dfrac{1}{V}\left[N_I\left(\dfrac{4}{3}\pi r_{I^-}^3\right) + N_{Cs}\left(\dfrac{4}{3}\pi r_{Cs^+}^3\right)\right] = \dfrac{1}{a^3}\left[\dfrac{4}{3}\pi r_{I^-}^3 + \dfrac{4}{3}\pi r_{Cs^+}^3\right]$. AN $\boxed{C = 0{,}69}$.

Exercice 25.7

1. La maille d'oxyde de nickel est représentée ci-contre. Chaque ion est au centre d'un octaèdre. La cohésion du cristal est assurée par des liaisons ioniques entre les ions nickel et oxygène (la nature de la liaison est liée à la forte différence d'électronégativité entre le nickel et l'oxygène).



2. La masse volumique est $\rho = \dfrac{N_{Ni} M_{Ni} + N_O M_O}{N_A \cdot V}$. On compte $N_O = 8 \times \dfrac{1}{8} + 6 \times \dfrac{1}{2} = 4$ et $N_{Ni} = 1 + 12 \times \dfrac{1}{4} = 4$. Par ailleurs, $V = a^3$.

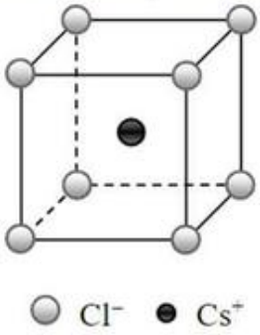
On en déduit $a = \sqrt[3]{\dfrac{4 \cdot (M_{Ni} + M_O)}{N_A \cdot \rho}}$. AN $\boxed{a = 416 \text{ pm}}$.

Considérons la ligne de contact selon l'arête du cube : $2 \cdot r_+ + 2 \cdot r_- = a$. On obtient une valeur du paramètre de maille a de 418 pm, voisine de la valeur déterminée précédemment. Le modèle ionique parfait semble adapté.

3. Le contact anion/cation selon l'arête du cube permet d'écrire $2 \cdot r_+ + 2 \cdot r_- = a$. La condition de non-contact anion/anion selon la diagonale d'une face permet d'écrire $r_- \leq a\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Si le rayon ionique de l'anion dépasse cette valeur, le système adoptera une structure cristalline de coordinence plus faible. On obtient finalement $\dfrac{r_+}{r_-} \geq \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414$.

Corrigé

Par ailleurs, si le rayon ionique de l'anion le permet, le système préfèrera adopter une structure de coordinence plus élevée, de type cubique centrée (CsCl). On doit donc déterminer la valeur limite du rayon anionique permettant de passer de la coordinence (8,8) à (6,6).



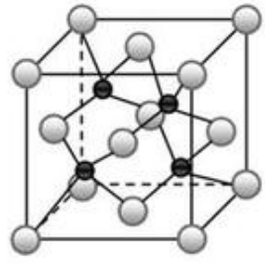
La structure cristalline de CsCl a été représentée ci-contre. La condition de non-contact anion-anion selon l'arête du cube s'écrit $r_- \geq \frac{a}{2}$. Ainsi, pour $r_- \geq \frac{a}{2}$, le système adoptera une structure de coordinence (6,6). De plus, le contact anion-cation selon la diagonale du cube donne $2r_+ + 2r_- = a\sqrt{3}$.

On obtient ainsi la borne supérieure de la coordinence (6,6) : $\frac{r_+}{r_-} \leq \sqrt{3} - 1 = 0,732$.

Pour qu'un cristal ionique adopte une structure de type NaCl, le rapport $\frac{r_+}{r_-}$ doit vérifier : $\boxed{\sqrt{2} - 1 \leq \frac{r_+}{r_-} < \sqrt{3} - 1}$ soit $\boxed{0,414 \leq \frac{r_+}{r_-} < 0,732}$. Pour NiO, $\frac{r_+}{r_-} = 0,493$: <u>la condition est vérifiée</u>.

Exercice 25.8

1. La structure du chlorure de cuivre(I) est représentée ci-contre.



2. Il y a $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ ions chlorure et 4 ions cuivre(I) par maille.

L'anion ainsi que le cation sont entourés de quatre plus proches voisins de signe opposé, la coordinence est de (4,4). Les cations occupent la moitié des sites tétraédriques, leur taux d'occupation est donc de 50 %.

3 Le contact anion-cation se fait selon la diagonale d'un petit cube d'arête $\frac{a}{2}$, donc $r_- + r_+ = a\frac{\sqrt{3}}{4}$ d'où $\boxed{a = \frac{4}{\sqrt{3}}(r_+ + r_-)}$.

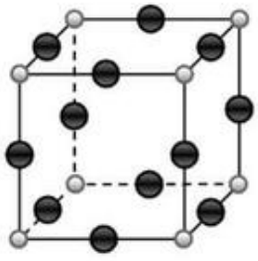
AN $\boxed{a = 640 \text{ pm}}$.

La compacité vaut $C = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi r_+^3 + 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r_-^3}{a^3}$. AN $\boxed{C = 0,44 \text{ (ou } 44\ \%)}$.

La masse volumique vaut $\rho = \frac{4M_{Cl} + 4M_{Cu}}{\mathcal{N}_A \cdot a^3}$. AN $\boxed{\rho = 2,51 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

Exercice 25.9

1. La maille est représentée ci-contre. Il y a $8\times\frac{1}{8}=1$ ion W^{6+} et $12\times\frac{1}{4}=3$ ions O^{2-} par maille. On retrouve la stœchiométrie WO_3.



W^{6+} O^{2-}

2. Le contact anion-cation se fait selon l'arête, d'où : $a=2\cdot r_- +2\cdot r_+$.

On peut calculer $a=2\cdot r_- +2\cdot r_+ =388$ pm.

Compacité : $C=\dfrac{\frac{4}{3}\pi r_+^3+3\frac{4}{3}\pi r_-^3}{a^3}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi r_+^3+3\frac{4}{3}\pi r_-^3}{(2r_- +2r_+)^3}$. AN $\boxed{C=0{,}51\ (51\ \%)}$.

3. a) Soit r le rayon maximal d'un cation pouvant s'insérer dans un site vacant. Le rayon de l'ion O^{2-} étant supérieur à celui de l'ion W^{6+}, c'est lui qui limite la taille de l'entité pouvant s'insérer dans les sites.

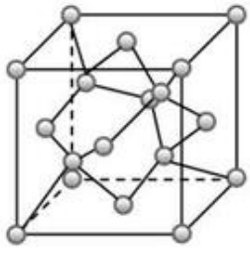
– Si le cation occupe le centre d'une face, la plus courte distance entre le cation M^+ et l'anion O^{2-} vaut $\frac{a}{2}$, d'où : $\boxed{r=\frac{a}{2}-r_- =62\text{ pm}}$.

– Si le cation occupe le centre du cube, la plus courte distance entre le cation M^+ et l'anion O^{2-} vaut $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, d'où : $\boxed{r=\frac{a\sqrt{2}}{2}-r_- =142\text{ pm}}$.

b) D'après les valeurs des rayons ioniques de H^+, Li^+, Na^+ et K^+, les cations s'insèrent au centre du cube.

Exercice 25.10

1. On a représenté ci-contre la structure cristalline du silicium. On compte $8\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{2}+4=8$ atomes de silicium par maille.



La coordinence est de 4.

Selon la diagonale d'un petit cube d'arête $\frac{a}{2}$, $2\cdot r=a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

La compacité est $C=\dfrac{8\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{16}$. AN $\boxed{C=0{,}34\ (34\ \%)}$.

2. On a $\rho_{Si}=\dfrac{8\cdot M_{Si}}{\mathcal{N}_A\cdot a^3}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot M_{Si}}{\mathcal{N}_A\cdot\rho_{Si}}}$. AN $\boxed{a=543\text{ pm}}$. On en déduit le rayon atomique du silicium : $\boxed{r_{Si}=118\text{ pm}}$.

3. Les atomes de silicium occupent un site tétraédrique sur deux, on décompte donc 4 sites tétraédriques vides, dont le rayon vaut $\boxed{r_t=r_{Si}=118\text{ pm}}$. Tous les sites octaédriques sont vacants (au centre du cube et au milieu des arêtes), on en décompte 4. Leur rayon r_o est tel que selon une arête $2\cdot r_o+2\cdot r_{Si}=a$ soit $\boxed{r_o=154\text{ pm}}$.

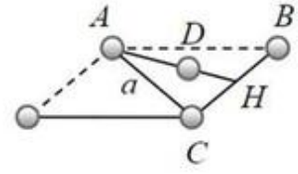
Corrigé

Exercice 25.11

1. Le carbone a une coordinence de 3 dans cette structure, il est trigonal.

2. Le paramètre c correspond à la distance entre deux plans A : $c = 2 \times 335 \text{ pm} = 670 \text{ pm}$.

Considérons une base de la maille, représentée ci-contre.



La distance entre deux atomes de carbone vaut $AD = \frac{2}{3} AH$, avec $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit $AD = \frac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = AD\sqrt{3}$. AN $\boxed{a = 246 \text{ pm}}$.

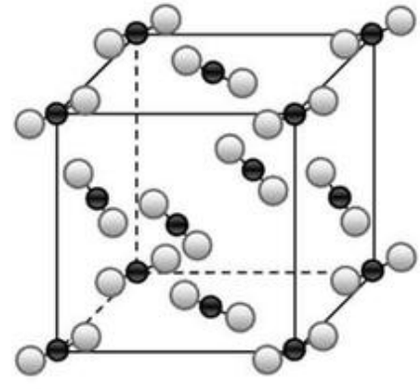
3. La compacité est $C = \dfrac{N_C \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{V}$, avec $N_C = 8 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 4$, $r = \dfrac{AD}{2} = 71 \text{ pm}$ et $V = a^2 c \sin(120°)$ (produit base × hauteur), soit $V = a^2 \cdot c \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. AN $\boxed{C = 0{,}17 \text{ (ou } 17\ \%)}$.

La masse volumique est $\rho = \dfrac{4 \cdot M_C}{\mathcal{N}_A \cdot a^2 \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$. AN $\boxed{\rho = 2{,}27 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

Exercice 25.12

1. La géométrie du dioxyde de carbone est linéaire, son schéma de Lewis étant : $\langle O{=}C{=}O \rangle$

2. a) La maille est représentée ci-contre. On décompte $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ molécules de CO_2 par maille.



b) Selon la diagonale d'une face $2 \cdot d = a\sqrt{2}$, soit $\boxed{d = 395 \text{ pm}}$. Cette distance est la somme d'une longueur de liaison covalente C=O (120 pm) et d'une distance entre O d'une molécule et C de la molécule voisine : celle-ci vaut donc 275 pm, soit nettement plus que la longueur d'une liaison covalente. En effet, la cohésion entre molécules de CO_2 est assurée par des forces de Van der Waals, d'énergie plus faible qu'une liaison covalente.

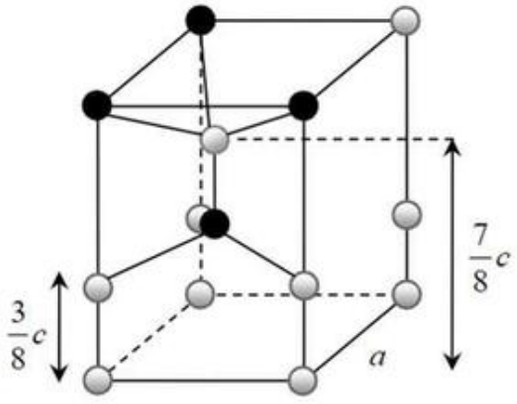
3. La compacité est le rapport du volume occupé par les entités (d'après l'énoncé, on considère ici le volume occupé par les atomes de carbone et d'oxygène) sur le volume total de la maille.

La compacité vaut $C = \dfrac{N_C \cdot \frac{4}{3}\pi r_C^3 + N_O \cdot \frac{4}{3}\pi r_O^3}{a^3}$, avec $N_C = 4$ et $N_O = 8$. AN $\boxed{C = 0{,}12 \text{ (12 \%)}}$.

4. La masse volumique est $\rho = \dfrac{N_C M_C + N_O M_O}{\mathcal{N}_A \cdot a^3}$. AN $\boxed{\rho = 1{,}68 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$.

La densité, rapport de la masse volumique de la carboglace sur la masse volumique de l'eau ($\rho_{eau} = 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), est donc $\boxed{d = 1{,}68}$.

Exercice 25.13



1. En considérant le tétraèdre constitué par les sphères noires ci-contre, on aboutit à la relation $\boxed{c = 2a\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

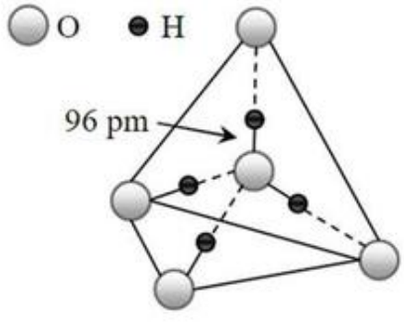
Voir l'obtention de cette relation à l'exercice 25.2.

2. Il y a $8\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+2=4$ molécules d'eau par maille.

3. La masse volumique de la glace est $\rho = \dfrac{4M_{H_2O}}{\mathscr{N}_A V}$, avec $V = a^3\sqrt{2}$ pour une structure hexagonale compacte, $N_H = 8$ et $N_O = 4$. On en déduit : $\boxed{a = \sqrt[3]{\dfrac{8M_H + 4M_O}{\mathscr{N}_A \rho\sqrt{2}}}}$.

AN $\boxed{a = 451\text{ pm}}$ et $\boxed{c = 737\text{ pm}}$. Sur le schéma précédent, $l = \frac{3}{8}c$. La distance entre deux atomes d'oxygène est $\boxed{l = 276\text{ pm}}$.

4. a) L'environnement tétraédrique d'un atome d'oxygène est représenté ci-contre.



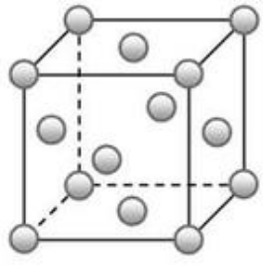
b) La distance l entre deux atomes d'oxygène est égale à la somme de la longueur l_{O-H} de la liaison O–H et de la distance d entre des atomes d'hydrogène et d'oxygène non liés par une liaison covalente, d'où : $\boxed{d = l - l_{O-H} = 180\text{ pm}}$.

c) La cohésion de la glace est assurée par des liaisons hydrogène, moins énergétiques que des liaisons covalentes (on constate en effet que $d < l_{O-H}$).

Exercice 25.14

L'objectif est de déterminer si le potassium est dans le cristal K_3C_{60} sous forme d'ions ou d'atomes, sachant que ce cristal est obtenu par insertion de potassium dans un réseau cubique à faces centrées de C_{60}. Les rayons de l'atome de potassium et de l'ion potassium nous sont donnés, il faut donc déterminer si chacune de ces entités peut s'insérer dans un des sites d'insertion d'un cristal CFC.

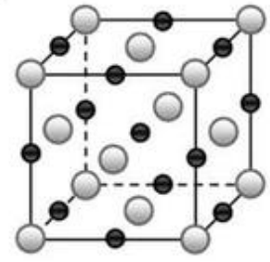
Nous savons qu'il existe des sites tétraédriques et octaédriques dans un réseau CFC, dont nous pouvons déterminer la taille.
On a schématisé ci-contre la maille CFC de C_{60} (attention, chaque sphère représente une molécule C_{60} et non un seul atome de carbone).
Soit a le paramètre de maille, qu'il faut déterminer. On utilise la densité du cristal qui est fournie.



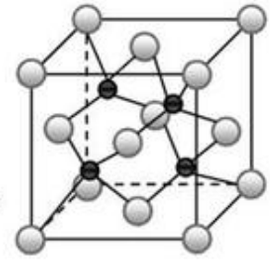
Il y a $8\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{2}=4$ molécules de C_{60} par maille, d'où $\rho(C_{60})=\frac{4M(C_{60})}{\mathcal{N}_A a^3}$, dont on déduit

$\boxed{a=\left(\frac{4M(C_{60})}{\mathcal{N}_A\,\rho(C_{60})}\right)^{1/3}=\left(\frac{4M(C_{60})}{\mathcal{N}_A\,d(C_{60})\rho_{eau}}\right)^{1/3}}$. AN $\boxed{a=1400\text{ pm}}$.

On peut déduire le « rayon » d'une molécule de C_{60} à partir de la condition de contact entre molécules, selon la diagonale d'une face : $4r_{C_{60}}=a\sqrt{2}$ soit $\boxed{r_{C_{60}}=495\text{ pm}}$.



Localisons les sites octaédriques (centre du cube et milieu des arêtes). Le rayon d'un site r_o est tel que $r_o+r_{C_{60}}=\frac{a}{2}$, d'où $\boxed{r_o=\frac{a}{2}-r_{C_{60}}=205\text{ pm}}$.



De la même façon, pour les sites tétraédriques :
$r_t+r_{C_{60}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, d'où $\boxed{r_t=\frac{a\sqrt{3}}{4}-r_{C_{60}}=111\text{ pm}}$.

On voit que $r_K>r_o>r_t$: les atomes de potassium ne peuvent s'insérer dans aucun des deux types de sites.
Tandis que $r_o>r_{K^+}>r_t$: les ions potassium peuvent s'insérer dans les sites octaédriques.
Le potassium est donc présent dans le cristal sous forme d'ions potassium.

On peut proposer une critique du résultat à l'aide de la formule du cristal : K_3C_{60}.
Une maille CFC contient 4 molécules de C_{60} et 4 sites octaédriques. Si les ions potassium s'inséraient uniquement dans les sites octaédriques, la formule du cristal serait KC_{60}. La seule possibilité pour avoir la formule K_3C_{60} est d'avoir insertion d'ions potassium dans les 4 sites octaédriques et dans les 8 sites tétraédriques. On peut envisager une légère augmentation du paramètre de maille lors de l'insertion – la condition de contact entre les molécules de C_{60} n'étant alors plus réalisée – ou une modification du rayon ionique de K^+ lors de l'insertion, la valeur fournie pour r_{K^+} correspondant a priori à l'ion isolé en phase gazeuse.

Chapitre 26
Réactions acido-basiques

UN SCIENTIFIQUE



Le chimiste danois **Johannes Brønsted** (1879-1947) obtient son doctorat en 1908. Mis en compétition avec son compatriote Niels Bjerrum pour le poste de chimie physique et minérale à l'université de Copenhague, il l'emporte grâce à ses qualités de pédagogue et d'orateur. Brønsted est un pionnier de la thermodynamique chimique et il étudie aussi la cinétique des réactions chimiques. Il donne en 1923 une définition des acides et des bases.

Un peu d'histoire

Le mot *acide* a d'abord fait référence à une saveur avant d'entrer dans le langage scientifique. Robert Boyle, au XVII^e siècle, déclare : « Un acide a un goût aigre et devient moins acide lorsqu'il est mélangé à une base ». Plus d'un siècle plus tard, le chimiste Louis Guyton de Morveau affirme en 1786 que « la définition de l'acide est, à vrai dire, la clé de la chimie ».

À la fin du XIX^e siècle, le besoin d'une définition précise des notions d'acide et de base se fait pressant. Suite à ses travaux sur la différentiation électrolytique, Svante Arrhenius considère qu'un acide est une substance qui, mise dans une solution aqueuse, libère des ions hydrogène H^+ et une base est celle qui libère des ions hydroxyde OH^-. En 1923, Johannes Brønsted et Thomas Lowry proposent indépendamment des définitions plus précises basées sur les transferts de protons. La même année, Gilbert Lewis donne des définitions encore plus générales, liées à la structure électronique.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les propriétés acido-basiques du solvant eau
- La définition du pH
- Les définitions d'un acide fort ou faible, d'une base forte ou faible
- Des exemples usuels d'acides et de bases et leur caractère (fort ou faible)
- La définition de la constante d'acidité d'un couple acido-basique

Ce qu'il faut savoir faire

- Reconnaître une réaction acido-basique à partir de son équation
- Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation acido-basique
- Classer plusieurs couples par force croissante de l'acide ou de la base
- Calculer la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes sont connues
- Utiliser un diagramme de prédominance pour prévoir les espèces incompatibles
- Déterminer la composition chimique d'un système pour une transformation acido-basique
- Exploiter un diagramme de distribution des espèces et une courbe de titrage acido-basique

■■ Résumé de cours

■ Transformation acido-basique

❑ Couples acide/base

Un **acide** selon Brønsted est une espèce chimique susceptible de céder un ou plusieurs protons H^+. Une **base** est une espèce chimique susceptible de capter un ou plusieurs protons H^+.
L'acide HA et la base A^- sont reliés par une demi-équation d'échange protonique :

$$\boxed{HA = A^- + H^+}$$

et constituent un couple acido-basique HA/A^-. Les deux espèces sont dites conjuguées.
Un **ampholyte** (ou espèce **amphotère**) est une espèce susceptible de se comporter comme l'acide d'un couple et la base d'un autre couple. Par exemple, l'ion hydrogénocarbonate HCO_3^- est un ampholyte : il appartient aux couples $(H_2O,CO_2)/HCO_{3(aq)}^-$ et $HCO_{3(aq)}^-/CO_{3(aq)}^{2-}$.
De même, le solvant eau est associé aux couples $H_3O_{(aq)}^+/H_2O_{(l)}$ et $H_2O_{(l)}/HO_{(aq)}^-$.

❑ Réaction acido-basique

Une transformation acido-basique correspond à un transfert de proton entre l'acide d'un couple HA_1/A_1^- et la base d'un autre couple HA_2/A_2^-.
Elle est modélisée par la réaction d'équation : $HA_1 + A_2^- = HA_2 + A_1^-$

❑ Autoprotolyse de l'eau

La réaction d'équation $2\,H_2O_{(l)} = HO_{(aq)}^- + H_3O_{(aq)}^+$ est appelée autoprotolyse de l'eau.
La constante d'équilibre associée à cette équation s'écrit $K_e = \dfrac{[H_3O^+]\cdot[HO^-]}{(c^\circ)^2}$; elle est appelée **produit ionique de l'eau**. Sa valeur ne dépend que de la température, et est égale à 10^{-14} à 25 °C. On pose $pK_e = -\log K_e$ (= 14 à 25 °C).

■ Force comparée des acides et des bases dans l'eau

❑ Effet nivelant du solvant

Un **acide fort** est un acide totalement dissocié en solution aqueuse.
La réaction entre l'acide fort et l'eau est totale :

$$HA + H_2O \rightarrow A^- + H_3O^+ \qquad \text{totale}$$

Par exemple, HCl et HNO_3 sont des acides forts dans l'eau et conduisent respectivement à une solution d'acide chlorhydrique $(H_3O^+ + Cl^-)$ et à une solution d'acide nitrique $(H_3O^+ + NO_3^-)$.
L'acide sulfurique H_2SO_4 est un diacide dont la première acidité est forte.

De même, une **base forte** est une base totalement protonée en solution aqueuse.
La réaction entre la base forte et l'eau est totale :

$$A^- + H_2O \rightarrow HA + HO^- \qquad \text{totale}$$

Par exemple, NH_2^- (ion amidure) et RO^- (ion alcoolate) sont des bases fortes dans l'eau.

Les acides forts et les bases fortes n'existent qu'à l'état de traces en solution aqueuse. L'acide le plus fort (resp. la base la plus forte) pouvant exister dans l'eau est H_3O^+ (resp. HO^-).
On ne peut comparer la force relative des acides forts (resp. des bases fortes) dans l'eau : on parle de l'**effet nivelant** du solvant.

Remarque

La base conjuguée (resp. l'acide conjugué) d'un acide fort (resp. d'une base forte) est dit(e) **indifférent(e)**.

❑ Constante d'acidité d'un couple acido-basique

Un **acide faible** (resp. une **base faible**) est un acide (resp. une base) dont la réaction avec l'eau est limitée. Par exemple, l'acide éthanoïque (ou acétique) CH_3COOH est un acide faible ; l'acide phosphorique H_3PO_4 est un triacide faible ; l'ammoniac NH_3 est une base faible.

La constante d'acidité K_a d'un couple acido-basique est définie comme la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction entre l'acide du couple et l'eau :

$$HA + H_2O = A^- + H_3O^+ \qquad \boxed{K_a = \frac{[A^-]\cdot[H_3O^+]}{[HA]\cdot c^\circ}}.$$

Elle ne dépend que de la température. On pose $pK_a = -\log K_a$.
À 25 °C : $K_a(H_3O^+ / H_2O) = 1$ et $K_a(H_2O / HO^-) = 10^{-14}$.
Un polyacide est caractérisé par des constantes d'acidité successives.

Pour une même concentration initiale de l'acide (resp. de la base) en solution aqueuse, un acide (resp. une base) est d'autant plus dissocié(e) que sa constante d'acidité est élevée (resp. faible).

Un acide (resp. une base) est d'autant plus fort(e) que la constante d'acidité K_a du couple est élevée (resp. faible) et la valeur de pK_a faible (resp. élevée).

Remarque

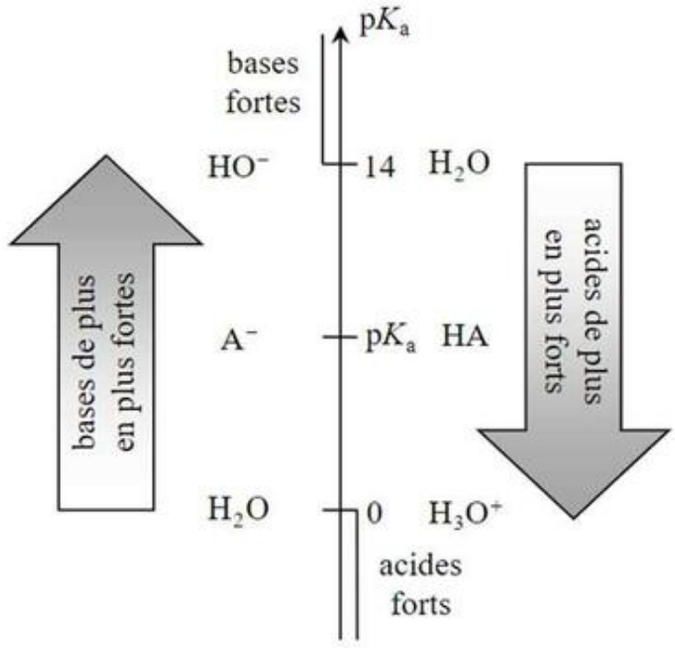
On utilise parfois la constante de basicité K_b d'un couple acido-basique, constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction entre la base du couple et l'eau : $K_b = \dfrac{[HA]\cdot[HO^-]}{[A^-]\cdot c^\circ} = \dfrac{K_e}{K_a}$.

⇨ **Méthode 26.1. Calculer une constante d'équilibre**

❑ Échelle d'acidité

On place sur un axe gradué en pK_a les différents couples acido-basiques.

Dans l'eau, cette échelle est limitée par les couples H_3O^+ / H_2O ($pK_a = 0$) et H_2O / HO^- ($pK_a = 14$) en raison de l'effet nivelant du solvant.



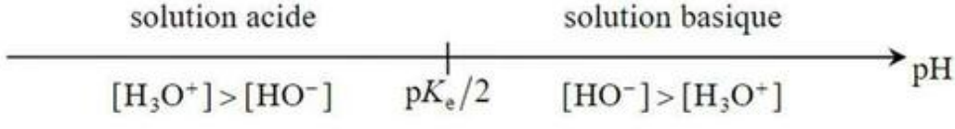
■ pH d'une solution aqueuse

❑ Définition

Le pH est défini à partir de l'activité des ions oxonium H_3O^+ selon : $pH = -\log(a_{H_3O^+})$.

En solution diluée : $\boxed{pH = -\log\dfrac{[H_3O^+]}{c^\circ}}$.

Une solution est acide si les ions H_3O^+ prédominent par rapport aux ions HO^-, elle est basique si ce sont les ions HO^- qui prédominent.



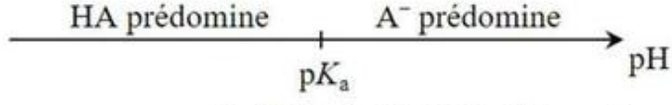
❑ Diagramme de prédominance d'un couple acido-basique

Une espèce A *prédomine* devant une espèce B si $[A] > [B]$.

Une espèce A *est majoritaire* devant une espèce B si $[A] > 10 \cdot [B]$.

Le pH d'une solution et le pK_a d'un couple acido-basique sont liés par : $\boxed{pH = pK_a + \log\dfrac{[A^-]}{[HA]}}$.

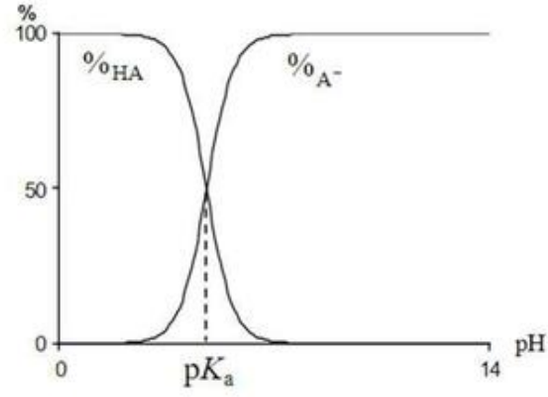
On représente sur un axe gradué en pH les domaines de prédominance des deux espèces d'un couple acido-basique. HA prédomine par rapport à A^- pour $pH < pK_a$; c'est A^- qui prédomine pour $pH > pK_a$.



⇨ **Méthode 26.2. Établir un diagramme de prédominance**
⇨ **Méthode 26.3. Prévoir l'incompatibilité de deux espèces**

❑ Diagramme de distribution

Ce diagramme représente les proportions relatives des deux espèces du couple HA/A^- dans une solution de concentration totale $c_0 = [HA] + [A^-]$ constante, en fonction du pH.



■ Composition chimique d'un système acido-basique dans l'état final

La détermination de la composition chimique dans l'état final d'un système contenant des espèces acido-basiques peut s'avérer complexe si on tient compte de toutes les transformations susceptibles de se dérouler dans le mélange réactionnel. On peut cependant analyser et simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement par une unique réaction, qualifiée de **réaction prépondérante**.

On étudie pour cela le mélange obtenu après dissolution totale des composés ioniques, réaction totale des acides (ou bases) fort(e)s avec l'eau. Parmi toutes les réactions possibles entre les espèces présentes, on privilégie celle dont la constante d'équilibre est la plus élevée, qui sera en général celle dont l'avancement est majoritaire devant celui des autres réactions (ne pas oublier cependant que l'avancement dépend aussi des concentrations initiales et de la stœchiométrie de la réaction). Selon que la transformation est totale ou non, des bilans de matière successifs permettent alors de déterminer la composition du système à l'équilibre.

La validité de cette méthode repose sur la vérification des hypothèses faites lors des calculs : il faut en particulier s'assurer que l'avancement des réactions secondaires est négligeable devant celui de la réaction prépondérante choisie, ce qui est souvent réalisable à l'aide de diagrammes de prédominance.

⇨ **Méthode 26.4. Déterminer l'état final d'une transformation acido-basique**

■ Titrage acido-basique

❑ Principe

Un **titrage** est une méthode de **dosage**, c'est-à-dire de détermination de la concentration d'une solution, au moyen d'une ou plusieurs réactions chimiques. On peut utiliser une réaction acido-basique comme support de titrage si elle est *rapide* et *totale*.

Dans un **titrage direct**, l'espèce dosée A est placée dans un bécher ou un erlenmeyer, et mise à réagir avec un réactif titrant B, placé dans une burette graduée et versé progressivement. L'**équivalence** du titrage est le point *où les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques.* Le volume versé à l'équivalence permet de calculer la concentration de A.
Un **titrage indirect** met en jeu plusieurs réactions. L'espèce dosée A est mise à réagir avec un excès de l'espèce B selon une réaction totale conduisant à C. La concentration initiale de A peut alors être déterminée soit à partir du titrage de l'espèce C (la quantité de matière de C formée permet d'accéder à la quantité de matière initiale de A, réactif limitant de la première réaction) ou par différence, à partir du titrage de B restant (la quantité de matière initiale de B doit alors être connue avec précision).
L'équivalence d'un titrage acido-basique est marquée par un saut de pH.

❑ Suivi par colorimétrie

Un **indicateur coloré** (acido-basique) est constitué par un couple acide faible / base faible dont les formes acide HIn et basique In^- ont des couleurs différentes en solution. L'équivalence d'un titrage acido-basique peut être repérée par le **virage** (changement de couleur) de l'indicateur coloré, et ce d'autant mieux que son pK_a est plus proche du pH à l'équivalence et que la zone de virage de l'indicateur est plus étroite.

❑ Suivi par pH-métrie

Le suivi du pH s'effectue grâce à un **pH-mètre** qui mesure la différence de potentiel entre une électrode de verre et une électrode de référence (les deux pouvant être réunies dans une électrode combinée), et affiche directement le pH.
Le pH-mètre doit être étalonné avant toute mesure.



❑ Suivi par conductimétrie

Cette technique a été décrite au chapitre **14**, dans le cadre du suivi cinétique d'une réaction.

■ Comment calculer la constante d'équilibre d'une réaction acido-basique ?

❑ Méthode 26.1. Calculer une constante d'équilibre

La constante d'équilibre associée à une réaction acido-basique s'exprime comme un rapport des constantes d'acidité des deux couples mis en jeu dans l'équation.

⇨ Exercices 26.6 à 26.10, 26.12

Calculons la constante d'équilibre K associée à l'équation :

$$CH_3COOH(aq) + NH_3(aq) = CH_3COO^-(aq) + NH_4^+(aq)$$

On donne : $pK_{a,1}(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4{,}8$ et $pK_{a,2}(NH_4^+/NH_3) = 9{,}2$.

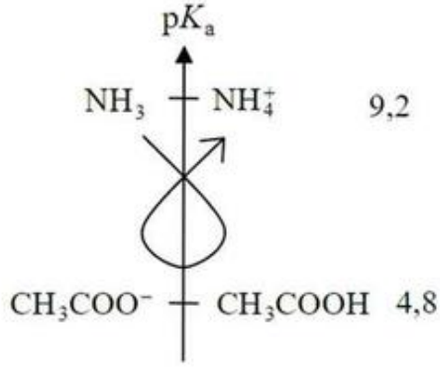
La constante d'équilibre K a pour expression : $K = \dfrac{[CH_3COO^-]\cdot[NH_4^+]}{[CH_3COOH]\cdot[NH_3]}$.

Par définition, $K_{a,1} = \dfrac{[CH_3COO^-]\cdot[H_3O^+]}{[CH_3COOH]\cdot c^\circ}$ et $K_{a,2} = \dfrac{[NH_3]\cdot[H_3O^+]}{[NH_4^+]\cdot c^\circ}$.

On en déduit $K = \dfrac{K_{a,1}}{K_{a,2}} = \dfrac{10^{-pK_{a,1}}}{10^{-pK_{a,2}}}$. AN $\boxed{K = 10^{4{,}4} = 2{,}5\cdot10^4}$.

Vérification à l'aide de la règle du gamma

L'échelle d'acidité permet de vérifier que l'équation est associée à la réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte des deux couples. La règle graphique dite *règle du gamma* permet de retrouver ce résultat : la transformation est favorisée thermodynamiquement (c'est-à-dire associée à une constante d'équilibre $K > 1$).



■ Comment tracer et utiliser un diagramme de prédominance acido-basique ?

❑ Méthode 26.2. Établir un diagramme de prédominance

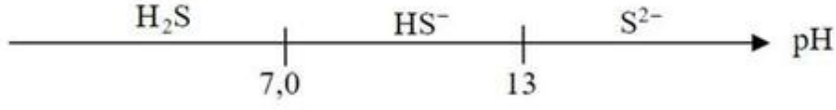
Pour un couple acido-basique donné de constante d'acidité K_a, le domaine de prédominance de la base correspond à $pH > pK_a$, celui de l'acide à $pH < pK_a$.
Pour un polyacide, les domaines de prédominance sont délimités par les valeurs des pK_a successifs.

⇨ Exercices 26.1 à 26.4, 26.6, 26.9

Établissons le diagramme de prédominance relatif aux espèces acido-basiques conjuguées du sulfure d'hydrogène H_2S. On donne $pK_{a,1}(H_2S / HS^-) = 7{,}0$ et $pK_{a,2}(HS^- / S^{2-}) = 13$.

Pour le couple H_2S / HS^-, H_2S prédomine pour $pH < 7{,}0$ et HS^- prédomine pour $pH > 7{,}0$.

Pour le couple HS^- / S^{2-}, HS^- prédomine pour $pH < 13$ et S^{2-} prédomine pour $pH > 13$.
On en déduit le diagramme de prédominance suivant :



❑ Méthode 26.3. Prévoir l'incompatibilité de deux espèces

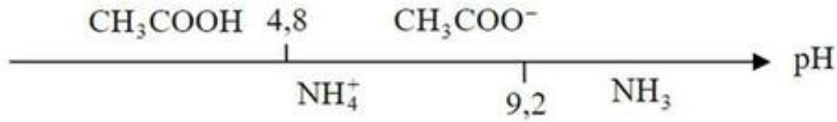
Pour savoir si deux espèces acido-basiques sont compatibles ou non (c'est-à-dire peuvent coexister ou non) :
– Superposer les diagrammes de prédominance des couples mis en jeu.
– Si les domaines de prédominance des deux espèces considérées possèdent une partie commune, les espèces peuvent coexister.
– Si les domaines de prédominance des deux espèces considérées sont disjoints (c'est-à-dire ne possèdent aucune partie commune), les espèces sont incompatibles.

⇨ Exercices 26.6, 26.9

On cherche à prévoir l'évolution du système lorsqu'on mélange une solution d'acide éthanoïque $CH_3COOH(aq)$ et une solution d'ammoniac $NH_3(aq)$.

On donne : $pK_{a,1}(CH_3COOH / CH_3COO^-) = 4{,}8$ et $pK_{a,2}(NH_4^+ / NH_3) = 9{,}2$.

Superposons les diagrammes de prédominance relatifs aux espèces acido-basiques conjuguées de l'acide éthanoïque et de l'ammoniac :



On constate que les domaines de prédominance de CH_3COOH et NH_3 sont disjoints, ces espèces sont donc incompatibles. On peut modéliser la transformation chimique observée par la réaction d'équation : $CH_3COOH(aq) + NH_3(aq) = CH_3COO^-(aq) + NH_4^+(aq)$

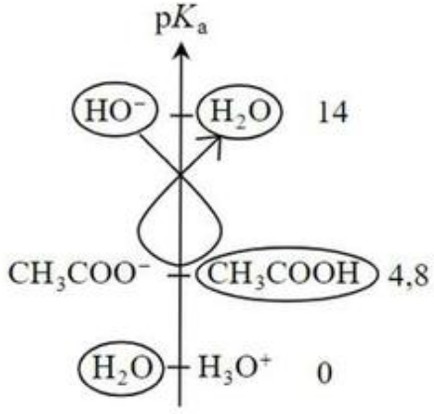
■ Comment déterminer la composition chimique d'un système acido-basique dans l'état final ?

❑ Méthode 26.4. Déterminer l'état final d'une transformation acido-basique

On présente ici la méthode de la *réaction prépondérante* (RP).
– Déterminer les espèces présentes dans le mélange après dissolution totale des composés ioniques et réaction totale des acides (ou bases) fort(e)s avec l'eau.
– Identifier la réaction prépondérante à partir des acides et bases présents en solution : il s'agit en général de la réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte présents en solution.
– Écrire l'équation de la RP et calculer sa constante d'équilibre.
– Si la RP peut être considérée comme totale, faire un bilan de matière afin de déterminer la composition de la solution équivalente. Reprendre les étapes précédentes pour ce nouveau système, jusqu'à se trouver dans le cas d'une RP limitée.
– Si la RP est très limitée, faire l'hypothèse que la RP impose la composition du système à l'équilibre et que son avancement est majoritaire devant l'avancement des autres réactions acido-basiques susceptibles de se dérouler dans le mélange réactionnel.
– Déterminer la composition chimique du système dans l'état final à l'aide de la constante d'équilibre de la réaction.
– On peut vérifier que l'avancement des réactions secondaires est bien négligeable en utilisant un diagramme de prédominance ou en calculant les concentrations des espèces minoritaires à l'aide des constantes d'acidité.

⇨ Exercices 26.7 à 26.11

À un volume $V_0 = 10{,}0\ mL$ une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH ($pK_a(CH_3COOH / CH_3COO^-) = 4{,}8$) de concentration $1{,}0 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot L^{-1}$, on ajoute $V = 10{,}0\ mL$ d'une solution de soude de concentration $1{,}0 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.



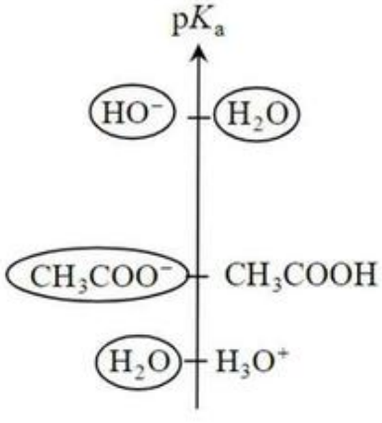
Déterminons la composition de la solution à l'équilibre.
On place les couples mis en jeu sur une échelle de pK_a et on entoure les espèces présentes (ne pas oublier le solvant eau). CH_3COOH est l'acide le plus fort présent, HO^- la base la plus forte présente. La RP a pour équation :

$$CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O \qquad K = \frac{K_a}{K_e} = 10^{9,2}.$$

La RP est totale, on fait un bilan de matière (attention à la dilution lors du mélange de plusieurs solutions) :

$mol \cdot L^{-1}$	CH_3COOH	$+HO^-$	$=CH_3COO^-$	$+H_2O$
$t = 0$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	0	excès
t	/	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	excès

La solution équivalente contient les ions HO^- à la concentration $4,5 \cdot 10^{-3}$ $mol \cdot L^{-1}$ et les ions CH_3COO^- à la concentration $5,0 \cdot 10^{-4}$ $mol \cdot L^{-1}$: mélange d'une base forte et d'une base faible.



On entoure les espèces présentes dans ce nouveau système. H_2O est l'acide le plus fort présent, HO^- la base la plus forte présente. La RP a pour équation :

$$H_2O + HO^- = H_2O + HO^- \qquad K = 1.$$

La RP ne modifie pas les concentrations.
On en déduit la composition de la solution dans l'état final :
$[HO^-]_f = 4,5 \cdot 10^{-3}$ $mol \cdot L^{-1}$ et
$[CH_3COO^-]_f = 5,0 \cdot 10^{-4}$ $mol \cdot L^{-1}$.
On peut calculer le pH final de la solution :
$pH = pK_e + \log[HO^-]$, soit pH = 11,7.
On a négligé l'avancement des réactions secondaires :
(1) $CH_3COO^- + H_2O = CH_3COOH + HO^- \qquad K = 10^{-9,2}$
et (2) $2\,H_2O = H_3O^+ + HO^- \qquad K = 10^{-14}$.

On calcule :

$$[CH_3COOH]_f = \frac{[CH_3COO^-]_f \cdot [H_3O^+]_f}{K_a \cdot c^\circ} = \frac{5,0 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-11,7}}{10^{-4,8}} = 7,0 \cdot 10^{-11}\ mol \cdot L^{-1} \ll [HO^-]_f$$

et $[H_3O^+]_f = 2,2 \cdot 10^{-12}$ $mol \cdot L^{-1} \ll [HO^-]_f$ (cette condition est vérifiée dès que pH > 6,5).
On peut donc bien négliger l'avancement des réactions secondaires (1) et (2) devant celui de la réaction prépondérante.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Le couple H_3O^+/HO^- constitue un couple acide/base conjugué.	☐	☐
2.	L'espèce $H_2PO_4^-$ est une espèce amphotère.	☐	☐
3.	Un acide fort est totalement dissocié en solution.	☐	☐
4.	Un acide HA_1 associé à une valeur de pK_a inférieure à celle d'un acide HA_2 est toujours plus dissocié dans l'eau.	☐	☐
5.	L'ion hydroxyde est la base la plus forte pouvant exister dans l'eau.	☐	☐
6.	Plus un acide est fort, plus sa base conjuguée est forte.	☐	☐
7.	Le produit ionique de l'eau est toujours égal à 10^{-14}.	☐	☐
8.	La réaction entre NH_3 ($pK_a(NH_4^+/NH_3) = 9,2$) et HCOOH ($pK_a(HCOOH/HCOO^-) = 3,8$) est favorisée thermodynamiquement.	☐	☐
9.	La concentration en ions oxonium d'une solution de pH = 3,2 est dix fois plus élevée que dans une solution de pH = 2,2.	☐	☐
10.	Une solution contenant un acide et une base conjuguée a un pH inférieur à 7 si la forme acide prédomine.	☐	☐

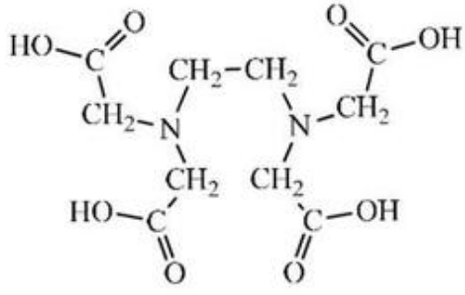
■■ Énoncé des exercices

■ Transformations acido-basiques

Pour l'ensemble des exercices, on donne la valeur du produit ionique de l'eau à 25 °C : $pK_e = 14$. Les valeurs de pK_a sont données à 25 °C.

❑ Exercice 26.1. L'acide éthylènediaminetétraacétique

L'acide éthylènediaminetétraacétique (ou EDTA), dont la structure est représentée ci-contre, est un tétraacide, noté H_4Y. Ses formes acide-base sont utilisées comme agents complexants dans de nombreux domaines : industrie du papier, cosmétique, agro-alimentaire, ...



1. Déterminer les formules des espèces acido-basiques conjuguées de l'EDTA en solution aqueuse (formule brute et notation simplifiée), et établir le diagramme de prédominance associé.

2. L'EDTA est commercialisé sous forme du solide Na_2H_2Y.
Quelle masse de solide faut-il prélever pour préparer 100 mL de solution à une concentration $c = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1} ? On donne $M_{Na_2H_2Y} = 336$ g · mol^{-1}.

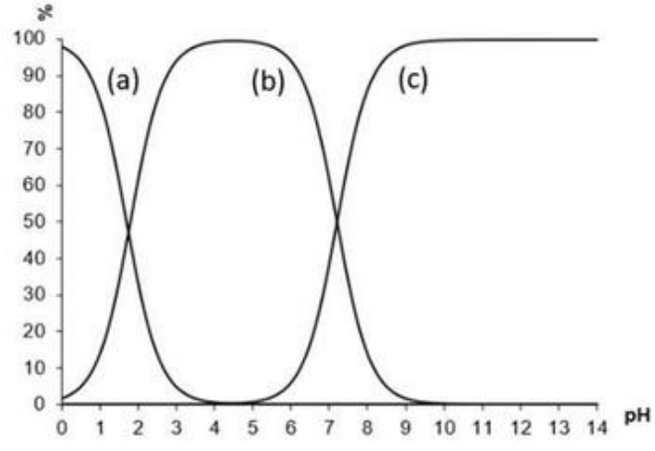
3. Le pH de la solution obtenue est égal à 4,4. Quelle espèce acido-basique de l'EDTA prédomine dans cette solution ? Est-elle majoritaire par rapport aux autres ?

Données : constantes d'acidité successives de H_4Y

$K_{a,1} = 1{,}02 \cdot 10^{-2}$; $K_{a,2} = 2{,}14 \cdot 10^{-3}$; $K_{a,3} = 6{,}92 \cdot 10^{-7}$; $K_{a,4} = 5{,}50 \cdot 10^{-11}$.

❑ Exercice 26.2. Diagramme de distribution

On donne ci-dessous le diagramme de distribution des espèces acido-basiques de l'acide sulfureux H_2SO_3.

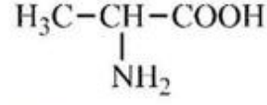


1. Attribuer les courbes (a), (b) et (c) aux espèces acido-basiques de l'acide sulfureux, en justifiant.
2. Déterminer les valeurs des constantes d'acidité successives des couples acido-basiques de l'acide sulfureux.
3. Tracer le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques de l'acide sulfureux.
4. On considère une solution de pH = 3, telle que la concentration totale en espèces soufrées soit égale à $c_t = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Calculer les concentrations de chacune des espèces soufrées dans la solution.

❑ Exercice 26.3. Point isoélectrique d'un acide aminé

Un acide aminé est une espèce chimique contenant une fonction amine et une fonction acide carboxylique. Ces deux fonctions réagissent spontanément pour conduire à une forme doublement chargée de l'acide aminé, appelée *zwitterion*.

1. Représenter le zwitterion associé à l'alanine représentée ci-contre.



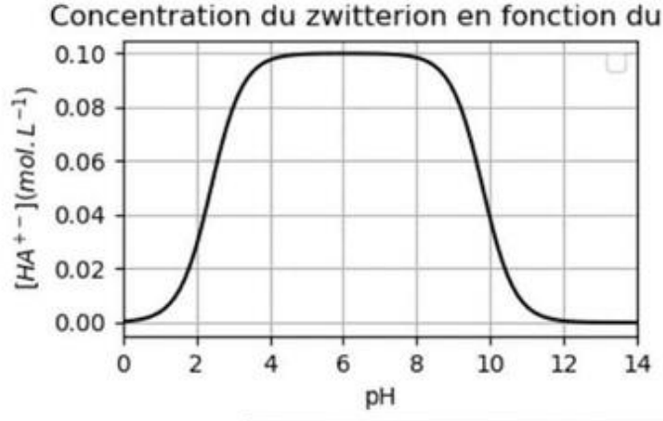
2. Représenter l'acide conjugué du zwitterion, puis sa base conjuguée.
3. On donne les pK_a de l'alanine : $pK_{a,1} = 2{,}4$ et $pK_{a,2} = 9{,}8$. Placer les différentes espèces sur un diagramme de prédominance.

Le point isoélectrique d'un acide aminé, noté pH_i, est la valeur du pH d'une solution dans laquelle les charges positives et négatives portées par les différentes espèces dissoutes de l'acide aminé se compensent. Au point isoélectrique, la concentration du zwitterion est maximale.

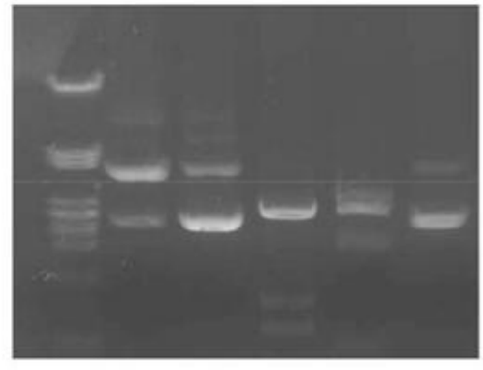
4. Soit une solution d'alanine de concentration c_t. Exprimez la concentration c_t en fonction de $K_{a,1}$, $K_{a,2}$, la concentration du zwitterion, notée $[HA^{\pm}]$, et celle en ions H_3O^+.

On donne ci-contre la courbe $[HA^{\pm}] = f(\text{pH})$ obtenue pour une concentration $c_t = 1{,}0 \cdot 10^{-1}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

5. Déterminer graphiquement une valeur approchée de pH_i pour l'alanine.



L'électrophorèse est une méthode très utilisée pour séparer des espèces chimiques chargées au moyen d'un champ électrique. Le mélange à analyser est déposé au centre d'une bande de papier imbibée d'une solution « tampon » (de pH fixé et bien stable). Un champ électrique est appliqué aux extrémités du papier pendant une durée variable selon les espèces à séparer. Les composés séparés sont ensuite détectés.



6. On place une solution d'alanine tamponnée successivement à trois valeurs de pH : $pH_1 \ll pH_i$, $pH_2 = pH_i$ et $pH_3 \gg pH_i$. Quel déplacement de l'espèce prédominante observera-t-on sur la bande de papier dans chacune des trois situations ? Expliquer comment il est possible, grâce à cette technique, de séparer des acides aminés.

D'après E3A-Polytech

❑ Exercice 26.4. Propriétés acido-basiques de la silice

La silice pure $SiO_2(s)$ se dissout dans l'eau selon l'équilibre suivant :

$$SiO_2(s) + 2\ H_2O = H_4SiO_4(aq) \qquad K = 10^{-2,7}.$$

La forme dissoute de la silice $H_4SiO_{4(aq)}$ est associée aux constantes successives d'acidité :

$K_{a,1} = 10^{-9,5}$ et $K_{a,2} = 10^{-12,6}$.

1. Tracer le diagramme de prédominance des différentes espèces acido-basiques de la silice dissoute.

2. Sachant que le pH des eaux naturelles est généralement compris entre 7 et 8, quelle est la forme prédominante en solution de la silice ?

3. Pour une eau dont le pH est compris entre 10 et 12, écrire l'équation bilan de dissolution de la silice en milieu basique. Calculer la constante K_1' de cet équilibre en fonction de K, $K_{a,1}$ et K_e.

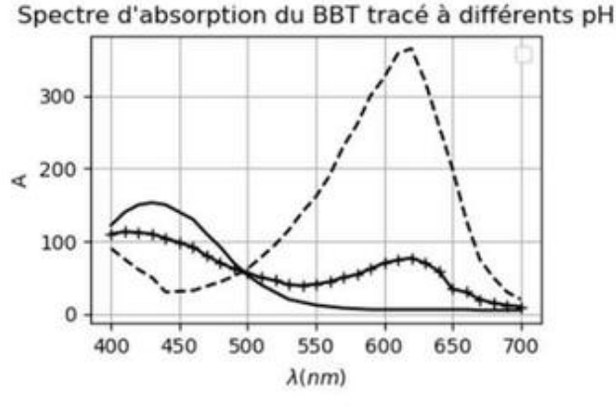
4. Pour une eau dont le pH est compris entre 13 et 14, écrire l'équation bilan de dissolution de la silice (en milieu basique). Calculer la constante K_2' de cet équilibre en fonction de K, $K_{a,1}$, $K_{a,2}$ et K_e.

❑ Exercice 26.5. Détermination du pK_a d'un indicateur coloré

1. Énoncer la loi de Beer–Lambert, en précisant la signification des différents termes. Quelles sont les conditions de validité de cette loi ?

2. À partir du spectre d'absorption de la forme acide HIn du bleu de bromothymol (BBT), on détermine la longueur d'onde correspondant à son maximum d'absorption : $\lambda_1 = 430$ nm. Quelle est la teinte d'une solution contenant uniquement HIn ?

3. On détermine de même la longueur d'onde correspondant au maximum d'absorption de la forme basique In^- : $\lambda_2 = 620$ nm.



Quelle est la teinte d'une solution contenant uniquement In^- ?

4. On mesure l'absorbance pour la longueur d'onde λ_1 de trois solutions contenant du BBT à une même concentration totale c.

– En milieu fortement acide on détermine : $A_1 = 0,196$.

– En milieu fortement basique on détermine : $A_2 = 0,076$.

– Pour une solution (S) de pH = 7,10 : $A_S = 0,140$.

a) Montrer que le rapport des concentrations en forme acide et basique dans la solution (S) peut s'écrire : $\dfrac{[\text{In}^-]_S}{[\text{HIn}]_S} = \dfrac{A_1 - A_S}{A_S - A_2}$.

b) En déduire la valeur du pK_a du couple HIn / In^-.

❑ Exercice 26.6. Traitement d'un effluent aqueux

Pour réduire la teneur en phosphore dans les eaux à la sortie des stations d'épuration, on fait réagir les ions phosphate selon l'équation :

$$\textbf{(1)} \quad \text{Mg}^{2+}_{(aq)} + \text{PO}^{3-}_{4(aq)} + \text{NH}^{+}_{4(aq)} = \text{MgPO}_4\text{NH}_{4(s)} \qquad K = 10^{11}.$$

1. Représenter le diagramme de prédominance des diverses formes acido-basiques du phosphore en phase aqueuse en fonction du pH.

2. Représenter le domaine de prédominance des diverses formes acido-basiques de l'azote en phase aqueuse en fonction du pH.

3. Les ions PO_4^{3-} et NH_4^+ peuvent-ils coexister ? Justifier. Écrire l'équation de la réaction que l'on pourrait envisager entre ces ions et calculer la constante d'équilibre associée.

4. En réalité cette réaction n'est pas observée ; nous allons montrer que les deux ions réagissent selon l'équation **(1)**.

Un effluent aqueux en sortie de station d'épuration contient une concentration totale $c_P = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol·L^{-1} d'espèces phosphorées et une concentration totale $c_N = 15 \cdot 10^{-3}$ mol·L^{-1} en espèces azotées. Le pH est maintenu égal à 9,5.

a) Calculer la concentration molaire en PO_4^{3-} dans l'effluent.

b) Calculer sa concentration molaire en NH_4^+ dans l'effluent.

c) On introduit dans un volume $V = 5$ m^3 d'effluent une masse $m = 200$ g de chlorure de magnésium ($\text{MgC}l_2$, totalement soluble dans l'eau dans les conditions utilisées ; la variation de volume liée à l'ajout de chlorure de magnésium est négligeable.).
Dans quel sens évolue le système ? Ces conditions permettent-elles de réduire la teneur en phosphore de l'effluent ? Justifier.

Données : produit ionique de l'eau $K_e = 10^{-14}$; $M_{\text{MgCl}_2} = 95{,}2$ g·mol^{-1} ; constantes d'acidité pour H_3PO_4, $pK_{a,1} = 2{,}1$; $pK_{a,2} = 7{,}2$; $pK_{a\,3} = 12{,}4$; $pK_a(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) = 9{,}2$.

D'après CCINP

■ Composition d'un système dans l'état final

❑ Exercice 26.7. Neutralisation d'un effluent gazeux

Le chlorure d'hydrogène est un sous-produit généré dans de nombreux procédés industriels (mettant en jeu des réactions de chloration, la combustion de composés chlorés...). Ce gaz très irritant peut être neutralisé en sortie de réacteur par une solution de lavage basique.

On considère ici une solution de lavage contenant du 2-aminoéthanol $\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{NH}_2$, une base faible notée B, à la concentration initiale $c_0 = 0{,}10$ mol·L^{-1}.

1. Quelle est la nature de la solution obtenue par dissolution du chlorure d'hydrogène dans l'eau ?
2. Calculer le pH initial de la solution de lavage.
3. Écrire l'équation de la réaction modélisant la transformation mise en jeu lors de la neutralisation. Calculer sa constante d'équilibre.
4. Calculer le volume de chlorure d'hydrogène gazeux (mesuré à 25 °C sous 1,0 bar) qui peut être neutralisé dans 1,0 m^3 de la solution de lavage.

Données : $pK_a(BH^+ / B) = 9,5$; HCl est considéré comme un gaz parfait ; $R = 8,314\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$.

❑ Exercice 26.8. Acidité des eaux de pluie

Le pH des eaux de pluie est généralement compris entre 4 et 5,5. Cette acidité est due aux constituants et polluants de l'atmosphère. Une « sur-acidité » des eaux de pluie peut avoir des conséquences dramatiques sur les êtres vivants.

Acidité due au dioxyde de carbone gazeux

Le dioxyde de carbone gazeux se solubilise dans l'eau selon l'équilibre **(1)** :

$$\textbf{(1)}\ CO_{2(g)} = CO_{2(aq)} \qquad K_1 = 3,60 \cdot 10^{-2} \text{ à } 25\ °C$$

puis le dioxyde de carbone aqueux peut réagir avec l'eau pour libérer des ions oxonium (seule la première acidité sera considérée). L'acidité due au dioxyde de carbone gazeux peut donc s'interpréter à partir de l'équation chimique **(2)** :

$$\textbf{(2)}\quad CO_{2(g)} + 2\,H_2O_{(l)} = HCO_{3(aq)}^- + H_3O_{(aq)}^+$$

1. Exprimer la constante K_2 de l'équilibre **(2)** en fonction de K_1 et $K_{a,1}$ puis calculer sa valeur à 25 °C.
2. La pression partielle moyenne en CO_2 au sommet du Mauna Loa à Hawaii est actuellement de 39,5 Pa. Déterminer, dans l'hypothèse où seul le dioxyde de carbone est responsable de l'acidité, le pH de l'eau de pluie se formant au sommet du Mauna Loa. Commenter.
3. En 2100 la pression partielle de CO_2 pourrait atteindre 50 Pa. Quelle variation de pH accompagnera cette évolution de la concentration en CO_2 dans l'atmosphère ? Commenter.

Acidité due au dioxyde de soufre gazeux

De la même façon, le dioxyde de soufre gazeux se solubilise dans l'eau selon l'équilibre **(3)** :

$$\textbf{(3)}\quad SO_{2(g)} = SO_{2(aq)} \qquad K_3 = 1,62 \text{ à } 25\ °C$$

puis le dioxyde de soufre aqueux peut réagir avec l'eau pour libérer des ions oxonium (seule la première acidité sera considérée). L'acidité due au dioxyde de soufre gazeux peut donc s'interpréter à partir de l'équation **(4)** :

$$\textbf{(4)}\quad SO_{2(g)} + 2\,H_2O_{(l)} = HSO_{3(aq)}^- + H_3O_{(aq)}^+$$

4. Calculer K_4 à 25 °C. En atmosphère « normalement » polluée, la pression partielle en SO_2 est de $2,00 \cdot 10^{-9}$ bar. Calculer le pH de l'eau de pluie en supposant qu'il n'est dû qu'à la solubilisation du SO_2. Commenter.

Effet d'une hausse de température

Le pH de l'eau de pluie dépend de la température selon la relation suivante : $\frac{\mathrm{d\,pH}}{\mathrm{d}T} = \frac{A}{T^2}$ où A est une constante égale à $A = 1{,}10 \cdot 10^3$ K et T la température absolue (en kelvins).

5. Quelle variation de pH résulterait d'une augmentation de température de 5 °C à partir de 25 °C ? Commenter.

Données : constantes d'acidité à 25 °C pour $CO_2(aq)$ $pK_{a,1} = 6{,}4$ et $pK_{a,2} = 10{,}3$; pour $SO_2(aq)$ $pK_{a,1'} = 1{,}9$ et $pK_{a,2'} = 7{,}2$.

D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 26.9. Élimination du dioxyde de carbone

La production la plus importante en tonnage de dihydrogène est issue du vaporeformage du méthane, décrit par l'équation de réaction suivante :

$$CH_4(g) + 2\ H_2O(g) = CO_2(g) + 4\ H_2(g)$$

Pour isoler le dihydrogène, il faut éliminer le dioxyde de carbone du mélange gazeux. Une des solutions adoptées est d'absorber $CO_2(g)$ par une solution aqueuse basique. La base employée est l'ion carbonate $CO_3^{2-}(aq)$.

1. Tracer le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques du dioxyde de carbone.

2. Écrire l'équation de la réaction observée après dissolution du dioxyde de carbone dans la solution aqueuse d'ions carbonate. Justifier que cette réaction soit totale dans les conditions usuelles.

3. Dans quel domaine de pH se trouve le système en fin de réaction si les réactifs ont été introduits initialement en proportions stœchiométriques ?

Données : $pK_a(CO_2(aq)/HCO_3^-) = 6{,}3$; $pK_a(HCO_3^-/CO_3^{2-}) = 10{,}3$.

D'après Mines-Ponts

■ Titrages acido-basiques

❑ Exercice 26.10. Titrage d'une solution aqueuse de dioxyde de soufre

Le dioxyde de soufre a un comportement de diacide dans l'eau. On considère, dans cette question, que les espèces contenant l'élément soufre présentes en solution aqueuse sont : $SO_2(aq)$, $HSO_3^-(aq)$, $SO_3^{2-}(aq)$.

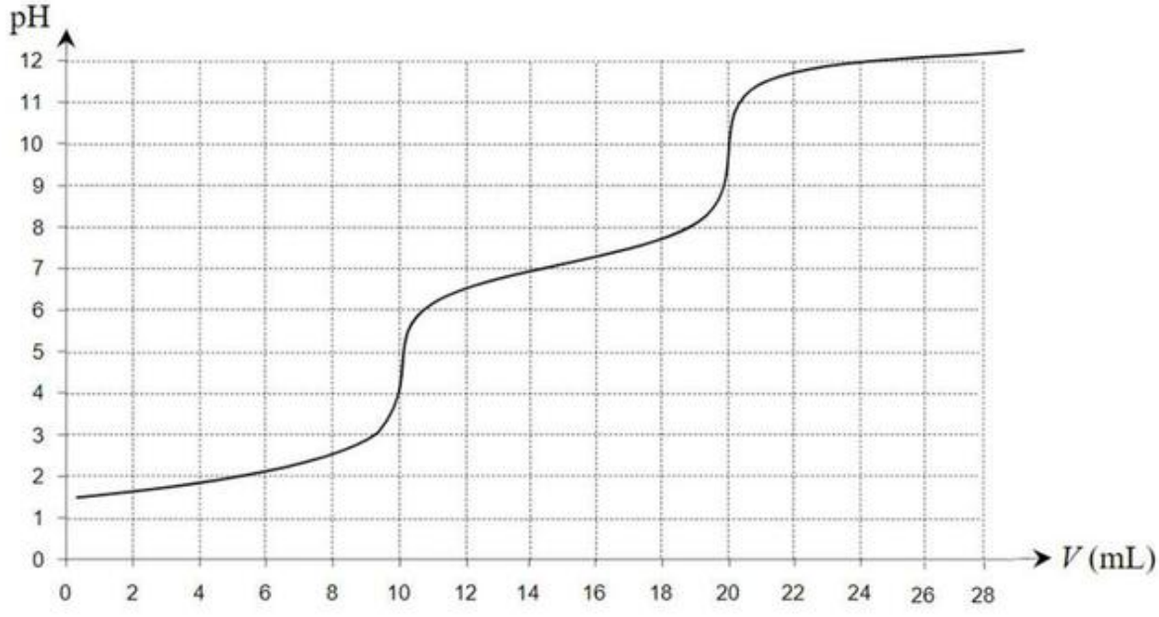
On étudie le dosage de $V_0 = 10{,}0$ mL d'une solution aqueuse de dioxyde de soufre, de concentration notée c_{SO_2}, par une solution aqueuse de soude $(Na^+ + HO^-)$ de concentration $C_B = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1}. On note V le volume de soude versé. La courbe de pH a été modélisée et représentée ci-après.

1. Écrire les équations des réactions ayant lieu au cours du dosage. Calculer les valeurs de leurs constantes thermodynamiques d'équilibre.

2. Pourquoi observe-t-on lors de ce dosage deux sauts de pH ? Calculer la valeur de la concentration en dioxyde de soufre c_{SO_2}.

3. Calculer la valeur du pH initial de la solution.

Données : $pK_{a,1}(SO_2(aq)/HSO_3^-) = 1,8$; $pK_{a,2}(HSO_3^-/SO_3^{2-}) = 7,2$.



D'après CCINP

❑ Exercice 26.11. Titrage conductimétrique d'un mélange d'acides

L'effet de la dilution pourra être négligé dans les calculs.

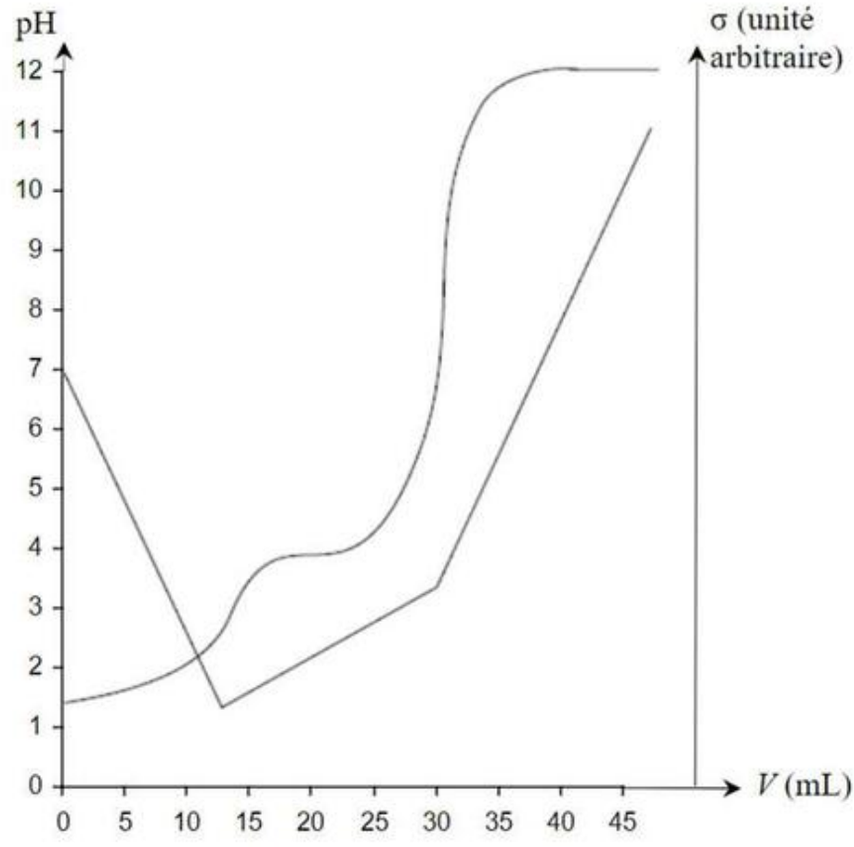
1. À quelle(s) condition(s) sur les propriétés ioniques des produits et des réactifs peut-on suivre une réaction chimique par conductimétrie ?

2. Un bécher contient 100 mL d'un mélange d'acide chlorhydrique et d'un acide faible. La burette contient une solution de soude de concentration $2,00 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1}. Le titrage a été suivi à la fois par conductimétrie et par pH-métrie. Les courbes ci-dessous ont été obtenues.

a) Identifier, à partir de la courbe conductimétrique, trois zones distinctes lors du titrage de la solution. Justifier le signe des pentes des segments de droite. À quoi correspondent les ruptures de pente ? En déduire les réactions qui ont lieu au cours du titrage et leur ordre d'apparition.

b) Quelle méthode vous semble la plus précise pour déterminer les points d'équivalence ? Lorsque $V = 0$, pH = 1,60. Quelle est la concentration de l'acide fort introduit dans le bécher ?

c) Quelle est la concentration de l'acide faible introduit dans le bécher ? Quelle est la valeur du pK_a du couple acide/base correspondant ?



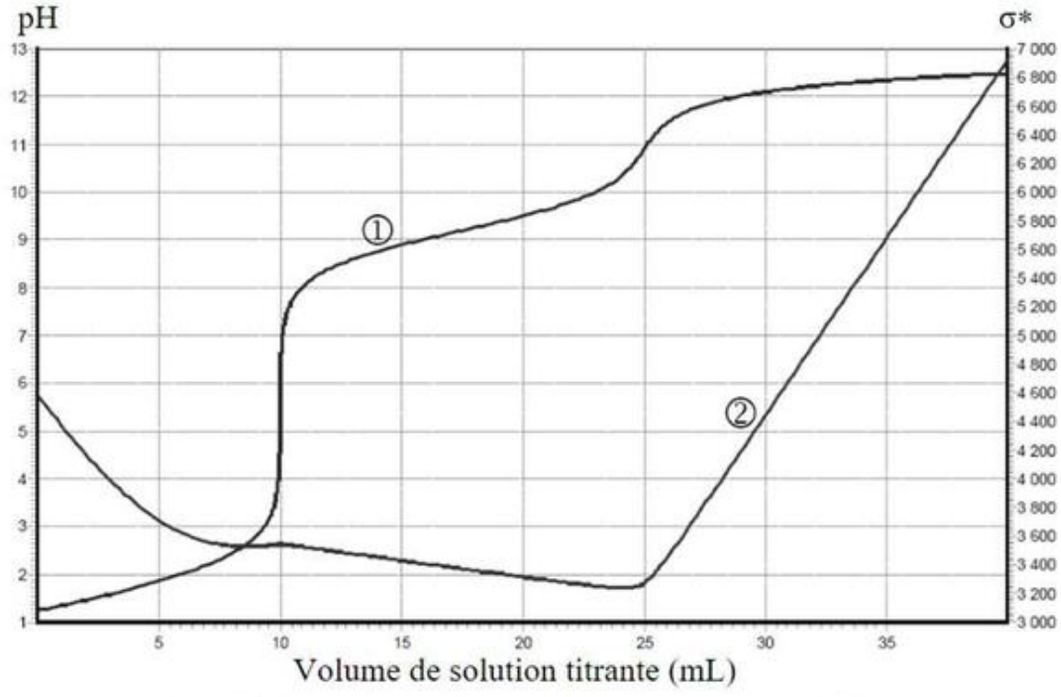
D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 26.12. Titrage d'un mélange d'acides

On dispose d'une solution S constituée d'un mélange d'acide sulfurique H_2SO_4 de concentration C_A et de chlorure d'ammonium $(NH_4^+ + Cl^-)$ de concentration C'_A. On titre un volume $V_A = 10{,}0\ \text{mL}$ de solution S par une solution de soude $(Na^+ + HO^-)$ de concentration $C_B = 1{,}00 \cdot 10^{-1}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On note V_B le volume de solution titrante ajoutée à la burette.

On propose de comparer les résultats de trois techniques de dosage :

- dosage pH-métrique, d'où la courbe ① donnant $\text{pH} = f(V_B)$;
- dosage conductimétrique, d'où la courbe ② donnant $\sigma^* = \sigma \dfrac{V_A + V_B}{V_A} = f(V_B)$, où σ est la conductivité de la solution et $\sigma*$ la conductivité corrigée (σ et $\sigma*$ sont exprimés en $\text{mS} \cdot \text{m}^{-1}$) ;
- dosage colorimétrique.



1. Proposer un schéma détaillé et légendé (nature de la verrerie, des électrodes…) permettant d'effectuer simultanément les titrages pH-métrique et conductimétrique.

2. Indiquer quelles sont les trois réactions qui ont lieu au cours du dosage, en précisant les valeurs de leurs constantes d'équilibre. Préciser celle(s) qui se déroule(nt) avant la première équivalence, puis ce qui se passe entre les deux équivalences.

3. Déterminer graphiquement les volumes des points d'équivalence. Indiquer à chaque fois la courbe exploitée.

4. En déduire les valeurs des concentrations C_A et C'_A.

5. Justifier qualitativement l'augmentation de la conductivité après la deuxième équivalence.

6. Aurait-il été possible d'utiliser un indicateur coloré pour repérer le premier point d'équivalence ? le second point d'équivalence ? Si oui, le(s)quel(s) ?

Données : pour H_2SO_4, première acidité forte, $pK_{a,2}(HSO_4^- / SO_4^{2-}) = 2,0$;

$pK_a(NH_4^+ / NH_3) = 9,2$; $pK_a(H_2O / HO^-) = 14,0$.

Indicateur coloré	*Zone de virage*	*Teinte acide → basique*
bleu de thymol	1,2 à 2,8 8,0 à 9,6	rouge → jaune jaune → bleu
hélianthine	3,2 à 4,4	rouge → jaune
rouge de méthyle	4,8 à 6,0	rouge → jaune
phénolphtaléine	8,2 à 10	incolore → rose
jaune d'alizarine	10,1 à 12,0	jaune → rouge

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 26.1. Pour le diagramme, calculer les pK_a successifs de l'EDTA.

Exercice 26.2. Question 3 : exprimer la concentration totale en espèces soufrées ainsi que les deux constantes d'acidité, puis résoudre le système d'équations obtenu pour exprimer les fractions molaires recherchées.

Exercice 26.3. Question 6 : observer la charge de l'espèce acido-basique prépondérante en solution pour en déduire son sens de déplacement dans le champ électrique.

Exercice 26.4. Questions 3 et 4 : écrire l'équation menant à l'espèce dissoute prédominante à partir de la silice en faisant une combinaison linéaire d'équations.

Exercice 26.6. Question 3 : superposer les diagrammes de prédominance tracés précédemment.

Exercice 26.7. Question 1 : HCl est un acide fort. Question 4 : faire un bilan de matière pour la réaction entre les ions oxonium et le 2-aminoéthanol.

Exercice 26.8. Question 2 : déterminer l'avancement de la réaction (2) à l'équilibre.

Exercice 26.11. Question 2.a : dans chaque domaine, faire l'inventaire des espèces ioniques présentes et exprimer la conductivité de la solution.

Exercice 26.12. Question 2 : montrer que les deux acidités de l'acide sulfurique sont titrées simultanément.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux

1. Les couples H_3O^+/H_2O et H_2O/HO^- constituent deux couples acide/base conjugués.

2. L'espèce $H_2PO_4^-$ joue le rôle de base dans le couple $H_3PO_4/H_2PO_4^-$ et le rôle d'acide dans le couple $H_2PO_4^- / HPO_4^{2-}$.

4. Le taux de dissociation d'un acide faible dépend de la concentration initiale de l'acide dans la solution.

6. Plus un acide est fort, plus sa base conjuguée est faible.

7. La valeur d'une constante d'équilibre dépend de la température. On a $K_e(25\ °C) = 10^{-14}$.

8. La constante d'équilibre associée à l'équation de réaction entre l'acide méthanoïque et l'ammoniac est égale à $K = 10^{5,4} > 1$.

9. Dans une solution de pH = 3,2 on a $[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-3,2}\ mol \cdot L^{-1}$, tandis que dans une solution de pH = 2,2 on a $[H_3O^+] = 10^{-2,2}\ mol \cdot L^{-1}$. La concentration en ions oxonium est donc dix fois plus faible dans la solution de pH = 3,2.

10. Si la forme acide du couple prédomine, on peut seulement conclure que la solution a un $pH < pK_a$.

❑ Les erreurs classiques

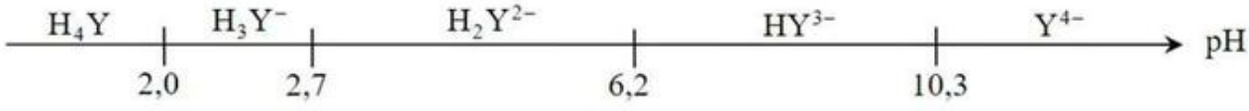
– Ne pas s'embrouiller avec les formules $pH = -\log\dfrac{[H_3O^+]}{c^\circ}$ et $\dfrac{[H_3O^+]}{c^\circ} = 10^{-pH}$.

– Une solution dans laquelle la forme acide d'un couple acide/base prédomine ne possède pas forcément un pH inférieur à 7 !

■■ Corrigé des exercices

Exercice 26.1

1. La formule brute de l'acide éthylènediaminetétraacétique est, d'après la représentation fournie : $C_{10}H_{16}O_8$ (que l'on peut simplifier pour la suite en H_4Y). Les espèces acido-basiques conjuguées sont donc successivement : $C_{10}H_{15}O_8^-$ (ou H_3Y^-), $C_{10}H_{14}O_8^{2-}$ (ou H_2Y^{2-}), $C_{10}H_{13}O_8^{3-}$ (ou HY^{3-}) et $C_{10}H_{12}O_8^{4-}$ (ou Y^{4-}). On calcule à partir des données les pK_a successifs des couples acide-base : $pK_{a,1} = -\log(K_{a,1}) = 2,0$; $pK_{a,2} = 2,7$; $pK_{a,3} = 6,2$ et $pK_{a,4} = 10,3$. On peut alors établir le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques de l'EDTA.



⇨ *Méthode 26.2*

2. On calcule la masse de solide Na_2H_2Y pour préparer par dissolution 100 mL de solution de concentration $c = 2,0 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}. $m_{Na_2H_2Y} = n_{H_2Y^{2-}} M_{Na_2H_2Y} = cV_{solution} M_{Na_2H_2Y}$, soit $\boxed{m_{Na_2H_2Y} = 0,67 \text{ g}}$.

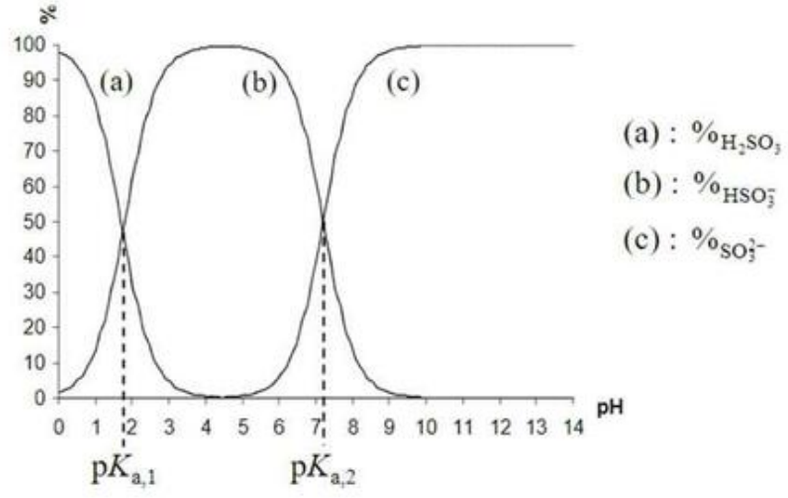
3. D'après le diagramme de prédominance, l'espèce H_2Y^{2-} prédomine à pH = 4,4. Comme $pK_{a,2} + 1 < pH < pK_{a,3} - 1$, H_2Y^{2-} est majoritaire par rapport aux autres espèces acido-basiques de l'EDTA.

Exercice 26.2

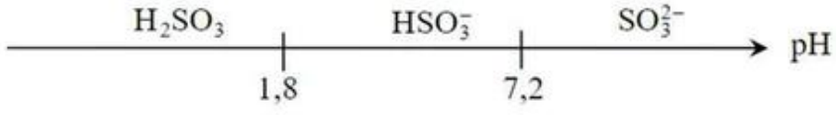
1. Le diacide $H_2SO_{3(aq)}$ prédomine en milieu acide, pour les valeurs de pH les plus faibles, sa courbe de distribution est donc la courbe (a). La dibase $SO_{3(aq)}^{2-}$ prédomine en milieu basique, pour les valeurs de pH les plus élevées, sa courbe de distribution est donc la courbe (c). L'espèce amphotère $HSO_{3(aq)}^-$ est donc associée à la courbe (b).

2. Au point d'intersection entre les courbes (a) et (b), on a : $\%_{H_2SO_3} = \%_{HSO_3^-} = 50\ \%$, soit $[H_2SO_3] = [HSO_3^-]$. On en déduit $pH = pK_a(H_2SO_3 / HSO_3^-)$ en ce point. Par lecture sur l'axe des abscisses, $\boxed{pK_{a,1}(H_2SO_3 / HSO_3^-) = 1,8}$. De même, au point d'intersection entre les courbes (b) et (c), on a : $\%_{HSO_3^-} = \%_{SO_3^{2-}} = 50\ \%$.

On lit alors sur l'axe des abscisses : $\boxed{pK_{a,2}(HSO_3^- / SO_3^{2-}) = 7,2}$.



3. À partir des valeurs des pK_a successifs, on établit le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques de l'acide sulfureux :



⇨ *Méthode 26.2*

4. On a $c_t = [H_2SO_3] + [HSO_3^-] + [SO_3^{2-}]$. Or à pH = 3, on lit sur le diagramme de distribution : $\%_{H_2SO_3} = 5\%$ et $\%_{HSO_3^-} = 95\ \%$.

On calcule alors :

$$\%_{H_2SO_3} = \frac{[H_2SO_3]}{c_t} \Leftrightarrow [H_2SO_3] = c_t \cdot \%_{H_2SO_3} \text{ et } \%_{HSO_3^-} = \frac{[HSO_3^-]}{c_t} \Leftrightarrow [HSO_3^-] = c_t \cdot \%_{HSO_3^-}.$$

AN $\boxed{[H_2SO_3] = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$ et $\boxed{[HSO_3^-] = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

D'autre part, $K_{a,2} = \dfrac{[SO_3^{2-}] \cdot [H_3O^+]}{[HSO_3^-] \cdot c^\circ} \Leftrightarrow [SO_3^{2-}] = \dfrac{[HSO_3^-] \cdot K_{a,2} \cdot c^\circ}{[H_3O^+]}$. AN

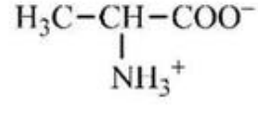
$\boxed{[SO_3^{2-}] = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

À pH = 3, on a $pK_{a,1} + 1 < \text{pH} < pK_{a,2} - 1$, l'espèce HSO_3^- est donc majoritaire.

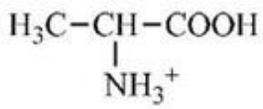
Les concentrations des différentes espèces pourraient être aussi déterminées par le calcul, sans utiliser la courbe de distribution.

Exercice 26.3

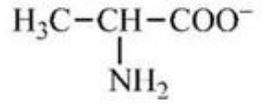
1. Une réaction acide-base entre la fonction acide carboxylique –COOH et la fonction amine $-NH_2$ de l'acide aminé conduit au zwitterion ci-contre.



2. L'acide et la base conjugués du zwitterion sont représentés ci-après.

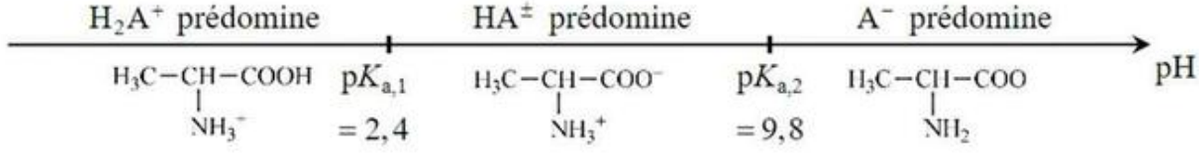


Acide conjugué du zwitterion



Base conjuguée du zwitterion

3. On trace le diagramme de prédominance des formes acido-basiques de l'alanine.



⇨ *Méthode 26.2*

4. Soit c_t la concentration totale en alanine dans la solution : $c_t = [H_2A^+] + [HA^\pm] + [A^-]$.

$$K_{a,1} = \frac{[HA^\pm]\cdot[H_3O^+]}{[H_2A^+]\cdot c^\circ} \Leftrightarrow [H_2A^+] = \frac{[HA^\pm]\cdot[H_3O^+]}{K_{a,1}\cdot c^\circ}$$

$$K_{a,2} = \frac{[A^-]\cdot[H_3O^+]}{[HA^\pm]\cdot c^\circ} \Leftrightarrow [A^-] = \frac{K_{a,2}\cdot[HA^\pm]\cdot c^\circ}{[H_3O^+]}.$$

On en déduit : $c_t = [HA^\pm]\left(\frac{[H_3O^+]}{K_{a,1}\cdot c^\circ} + 1 + \frac{K_{a,2}\cdot c^\circ}{[H_3O^+]}\right) \Leftrightarrow \boxed{[HA^\pm] = \frac{c_t}{\frac{[H_3O^+]}{K_{a,1}\cdot c^\circ} + 1 + \frac{K_{a,2}\cdot c^\circ}{[H_3O^+]}}}$.

5. Graphiquement, on voit que la concentration en zwitterion est maximale autour de $\boxed{pH_i = 6}$.

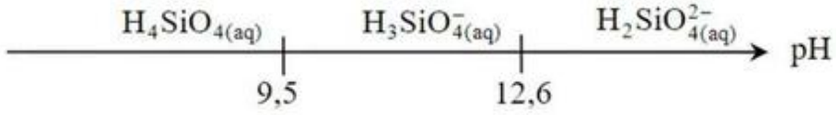
On montre par le calcul que $pH_i = \frac{1}{2}(pK_{a,1} + pK_{a,2})$, *soit* $pH_i = 6,1$ *pour l'alanine.*

6. D'après le diagramme de prédominance, pour $pH_1 \ll pH_i$ la forme H_2A^+ prédomine en solution (elle est majoritaire si $pH < pK_{a,1} - 1$). Cette espèce, chargée positivement, se déplacera dans le sens du champ électrique appliqué.
Pour $pH_2 = pH_i$, la forme $HA^\pm$ est majoritaire en solution (car $pK_{a,1} + 1 < pH < pK_{a,2} - 1$). Cette espèce, neutre, ne se déplacera pas sous l'action du champ électrique et restera à la position du dépôt initial.
D'après le diagramme de prédominance, pour $pH_3 \gg pH_i$ la forme A^- prédomine en solution (elle est majoritaire si $pH > pK_{a,2} + 1$). Cette espèce, chargée négativement, se déplacera dans le sens opposé à celui du champ électrique appliqué.
Si des dépôts de solutions de plusieurs acides aminés différents sont initialement réalisés sur une même ligne sur la bande de papier tamponnée, les sens et vitesses de déplacement des différents acides aminés seront différents, en fonction de leur point isoélectrique et de la nature de l'espèce prédominante au pH de travail. Après révélation, les taches correspondant aux

différentes espèces apparaîtront à différents niveaux, les acides aminés auront donc bien été séparés.

Exercice 26.4

1. On donne le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques de la silice dissoute :



⇨ *Méthode 26.2*

2. D'après le diagramme de prédominance tracé à la question précédente, la forme $\boxed{H_4SiO_{4(aq)}}$ prédomine dans les eaux naturelles, dont le pH est inférieur à 9,5.

3. Pour une eau dont le pH est compris entre 10 et 12, la forme dissoute de la silice qui prédomine est l'espèce $H_3SiO^-_{4(aq)}$. L'équation bilan de dissolution de la silice en milieu basique est l'équation (1) obtenue ci-dessous :

$$SiO_{2(s)} + 2\,H_2O_{(l)} = H_4SiO_{4(aq)} \qquad K$$
$$H_4SiO_{4(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3SiO^-_{4(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \qquad K_{a,1}$$
$$H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2\,H_2O_{(l)} \qquad 1/K_e$$
$$SiO_{2(s)} + HO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3SiO^-_{4(aq)} \quad (1) \quad K'_1.$$

On peut écrire : $\boxed{K'_1 = \dfrac{K \cdot K_{a,1}}{K_e}}$. AN $\boxed{K'_1 = 63{,}1}$.

La constante d'équilibre associée à une équation obtenue comme une somme d'équations est égale au produit des constantes d'équilibre associées à ces équations.

4. Pour une eau dont le pH est compris entre 13 et 14, la forme dissoute de la silice qui prédomine est l'espèce $H_2SiO^{2-}_{4(aq)}$. L'équation bilan de dissolution de la silice en milieu basique s'écrit donc selon :

$$SiO_{2(s)} + 2\,H_2O_{(l)} = H_4SiO_{4(aq)} \qquad K$$
$$H_4SiO_{4(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3SiO^-_{4(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \qquad K_{a,1}$$
$$H_3SiO^-_{4(aq)} + H_2O_{(l)} = H_2SiO^{2-}_{4(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \qquad K_{a,2}$$
$$2\,H_3O^+_{(aq)} + 2\,HO^-_{(aq)} = 4\,H_2O_{(l)} \qquad 1/K_e^2$$
$$SiO_{2(s)} + 2\,HO^-_{(aq)} = H_2SiO^{2-}_{4(aq)} \qquad K'_2.$$

On peut écrire : $\boxed{K'_2 = \dfrac{K \cdot K_{a,1} \cdot K_{a,2}}{K_e^2}}$. AN $\boxed{K'_2 = 1{,}58 \cdot 10^3}$.

Corrigé

Exercice 26.5

1. D'après la loi de Beer–Lambert, l'absorbance d'une solution contenant une unique espèce qui absorbe dans le domaine de longueurs d'onde étudié est égale à : $\boxed{A = \varepsilon \cdot l \cdot c}$, où ε (en $\mathrm{L \cdot mol^{-1} \cdot m^{-1}}$) est le coefficient d'absorption molaire de l'espèce à la longueur d'onde λ à laquelle on fait la mesure, l (en m) est la longueur de la cuve du spectrophotomètre, et c (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$) est la concentration molaire de l'espèce dans la solution.
Cette loi est valide pour des valeurs de c inférieures à 10^{-2} $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ environ.
Si plusieurs espèces absorbent à une même longueur d'onde, la loi de Beer–Lambert s'écrit : $A = \sum_i \varepsilon_{\lambda,i} \times l \times c_i$.

2. Une solution contenant uniquement HIn possède la teinte complémentaire de celle associée à la longueur d'onde du maximum d'absorption $\lambda_1 = 430$ nm. Comme celle-ci correspond à la couleur violette, la solution apparaît donc jaune.

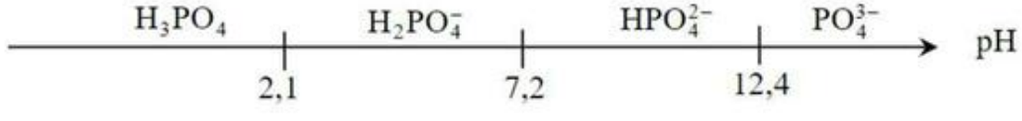
3. La longueur d'onde du maximum d'absorption $\lambda_2 = 620$ nm correspond à la couleur orange, la solution apparaît donc bleue.

4. a) On suppose qu'en milieu fortement acide la forme acide HIn est majoritaire par rapport à la forme basique. On a alors $c = [\mathrm{HIn}] + [\mathrm{In^-}] \approx [\mathrm{HIn}]$ et $A_1 = \varepsilon_{\mathrm{HIn}} \cdot l \cdot c$.
De la même façon, on suppose qu'en milieu fortement basique la forme basique $\mathrm{In^-}$ est majoritaire par rapport à la forme acide. On a alors $c = [\mathrm{HIn}] + [\mathrm{In^-}] \approx [\mathrm{In^-}]$ et $A_2 = \varepsilon_{\mathrm{In^-}} \cdot l \cdot c$.
Dans la solution (S), on a : $A_S = \varepsilon_{\mathrm{HIn}} \cdot l \cdot [\mathrm{HIn}]_S + \varepsilon_{\mathrm{In^-}} \cdot l \cdot [\mathrm{In^-}]_S$ avec $c = [\mathrm{HIn}]_S + [\mathrm{In^-}]_S$. On calcule : $A_1 - A_S = \varepsilon_{\mathrm{HIn}} \cdot l \cdot c - \varepsilon_{\mathrm{HIn}} \cdot l \cdot (c - [\mathrm{In^-}]_S) - \varepsilon_{\mathrm{In^-}} \cdot l \cdot [\mathrm{In^-}]_S = (\varepsilon_{\mathrm{HIn}} - \varepsilon_{\mathrm{In^-}}) \cdot l \cdot [\mathrm{In^-}]_S$ et $A_S - A_2 = \varepsilon_{\mathrm{HIn}} \cdot l \cdot [\mathrm{HIn}]_S + \varepsilon_{\mathrm{In^-}} \cdot l \cdot (c - [\mathrm{HIn}]_S) - \varepsilon_{\mathrm{In^-}} \cdot l \cdot c = (\varepsilon_{\mathrm{HIn}} - \varepsilon_{\mathrm{In^-}}) \cdot l \cdot [\mathrm{HIn}]_S$. On obtient donc : $\boxed{\dfrac{A_1 - A_S}{A_S - A_2} = \dfrac{[\mathrm{In^-}]_S}{[\mathrm{HIn}]_S}}$.

b) Pour le couple $\mathrm{HIn / In^-}$: $K_a = \dfrac{[\mathrm{In^-}] \cdot [\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{HIn}] \cdot c^\circ}$ d'où $\mathrm{p}K_a = \mathrm{pH}_S - \log \dfrac{[\mathrm{In^-}]_S}{[\mathrm{HIn}]_S}$ soit $\boxed{\mathrm{p}K_a = \mathrm{pH}_S - \log \dfrac{A_1 - A_S}{A_S - A_2}}$ AN $\boxed{\mathrm{p}K_a = 7{,}2}$.

Exercice 26.6

1. Traçons le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques phosphorées.



2. Traçons le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques azotées.



⇨ *Méthode 26.2*

3. La superposition des diagrammes de prédominance précédents montre que les espèces PO_4^{3-} et NH_4^+ possèdent des domaines de prédominance disjoints. Elles sont donc incompatibles. On peut envisager entre ces deux espèces la réaction d'équation :

$$\boxed{NH_4^+ + PO_4^{3-} = NH_3 + HPO_4^{2-} \qquad K = \frac{K_a}{K_{a,3}} = \frac{10^{-9,2}}{10^{-12,3}} = 10^{3,1}}.$$

⇨ *Méthodes 26.1 et 26.3*

4. a) La concentration totale en espèces phosphorées de l'effluent vaut :
$c_P = [H_3PO_4] + [H_2PO_4^-] + [HPO_4^{2-}] + [PO_4^{3-}]$. Or, à pH = 9,5, on a $pK_{a,2} + 1 < pH < pK_{a,3} - 1$.
On voit sur le diagramme de prédominance que l'espèce HPO_4^{2-} est majoritaire. On a donc :
$c_P = [HPO_4^{2-}]$.
On peut alors calculer la concentration en ions phosphate de l'effluent en utilisant l'expression de la constante d'acidité $K_{a,3} = \dfrac{[PO_4^{3-}][H_3O^+]}{[HPO_4^{2-}] \cdot c^\circ} \Leftrightarrow [PO_4^{3-}] = \dfrac{K_{a,3} \cdot c_P \cdot c^\circ}{[H_3O^+]}$.
AN $\boxed{[PO_4^{3-}] = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

b) La concentration totale en espèces azotées de l'effluent vaut :
$c_N = [NH_4^+] + [NH_3]$, avec $K_a = \dfrac{[NH_3][H_3O^+]}{[NH_4^+] \cdot c^\circ} \Leftrightarrow [NH_3] = \dfrac{K_a \cdot [NH_4^+] \cdot c^\circ}{[H_3O^+]}$. On en déduit :

$$c_N = [NH_4^+]\left(1 + \frac{K_a \cdot c^\circ}{[H_3O^+]}\right) \Leftrightarrow [NH_4^+] = \frac{c_N}{1 + \dfrac{K_a \cdot c^\circ}{[H_3O^+]}}.$$ AN $\boxed{[NH_4^+] = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

c) Pour déterminer le sens de l'évolution spontanée du système, calculons le quotient de réaction associé à l'équation **(1)** : $Q = \dfrac{(c^\circ)^3}{[Mg^{2+}][PO_4^{3-}][NH_4^+]}$ avec $[PO_4^{3-}] = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $[NH_4^+] = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[Mg^{2+}] = \dfrac{m}{M_{MgCl_2} V} = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. AN $\boxed{Q = 9,4 \cdot 10^{10} < K}$.

Le système évolue donc dans le sens direct de l'équation **(1)**. Les ions phosphate sont consommés par cette réaction, la teneur en phosphore de l'effluent est donc abaissée.

Exercice 26.7

1. Le chlorure d'hydrogène gazeux conduit après dissolution à une solution d'acide chlorhydrique : HCl est un acide fort et se dissocie totalement selon la réaction d'équation

$$\boxed{HCl_{(g)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}}$$

2. Dans la solution de lavage, H_2O est l'acide le plus fort présent, la base B la base la plus forte présente. La RP a pour équation : $B + H_2O = BH^+ + HO^- \qquad \dfrac{K_e}{K_a} = 10^{-4,5}$.

⇨ *Méthode 26.1*

Corrigé

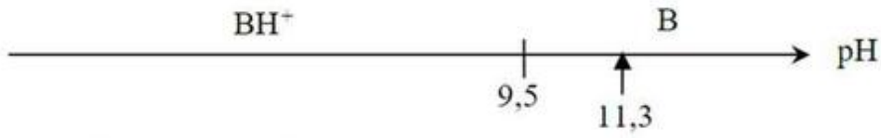
$\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$	B	$+H_2O$	$=BH^+$	$+HO^-$
$t=0$	c_0	excès	0	0
t	c_0-x	excès	x	x

La constante d'équilibre associée à la RP est relativement faible, on peut supposer l'avancement de la réaction négligeable devant c_0, d'où :

$$\frac{K_e}{K_a}\approx\frac{x_{éq}^2}{c_0\cdot c^\circ}=\frac{K_e^2(c^\circ)^3}{c_0\cdot[H_3O^+]_{éq}^2}\Leftrightarrow[H_3O^+]_{éq}^2=\frac{K_e\cdot K_a\cdot(c^\circ)^3}{c_0}\quad\text{donc}\quad\boxed{\text{pH}=\frac{1}{2}(\text{p}K_a+\text{p}K_e+\log c_0)}.$$

AN $\boxed{\text{pH}=11{,}3}$.

Traçons le diagramme de prédominance du couple BH^+/B :



On constate qu'au pH trouvé, BH^+ est bien minoritaire par rapport à sa base conjuguée (car $\text{pH}>\text{p}K_a+1$), l'avancement de la réaction pouvait bien être négligé.

De plus, $\text{pH}>7{,}5$ donc $[H_3O^+]\ll[HO^-]$ et l'avancement de la réaction d'autoprotolyse de l'eau est négligeable.

⇨ *Méthode 26.4*

3. La neutralisation met en jeu une transformation acido-basique entre l'acide chlorhydrique et le 2-aminoéthanol, qui peut être modélisée par la réaction d'équation :

$$B+H_3O^+=BH^++H_2O\qquad K=\frac{1}{K_a}=10^{9,5}.$$

4. La constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction entre le 2-aminoéthanol et les ions oxonium étant largement supérieure à 10^3, on peut considérer cette réaction comme totale. La quantité de 2-aminoéthanol initialement présente dans 1,0 m^3 de la solution de lavage est égale à : $n_B=c_0V_{sol}=1{,}0\cdot10^2$ mol. Elle permet donc de neutraliser $n_{H_3O^+}=1{,}0\cdot10^2$ mol d'ions oxonium (d'après la stœchiométrie de la réaction), soit $n_{HCl}=1{,}0\cdot10^2$ mol de chlorure d'hydrogène gazeux.
D'après l'équation d'état des gaz parfaits, le volume de HCl gazeux correspondant vaut : $V_{HCl}=\dfrac{n_{HCl}RT}{P}$. AN $\boxed{V_{HCl}=2{,}5\text{ m}^3}$.

Exercice 26.8

1. La constante d'équilibre s'écrit :

$$K_2=\frac{[HCO_3^-][H_3O^+]P^\circ}{(c^\circ)^2P_{CO_2}}=\frac{[HCO_3^-][H_3O^+]}{[CO_{2(aq)}]\cdot c^\circ}\frac{[CO_{2(aq)}]P^\circ}{c^\circ\cdot P_{CO_2}}=K_1\times K_{a,1}.\text{ AN }\boxed{K_2=1{,}43\cdot10^{-8}}.$$

⇨ *Méthode 26.1*

2. Déterminons l'avancement de la réaction **(2)** à l'équilibre.

$\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$	$CO_{2(g)}$	$+2\,H_2O_{(l)}$	$=HCO_{3(aq)}^-$	$+\,H_3O_{(aq)}^+$
$t=0$	P_{CO_2} fixée	excès	0	0
t	P_{CO_2} fixée	excès	x	x

$K_2 = \dfrac{x_{éq}^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{CO_2}} \Leftrightarrow x_{éq} = c^\circ\sqrt{\dfrac{K_2 P_{CO_2}}{P^\circ}}$, soit $\boxed{x_{éq} = 2{,}38\cdot10^{-6}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$.

On en déduit le pH de l'eau de pluie : $\boxed{\text{pH} = -\log\left(\dfrac{[H_3O^+]_{éq}}{c^\circ}\right) = 5{,}6}$.

Cette valeur est supérieure à celles de l'intervalle fourni par l'énoncé (le pH des eaux de pluie est généralement compris entre 4 et 5,5), l'acidité des pluies ne peut pas être uniquement due au dioxyde de carbone dissous.

3. Le calcul précédent, réalisé en prenant $P_{CO_2} = 50$ Pa, conduit à $\boxed{x_{éq} = 2{,}68\cdot10^{-6}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$ et $\boxed{\text{pH} = 5{,}6}$. La précision des résultats ne permet pas d'observer de différence dans le pH des eaux de pluie.

En exprimant les valeurs de pH avec 2 décimales, on obtient à la question 2 : pH = 5,62 et à la question 3 : pH = 5,57, d'où une faible diminution du pH liée à l'élévation de la pression partielle en dioxyde de carbone dans l'atmosphère.

4. La constante d'équilibre s'écrit :

$K_4 = \dfrac{[HSO_3^-][H_3O^+]P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{SO_2}} = \dfrac{[HSO_3^-][H_3O^+]}{[SO_{2(aq)}]\cdot c^\circ}\dfrac{[SO_{2(aq)}]P^\circ}{c^\circ\cdot P_{SO_2}} = K_3 \times K_{a,1'}$. AN $\boxed{K_4 = 2{,}04\cdot10^{-2}}$.

De la même façon que précédemment, déterminons l'avancement de la réaction **(4)** à l'équilibre.

$\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$	$SO_{2(g)}$	$+2\,H_2O_{(l)}$	$=HSO_{3(aq)}^-$	$+\,H_3O_{(aq)}^+$
$t=0$	P_{SO_2} fixée	excès	0	0
t	P_{SO_2} fixée	excès	x	x

$K_4 = \dfrac{x_{éq}^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{SO_2}} \Leftrightarrow x_{éq} = c^\circ\sqrt{\dfrac{K_2 P_{SO_2}}{P^\circ}}$, soit $\boxed{x_{éq} = 6{,}39\cdot10^{-6}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$.

On en déduit le pH de l'eau de pluie : $\boxed{\text{pH} = 5{,}2}$. Cette valeur est comprise dans l'intervalle fourni par l'énoncé, la solubilisation du dioxyde de soufre participe davantage à l'acidité des pluies.

Les différentes espèces contribuent à l'acidité des pluies (y compris les oxydes d'azote).

5. À partir de la relation entre le pH de l'eau de pluie et la température, déterminons la variation de pH associée à une variation de température de 5 °C. Pour cela, on sépare les variables et on intègre la relation donnée entre $T_1 = 298$ K et $T_2 = 303$ K.

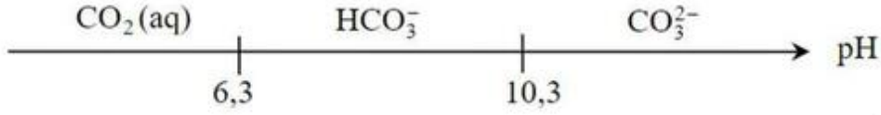
Corrigé

$\int_{pH_1}^{pH_2} d\,pH = \int_{T_1}^{T_2} \frac{A}{T^2} dT \Leftrightarrow \boxed{\Delta pH = pH_2 - pH_1 = -A\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}$. AN $\boxed{\Delta pH = 6{,}1 \cdot 10^{-2}}$.

Une hausse de température de 5 °C entraînerait une augmentation du pH de 0,06 unités. Ainsi, le réchauffement climatique diminue l'acidité des pluies.

Exercice 26.9

1. Traçons le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques du dioxyde de carbone.



⇨ *Méthode 26.2*

2. On constate que les espèces $CO_2(aq)$ et CO_3^{2-} possèdent des domaines de prédominance disjoints. Ces deux espèces sont incompatibles. On peut modéliser la transformation chimique observée par la réaction d'équation : $\boxed{CO_2(aq) + H_2O + CO_3^{2-} = 2\ HCO_3^-}$

La constante d'équilibre associée à cette équation vaut : $K = \frac{[HCO_3^-]_{éq}^2}{[CO_3^{2-}]_{éq} \cdot [CO_2(aq)]_{éq}} = \frac{K_{a,1}}{K_{a,2}}$.

AN $\boxed{K = 10^4}$. La transformation peut donc être considérée comme totale.

⇨ *Méthodes 26.1 et 26.3*

3. On établit le tableau d'avancement associé à la réaction précédente.

	$CO_2(aq)$	$+ H_2O$	$+ CO_3^{2-}$	$= 2\ HCO_3^-$
$t = 0$	c	excès	c	0
t	$c - x \approx \varepsilon$	excès	$c - x \approx \varepsilon$	$2\,c$

Puisque la réaction est totale et que les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques, les ions hydrogénocarbonate prédominent dans la solution en fin de réaction, on peut donc en déduire un encadrement du pH final : $6{,}3 \leq pH \leq 10{,}3$.

Une valeur approchée du pH peut être calculée en considérant que la réaction d'équation $2\ HCO_3^- = CO_2(aq) + H_2O + CO_3^{2-}$ impose le pH à l'équilibre. C'est la réaction prépondérante.

On a alors : $K_{a,1} \cdot K_{a,2} = \frac{[CO_3^{2-}]_{éq} \cdot [H_3O^+]_{éq}^2}{[CO_2(aq)]_{éq} \cdot (c^\circ)^2}$ avec $[CO_3^{2-}]_{éq} = [CO_2(aq)]_{éq}$

d'où $[H_3O^+]_{éq}^2 = (c^\circ)^2 \cdot K_{a,1} \cdot K_{a,2}$ soit $\boxed{pH = \frac{1}{2}(pK_{a,1} + pK_{a,2})}$. AN $\boxed{pH = 8{,}3}$.

⇨ *Méthode 26.4*

On pourrait vérifier que l'avancement des réactions secondaires est négligeable devant l'avancement de la RP pour conclure sur la validité du pH déterminé.

Exercice 26.10

1. Les ions hydroxyde réagissent avec le dioxyde de soufre aqueux selon la réaction d'équation : $\boxed{SO_2(aq) + HO^-(aq) = HSO_3^-(aq) \qquad K = \dfrac{K_{a,1}}{K_e} = 10^{12,2}}$.

puis avec les ions hydrogénosulfite selon la réaction d'équation :

$$\boxed{HSO_3^-(aq) + HO^-(aq) = SO_3^{2-}(aq) + H_2O \qquad K = \frac{K_{a,2}}{K_e} = 10^{6,8}}.$$

⇨ *Méthode 26.1*

2. Les pK_a successifs du dioxyde de soufre vérifient : $pK_{a,2} - pK_{a,1} > 4$, les deux acidités de $SO_2(aq)$ sont donc titrées successivement. Les réactions de titrage considérées à la question **1.** se déroulent de façon consécutive dans le mélange. Les deux sauts brusques de pH observés sur la courbe sont associés aux équivalences successives, pour des volumes de soude versés $V_{e1} = 10,0$ mL et $V_{e2} = 20,0$ mL.

À la première équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques, d'où : $n_{SO_2,\,titré} = n_{HO^-,\,versé} \Leftrightarrow c_{SO_2} \cdot V_0 = C_B \cdot V_{e1} \Leftrightarrow c_{SO_2} = \dfrac{C_B \cdot V_{e1}}{V_0}$. AN $\boxed{c_{SO_2} = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

3. Pour $V = 0$ mL, on a une solution du diacide $SO_2(aq)$ à la concentration $c_{SO_2} = 1,0 \cdot 10^{-1}$ mol·L^{-1}. $SO_2(aq)$ est l'acide le plus fort présent, H_2O la base la plus forte présente. La RP a pour équation : $SO_2 + 2\,H_2O = HSO_3^- + H_3O^+ \qquad K_{a1} = 10^{-1,8}$.

La constante d'équilibre associée à la RP est relativement élevée, on ne peut vraisemblablement pas négliger l'avancement de la réaction devant c_{SO_2}.

Il faut donc résoudre l'équation : $K_{a1} = \dfrac{[H_3O^+]^2}{(c_{SO_2} - [H_3O^+]) \cdot c^\circ}$. On obtient $[H_3O^+] = 3,3 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1} et $\boxed{pH = 1,5}$.

$pH < pK_{a,2} - 1$ donc $[SO_3^{2-}] \ll [HSO_3^-]$ et la seconde acidité de $SO_2(aq)$ peut être négligée.

$pH < 6,5$ donc $[HO^-] \ll [H_3O^+]$ et l'avancement de la réaction d'autoprotolyse de l'eau est négligeable.

⇨ *Méthode 26.4*

Exercice 26.11

1. Une réaction chimique peut être suivie par conductimétrie si la réaction met en jeu une ou plusieurs espèces ioniques. Si la réaction fait intervenir un réactif ionique et un produit ionique avec la même stœchiométrie, il faut, pour que la conductivité varie au cours de la transformation que ces deux espèces possèdent des conductivités molaires ioniques différentes.

2. a) On observe sur la courbe de pH deux sauts brusques de pH, et sur la courbe de conductivité deux ruptures de pente. Il y a donc lors du titrage deux équivalences successives pour des volumes de soude versés $V_{e1} = 12,5$ mL et $V_{e2} = 30,0$ mL.

On peut donc distinguer les trois domaines suivants.

Corrigé

- $0 < V < V_{e1}$: $H_3O^+ + HO^- = 2\ H_2O$

Avant la première équivalence, les ions HO^- constituent le réactif limitant de la réaction de titrage des ions H_3O^+. Ils sont consommés dès qu'ils sont ajoutés à la solution titrée. Les ions présents dans le milieu sont donc : H_3O^+ (dont la concentration diminue car les ions oxonium sont consommés par la soude), Na^+ (dont la concentration augmente au fur et à mesure de l'ajout de la soude), Cl^- (dont la concentration ne varie pas si on néglige l'effet de la dilution).
Or la conductivité s'écrit dans ce domaine : $\sigma = \lambda_{H_3O^+} \cdot [H_3O^+] + \lambda_{Na^+} \cdot [Na^+] + \lambda_{Cl^-} \cdot [Cl^-]$ (on néglige les ions HO^- apportés par l'autoprotolyse de l'eau). Comme les ions oxonium sont beaucoup plus « mobiles » que les ions sodium ($\lambda_{H_3O^+} \gg \lambda_{Na^+}$), la conductivité décroît.

- $V_{e1} < V < V_{e2}$: $CH_3COOH + HO^- = CH_3COO^- + H_2O$

Entre les deux équivalences, les ions HO^- sont le réactif limitant de la deuxième réaction de titrage. Les ions présents dans le milieu sont donc : CH_3COO^- (dont la concentration augmente au fur et à mesure qu'ils sont formés), Na^+ (dont la concentration augmente au fur et à mesure de l'ajout de la soude), Cl^- (dont la concentration ne varie pas si on néglige la dilution). Dans ce domaine, $\sigma = \lambda_{CH_3COO^-} \cdot [CH_3COO^-] + \lambda_{Na^+} \cdot [Na^+] + \lambda_{Cl^-} \cdot [Cl^-]$. La conductivité croît.

- $V > V_{e2}$

Après la deuxième équivalence, les ions H_3O^+ et l'acide éthanoïque ont été totalement consommés, et la soude ajoutée est en excès. Les ions présents dans le milieu sont donc : CH_3COO^- (dont la concentration ne varie plus), HO^- (dont la concentration augmente), Na^+ (dont la concentration augmente), Cl^- (dont la concentration ne varie pas).
Dans ce domaine, $\sigma = \lambda_{CH_3COO^-} \cdot [CH_3COO^-] + \lambda_{HO^-} \cdot [HO^-] + \lambda_{Na^+} \cdot [Na^+] + \lambda_{Cl^-} \cdot [Cl^-]$.
La conductivité augmente. Comme les ions hydroxyde sont beaucoup plus mobiles que les ions éthanoate, la conductivité augmente plus fortement que dans le deuxième domaine.

b) En l'absence de la courbe dérivée $\frac{\mathrm{d}pH}{\mathrm{d}V} = f(V)$, la courbe de pH ne permet pas de déterminer avec précision les valeurs de V_{e1} et V_{e2}. Sur la courbe de conductivité, les équivalences se traduisent par des ruptures de pente nettement marquées, et l'abscisse du point d'intersection entre deux segments successifs peut être aisément déterminée.

> *Le second saut de pH est plus important que le premier et la détermination de V_{e2} à partir de la courbe de pH est plus aisée que celle de V_{e1}. Inversement, sur la courbe de conductivité, le changement de signe de la pente des segments de droite permet une lecture aisée de V_{e1}, tandis que V_{e2}, qui correspond à l'intersection de deux segments de pente positive, est moins aisé à déterminer.*

Lorsque $V = 0$, on a un mélange d'un acide fort et d'un acide faible. En supposant que l'acide fort impose la valeur du pH, on en déduit $c_{a1} = 10^{-pH}$. AN $\boxed{c_{a1} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

> *On vérifie à la question suivante qu'à* pH = 1,6 *l'avancement de la réaction de dissociation de l'acide éthanoïque est négligeable devant* $[H_3O^+]_0$.

c) À la deuxième équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques, d'où : $n_{CH_3COOH,\ titré} = n_{HO^-,versé} \Leftrightarrow c_{a2} \cdot V_0 = c_b \cdot (V_{e2} - V_{e1}) \Leftrightarrow c_{a2} = \frac{c_b \cdot (V_{e2} - V_{e1})}{V_0}$.

AN $\boxed{c_{a2} = 3{,}50 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Établissons un tableau d'avancement de la transformation pour $V_{e1} < V < V_{e2}$:

mol	CH_3COOH	+ HO^-	= CH_3COO^-	+ H_2O
$t = 0$	$c_{a2} \cdot V_0$	$c_b \cdot (V - V_{e1})$	0	excès
t	$c_{a2} \cdot V_0 - c_b \cdot (V - V_{e1})$	0	$c_b \cdot (V - V_{e1})$	excès

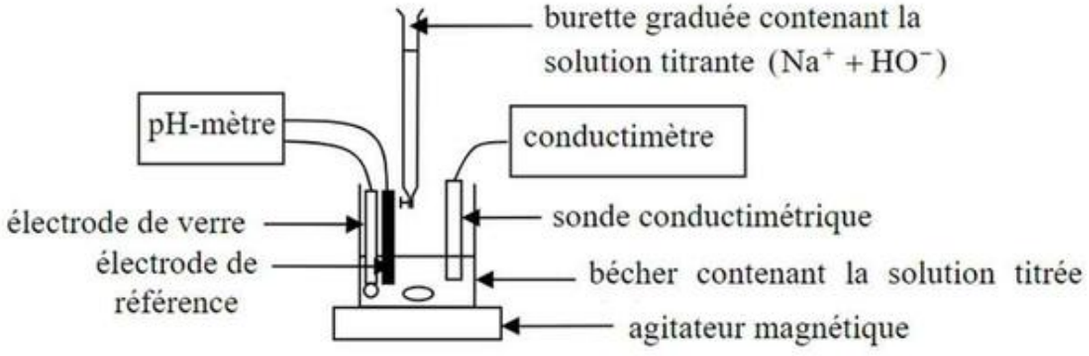
À la deuxième demi-équivalence, pour $V = V_{e1} + \dfrac{V_{e2} - V_{e1}}{2}$, $n_{CH_3COOH} = n_{CH_3COO^-} = \dfrac{c_b(V_{e2} - V_{e1})}{2}$, d'où : $\text{pH} = \text{p}K_a$. On lit sur le graphe pour $V = 21{,}3$ mL : $\boxed{\text{p}K_a = 4}$.

⇨ *Méthode 26.4*

Exercice 26.12

1. On représente le dispositif de titrage. La solution titrée est placée dans un bécher haut, la solution titrante dans une burette graduée. La sonde conductimétrique est reliée à un conductimètre. La mesure du pH est effectuée à l'aide d'une électrode de verre (l'électrode de mesure) et d'une électrode de référence (par exemple une électrode au calomel saturée ou au chlorure d'argent saturée, voir chapitre **27**) reliées à un pH-mètre.

Certaines électrodes de verre sont dites combinées et contiennent à la fois l'électrode de mesure et l'électrode de référence.



2. La première acidité de l'acide sulfurique est forte, c'est-à-dire que H_2SO_4 réagit de façon totale sur l'eau pour conduire aux ions H_3O^+ et HSO_4^-. La solution titrée contient donc les trois acides H_3O^+, HSO_4^- et NH_4^+. Ces trois acides sont dosés par la soude, selon les trois réactions suivantes, classées par ordre décroissant de leurs constantes d'équilibre :

$$(1)\ H_3O^+ + HO^- = 2\ H_2O \qquad K = \frac{1}{K_e} = 10^{14}\ ;$$

$$(2)\ HSO_4^- + HO^- = SO_4^{2-} + H_2O \qquad K = \frac{K_{a,2}}{K_e} = 10^{12}\ ;$$

$$(3)\ NH_4^+ + HO^- = NH_3 + H_2O \qquad K = \frac{K_a}{K_e} = 10^{4,8}.$$

⇨ *Méthode 26.1*

On n'observe sur la courbe $\mathrm{pH} = f(V)$ que deux sauts brusques de pH. En effet, les constantes d'équilibre associées aux équations (1) et (2) sont proches ($\Delta \mathrm{p}K = 2 < 4$), donc les acides H_3O^+ et HSO_4^- sont titrés simultanément. Comme pour les équations (2) et (3) on a $\Delta \mathrm{p}K = 7{,}2 > 4$, le titrage de l'acide NH_4^+ se déroule après celui des deux acides précédents.
Conclusion : avant la première équivalence, H_3O^+ et HSO_4^- sont titrés simultanément selon les équations (1) et (2) ; entre la première et la seconde équivalence, NH_4^+ est titré selon (3).

3. Le saut de pH associé à la première équivalence sur la courbe $\mathrm{pH} = f(V)$ est très brusque, tandis qu'on ne distingue pas clairement l'intersection entre deux segments de droite sur la courbe $\sigma^* = f(V)$. On détermine donc $\boxed{V_{e1} = 10{,}0 \text{ mL}}$ sur la courbe de pH (à l'aide de la méthode des tangentes par exemple).
Le saut de pH associé à la seconde équivalence sur la courbe $\mathrm{pH} = f(V)$ est peu marqué, tandis qu'on repère facilement l'intersection entre deux segments de droite sur la courbe $\sigma^* = f(V)$. On détermine donc $\boxed{V_{e2} = 25{,}0 \text{ mL}}$ sur la courbe de conductivité.

4. La solution titrée contient H_3O^+ et HSO_4^- à la concentration C_A, et NH_4^+ à la concentration C'_A.
À la première équivalence : $n_{H_3O^+,\,\text{titré}} + n_{HSO_4^-,\,\text{titré}} = n_{HO^-,\,\text{versé}} \Leftrightarrow 2C_A \cdot V_A = C_B \cdot V_{e1}$

$\Leftrightarrow C_A = \dfrac{C_B \cdot V_{e1}}{2 \cdot V_A}$. AN $\boxed{C_A = 5{,}00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

À la seconde équivalence : $n_{NH_4^+,\,\text{titré}} = n_{HO^-,\,\text{versé}} \Leftrightarrow C'_A \cdot V_A = C_B \cdot (V_{e2} - V_{e1})$

$\Leftrightarrow C'_A = \dfrac{C_B \cdot (V_{e2} - V_{e1})}{V_A}$. AN $\boxed{C'_A = 1{,}50 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

5. Après la deuxième équivalence, les réactifs titrés ont été totalement consommés, et on continue à ajouter de la soude en excès dans le milieu réactionnel. La concentration des ions Na^+ augmente dans le milieu réactionnel, de même que celle des ions hydroxyde HO^-, très mobiles, d'où l'augmentation de la conductivité (et donc de la conductivité corrigée).

6. Le pH à la première équivalence est voisin de 5,5. On constate que la zone de virage du rouge de méthyle ([4,8 ; 6,0]) encadre cette valeur et est totalement contenue dans le saut de pH. Le rouge de méthyle est donc adapté à la détection de la première équivalence.
Le pH à la seconde équivalence est voisin de 11. Cette valeur n'appartient pas à la zone de virage des indicateurs colorés proposés. De plus, le saut de pH est très peu marqué, et on ne pourrait détecter la seconde équivalence par colorimétrie avec précision (la détermination de V_{e2} serait très peu précise).

Chapitre 27

Réactions de dissolution ou de précipitation

UN SCIENTIFIQUE



Jean-Antoine Chaptal (1756-1832) est tout à la fois chimiste, médecin, homme politique et industriel. Il publie en 1792 *Les éléments de chimie* dans lequel il explique le procédé de chaptalisation. Sénateur, puis ministre sous Napoléon, il s'en éloigne en 1804 pour se concentrer sur la culture de la betterave à sucre. Il met en place des écoles expérimentales de chimie du sucre, et construit des usines dans lesquelles il expérimente ses découvertes en chimie.

Un peu d'histoire

Le sel et le sucre, et leurs propriétés de dissolution dans l'eau, sont connues dès l'Antiquité. Le chimiste Pierre-Antoine Macquer (1718-1784) utilise ses compétences scientifiques pour améliorer les procédés artisanaux et industriels, dans lesquels la dissolution de produits tient une large place. Au XVIII^e siècle, des agronomes, comme François Rozier, ont compris l'intérêt de dissoudre du sucre dans le vin pour le stabiliser. En s'appuyant sur des travaux de Macquer, Jean-Antoine Chaptal présente une théorie scientifique de ce phénomène que l'on nomme désormais la chaptalisation.

La thermodynamique qui s'est développé au milieu du XIX^e siècle et la connaissance, à l'aube du XX^e, de la structure de la matière et des forces de cohésion des atomes au sein d'une molécule ou d'un cristal, permettent de nos jours une compréhension précise des phénomènes de précipitation et de dissolution.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La notion de précipité et d'équilibre hétérogène lorsqu'un précipité existe en solution
- ▷ La définition de la constante de solubilité d'un précipité
- ▷ La définition de la solubilité d'un précipité
- ▷ L'influence de plusieurs paramètres sur la solubilité d'un précipité

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Prévoir l'état de saturation ou de non-saturation d'une solution
- ▷ Tracer ou utiliser un diagramme d'existence associé à un précipité
- ▷ Exprimer la solubilité d'un précipité en fonction des concentrations des espèces en solution
- ▷ Déterminer la composition à l'équilibre d'une solution où se déroule un équilibre de précipitation
- ▷ Exploiter une courbe d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable

■■ Résumé de cours

■ Précipitation et dissolution

❑ Précipité



Un **précipité** $C_xA_y(s)$ est un composé ionique solide, en *équilibre hétérogène* avec ses ions constitutifs $C^{y+}(aq)$ et $A^{x-}(aq)$ dans une solution. Si cet équilibre existe, la solution est dite **saturée**.

Le précipité $C_xA_y(s)$ et l'anion $A^{x-}(aq)$ constituent un couple donneur / accepteur de cation. Le précipité $C_xA_y(s)$ et le cation $C^{y+}(aq)$ constituent un couple donneur/accepteur d'anion.

Un précipité qui peut se redissoudre par ajout de l'anion, en formant un ion complexe soluble, est un **précipité amphotère**.

❑ Réaction de précipitation ou de dissolution

La réaction de **précipitation** est la formation du précipité à partir de ses ions constitutifs :

$$x\ C^{y+}_{(aq)} + y\ A^{x-}_{(aq)} = C_xA_{y(s)}$$

La réaction de **dissolution** du précipité est la réaction inverse :

$$C_xA_{y(s)} = x\ C^{y+}_{(aq)} + y\ A^{x-}_{(aq)}$$

■ Aspect thermodynamique

❑ Constante de solubilité

La **constante de solubilité** (ou **produit de solubilité**) K_s d'un précipité est la constante d'équilibre associée à l'équation de dissolution du précipité :

$$C_xA_{y(s)} = x\ C^{y+}_{(aq)} + y\ A^{x-}_{(aq)} \qquad K_s = \frac{[C^{y+}]^x \cdot [A^{x-}]^y}{(c^\circ)^{x+y}}.$$

Pour une équation de réaction donnée, K_s ne dépend que de la température.

❑ Condition de précipitation

La condition de précipitation est donnée par la valeur du quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution dans un état donné du système chimique.

- Si $Q_r < K_s$, le précipité n'existe pas, la solution n'est pas saturée.
- Si $Q_r > K_s$, le système évolue dans le sens de la formation du précipité ; la solution est saturée et à l'équilibre, les concentrations des ions sont liées par le produit de solubilité.
- Si $Q_r = K_s$, l'équilibre hétérogène est réalisé, la solution est saturée.

⇨ **Méthode 27.1. Utiliser la condition de précipitation**

Remarque

Si l'équilibre hétérogène entre le précipité et ses ions constitutifs n'existe pas, les concentrations des ions ne sont plus liées par le produit de solubilité.

❑ Domaine d'existence d'un précipité

On peut faire apparaître le domaine d'existence du précipité sur un axe gradué en fonction de $\mathrm{pC} = -\log\dfrac{[\mathrm{C}^{y+}]}{c^\circ}$ ou de $\mathrm{pA} = -\log\dfrac{[\mathrm{A}^{x-}]}{c^\circ}$ selon la particule échangée.

Par convention, la frontière d'existence du précipité est définie comme la limite d'apparition du précipité : on considère qu'un grain de précipité est présent, en équilibre avec l'espèce dissoute correspondante (anion ou cation du précipité) à une concentration c fixée arbitrairement. À la frontière, $K_s = \dfrac{[\mathrm{C}^{y+}]^x \cdot [\mathrm{A}^{x-}]^y}{(c^\circ)^{x+y}}$.

⇨ **Méthode 27.2. Prévoir l'ordre d'apparition de deux précipités**
⇨ **Méthode 27.6. Tracer le diagramme d'existence d'un précipité**

❑ Solubilité

La solubilité s d'un solide est la quantité de matière maximale de solide que l'on peut dissoudre dans un litre de solution.

Lorsque la limite de solubilité du solide est atteinte, la solution est dite **saturée**.

– La solubilité dépend de la température.
– La solubilité dépend de la présence en solution d'un ion constitutif du précipité en solution (effet d'ions communs).
– La solubilité dépend des propriétés acido-basiques des ions constitutifs du précipité, et des équilibres mettant en jeu les ions constitutifs du précipité.

D'après le principe de Le Chatelier, à T constante, tout phénomène qui consomme un ion intervenant dans l'équilibre de précipitation augmente la solubilité.

⇨ **Méthode 27.3. Déterminer la solubilité dans l'eau pure**
⇨ **Méthode 27.4. Étudier l'influence du pH sur la solubilité**
⇨ **Méthode 27.5. Déterminer la composition d'un mélange où se déroule un équilibre de précipitation**

Cas particulier des hydroxydes métalliques amphotères

Certains cations métalliques forment avec les ions hydroxyde des précipités possédant des propriétés acides et basiques en solution aqueuse : on parle d'hydroxydes amphotères.
Ils peuvent être redissous en milieu acide ou en milieu basique.
C'est le cas par exemple de l'hydroxyde d'aluminium $\mathrm{Al(OH)_3}$:

– redissolution en milieu acide selon $\mathrm{Al(OH)_{3(s)} + 3\ H_3O^+_{(aq)} = Al^{3+}_{(aq)} + 6\ H_2O_{(l)}}$

– redissolution en milieu basique selon $\mathrm{Al(OH)_{3(s)} + HO^-_{(aq)} = Al(OH)^-_{4(aq)}}$

⇨ **Méthode 27.7. Diagramme d'existence d'un précipité amphotère**

■ Titrage par précipitation

On peut utiliser une réaction de précipitation comme réaction support de dosage si celle-ci est rapide et totale.
Le suivi du dosage peut notamment se faire :
– par conductimétrie ;
– par potentiométrie, qui consiste à mesurer la différence de potentiel entre une électrode de mesure et une électrode de référence (voir chapitre suivant) ;
– par colorimétrie grâce à un indicateur de fin de réaction.

■■ Méthodes

■ Comment étudier l'apparition d'un précipité ?

❑ Méthode 27.1. Utiliser la condition de précipitation

– Calculer le quotient réactionnel Q_r associé à l'équation de dissolution du précipité dans l'état du système considéré.
– Comparer la valeur de Q_r au produit de solubilité K_s. Si $Q_r > K_s$, le précipité se forme et la solution est saturée. À l'équilibre, les concentrations des ions sont liées par le produit de solubilité.

⇨ Exercices 27.1, 27.3, 27.5, 27.8 à 27.10

On introduit initialement, dans 500 mL d'eau, $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol d'ions Ag^+ et $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ mol d'ions CrO_4^{2-}. La constante de solubilité du chromate d'argent $Ag_2CrO_{4(s)}$ est $K_s = 1{,}3 \cdot 10^{-12}$ à 25 °C.
Dans l'état initial, les concentrations en ions argent et chromate sont égales à :
$[Ag^+]_0 = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol·L^{-1} et $[CrO_4^{2-}]_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ mol·L^{-1}.
Le quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution du chromate d'argent vaut :

$$Q_r = \frac{[Ag^+]_0^2 \cdot [CrO_4^{2-}]_0}{(c^\circ)^3} = 3{,}2 \cdot 10^{-10} > K_s.$$

On observe donc la formation du précipité en solution.

❑ Méthode 27.2. Prévoir l'ordre d'apparition de deux précipités

On dispose d'une solution contenant deux anions, à laquelle on ajoute une solution contenant un cation susceptible de conduire à un précipité avec chacun des deux anions.
Pour chaque précipité, utiliser la condition de précipitation pour calculer la concentration en cation à partir de laquelle le précipité se forme. La concentration la plus faible correspond au premier précipité qui se forme.

⇨ Exercice 27.2

À une solution contenant les ions chlorure Cl^- et iodure I^- à la même concentration $c_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol·L^{-1}, on ajoute progressivement une solution de nitrate d'argent $(Ag^+ + NO_3^-)$.
Les constantes de solubilité du chlorure d'argent et de l'iodure d'argent sont données par : $pK_{s,1}(AgCl) = 9{,}8$; $pK_{s,2}(AgI) = 16{,}1$. Déterminons l'ordre d'apparition des deux précipités.
À la limite d'apparition de $AgCl_{(s)}$, on a :

$[Cl^-] = c_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $K_{s,1} = \dfrac{[Ag^+]_{lim,1} \cdot [Cl^-]}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow [Ag^+]_{lim,1} = (c^\circ)^2 \dfrac{K_{s,1}}{c_0}$.

À la limite d'apparition de $AgI_{(s)}$, on a :

$[I^-] = c_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $K_{s,2} = \dfrac{[Ag^+]_{lim,2} \cdot [I^-]}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow [Ag^+]_{lim,2} = (c^\circ)^2 \dfrac{K_{s,2}}{c_0}$.

L'application numérique conduit à :

$[Ag^+]_{lim,1} = 1{,}6 \cdot 10^{-7}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} > [Ag^+]_{lim,2} = 7{,}9 \cdot 10^{-14}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On en déduit que le précipité d'iodure d'argent apparaît le premier.

Remarque

Dans le cas de deux précipités de même stœchiométrie (nombre d'anions par rapport au nombre de cations), et à partir d'une solution contenant les deux anions à la même concentration, l'ordre d'apparition des précipités peut être déduit de la comparaison des produits de solubilité : le précipité qui apparaît le premier est celui qui possède le produit de solubilité K_s le plus faible.

Par contre, ce raisonnement n'est plus applicable lorsque les précipités ont des stœchiométries différentes ou lorsque les concentrations des deux anions dans la solution sont différentes. Il faut alors appliquer strictement la méthode présentée.

■ Comment déterminer la solubilité d'un précipité ?

❑ Méthode 27.3. Déterminer la solubilité dans l'eau pure

– Écrire l'équation de dissolution du précipité, et pour un excès de solide introduit, exprimer les concentrations des ions constitutifs du précipité à l'équilibre en fonction de la solubilité s.
– À partir de l'expression du produit de solubilité du précipité, déterminer s.

⇨ Exercices 27.4, 27.5, 27.14

Calculons la solubilité du fluorure de calcium $CaF_{2(s)}$ dans l'eau pure (on néglige les propriétés acido-basiques de l'anion), pour lequel $K_s = 4{,}0 \cdot 10^{-11}$.

Dans la solution saturée, le solide est en équilibre avec les ions calcium et fluorure selon l'équation de dissolution suivante :

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$CaF_{2(s)}$	$= Ca^{2+}_{(aq)}$	$+ 2\ F^-_{(aq)}$
$t = 0$	excès	0	0
t	excès	s	$2 \cdot s$

On a donc $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [F^-]^2}{(c^\circ)^3} = \dfrac{s \cdot (2 \cdot s)^2}{(c^\circ)^3} = \dfrac{4 \cdot s^3}{(c^\circ)^3} \Leftrightarrow s = c^\circ \left(\dfrac{K_s}{4} \right)^{1/3}$. AN $\boxed{s = 2{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

❑ Méthode 27.4. Étudier l'influence du pH sur la solubilité

– Exprimer la solubilité du précipité en fonction des concentrations des espèces en solution : ions constitutifs et espèces acido-basiques conjuguées, à l'aide d'un bilan de matière.
– Relier les concentrations des espèces en solution à celles des ions constitutifs à l'aide des constantes d'équilibre (K_a , K_e ...).
– À partir de l'expression du produit de solubilité du précipité, déterminer s.

⇨ Exercices 27.4, 27.5

Reprenons l'exemple précédent. On tient compte des propriétés acido-basiques de l'ion fluorure, avec $pK_a(HF/F^-) = 3,2$. Calculons la solubilité du fluorure de calcium dans une solution de pH = 2,5.
Dans la solution saturée, le solide est en équilibre avec les ions calcium d'une part, le fluorure d'hydrogène et les ions fluorure d'autre part. On a à présent $s = [Ca^{2+}]$ et $2 \cdot s = [F^-] + [HF]$.
À pH = 2,5, on doit tenir compte de $[F^-]$ et $[HF]$.

Or, par définition, $K_a = \dfrac{[F^-] \cdot [H_3O^+]}{[HF] \cdot c^\circ} \Leftrightarrow [HF] = \dfrac{[F^-] \cdot [H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}$, d'où :

$$2 \cdot s = [F^-] \cdot \left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}\right) \Leftrightarrow [F^-] = \frac{2 \cdot s}{1 + \dfrac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}}.$$

On en déduit que : $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [F^-]^2}{(c^\circ)^3} = \dfrac{4 \cdot s^3}{\left(1 + \dfrac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}\right)^2 (c^\circ)^3}$ d'où $\boxed{s = c^\circ \times \sqrt[3]{\dfrac{K_s}{4}\left(1 + \dfrac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}\right)^2}}$.

L'application numérique, à pH = 2,5, conduit à $\boxed{s = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Remarque

Penser à vérifier si la valeur de la solubilité calculée en tenant compte des équilibres acido-basiques... est en accord avec le principe de Le Chatelier.

❑ Méthode 27.5. Déterminer la composition d'un mélange où se déroule un équilibre de précipitation

– Écrire les équations des réactions qui se déroulent dans la solution : dissolution d'un précipité, équilibres acido-basiques...
– Lorsque c'est possible (à discuter en fonction des valeurs des constantes d'équilibre et éventuellement des quantités de matière initiales), écrire l'équation de la réaction prépondérante en négligeant la concentration de certaines espèces dans la solution et calculer sa constante d'équilibre. Faire un bilan de matière pour la réaction prépondérante afin de déterminer la composition du système à l'équilibre, puis vérifier que les concentrations des espèces n'apparaissant pas dans la RP sont bien négligeables.
– Lorsqu'on ne peut pas raisonner sur une seule réaction, faire un bilan de matière pour les réactions se déroulant simultanément afin de déterminer la composition du système à l'équilibre.

⇨ Exercices 27.4, 27.5, 27.14

Reprenons l'exemple du fluorure de calcium $CaF_2(s)$, de produit de solubilité $K_s = 4{,}0 \cdot 10^{-11}$ avec $pK_a(HF/F^-) = 3{,}2$. On introduit dans un litre d'eau $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol de fluorure de calcium et $1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol d'un acide fort. Déterminons la composition de la solution à l'équilibre.
Les deux réactions suivantes se déroulent simultanément dans le mélange réactionnel :

$CaF_2(s) = Ca^{2+}(aq) + 2\,F^-(aq)$ K_s et $F^-(aq) + H_3O^+(aq) = HF(aq) + H_2O$ $\dfrac{1}{K_a}$.

On a $K_s = 4{,}0 \cdot 10^{-11}$ et $\dfrac{1}{K_a} = 1{,}6 \cdot 10^3$. Au vu des valeurs des constantes d'équilibre, et comme on a introduit une quantité de matière relativement élevée d'ions oxonium H_3O^+, on peut supposer que les ions fluorure formés lors de la dissolution du précipité sont quasi totalement consommés dans la réaction acido-basique, et que leur concentration est donc négligeable par rapport à celle de l'acide fluorhydrique HF.
Dans cette hypothèse, on peut alors raisonner sur la réaction prépondérante de dissolution du précipité en milieu acide selon l'équation : $CaF_2(s) + 2\,H_3O^+(aq) = Ca^{2+} + 2\,HF(aq) + 2\,H_2O$ de constante d'équilibre $K = \dfrac{K_s}{K_a^2} = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$.
Effectuons un bilan de matière de la transformation.

mol	$CaF_2(s)$	$+2\,H_3O^+(aq)$	$= Ca^{2+}$	$+2\,HF(aq)$	$+2\,H_2O$
$t = 0$	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	0	0	excès
t	$1{,}0 \cdot 10^{-2} - \xi$	$1{,}0 \cdot 10^{-1} - 2\xi$	ξ	2ξ	excès

$K = \dfrac{[HF]_{éq}^2 \cdot [Ca^{2+}]_{éq}}{[H_3O^+]_{éq}^2 \cdot (c^\circ)} = \dfrac{4\xi^3}{(1{,}0 \cdot 10^{-1} - 2\xi)^2 \cdot V \cdot (c^\circ)}$. La résolution de cette équation conduit à : $\xi = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ mol. On en déduit les concentrations finales : $[Ca^{2+}]_{éq} = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ mol $\cdot$ L^{-1} ; $[HF]_{éq} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ mol $\cdot$ L^{-1} ; $[H_3O^+]_{éq} = 8{,}8 \cdot 10^{-2}$ mol $\cdot$ L^{-1}.

On calcule $[F^-]_{éq} = \dfrac{K_a \cdot [HF]_{éq} \cdot c^\circ}{[H_3O^+]_{éq}} = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$ mol $\cdot$ L^{-1} $\ll [HF]_{éq}$. Il était donc justifié de raisonner sur la réaction prépondérante précédente.

Remarque

Si on avait considéré le même exemple avec une quantité de matière initiale d'acide fort égale à $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol, on aurait vu que les ions fluorure n'étaient dans ce cas pas négligeables, et il aurait fallu faire des bilans de matière simultanés pour la réaction de dissolution du précipité en ions fluorure et pour la réaction entre les ions fluorure et les ions oxonium.

■ Comment déterminer la limite d'apparition ou de disparition d'un précipité ?

❑ Méthode 27.6. Tracer le diagramme d'existence d'un précipité

– Écrire l'équation de dissolution du précipité traduisant l'équilibre hétérogène entre le précipité et l'espèce soluble associée à l'apparition du précipité.
– La frontière du domaine d'existence du précipité est définie comme la limite d'apparition du précipité. À la frontière, on considère qu'un grain de précipité est présent, et que la concentration de l'espèce soluble est égale à sa concentration initiale c_0 en solution.
– En déduire la valeur du pH ou de $-\log([\text{anion}])$ à la limite d'apparition du précipité.

⇨ Exercice 27.2

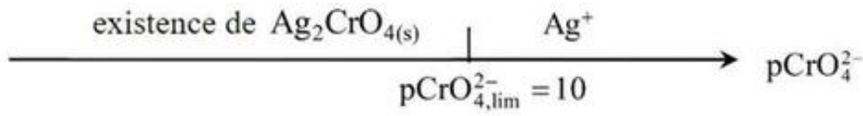
À une solution contenant les ions Ag^+ à la concentration $c_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-1}$ mol $\cdot$ L^{-1}, on ajoute progressivement une solution de chromate de potassium $(2\,K^+ + CrO_4^{2-})$, suffisamment concentrée pour pouvoir négliger la dilution.
On cherche à tracer le diagramme d'existence du précipité de chromate d'argent $Ag_2CrO_{4(s)}$ en fonction de $pCrO_4^{2-} = -\log\dfrac{[CrO_4^{2-}]}{c^\circ}$ sachant que $K_s(Ag_2CrO_{4(s)}) = 10^{-12}$.
L'équation de dissolution du précipité s'écrit : $Ag_2CrO_{4(s)} = 2\,Ag^+_{(aq)} + CrO^{2-}_{4(aq)}$.

À la limite d'apparition du précipité, $K_s = \dfrac{[Ag^+]^2 \cdot [CrO_4^{2-}]}{(c^\circ)^3}$ avec $[Ag^+] = c_0$. D'où :

$\dfrac{[CrO_4^{2-}]_{lim}}{c^\circ} = \dfrac{K_s (c^\circ)^2}{[Ag^+]^2}$ et $pCrO_{4,lim}^{2-} = pK_s + 2\log c_0$. AN $\boxed{pCrO_{4,lim}^{2-} = 10}$.

Le précipité existe pour $Q_r \geq K_s$, donc pour $[CrO_4^{2-}] \geq [CrO_4^{2-}]_{lim} \Leftrightarrow pCrO_4^{2-} \leq pCrO_{4,lim}^{2-}$.

On peut alors tracer le diagramme d'existence du précipité $Ag_2CrO_{4(s)}$:



❑ Méthode 27.7. Tracer le diagramme d'existence d'un précipité amphotère

- Écrire l'équation de dissolution du précipité traduisant l'équilibre hétérogène entre le précipité et l'espèce soluble associée à l'apparition ou à la disparition du précipité.
- Les frontières du domaine d'existence du précipité sont définies comme les limites d'apparition ou de disparition du précipité. À la frontière, on considère qu'un grain de précipité est présent, et la concentration de l'espèce soluble en solution est prise égale à la concentration initiale c_0 du cation métallique en solution.
- En déduire la valeur du pH ou de $-\log([\text{anion}])$ à la limite d'apparition ou de disparition du précipité.

⇨ Exercice 27.7

À une solution contenant les ions Al^{3+} à la concentration $c_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,mol \cdot L^{-1}$, on ajoute progressivement une solution d'hydroxyde de sodium ($Na^+ + HO^-$), suffisamment concentrée pour pouvoir négliger la dilution.

On cherche à déterminer le pH d'apparition et de disparition du précipité d'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$, sachant que $K_s(Al(OH)_3) = 10^{-33}$ et que la constante d'équilibre associée à l'équation $Al(OH)_{3(s)} + HO_{(aq)}^- = Al(OH)_{4(aq)}^-$ est égale à $K = 2{,}5$.

L'équilibre hétérogène entre les ions Al^{3+} et le précipité se traduit par l'équation :

$$Al(OH)_{3(s)} = Al_{(aq)}^{3+} + 3\ HO_{(aq)}^-$$

À la limite d'apparition du précipité, $K_s = \dfrac{[Al^{3+}] \cdot [HO^-]^3}{(c^\circ)^4}$ avec $[Al^{3+}] = c_0$ et $[HO^-] = \dfrac{K_e (c^\circ)^2}{[H_3O^+]}$,

soit $K_s = c_0 \left(\dfrac{K_e}{[H_3O^+]} \right)^3 (c^\circ)^2 \Leftrightarrow [H_3O^+] = \left(\dfrac{c_0 K_e^3 (c^\circ)^2}{K_s} \right)^{1/3} \Leftrightarrow pH_1 = \dfrac{1}{3}\left(-\log c_0 + 3pK_e - pK_s \right)$.

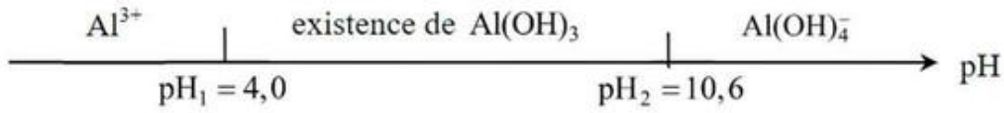
AN $\boxed{pH_1 = 4}$.

L'équilibre hétérogène entre les ions $Al(OH)_4^-$ et le précipité se traduit par l'équation :

$$Al(OH)_{3(s)} + HO^-_{(aq)} = Al(OH)^-_{4(aq)} \text{ de constante d'équilibre } K = 2,5 .$$

À la limite de redissolution totale du précipité, $K = \dfrac{[Al(OH)_4^-]}{[HO^-]}$ avec $[Al(OH)_4^-] = c_0$ et $[HO^-] = \dfrac{K_e (c^\circ)^2}{[H_3O^+]}$, soit $K = \dfrac{c_0 \cdot [H_3O^+]}{K_e (c^\circ)^2}$, donc $[H_3O^+] = \dfrac{K \cdot K_e}{c_0}(c^\circ)^2$ et finalement $pH_2 = -\log K + pK_e + \log c_0$. AN $\boxed{pH_2 = 10,6}$.

On peut tracer le diagramme d'existence du précipité $Al(OH)_3$:



■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Une solution saturée constitue un système hors équilibre.	☐	☐
2.	Le produit de solubilité d'un précipité est généralement inférieur à 1.	☐	☐
3.	Pour déterminer l'ordre d'apparition de deux précipités en solution, il suffit de comparer leurs produits de solubilité.	☐	☐
4.	Un précipité apparaît en solution si $Q_r > K_s$, où Q_r est le quotient réactionnel associé à l'équation de formation du précipité.	☐	☐
5.	La solubilité d'un précipité ne dépend que de la température.	☐	☐
6.	Le produit de solubilité d'un précipité ne dépend que de la température.	☐	☐
7.	La solubilité d'un précipité augmente toujours lorsque la température augmente.	☐	☐
8.	La solubilité du chlorure d'argent est plus faible dans une solution de chlorure de sodium que dans l'eau pure.	☐	☐
9.	Lorsque l'anion constitutif du précipité est une base, une diminution du pH entraîne une diminution de la solubilité du précipité.	☐	☐
10.	La solubilité de l'hydroxyde d'aluminium augmente en milieu très basique (pH > 11).	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Réactions de précipitation et solubilité

❑ Exercice 27.1. Précipitation des hydroxydes de manganèse

1. Calculer le pH de début de précipitation de $Mn(OH)_2$ pour une solution d'ions Mn^{2+} à la concentration $1{,}0\cdot10^{-2}\,mol\cdot L^{-1}$.

2. Calculer le pH de début de précipitation de $Mn(OH)_3$ pour une solution d'ions Mn^{3+} à la concentration $1{,}0\cdot10^{-2}\,mol\cdot L^{-1}$.

3. On dispose d'une solution contenant les ions Mn^{3+} et Mn^{2+} à la même concentration $1{,}0\cdot10^{-2}\,mol\cdot L^{-1}$. Dans quel domaine de pH doit-on se placer pour précipiter 99,99 % des ions Mn^{3+} sans précipiter les ions Mn^{2+} ?

Données : $pK_s(Mn(OH)_2)=12{,}7$; $pK_s'(Mn(OH)_3)=35{,}7$.

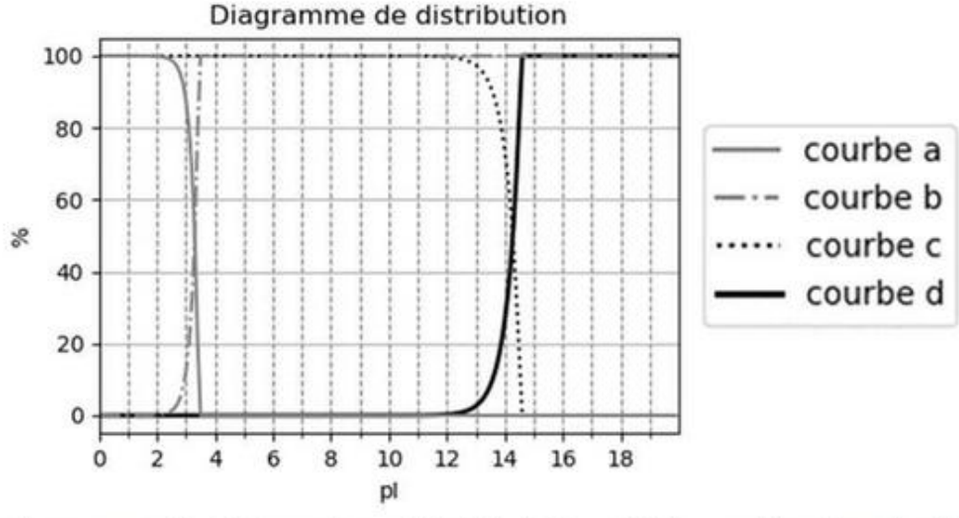
❑ Exercice 27.2. Précipitations compétitives

On dispose d'une solution S contenant les cations métalliques Ag^+ et Pb^{2+} aux concentrations $[Ag^+]=3{,}0\cdot10^{-2}\,mol\cdot L^{-1}$ et $[Pb^{2+}]=5{,}0\cdot10^{-2}\,mol\cdot L^{-1}$. Dans 25 mL de cette solution, on verse progressivement une solution concentrée d'iodure de sodium ($Na^+ + I^-$).

1. Dans quel ordre observe-t-on l'apparition des différents précipités ?

2. Les réactions de précipitation sont-elles successives ?

3. On donne ci-dessous le diagramme de distribution, présentant les proportions des espèces Ag^+, Pb^{2+}, AgI et PbI_2 en solution en fonction de $pI=-\log\left([I^-]/c^\circ\right)$. Attribuer chacune des courbes (notées **a** à **d**, de gauche à droite sur le diagramme) à l'espèce correspondante, en justifiant.



4. Tracer le diagramme d'existence des précipités $AgI_{(s)}$ et $PbI_{2(s)}$ en fonction de pI.

Données : $pK_s(AgI)=16{,}1$; $pK_s(PbI_2)=8{,}1$.

❑ Exercice 27.3. Précipité d'oxalate de calcium*

On mélange 50 mL d'une solution d'oxalate d'ammonium $(2NH_4^+ + C_2O_4^{2-})$ à $0{,}05\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, et 50 mL d'une solution de nitrate de calcium $(Ca^{2+} + 2NO_3^-)$ à $0{,}02\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

1. Montrer que l'on observe la formation d'un précipité d'oxalate de calcium. Quelle est la masse de précipité obtenue ?

2. Le précipité est récupéré par filtration sous vide, puis lavé à l'aide de 50 mL d'eau distillée. Quelle masse de précipité est redissoute lors de cette opération ?

3. Même question si le précipité est lavé à l'aide de 50 mL d'une solution d'oxalate d'ammonium de concentration $0{,}05\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Commenter le résultat obtenu.

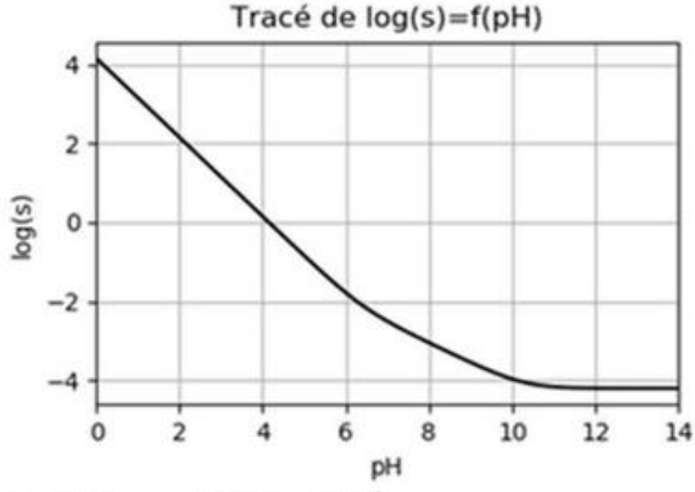
Données : $pK_s(Ca(C_2O_4)) = 8{,}6$; $M(Ca(C_2O_4)) = 128{,}1\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 27.4. Solubilité du carbonate de calcium

Le carbonate de calcium $CaCO_3$ est le constituant principal des roches calcaires.

1. Déterminer la solubilité du carbonate de calcium dans l'eau pure, en négligeant les propriétés acido-basiques de l'ion carbonate.

2. La prise en compte des propriétés acido-basiques de l'ion carbonate en solution aqueuse permet de tracer la courbe $\log(s) = f(\text{pH})$, où s est la solubilité de $CaCO_3$ dans l'eau.



a) Exprimer s en fonction des concentrations en $CO_{2(aq)}$, HCO_3^- et CO_3^{2-}.

b) En déduire l'expression de s en fonction de $[CO_3^{2-}]$, $[H_3O^+]$, $K_{a,1}$ et $K_{a,2}$.

c) Interpréter l'allure de la courbe $\log(s) = f(\text{pH})$.

3. Dans une eau chargée en dioxyde de carbone dissous, la solubilité du carbonate de calcium augmente. Ce phénomène est à l'origine des lapiaz, des rigoles de dissolution observées dans les roches calcaires.



a) Écrire l'équation de la réaction entre le dioxyde de carbone dissous et les ions carbonate.

b) Montrer que la dissolution du calcaire par une eau chargée en dioxyde de carbone peut s'interpréter par une unique réaction, dont on écrira l'équation. Calculer la constante d'équilibre associée à l'aide des données.

On prépare une solution saturée de carbonate de calcium, en présence d'un large excès de $CaCO_3$ solide. Un barbotage en continu de dioxyde de carbone sous une pression $P = 1$ bar dans la solution permet de maintenir la concentration $[CO_{2(aq)}]$ constante, égale à $3{,}5 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}. Dans l'état final, il reste du solide dans la solution.

c) Calculer les concentrations des différentes espèces dissoutes à l'équilibre.

Données : $pK_s = 8{,}4$; $pK_{a,1}(CO_{2(aq)} / HCO_3^-) = 6{,}4$; $pK_{a,2}(HCO_3^- / CO_3^{2-}) = 10{,}3$.

❑ Exercice 27.5. L'éthanethiolate d'argent

Les ions argent forment avec l'ion éthanethiolate $CH_3CH_2S^-$ un composé peu soluble $AgCH_3CH_2S_{(s)}$ dont le produit de solubilité est $K_s = 10^{-20}$.

1. Calculer la solubilité de $AgCH_3CH_2S$ dans l'eau pure (on négligera les propriétés acido-basiques de l'éthanethiolate).

2. Calculer la solubilité de $AgCH_3CH_2S$ dans une solution contenant des ions argent à la concentration $c_0 = 10^{-3}$ mol·L^{-1} (on négligera les propriétés acido-basiques de l'éthanethiolate). Commenter.

3. Calculer la solubilité de $AgCH_3CH_2S$ dans une solution de pH fixé égal à 9,3 en tenant compte des propriétés acido-basiques de l'éthanethiolate. Commenter.

On introduit dans de l'eau pure de l'éthanethiol à la concentration $3{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}. À 1 litre de cette solution on ajoute $4{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol d'ions Ag^+.

4. Montrer que la précipitation du composé $AgCH_3CH_2S$ peut avoir lieu.

5. Écrire l'équation de réaction modélisant la transformation observée lorsque les ions Ag^+ sont ajoutés à la solution d'éthanethiol.

6. Calculer la constante d'équilibre associée à cette équation.

7. Calculer les concentrations des diverses espèces à l'équilibre.

Donnée : $pK_a(CH_3CH_2SH / CH_3CH_2S^-) = 10$.

❑ Exercice 27.6. Solubilité du diiode*

Le diiode solide est soluble dans l'eau. Lorsque la solution est saturée, l'équilibre suivant est établi : $I_{2(s)} = I_{2(aq)}$

La constante d'équilibre associée à cette équation est : $K_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$.

1. Calculer la solubilité s du diiode solide dans l'eau pure à 25 °C.

2. On cherche à évaluer la solubilité du diiode dans un solvant organique, le tétrachlorure de carbone CCl_4. Pour cela, on ajoute à 100 mL d'une solution aqueuse de diiode de concentration $c_0 = 10^{-3}$ mol·L^{-1}, 10 mL de tétrachlorure de carbone CCl_4. Après agitation, on sépare les deux phases. On conserve la phase aqueuse et on dose le diiode restant dans cette phase par une solution aqueuse de thiosulfate de sodium $(2\,Na^+ + S_2O_3^{2-})$ de concentration $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ mol·L^{-1}. Ce dosage nécessite de verser 8 mL de la solution titrante.

a) Écrire l'équation de la réaction d'oxydo-réduction du dosage.

b) Calculer la concentration en diiode de la phase aqueuse c_1.

c) On définit le coefficient de partage du diiode comme la constante d'équilibre associée à l'équation : $I_{2(aq)} = I_{2(org)}$

Calculer le coefficient de partage du diiode.

Données : couples oxydant/réducteur $I_{2(aq)}/I^-_{(aq)}$ et $S_4O^{2-}_{6(aq)}/S_2O^{2-}_{3(aq)}$.

D'après CCINP

❑ Exercice 27.7. Hydroxyde amphotère

En solution aqueuse, le cation Cr^{3+} (de couleur verte) donne avec les ions hydroxyde un précipité $Cr(OH)_{3(s)}$ et un ion complexe soluble $Cr(OH)^-_{4(aq)}$. En solution, la solubilité de l'hydroxyde de chrome peut s'écrire : $s = [Cr^{3+}] + [Cr(OH)^-_4]$. On donne (page suivante) la courbe décrivant la variation du logarithme décimal de la solubilité en fonction du pH, pour une concentration totale c_0 en chrome(III).

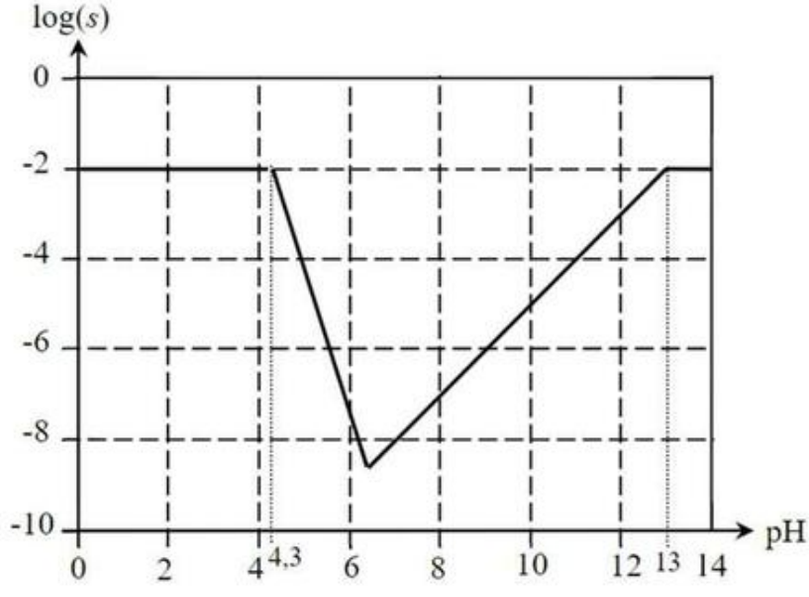
1. Pourquoi peut-on parler pour $Cr(OH)_{3(s)}$ d'hydroxyde « amphotère » ?

2. À une solution d'ions chrome(III) de concentration c_0, on ajoute progressivement une solution de soude (suffisamment concentrée pour que la dilution puisse être négligée). À l'aide du diagramme $\log(s) = f(\text{pH})$, décrire ce que l'on observe.

3. Montrer que le diagramme de solubilité permet de placer, sur un axe gradué en pH, les domaines de $Cr(OH)_3$, Cr^{3+} et de $Cr(OH)^-_4$. S'agit-il de domaines de prédominance ou d'existence ?

4. Quelle est la valeur de c_0 ?

5. Définir le produit de solubilité de $Cr(OH)_3$ puis retrouver sa valeur à partir des résultats précédents.



D'après Centrale-Supélec

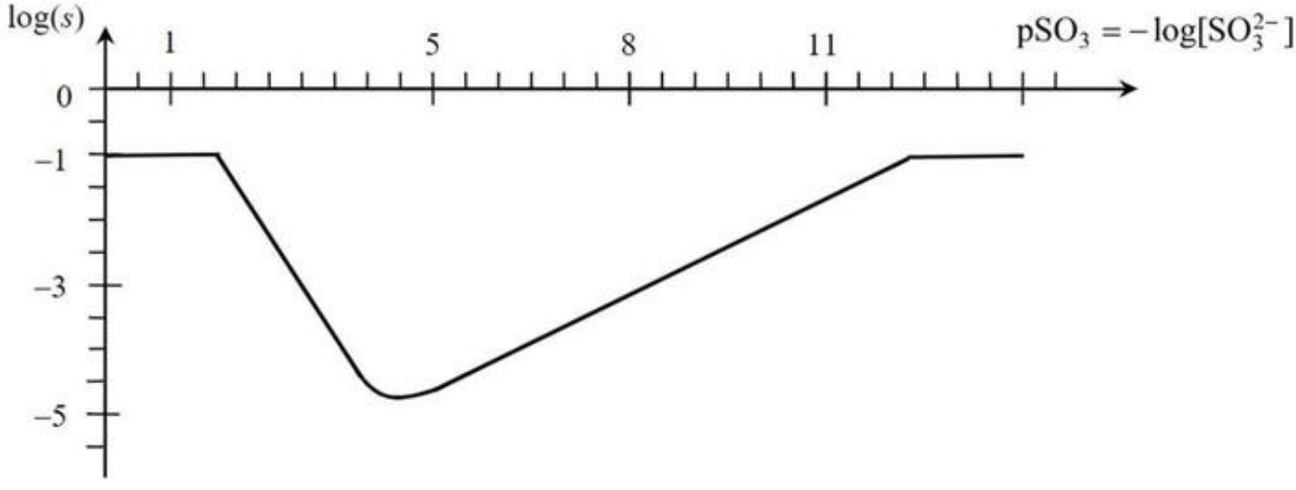
❑ Exercice 27.8. Solubilité du sulfite d'argent

En solution, les ions argent Ag^+ donnent avec les ions sulfite SO_3^{2-} un précipité blanc de sulfite d'argent $Ag_2SO_{3(s)}$ de produit de solubilité $pK_s = 13{,}8$. En présence d'un excès d'ions sulfite, ce précipité se redissout par formation de l'espèce dissoute $Ag(SO_3)_{2(aq)}^{3-}$. On néglige les propriétés basiques de l'ion sulfite SO_3^{2-} au sens de Brønsted.

1. Écrire l'équation de formation du précipité $Ag_2SO_{3(s)}$. Calculer la constante d'équilibre associée.

2. Écrire l'équation de réaction associée à la redissolution du précipité $Ag_2SO_{3(s)}$ en ion $Ag(SO_3)_{2(aq)}^{3-}$ en présence d'ions sulfite. La constante d'équilibre associée vaut : $K^\circ = 10^{3,6}$.

3. s étant la solubilité du sulfite d'argent en solution, on a représenté la fonction $\log(s)$ en fonction de $pSO_3 = -\log[SO_3^{2-}]$. Interpréter qualitativement l'évolution de la solubilité de Ag_2SO_3 en fonction de pSO_3 en décrivant ce que l'on observe lorsqu'on ajoute progressivement une solution d'ions sulfite à une solution d'ions argent à la concentration $c = 10^{-1}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.



4. On dispose de deux bouteilles contenant pour l'une, une solution A de sulfite de sodium $(2\ Na^+ + SO_3^{2-})$ de concentration 0,10 mol.L^{-1} et pour l'autre, une solution B de nitrate d'argent $(Ag^+ + NO_3^-)$ à $0{,}10\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. À 10 mL de solution B de nitrate d'argent, on ajoute quelques gouttes de la solution A. La quantité d'ions sulfite ajoutée est évaluée à $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ mol. Il apparaît un trouble blanc dans la solution.

a) Montrer à l'aide du critère de précipitation que le précipité de sulfite d'argent se forme. Calculer la quantité de précipité formé, et la concentration des espèces Ag^+ et SO_3^{2-} à l'équilibre.

b) Calculer a posteriori la concentration en ion $Ag(SO_3)_{2(aq)}^{3-}$ dans la solution et vérifier qu'elle est négligeable par rapport à la concentration en ions argent.

■ Applications de la précipitation

❑ Exercice 27.9. Traitement des ions cadmium d'un effluent

Les rejets industriels de cadmium, un métal lourd toxique, constituent une source de pollution des cours d'eau. La précipitation des ions Cd^{2+} en hydroxyde de cadmium est utilisée pour réduire la teneur en ions cadmium des effluents en dessous de la limite autorisée, qui est de 0,20 $mg \cdot L^{-1}$.
Un effluent industriel de pH = 2 contient des ions Cd^{2+} à la concentration $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ $mol \cdot L^{-1}$. On traite 1,0 m^3 de cet effluent par 10 L de soude de concentration $c_b = 4{,}0$ $mol \cdot L^{-1}$.

1. Montrer que le précipité se forme dans ces conditions.

2. Quelle est la concentration finale en ions Cd^{2+} atteinte ? Conclure.

3. Déterminer le pH de l'effluent après traitement. Peut-il être rejeté dans l'environnement ?

Données : $pK_s(Cd(OH)_2) = 13{,}6$; $M(Cd) = 112{,}4$ $g \cdot mol^{-1}$; $pK_e = 14$

❑ Exercice 27.10. Déphosphatation d'un effluent aqueux

Dans les eaux naturelles, le phosphore est présent sous forme de composés orthophosphoriques, dérivés des ions phosphate. Ils proviennent principalement de l'utilisation de détergents ainsi que du drainage des terres agricoles fertilisées. Sa présence favorise la prolifération des algues dans les cours d'eau et les lacs conduisant à leur eutrophisation. La concentration en phosphore dans les eaux doit donc être limitée et il est nécessaire de contrôler cette concentration à l'entrée et en sortie des stations d'épuration.
La déphosphatation chimique des effluents urbains est la voie d'élimination du phosphore la plus pratiquée en France. Elle consiste à effectuer la précipitation des phosphates par les sels de fer ou d'aluminium ou par de la chaux, afin d'obtenir des phosphates métalliques insolubles dans l'eau.
L'étude qui suit s'intéresse à la déphosphatation d'un effluent aqueux contenant $C'_m = 5{,}0$ $mg \cdot L^{-1}$ (soit $C' = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ $mol \cdot L^{-1}$) de phosphore sous forme d'espèces acido-basiques phosphorées (H_3PO_4 et ses espèces conjuguées), à l'aide de chlorure de fer(III). La variation de volume engendrée par l'ajout de chlorure de fer(III) est supposée négligeable. Le pH de l'effluent est maintenu égal à 8,5. L'opération permet d'abaisser la concentration massique en phosphore à $C''_m = 1{,}0$ $mg \cdot L^{-1}$ (soit $C'' = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ $mol \cdot L^{-1}$).

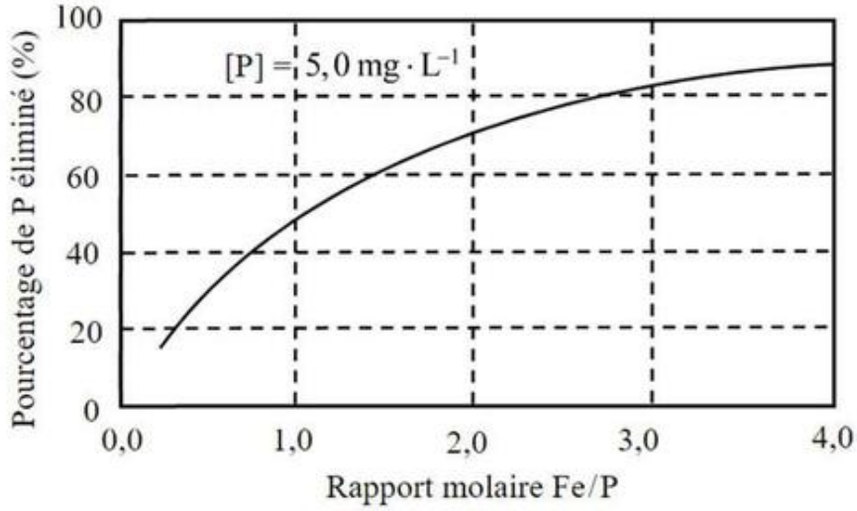
1. Tracer le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques relatives au triacide H_3PO_4. En déduire l'espèce prédominante à pH = 8,5.

2. Écrire l'équation de la réaction de formation de phosphate de fer $FePO_{4(s)}$ à partir de $Fe^{3+}_{(aq)}$ et de l'espèce phosphorée prédominante à pH = 8,5. Calculer la constante d'équilibre associée, et conclure.

3. En ne tenant compte que de la réaction précédente, déterminer la masse minimale de chlorure de fer(III) à ajouter à 1,0 m^3 d'effluent pour obtenir une concentration massique finale en phosphate égale à $C''_m = 1{,}0$ $mg \cdot L^{-1}$.

4. Calculer la concentration en ions PO_4^{3-} dans l'eau après formation du phosphate de fer, puis montrer que, dans ces conditions, $Fe(OH)_{3(s)}$ précipite.

5. Pour déterminer la quantité de chlorure de fer(III) à ajouter à l'effluent, il est nécessaire de tenir compte de la formation de $Fe(OH)_3$ en plus de celle de $FePO_4$. Le ratio molaire (fer apporté/phosphore à extraire) est fixé en fonction du rendement recherché, comme le décrit le tracé ci-dessous :



À l'aide de cette courbe, déterminer le rapport molaire Fe / P appliqué pour diminuer la concentration massique en phosphore de $C'_m = 5{,}0\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ à $C''_m = 1{,}0\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. En déduire la masse réelle de chlorure de fer(III) à utiliser pour traiter 1,0 m^3 d'effluent.

Données à 25 °C : $pK_s(FePO_4) = 21{,}9$; $pK_s(Fe(OH)_3) = 38{,}6$; $M(FeCl_3) = 162{,}3\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $pK_e = 14$; $pK_{a,1}(H_3PO_4 / H_2PO_4^-) = 2{,}1$; $pK_{a,2}(H_2PO_4^- / HPO_4^{2-}) = 7{,}2$; $pK_{a,3}(HPO_4^{2-} / PO_4^{3-}) = 12{,}4$.

D'après E3A-Polytech

❑ Exercice 27.11. Obtention de cristaux de chlorure de sodium par évaporation d'eau de mer

Le chlorure de sodium NaCl peut être obtenu à partir d'eau de mer par évaporation (sel marin). La composition moyenne de l'eau de mer pour une salinité de 35 $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ correspond à 27,2 $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ en chlorure de sodium et 3,8 $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ en chlorure de magnésium. Le sel de mer est obtenu par évaporation de l'eau sous l'action conjuguée du soleil et du vent.

1. Commenter le fait que la salinité de l'eau de mer est supérieure à la concentration massique en chlorure de sodium.

2. Calculer la concentration molaire moyenne en chlorure de sodium de l'eau de mer.

3. On considère une solution à 27,2 $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ en chlorure de sodium dans de l'eau pure.

a) Déterminer le pourcentage de diminution volumique pour obtenir l'apparition du premier cristal. Le pourcentage de diminution volumique correspond à $(V_{\text{initial}} - V_{\text{limite}})/V_{\text{initial}}$, où V_{initial} est le volume initial de la solution et V_{limite} le volume de celle-ci lors de l'apparition du premier cristal.

b) Déterminer le pourcentage de diminution volumique pour avoir précipitation à 80 %. Quel pourrait être l'intérêt de ne pas évaporer toute l'eau ?

c) Sachant que l'eau de mer contient aussi en proportions non négligeables (3,8 $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$) du chlorure de magnésium $MgCl_2$, comment sont modifiés qualitativement les pourcentages de diminution volumique ? Comment nomme-t-on un tel effet ?

Données : $K_s(NaCl) = 36{,}0$ à 25°C ; $M(Na) = 23{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M(Cl) = 35{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 27.12. Recristallisation d'un solide dans un solvant

La recristallisation est une technique de purification d'un solide utilisée en chimie organique. Elle est basée sur la différence de solubilité entre les impuretés et le composé d'intérêt dans un solvant, à froid et à chaud.

On envisage la recristallisation dans l'eau d'un échantillon contenant 10,0 g d'acide fumarique (noté $FumH_2$) et 1,0 g d'acide maléique (noté $MalH_2$). L'objectif est de purifier l'acide fumarique, en éliminant l'acide maléique.

1. Calculer V_{min}, le volume minimal d'eau nécessaire pour effectuer cette recristallisation en ayant intégralement dissous l'échantillon à 100 °C.

2. Avec ce volume V_{min} d'eau, calculer la masse d'acide fumarique solide isolée après filtration à 25 °C. Cet acide obtenu est-il pur ?

3. Quel inconvénient peut présenter l'utilisation d'un volume d'eau supérieur au volume minimal nécessaire V_{min} ?

4. On envisage à présent la recristallisation dans l'eau d'un échantillon, contenant de l'acide benzoïque (noté PhCOOH) et 10,0 g d'acide fumarique.

À quelle condition sur la masse m d'acide benzoïque présente dans l'échantillon la recristallisation dans le même volume V_{min} d'eau peut-elle donner de l'acide fumarique solide pur à 25 °C ?

Données

Solubilités, exprimées en grammes d'espèce chimique par litre d'*eau pure* :

	acide maléique	acide fumarique	acide benzoïque
25 °C	790	7,0	2,4
100 °C	4000	100	75

Ces solubilités seront considérées comme indépendantes de la présence éventuelle d'autres espèces dissoutes.

D'après Centrale-Supélec

■ Titrages

❑ Exercice 27.13. Suivi conductimétrique d'un titrage

On souhaite déterminer la concentration d'une solution S de chlorure de baryum ($Ba^{2+} + 2\ Cl^-$). À 50 mL de la solution S, on ajoute environ 300 mL d'eau. On titre cette solution à l'aide d'une solution de sulfate de sodium ($2Na^+ + SO_4^{2-}$) à $0{,}05\,mol\cdot L^{-1}$. Le titrage est suivi par conductimétrie, en relevant les valeurs de la conductance au fur et à mesure de l'ajout de solution titrante. On obtient les résultats suivants (V est le volume de solution titrante ajouté, G la conductance) :

V(mL)	0	2	5	8	10	12	14	16	18
G(mS)	3,08	3,05	3,00	2,95	2,93	2,97	3,10	3,27	3,40

1. Faire un schéma du dispositif de titrage.

2. Écrire l'équation de la réaction de titrage.

3. Tracer la courbe $G = f(V)$. Justifier son allure.

4. Quel est l'intérêt d'ajouter de l'eau aux 50 mL de la solution S ?

5. Calculer la concentration de la solution S en ions baryum.

Données

Conductivités molaires ioniques, en $\text{mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$:

Na^+ 5,0 ; Ba^{2+} 13,0 ; Cl^- 7,5 ; SO_4^{2-} 16,0 ; H_3O^+ 35 ; HO^- 20.

❑ Exercice 27.14. Dosage par précipitation

Le thiocyanate d'argent AgSCN est un solide blanc peu soluble dans l'eau.

1. Calculer la solubilité du thiocyanate d'argent dans l'eau pure.

2. On dissout 10^{-3} mol de nitrate d'argent $AgNO_3$ et 10^{-3} mol de nitrate de fer(III) $Fe(NO_3)_3$ dans un litre d'eau (la dissolution est totale).
À cette solution, on ajoute progressivement une solution de thiocyanate de potassium. On observe un trouble blanc, puis une coloration rouge est perceptible, due à la formation d'un ion complexe $Fe(SCN)^{2+}$ fortement coloré, dont l'apparition marque la fin du titrage.

a) Écrire l'équation des réactions observées.

b) Quelle est la concentration résiduelle en ions argent dans la solution lorsque la coloration rouge sang apparaît ?

c) En déduire que cette expérience peut servir de base à un titrage des ions argent.

Données : $pK_s(AgSCN) = 12$; la coloration due à $Fe(SCN)^{2+}$ est perceptible dès que sa concentration atteint $10^{-5}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $K^\circ = 1,0 \cdot 10^5$ pour l'équation $Fe^{3+}_{(aq)} + SCN^-_{(aq)} = Fe(SCN)^{2+}_{(aq)}$.

❑ Exercice 27.15. Titrage d'un mélange de cations par pH-métrie*

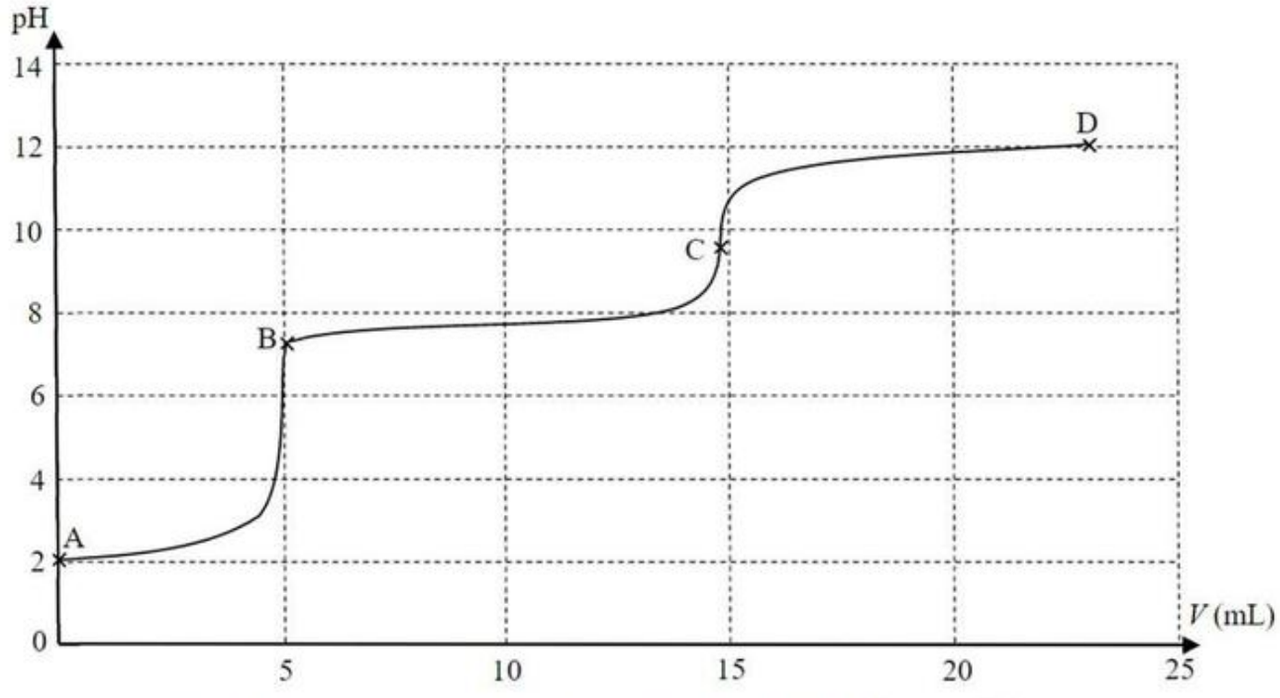
On dose un volume V_0 = 50,0 mL d'un mélange d'une solution d'acide chlorhydrique $(H_3O^+ + Cl^-)$ à la concentration C_1 et d'une solution de nitrate de zinc(II) $(Zn^{2+} + 2NO_3^-)$ à la concentration C_2 par une solution d'hydroxyde de sodium $(Na^+ + HO^-)$ de concentration $c = 0,10\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le dosage est effectué à température ambiante. La courbe de titrage pH-métrique du mélange est représentée ci-après.

1. Au cours du dosage du mélange apparaît un précipité blanc. Identifier ce précipité.

2. Indiquer les réactions associées aux portions de courbe AB et BC. Que s'attend-on à observer après le point C ? Pourquoi n'observe-t-on pas un troisième saut de pH ?

3. Déterminer les valeurs des concentrations C_1 et C_2.

4. À partir d'un point de la portion BC, déterminer le produit de solubilité K_s du précipité blanc observé.



Données : $pK_e = 14$; constante globale de formation $\beta_4(Zn(OH)_4^{2-}) = 10^{15,5}$.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 27.1. Question 3 : calculer la concentration des ions Mn^{3+} restant en solution puis utiliser K_s.
Exercice 27.2. Question 2 : calculer la concentration résiduelle du cation qui a précipité en premier au moment où le deuxième précipité apparaît.
Exercice 27.3. Question 2 : calculer l'avancement de la réaction de dissolution.
Exercice 27.4. Question 3 : la réaction conduit à des ions $HCO_{3(aq)}^-$.
Exercice 27.5. Question 4 : calculer la concentration en ions éthanethiolate à l'équilibre de la transformation entre l'éthanethiol et l'eau.
Exercice 27.6. Question 2.c : faire un bilan de matière pour calculer $[I_{2(org)}]$.
Exercice 27.7. Question 5 : se placer à la limite d'apparition du précipité.
Exercice 27.10. Question 2 : montrer que l'équation peut s'écrire comme une combinaison linéaire des équations dont les constantes d'équilibre sont données. Question 3 : faire un tableau d'avancement.
Exercice 27.11. Question 3 : calculer la solubilité de NaCl à 25 °C.
Exercice 27.15. Question 2 : un point anguleux sur la courbe traduit l'apparition d'un précipité. Question 4 : faire un bilan de matière pour la réaction de précipitation.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	faux	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	vrai

1. Dans une solution saturée, le précipité est en équilibre avec ses ions constitutifs.

2. Les précipités sont généralement des composés peu solubles, pour lesquels $K_s < 10^{-5}$.

3. L'ordre de précipitation dépend de la stœchiométrie du précipité et de la concentration des ions en solution : voir méthode 27.2.

4. Un précipité apparaît en solution si $Q_r > K_s$, où Q_r est le quotient réactionnel associé à l'équation de *dissolution* du précipité.

5. La solubilité d'un précipité dépend aussi des conditions expérimentales (pH, possibilité de formation d'ions complexes…).

7. La solubilité du carbonate de calcium $CaCO_3$ diminue lorsque la température augmente (dépôts de calcaire dans des canalisations chaudes).

9. D'après le principe de Le Chatelier, lorsque l'anion constitutif du précipité est une base, la solubilité augmente en milieu acide.

10. Il s'agit d'un hydroxyde amphotère : $Al(OH)_3$ se redissout en milieu très basique sous forme de l'ion $Al(OH)_4^-$.

❑ Les erreurs classiques

– Un précipité est un composé solide, son activité est égale à 1. Ne pas écrire de « concentration de précipité » !
– L'expression de la constante de solubilité n'est vérifiée que si l'équilibre hétérogène entre le précipité et ses ions constitutifs existe en solution : ne pas l'écrire en l'absence du précipité.

Exercice 27.1

1. L'équilibre hétérogène entre les ions Mn^{2+} et le précipité se traduit par l'équation :

$$Mn(OH)_{2(s)} = Mn^{2+}_{(aq)} + 2\ HO^-_{(aq)}$$

À la limite d'apparition du précipité, $K_s = \dfrac{[Mn^{2+}]\cdot[HO^-]^2}{(c^\circ)^3}$ avec $[HO^-] = \dfrac{K_e (c^\circ)^2}{[H_3O^+]}$ et $[Mn^{2+}] = c_0 = 1{,}0\cdot10^{-2}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, d'où :

$$K_s = c_0 \cdot \left(\frac{K_e}{[H_3O^+]}\right)^2 (c^\circ) \Leftrightarrow [H_3O^+] = \left(\frac{c_0\cdot(c^\circ)\cdot K_e^2}{K_s}\right)^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{\text{pH} = \frac{1}{2}\left(-\log c_0 + 2\ \text{p}K_e - \text{p}K_s\right)}.$$

AN $\boxed{\text{pH} = 8{,}7}$.

⇨ *Méthode 27.1*

2. Avec un raisonnement analogue à celui de la question 1, on détermine pour le début de précipitation de $Mn(OH)_3$: $\boxed{\text{pH} = \frac{1}{3}\left(-\log c_0 + 3\ \text{p}K_e - \text{p}K_s'\right)}$. AN $\boxed{\text{pH} = 2{,}8}$.

3. Lorsque 99,99 % des ions Mn^{3+} ont précipité, $[Mn^{3+}] = \dfrac{0{,}01\cdot c_0}{100} = 1{,}0\cdot10^{-6}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Le précipité $Mn(OH)_3$ existe, donc $K_s' = [Mn^{3+}]\cdot[HO^-]^3$. On en déduit :

$$K_s' = [Mn^{3+}]\left(\frac{K_e}{[H_3O^+]}\right)^3 \Leftrightarrow [H_3O^+] = \left(\frac{[Mn^{3+}]K_e^3}{K_s'}\right)^{1/3} \Leftrightarrow \boxed{\text{pH} = \frac{1}{3}\left(-\log([Mn^{3+}]) + 3\text{p}K_e - \text{p}K_s'\right)}.$$

AN $\boxed{\text{pH} = 4{,}1}$. Il faut donc se placer dans l'intervalle $\boxed{4{,}1 \leq \text{pH} \leq 8{,}7}$ pour précipiter 99,99 % des ions Mn^{3+} sans précipiter les ions Mn^{2+}.

Exercice 27.2

1. Déterminons l'ordre d'apparition des précipités $AgI_{(s)}$ et $PbI_{2(s)}$. La solution d'iodure de sodium étant concentrée, on néglige la dilution liée à l'ajout de cette solution aux 25 mL de solution *S*.

À la limite d'apparition du précipité AgI, on a $[Ag^+] = 3{,}0\cdot10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et

$$K_s(AgI) = \frac{[Ag^+]\cdot[I^-]_{\text{lim},1}}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow [I^-]_{\text{lim},1} = \frac{K_s(AgI)\cdot(c^\circ)^2}{[Ag^+]}.\ \text{AN}\ [I^-]_{\text{lim},1} = 2{,}6\cdot10^{-15}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

À la limite d'apparition du précipité PbI_2, on a $[Pb^{2+}] = 5{,}0\cdot10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et

$$K_s(PbI_2) = \frac{[Pb^{2+}]\cdot[I^-]_{\text{lim},2}{}^2}{(c^\circ)^3} \Leftrightarrow [I^-]_{\text{lim},2} = c^\circ\sqrt{\frac{K_s(PbI_2)\cdot c^\circ}{[Pb^{2+}]}}.\ \text{AN}\ [I^-]_{\text{lim},2} = 4{,}0\cdot10^{-4}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

On a trouvé : $[I^-]_{lim,1} < [I^-]_{lim,2}$. On observe donc la précipitation de l'iodure d'argent puis de l'iodure de plomb, lors de l'ajout de la solution d'ions iodure.

⇨ *Méthode 27.2*

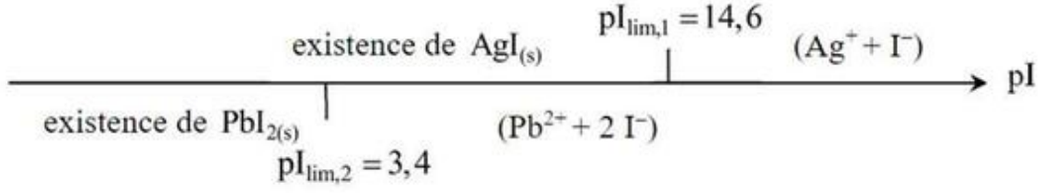
2. Calculons la concentration en ions Ag^+ lorsque PbI_2 commence à précipiter. La concentration en ions plomb vaut $[Pb^{2+}] = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,mol \cdot L^{-1}$ et la concentration en ions iodure est égale à $[I^-]_{lim,2} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot L^{-1}$. Comme le précipité AgI existe en solution, on peut écrire $K_s(AgI) = \dfrac{[Ag^+] \cdot [I^-]_{lim,2}}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow [Ag^+] = \dfrac{K_s(AgI) \cdot (c^\circ)^2}{[I^-]_{lim,2}}$. AN $[Ag^+] = 2{,}0 \cdot 10^{-13}\ mol \cdot L^{-1} \ll [Ag^+]_0$.

Tous les ions Ag^+ ont précipité lorsque PbI_2 apparaît. Les réactions de précipitation sont donc successives.

3. Lors de l'ajout de la solution d'iodure de sodium $(Na^+ + I^-)$, $pI = -\log\dfrac{[I^-]}{c^\circ}$ diminue, il faut donc lire le diagramme de droite à gauche. Initialement, la solution n'est pas saturée : elle contient des ions Ag^+, Pb^{2+} et I^-. Le précipité AgI apparaît le premier. La courbe d correspond donc au pourcentage d'ions Ag^+ dans la solution, la courbe c au pourcentage d'iodure d'argent AgI. En effet, le pourcentage d'ions Ag^+ vaut 100% tant que $pI > 14{,}6$ environ, puis décroît lorsque pI diminue, car les ions Ag^+ sont consommés par la réaction de précipitation pour conduire à AgI. Avec un raisonnement similaire, les courbes b et a correspondent respectivement aux pourcentages de Pb^{2+} et PbI_2. Les ions Pb^{2+} n'ont pas précipité tant que $pI > 3{,}4$, puis leur pourcentage diminue au profit de celui de PbI_2 lorsque pI diminue.

> *La présence de points anguleux sur les courbes de distribution traduit l'apparition des précipités.*

4. D'après le diagramme, $AgI_{(s)}$ existe pour tout $pI \leq 14{,}6$, et $PbI_{2(s)}$ existe pour tout $pI \leq 3{,}4$. On en déduit le diagramme d'existence des deux précipités :



⇨ *Méthode 27.6*

Exercice 27.3

1. Calculons le quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution du précipité d'oxalate de calcium : $CaC_2O_{4(s)} = Ca^{2+}_{(aq)} + C_2O^{2-}_{4(aq)}$ soit $Q_r = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [C_2O_4^{2-}]}{(c^\circ)^2}$.

Dans l'état initial : $[Ca^{2+}]_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$ et $[C_2O_4^{2-}]_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.

> *Penser à la dilution lors du mélange des solutions.*

On calcule donc $Q_{r,i} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} > K_s$. Il y a donc précipitation de l'oxalate de calcium.

⇨ *Méthode 27.1*

On établit un tableau d'avancement de la transformation :

mol	$Ca^{2+}_{(aq)}$	$+ C_2O^{2-}_{4(aq)}$	$= CaC_2O_{4(s)}$
$t = 0$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	0
t	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	ε	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$

$K = \dfrac{1}{K_s} = 10^{8,6}$

La réaction est totale, et dans l'état final on obtient $n_{CaC_2O_4} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol. On en déduit : $m_{CaC_2O_4} = n_{CaC_2O_4} \cdot M_{CaC_2O_4}$. AN $\boxed{m_{CaC_2O_4} = 1{,}3 \cdot 10^{-1}\,\text{g}}$.

2. Le lavage du précipité à l'eau entraîne une redissolution partielle du précipité.

mol	$CaC_2O_{4(s)}$	$= Ca^{2+}_{(aq)}$	$+ C_2O^{2-}_{4(aq)}$
$t = 0$	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	0	0
t	$1{,}0 \cdot 10^{-3} - \xi$	ξ	ξ

$K_s = 10^{-8,6}$

On a $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}]_f \cdot [C_2O_4^{2-}]_f}{(c^\circ)^2} = \left(\dfrac{\xi}{V_{sol} \cdot c^\circ}\right)^2 \Leftrightarrow \xi = V_{sol} \cdot c^\circ \cdot \sqrt{K_s}$. AN $\xi = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{mol}$.

La masse de précipité redissoute est donc égale à $m_{CaC_2O_4,\text{redissoute}} = \xi \cdot M_{CaC_2O_4}$.

AN $\boxed{m_{CaC_2O_4,\text{redissoute}} = 0{,}32\ \text{mg}}$.

L'avancement volumique de la transformation est égal à la solubilité du précipité dans l'eau pure.

3. Si le précipité est lavé à l'aide de 50 mL d'une solution d'oxalate d'ammonium de concentration $0{,}05\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, la solution contient initialement $n_{C_2O_4^{2-},i} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ mol d'ions oxalate.

mol	$CaC_2O_{4(s)}$	$= Ca^{2+}_{(aq)}$	$+ C_2O^{2-}_{4(aq)}$
$t = 0$	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	0	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$
t	$1{,}0 \cdot 10^{-3} - \xi$	ξ	$2{,}5 \cdot 10^{-3} + \xi$

$K_s = 10^{-8,6}$

À présent : $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}]_f \cdot [C_2O_4^{2-}]_f}{(c^\circ)^2} = \dfrac{\xi \cdot (n_{C_2O_4^{2-},i} + \xi)}{V_{sol}^2 (c^\circ)^2}$. La résolution de cette équation du second degré à la calculatrice conduit à : $\xi = 2{,}5 \cdot 10^{-9}\,\text{mol}$.

La masse de précipité redissoute est donc : $\boxed{m_{CaC_2O_4,\text{redissoute}} = 0{,}32\ \mu\text{g}}$.

Cette valeur est inférieure à la valeur calculée à la question 2. Ce résultat traduit l'effet d'ions communs. La présence dans la solution d'un ion constitutif du précipité (l'ion oxalate) entraîne un déplacement de l'équilibre de dissolution dans le sens de la formation du précipité (principe de Le Chatelier), donc entraîne une diminution de la solubilité du précipité.

Exercice 27.4

1. Calculons la solubilité de $CaCO_3$ dans l'eau pure en négligeant les propriétés acido-basiques de l'ion carbonate. Dans la solution saturée, le solide est en équilibre avec les ions calcium et carbonate selon l'équation de dissolution suivante :

$mol \cdot L^{-1}$	$CaCO_{3(s)}$	$= Ca^{2+}_{(aq)}$	$+ CO^{2-}_{3(aq)}$
$t = 0$	excès	0	0
t	excès	s	s

Donc $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [CO_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s^2}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow \boxed{s = c^\circ \sqrt{K_s}}$. AN $\boxed{s = 10^{-4,2}\ mol \cdot L^{-1} = 6,3 \cdot 10^{-5}\ mol \cdot L^{-1}}$.

⇨ *Méthode 27.3*

2. a) A présent, on tient compte des propriétés acido-basiques de l'ion carbonate. Dans la solution saturée, le solide est en équilibre avec les ions calcium d'une part, et toutes les espèces acido-basiques relatives à l'ion carbonate d'autre part. On a à présent $s = [Ca^{2+}]$ et $\boxed{s = [CO_3^{2-}] + [HCO_3^-] + [CO_{2(aq)}]}$.

b) Exprimons les concentrations $[HCO_3^-]$ et $[CO_{2(aq)}]$ en fonction de la concentration des ions carbonate à l'aide des constantes d'acidité.

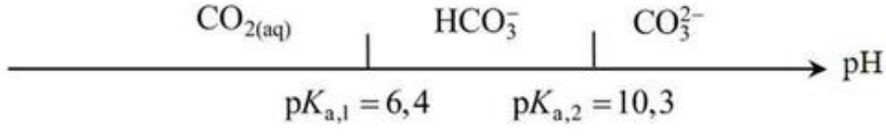
Par définition, $K_{a,2} = \dfrac{[CO_3^{2-}] \cdot [H_3O^+]}{[HCO_3^-] \cdot c^\circ}$, d'où on tire $[HCO_3^-] = \dfrac{[CO_3^{2-}] \cdot [H_3O^+]}{K_{a,2} \cdot c^\circ}$. Par ailleurs, $K_{a,1} = \dfrac{[HCO_3^-] \cdot [H_3O^+]}{[CO_{2(aq)}] \cdot c^\circ}$, soit $K_{a,1} \cdot K_{a,2} = \dfrac{[CO_3^{2-}] \cdot [H_3O^+]^2}{[CO_{2(aq)}] \cdot (c^\circ)^2}$, d'où on tire $[CO_{2(aq)}] = \dfrac{[CO_3^{2-}] \cdot [H_3O^+]^2}{K_{a,1} \cdot K_{a,2} \cdot (c^\circ)^2}$.

On en déduit : $\boxed{s = [CO_3^{2-}]\left(1 + \dfrac{[H_3O^+]}{K_{a,2} \cdot c^\circ} + \dfrac{[H_3O^+]^2}{K_{a,1} \cdot K_{a,2} \cdot (c^\circ)^2}\right)}$

⇨ *Méthode 27.4*

c) D'après le graphe, plus le pH diminue, plus la solubilité du précipité augmente. L'anion constitutif du précipité possède des propriétés basiques. En milieu acide, les ions carbonate sont consommés pour conduire aux espèces HCO_3^- et CO_3^{2-}, ce qui déplace l'équilibre de dissolution du carbonate de calcium dans le sens direct.

On peut interpréter de façon plus précise l'allure de la courbe à l'aide du diagramme de prédominance des espèces carbonées et de l'expression de la solubilité établie à la question précédente.



Pour des valeurs de $\text{pH} \geq \text{p}K_{a,2} + 1$, les ions carbonate sont majoritaires et l'expression de la solubilité se simplifie selon : $s = [CO_3^{2-}]$. On retrouve donc la valeur de la solubilité calculée à la question 1. selon : $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [CO_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s^2}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow s = 10^{-4,2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \Leftrightarrow \boxed{\log(s) = -4,2}$.

Pour $\text{p}K_{a,1} + 1 \leq \text{pH} \leq \text{p}K_{a,2} - 1$, les ions hydrogénocarbonate HCO_3^- sont majoritaires et $s \approx [CO_3^{2-}]\dfrac{[H_3O^+]}{K_{a,2} \cdot c^\circ}$. D'où : $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [CO_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s^2}{\dfrac{[H_3O^+] \cdot c^\circ}{K_{a,2}}} \Leftrightarrow s = \sqrt{K_s \dfrac{[H_3O^+] \cdot c^\circ}{K_{a,2}}}$.

On en déduit : $\boxed{\log(s) = \dfrac{1}{2}(-\text{p}K_s - \text{pH} + \text{p}K_{a,2})}$. C'est l'équation d'une droite de pente $-\dfrac{1}{2}$, qui correspond bien à ce que l'on observe sur la courbe fournie.

Pour $\text{pH} \leq \text{p}K_{a,1} - 1$, le dioxyde de carbone dissous est majoritaire et $s \approx [CO_3^{2-}]\dfrac{[H_3O^+]^2}{K_{a,1}K_{a,2}(c^\circ)^2}$.

D'où : $K_s = \dfrac{[Ca^{2+}] \cdot [CO_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s^2}{\dfrac{[H_3O^+]^2}{K_{a,1}K_{a,2}}} \Leftrightarrow s = \sqrt{K_s \dfrac{[H_3O^+]^2}{K_{a,1}K_{a,2}}}$.

On en déduit : $\boxed{\log(s) = -\text{pH} + \dfrac{1}{2}(-\text{p}K_s + \text{p}K_{a,1} + \text{p}K_{a,2})}$. C'est l'équation d'une droite de pente égale à -1, qui correspond bien à ce que l'on observe sur la courbe fournie.

3. a) L'équation de la réaction acido-basique entre $CO_{2(aq)}$ et les ions carbonate s'écrit :

$$\boxed{CO_{2(aq)} + CO_{3(aq)}^{2-} + H_2O_{(l)} = 2\,HCO_{3(aq)}^-}$$

b) En combinant l'équation précédente et l'équation de dissolution du carbonate de calcium, on obtient : $\boxed{CaCO_{3(s)} + CO_{2(aq)} + H_2O_{(l)} = Ca_{(aq)}^{2+} + 2\,HCO_{3(aq)}^-}$

Au contact d'une eau chargée en dioxyde de carbone dissous, le calcaire se dissout sous forme d'hydrogénocarbonate de calcium. Ceci explique l'apparition de failles, ou rigoles, dans les roches calcaires.

On a pour cette équation :

$$K = \frac{[Ca^{2+}][HCO_3^-]^2}{[CO_{2(aq)}](c^\circ)^2} = \frac{[Ca^{2+}][CO_3^{2-}][HCO_3^-]^2}{[CO_{2(aq)}][CO_3^{2-}](c^\circ)^2} = K_s \frac{[HCO_3^-][H_3O^+][HCO_3^-]}{[CO_{2(aq)}][CO_3^{2-}][H_3O^+]}$$

soit : $K = K_s \dfrac{K_{a,1}}{K_{a,2}}$. AN $\boxed{K = 10^{-4,5} = 3,2 \cdot 10^{-5}}$.

c) Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique :

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$CaCO_{3(s)}$	$+CO_{2(aq)}$	$+H_2O_{(l)}$	$= Ca_{(aq)}^{2+}$	$+2\,HCO_{3(aq)}^-$
$t = 0$	excès	$3,5 \cdot 10^{-2}$	excès	0	0
t	excès	$3,5 \cdot 10^{-2}$	excès	x	$2x$

On a $K = \dfrac{x_{éq}(2x_{éq})^2}{[CO_{2(aq)}](c^\circ)^2} \Leftrightarrow x_{éq} = \left(\dfrac{K[CO_{2(aq)}](c^\circ)^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. AN $\boxed{x_{éq} = 6{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

On constate que cette valeur est supérieure à la solubilité du carbonate de calcium dans l'eau « pure », en absence de dioxyde de carbone dissous.

⇨ *Méthode 27.5*

Exercice 27.5

1. Calculons la solubilité de $CH_3CH_2SAg_{(s)}$ dans l'eau pure en négligeant les propriétés acido-basiques de l'ion éthanethiolate. Dans la solution saturée, le solide est en équilibre avec les ions argent et éthanethiolate selon l'équation de dissolution suivante :

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$CH_3CH_2SAg_{(s)}$	$= CH_3CH_2S^-_{(aq)}$	$+ \ Ag^+_{(aq)}$
$t = 0$	excès	0	0
t	excès	s	s

Donc $K_s = \dfrac{[Ag^+] \cdot [CH_3CH_2S^-]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s^2}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow \boxed{s = c^\circ\sqrt{K_s}}$. AN $\boxed{s = 1{,}0 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

⇨ *Méthode 27.3*

2. Reprenons le calcul précédent en tenant compte de la présence d'ions Ag^+ dans l'état initial :

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$CH_3CH_2SAg_{(s)}$	$= CH_3CH_2S^-_{(aq)}$	$+ \ Ag^+_{(aq)}$
$t = 0$	excès	0	c_0
t	excès	s'	$c_0 + s'$

Donc $K_s = \dfrac{[Ag^+] \cdot [CH_3CH_2S^-]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s' \cdot (c_0 + s')}{(c^\circ)^2}$. Au vu de l'ordre de grandeur de la solubilité du précipité dans l'eau pure, et comme $K_s \ll 1$, on peut supposer $s' \ll c_0$. Dans cette hypothèse, $K_s \approx \dfrac{s' \cdot c_0}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow \boxed{s' = \dfrac{K_s}{c_0}(c^\circ)^2}$. AN $\boxed{s' = 1{,}0 \cdot 10^{-17} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$. On a bien trouvé $s' \ll c_0$. D'autre part, on constate que $s' < s$. D'après la loi de modération de Le Chatelier, la présence d'ions argent initialement dans la solution entraîne un déplacement de l'équilibre de dissolution dans le sens indirect, donc diminue la solubilité du précipité. C'est l'effet d'ion commun.

3. Si l'on tient compte des propriétés acido-basiques de l'éthanethiolate, on doit considérer la présence d'éthanethiol, issu de la transformation chimique entre les ions éthanethiolate et l'eau. On a alors, par conservation des ions argent et éthanethiolate :

$s = [Ag^+]$ et $s = [CH_3CH_2S^-] + [CH_3CH_2SH]$.

À pH = 9,3 *aucune des deux espèces acido-basiques ne prédomine, il faut donc conserver les deux concentrations dans l'expression de s.*

$$s = [CH_3CH_2S^-] + [CH_3CH_2SH] = [CH_3CH_2S^-]\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}\right) \Leftrightarrow [CH_3CH_2S^-] = \frac{s}{1 + \frac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}}.$$

Alors : $K_s = \dfrac{s^2}{\left(1 + \dfrac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}\right)(c^\circ)^2} \Leftrightarrow \boxed{s = c^\circ \sqrt{K_s\left(1 + \dfrac{[H_3O^+]}{K_a \cdot c^\circ}\right)}}$. AN $\boxed{s = 2{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Cette valeur est légèrement supérieure à la solubilité dans l'eau pure car à pH = 9,3, l'ion éthanethiolate est consommé par sa réaction avec l'eau, ce qui entraîne un déplacement de l'équilibre de dissolution du précipité dans le sens direct d'après la loi de modération de Le Chatelier.

⇨ *Méthode 27.4*

4. Pour montrer que le précipité se forme dans la solution, il faut calculer le quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution du précipité : $Q_r = \dfrac{[Ag^+] \cdot [CH_3CH_2S^-]}{(c^\circ)^2}$.

Il faut donc calculer la concentration des ions $CH_3CH_2S^-$ dans la solution.
La solution contient initialement l'acide faible CH_3CH_2SH à la concentration $c = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. L'éthanethiol réagit avec l'eau selon l'équation :

$$CH_3CH_2SH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3CH_2S^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \qquad K_a = 10^{-10}.$$

En supposant la transformation peu avancée, on calcule l'avancement de la transformation à l'équilibre : $x = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} (\ll c)$ d'où $[CH_3CH_2S^-] = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le quotient réactionnel vaut alors : $Q_r = 6{,}3 \cdot 10^{-8} > K_s$. D'après la condition de précipitation, le précipité se forme.

⇨ *Méthode 27.1*

5. Considérons les valeurs des constantes d'équilibre associées aux équations de réaction suivantes :

$$CH_3CH_2SH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3CH_2S^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \qquad K_a = 10^{-10} \ ;$$

$$Ag^+_{(aq)} + CH_3CH_2S^-_{(aq)} = CH_3CH_2SAg_{(s)} \qquad \frac{1}{K_s} = 10^{20}.$$

On peut envisager lors de l'ajout d'ions Ag^+ à la solution d'éthanethiol la réaction prépondérante d'équation : $CH_3CH_2SH_{(aq)} + Ag^+_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3CH_2SAg_{(s)} + H_3O^+_{(aq)}$

6. On calcule $\boxed{K = \dfrac{K_a}{K_s} = 10^{10}}$.

7. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique :

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$CH_3CH_2SH_{(aq)}$	$+ Ag^+_{(aq)}$	$+ H_2O_{(l)}$	$= CH_3CH_2SAg_{(s)}$	$+ H_3O^+_{(aq)}$
$t = 0$	c	c_1	excès	excès	0
t	$c - x$	$c_1 - x$	excès	excès	x

Comme $K = 10^{10} > 10^4$, on peut considérer que la transformation chimique est totale.

Donc $x = c = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol · L^{-1}. Alors $\boxed{[Ag^+] = c_1 - c = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

$$K = \frac{[H_3O^+] \cdot c^\circ}{[CH_3CH_2SH][Ag^+]} \Leftrightarrow [CH_3CH_2SH] = \frac{[H_3O^+] \cdot c^\circ}{K \cdot [Ag^+]}.$$

AN $\boxed{[CH_3CH_2SH] = 3{,}0 \cdot 10^{-10}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Vérifions que $[CH_3CH_2S^-]$ est négligeable devant $[CH_3CH_2SH]$:

$\boxed{[CH_3CH_2S^-] = \dfrac{K_a \cdot [CH_3CH_2SH] \cdot c^\circ}{[H_3O^+]} = 1{,}0 \cdot 10^{-18}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \ll [CH_3CH_2SH]}$. Le choix de la réaction prépondérante était bien justifié.

⇨ *Méthode 27.5*

Exercice 27.6

1. À l'équilibre entre $I_{2(s)}$ et $I_{2(aq)}$: $K_1 = \dfrac{[I_{2(aq)}]_{éq}}{c^\circ} = \dfrac{s}{c^\circ}$ d'où $\boxed{s = K_1 \cdot c^\circ}$.

AN $\boxed{s = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

2. a) On titre le diiode présent dans la phase aqueuse par une solution d'ions thiosulfate. On obtient l'équation de la réaction de titrage à partir les deux demi-équations d'oxydoréduction associées aux couples $I_{2(aq)} / I^-_{(aq)}$ et $S_4O^{2-}_{6(aq)} / S_2O^{2-}_{3(aq)}$.

$$\begin{aligned} I_{2(aq)} + 2\ e^- &= 2\ I^-_{(aq)} \\ 2\ S_2O^{2-}_{3(aq)} &= S_4O^{2-}_{6(aq)} + 2\ e^- \\ \hline I_{2(aq)} + 2\ S_2O^{2-}_{3(aq)} &= 2\ I^-_{(aq)} + S_4O^{2-}_{6(aq)} \end{aligned}$$

b) À l'équivalence du titrage, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques.

$\dfrac{n_{I_2,\text{titré}}}{1} = \dfrac{n_{S_2O_3^{2-},\text{versé}}}{2} \Leftrightarrow c_1 \cdot V_{aq} = \dfrac{c_{S_2O_3^{2-}} \cdot V_{éq}}{2} \Leftrightarrow c_1 = \dfrac{c_{S_2O_3^{2-}} \cdot V_{éq}}{2 \cdot V_{aq}}$. AN $\boxed{c_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

c) On établit le tableau d'avancement relatif à la dissolution du diiode dans le tétrachlorométhane :

mol	$I_{2(aq)}$	= $I_{2(org)}$
$t = 0$	$c_0 \cdot V_{aq}$	0
t	$c_0 \cdot V_{aq} - \xi = c_1 \cdot V_{aq}$	ξ

On calcule $\xi = c_0 \cdot V_{aq} - c_1 \cdot V_{aq}$, soit : $\xi = 1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}100 - 1{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}100 = 9{,}0 \cdot 10^{-5}$ mol, d'où $[I_{2(org)}] = \dfrac{\xi}{V_{org}}$, soit : $[I_{2(org)}] = \dfrac{9{,}0 \cdot 10^{-5}}{1{,}0 \cdot 10^{-2}} = 9{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On en déduit le coefficient de partage, défini par : $K = \dfrac{[I_{2(org)}]}{[I_{2(aq)}]}$. AN $\boxed{K = 90}$. Le diiode est bien plus soluble dans le tétrachlorométhane que dans l'eau.

Exercice 27.7

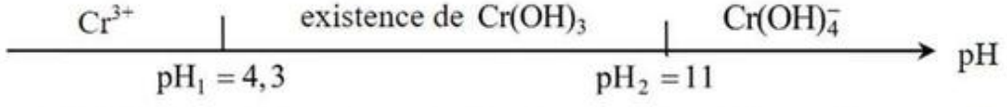
1. Le précipité $Cr(OH)_{3(s)}$ possède des propriétés acides et basiques en solution aqueuse. En particulier, il peut être redissous en milieu acide ou en milieu basique, selon les réactions d'équation :

- en milieu acide $\quad Cr(OH)_{3(s)} + 3\ H_3O^+_{(aq)} = Cr^{3+}_{(aq)} + 6\ H_2O_{(l)}$
- en milieu basique $\quad Cr(OH)_{3(s)} + HO^-_{(aq)} = Cr(OH)^-_{4(aq)}$

2. Lors d'un ajout progressif d'une solution de soude à une solution d'ions chrome(III) (donc lorsque le pH augmente), on observe successivement les étapes suivantes.

- Au départ la solution est limpide ; tant que le quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution du précipité est tel que $Q_r < K_s$, le précipité n'existe pas. La solution contient des ions Cr^{3+} à la concentration c_0.
- Lorsque le produit de solubilité est atteint, le précipité apparaît ; au fur et à mesure de sa formation, la solubilité diminue lorsque le pH augmente.
- On atteint un minimum de solubilité, puis le précipité se redissout progressivement en ion complexe $Cr(OH)^-_{4(aq)}$; la solubilité augmente lorsque le pH augmente.
- Lorsque le dernier grain de précipité disparaît, on n'a plus que le complexe $Cr(OH)^-_{4(aq)}$ en solution (les ions Cr^{3+} sont minoritaires par rapport au complexe), à la concentration c_0.

3. D'après le diagramme de solubilité, le premier grain de précipité se forme lorsque $\log(s)$ commence à décroître, donc pour pH = 4,3. Il s'agit donc de la valeur limite du pH à l'apparition du précipité. Le dernier grain de précipité disparaît pour pH = 11, lorsque $\log(s)$ cesse de croître pour redevenir constante (une fois le précipité totalement redissous).
On peut donc en déduire le diagramme d'existence du précipité :



Pour le <u>précipité</u>, il s'agit d'un <u>domaine d'existence</u> (le solide n'existe en solution que pour $pH_1 \leq pH \leq pH_2$). Pour les <u>espèces dissoutes</u> Cr^{3+} et $Cr(OH)^-_4$, il s'agit de <u>domaines de prédominance</u>.

4. Lorsque le pH n'a pas encore atteint la valeur $pH_1 = 4,3$, tout le chrome(III) est présent en solution sous forme d'ions Cr^{3+} à la concentration c_0, donc $\log(s) = \log(c_0) = -2$. On en déduit : $\boxed{c_0 = 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}}$.

5. Le produit de solubilité de $Cr(OH)_{3(s)}$ est défini comme la constante d'équilibre associée à l'équation de dissolution du précipité selon : $\quad Cr(OH)_{3(s)} = Cr^{3+}_{(aq)} + 3\ HO^-_{(aq)}$

Donc $K_s = \dfrac{[Cr^{3+}] \cdot [HO^-]^3}{(c^\circ)^4}$ lorsque l'équilibre hétérogène existe. À la limite d'apparition du précipité, $[Cr^{3+}] = c_0 = 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$ et $[HO^-] = \dfrac{K_e \cdot c^\circ}{10^{-pH_i}} = 10^{-9,7}\ mol \cdot L^{-1}$.

AN $\boxed{K_s = 7,9 \cdot 10^{-32}}$ soit $\boxed{pK_s = 31,1}$.

⇨ *Méthode 27.7*

Exercice 27.8

1. Équation de formation du précipité : $\boxed{2\,Ag^+_{(aq)} + SO^{2-}_{3(aq)} = Ag_2SO_{3(s)}}$ $\boxed{K = \dfrac{1}{K_s} = 10^{13,8}}$.

2. Équation de redissolution du précipité : $\boxed{Ag_2SO_{3(s)} + 3\ SO^{2-}_{3(aq)} = 2\,Ag(SO_3)^{3-}_{2(aq)}}$

3. Lors d'un ajout progressif d'une solution d'ions sulfite à une solution d'ions argent (donc lorsque pSO_3 diminue), on observe successivement les étapes suivantes.

– Au départ la solution est limpide ; tant que le quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution du précipité est tel que $Q_r < K_s$, le précipité n'existe pas. La solution contient des ions Ag^+ à la concentration $c = 10^{-1}\ mol \cdot L^{-1}$, donc $\log(s) = \log(c) = -1$.

– Lorsque le produit de solubilité est atteint, le précipité apparaît ; au fur et à mesure de sa formation, la solubilité diminue lorsque pSO_3 diminue.

– On atteint un minimum de solubilité, puis le précipité se redissout progressivement en ion complexe $Ag(SO_3)^{3-}_{2(aq)}$; la solubilité augmente lorsque pSO_3 diminue.

– Lorsque le dernier grain de précipité disparaît, on n'a plus que le complexe $Ag(SO_3)^{3-}_{2(aq)}$ en solution (les ions Ag^+ sont minoritaires par rapport au complexe), à la concentration $c = 10^{-1}\ mol \cdot L^{-1}$, donc $\log(s) = \log(c) = -1$.

4. a) Calculons le quotient réactionnel associé à la dissolution du sulfite d'argent dans l'état initial. $Q_r = \dfrac{[Ag^+]^2 \cdot [SO^{2-}_3]}{(c^\circ)^3} = (0,10)^2 \cdot \dfrac{10^{-7}}{10^{-2}} = 10^{-7} > K_s$. Il y a bien formation du précipité. On peut établir un tableau d'avancement de la transformation chimique :

mol	$2\,Ag^+_{(aq)}$	$+\ SO^{2-}_{3(aq)}$	$= Ag_2SO_{3(s)}$
$t = 0$	10^{-3}	10^{-7}	0
t	$10^{-3} - 2\xi$	$10^{-7} - \xi$	ξ

Comme $K = \dfrac{1}{K_s} = 10^{13,8} > 10^4$, la transformation peut être considérée comme totale et $\xi_f = 10^{-7}\ mol$. On obtient $n_{Ag_2SO_3,f} = 10^{-7}\ mol$ de précipité.

Dans l'état final, $n_{Ag^+,f} = 10^{-3}\ mol$, soit $[Ag^+]_f = 10^{-1}\ mol \cdot L^{-1}$.

On en déduit : $[SO^{2-}_3]_f = \dfrac{K_s (c^\circ)^3}{[Ag^+]^2_f} = 10^{-11,8}\ mol \cdot L^{-1} \ll [SO^{2-}_3]_i = 10^{-5}\ mol \cdot L^{-1}$.

La transformation est bien totale.

⇨ *Méthode 27.1*

b) On sait que la constante d'équilibre associée à l'équation de redissolution du précipité : $Ag_2SO_{3(s)} + 3\ SO^{2-}_{3(aq)} = 2\,Ag(SO_3)^{3-}_{2(aq)}$ vaut $K^\circ = 10^{3,6}$.

On a donc : $K^\circ = \dfrac{[Ag(SO_3)^{3-}_2]^2_f \cdot c^\circ}{[SO^{2-}_3]^3_f} \Leftrightarrow [Ag(SO_3)^{3-}_2]_f = \sqrt{K^\circ \cdot \dfrac{[SO^{2-}_3]^3_f}{c^\circ}}$.

AN $\boxed{[Ag(SO_3)^{3-}_2]_f = 1,3 \cdot 10^{-16}\ mol \cdot L^{-1} \ll [Ag^+]_f}$.

Exercice 27.9

1. Calculons les concentrations initiales des ions cadmium et hydroxyde dans le mélange initial, de volume $V_{tot} = 1{,}0 \cdot 10^3 + 10 = 1010$ L : $[Cd^{2+}]_i = \dfrac{c_0 V_{effluent}}{V_{tot}} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ mol·L^{-1} et $[HO^-]_i = \dfrac{c_b V_b}{V_{tot}} = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}.

À pH = 2, *la concentration initiale des ions hydroxyde dans l'effluent est égale à* 10^{-12} mol·L^{-1} *et est négligeable devant celle apportée par la solution de soude.*

L'équation de dissolution de l'hydroxyde de cadmium s'écrit : $Cd(OH)_{2(s)} = Cd^{2+}_{(aq)} + 2\,HO^-_{(aq)}$. Le quotient réactionnel associé à cette équation vaut dans l'état initial : $Q_r = \dfrac{[Cd^{2+}]_i \cdot [HO^-]_i^2}{(c^\circ)^3} = 2{,}5 \cdot 10^{-7} > K_s$. Il y a bien formation du précipité $Cd(OH)_{2(s)}$.

⇨ *Méthode 27.1*

2. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique.

mol	$Cd^{2+}_{(aq)}$	$+2\,HO^-_{(aq)}$	$= Cd(OH)_{2(s)}$
$t = 0$	$c_0 V_{effluent}$	$c_b V_b$	0
t	$c_0 V_{effluent} - \xi$	$c_b V_b - 2\xi$	ξ

$K = 10^{13{,}6} = 4{,}0 \cdot 10^{13}$. Cette transformation chimique est totale.

Les ions cadmium sont limitants, et la concentration des ions hydroxyde dans l'état final vaut : $[HO^-]_{éq} = \dfrac{c_b V_b - 2c_0 V_{effluent}}{V_{tot}} = 3{,}9 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}. On peut déterminer la concentration finale des ions Cd^{2+} dans la solution à l'aide de la constante de solubilité : $K_s = \dfrac{[Cd^{2+}]_{éq} \cdot [HO^-]_{éq}^2}{(c^\circ)^3} \Leftrightarrow [Cd^{2+}]_{éq} = \dfrac{K_s (c^\circ)^3}{[HO^-]_{éq}^2}$. AN $\boxed{[Cd^{2+}]_{éq} = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Cette concentration est négligeable devant la concentration initiale des ions cadmium. La concentration massique des ions cadmium vaut : $c_{m,Cd^{2+}} = [Cd^{2+}]_{éq} M_{Cd} = 1{,}8 \cdot 10^{-9}$ g·L^{-1}, et est nettement inférieure à la teneur maximale autorisée.

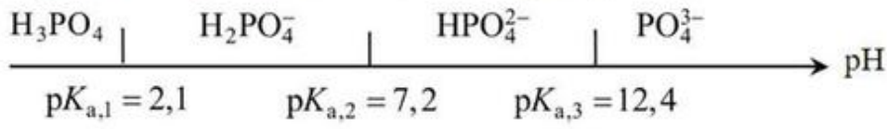
La concentration massique initiale des ions cadmium dans l'effluent était égale à 18 mg·L^{-1}, *donc supérieure à la teneur autorisée.*

3. On a déterminé $[HO^-]_{éq} = 3{,}9 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}, on peut calculer le pH selon : $\text{pH} = -\log \dfrac{[H_3O^+]}{c^\circ} = pK_e + \log \dfrac{[HO^-]_{éq}}{c^\circ}$, soit $\boxed{\text{pH} = 12{,}6}$. L'effluent est trop basique pour être directement rejeté dans l'environnement, il faudra préalablement le neutraliser par une réaction acido-basique.

Corrigé

Exercice 27.10

1. Traçons le diagramme de prédominance de l'acide phosphorique.



À pH = 8,5 : $pK_{a,2} + 1 < pH < pK_{a,3} + 1$, donc l'espèce $\boxed{HPO_4^{2-}}$ est majoritaire.

2. L'équation de la réaction de formation de phosphate de fer $FePO_{4(s)}$ à partir de $Fe^{3+}_{(aq)}$ et de $HPO^{2-}_{4(aq)}$ peut s'écrire : $\boxed{Fe^{3+}_{(aq)} + HPO^{2-}_{4(aq)} + HO^-_{(aq)} = FePO_{4(s)} + H_2O_{(l)}}$

Cette équation s'obtient en faisant la somme des équations suivantes :

$Fe^{3+}_{(aq)} + PO^{3-}_{4(aq)} = FePO_{4(s)}$ $\quad \frac{1}{K_s}$;

$HPO^{2-}_{4(aq)} + H_2O_{(l)} = PO^{3-}_{4(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ $\quad K_{a,3}$;

$H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2H_2O_{(l)}$ $\quad \frac{1}{K_e}$.

On en déduit : $\boxed{K = \frac{K_{a,3}}{K_s K_e}}$. AN $\boxed{K = 10^{23,5} = 3,2 \cdot 10^{23}}$. Cette transformation chimique est totale.

3. Établissons un tableau d'avancement de la transformation chimique.

mol	$Fe^{3+}_{(aq)}$	$+HPO^{2-}_{4(aq)}$	$+HO^-_{(aq)}$	$= FePO_{4(s)}$	$+H_2O_{(l)}$
$t = 0$	n_0	n_1	fixée	0	excès
t	$n_0 - \xi$	$n_1 - \xi$	fixée	ξ	excès

On calcule la quantité de matière initiale d'ions $HPO^{2-}_{4(aq)}$ dans l'effluent ; $HPO^{2-}_{4(aq)}$ étant l'espèce phosphorée majoritaire, on peut négliger les concentrations des autres espèces acido-basiques et $[HPO_4^{2-}] \approx C'$. Donc $n_1 = C'V = 1,6 \cdot 10^{-1}$ mol.

Le traitement permet d'obtenir une concentration finale en phosphate égale à $C'' = 3,2 \cdot 10^{-5}$ mol·L^{-1} ; dans l'état final on a donc : $n_{HPO_4^{2-},f} = C''V = 3,2 \cdot 10^{-2}$ mol.

On en déduit : $\xi_f = n_1 - n_{HPO_4^{2-},f} = (C' - C'') \cdot V$. Il faut donc introduire une masse de chlorure de fer(III) : $\boxed{m_{FeCl_3} = \xi_f \cdot M_{FeCl_3} = (C' - C'') \cdot V \cdot M_{FeCl_3}}$. AN $\boxed{m_{FeCl_3} = 21 \text{ g}}$.

4. Dans l'état final, $[HPO_4^{2-}] \approx C''$. Donc $[PO_4^{3-}] = \frac{C'' \cdot K_{a,3} \cdot c^\circ}{[H_3O^+]}$, avec $\frac{[H_3O^+]}{c^\circ} = 10^{-pH}$.

AN $\boxed{[PO_4^{3-}] = 4,0 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Calculons le quotient réactionnel associé à l'équation de dissolution de l'hydroxyde de fer(III).

$Q_r = \dfrac{[Fe^{3+}]\cdot[HO^-]^3}{(c^\circ)^4}$ avec dans l'état final de la transformation précédente :

$[HO^-] = \dfrac{K_e (c^\circ)^2}{[H_3O^+]} = 3{,}2\cdot10^{-6}$ mol·L^{-1} et $K = \dfrac{(c^\circ)^3}{[Fe^{3+}]\cdot[HPO_4^{2-}][HO^-]}$ d'où

$[Fe^{3+}] = \dfrac{(c^\circ)^3}{K\cdot[HPO_4^{2-}][HO^-]} = 3{,}1\cdot10^{-14}$ mol·L^{-1}. Donc $\boxed{Q_r = 9{,}9\cdot10^{-31} > K_s = 10^{-38{,}6}}$.

D'après la condition de précipitation, $Fe(OH)_{3(s)}$ précipite.

⇨ *Méthode 27.1*

5. La concentration massique en phosphore a été diminuée de $C'_m = 5{,}0$ mg·L^{-1} à $C''_m = 1{,}0$ mg·L^{-1}, le pourcentage de phosphore éliminé vaut donc : $\dfrac{C'_m - C''_m}{C'_m} = 0{,}80$ (80 %).

D'après le graphe fourni, on lit que le rapport molaire Fe/P appliqué doit être égal à 2,65 environ. Or la quantité de matière de phosphore à extraire est égale à $\xi_f = (C' - C'')\cdot V = 1{,}3\cdot10^{-1}$ mol. La masse de chlorure de fer(III) à utiliser vaut donc :

$m_{FeCl_3} = 2{,}65\cdot\xi_f\cdot M_{FeCl_3}$. AN $\boxed{m_{FeCl_3} = 55 \text{ g}}$.

Exercice 27.11

1. La valeur de la salinité de l'eau de mer inclut les concentrations massiques de « sels » (composés ioniques) autres que NaCl, tels que le chlorure de magnésium $MgCl_2$ par exemple.

2. La concentration molaire moyenne en chlorure de sodium de l'eau de mer se calcule à partir de la concentration massique fournie selon : $\boxed{c = \dfrac{c_m}{M_{NaCl}} = 4{,}65\cdot10^{-1} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}}$.

3.a) Le premier cristal de chlorure de sodium apparaît dans la solution lorsque la concentration massique de NaCl atteint la valeur de la solubilité de NaCl à 25°C, que nous pouvons calculer à partir de la constante de solubilité fournie.

mol·L^{-1}	$NaCl_{(s)}$	$= Na^+_{(aq)}$	$+ Cl^-_{(aq)}$
$t = 0$	excès	0	0
t	excès	s	s

$K_s = \dfrac{[Na^+]\cdot[Cl^-]}{(c^\circ)^2} = \dfrac{s^2}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow \boxed{s = c^\circ\sqrt{K_s}}$. AN $\boxed{s = 6{,}00 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}}$, soit : $\boxed{s = 3{,}51\cdot10^2 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}}$

À l'apparition du premier cristal de sel, le volume de la solution vaut : $V_{limite} = \dfrac{c_m V_{initial}}{s}$.

On en déduit le pourcentage de diminution volumique : $\dfrac{V_{initial} - V_{limite}}{V_{initial}} = 1 - \dfrac{c_m}{s}$, soit $\boxed{92{,}2\ \%}$.

b) Si NaCl a précipité à 80%, la concentration massique résiduelle en solution vaut : $c'_m = 0{,}20\cdot c_m$. Le pourcentage de diminution volumique vaut alors : $\dfrac{V_{initial} - V'_{limite}}{V_{initial}} = 1 - \dfrac{c'_m}{s}$, soit $\boxed{98{,}5\ \%}$. Si on évapore toute l'eau, tous les composés ioniques dissous dans l'eau vont

précipiter, et il sera ensuite nécessaire de les séparer. En n'évaporant pas toute l'eau, on peut précipiter plus sélectivement $NaCl_{(s)}$.

c) En présence d'ions chlorure apportés par $MgCl_2$, la solubilité de NaCl diminue par effet d'ion commun. Le volume limite de solution à l'apparition du premier cristal de sel $V_{limite} = \dfrac{c_m V_{initial}}{s}$ augmente, donc le pourcentage de diminution volumique diminue.

Exercice 27.12

1. En utilisant les valeurs de solubilité de l'acide maléique et de l'acide fumarique à 100 °C, on calcule le volume minimal d'eau nécessaire pour dissoudre totalement les deux solides :

$V_{min} = \dfrac{m_{FumH_2}}{s_{FumH_2,100°C}} + \dfrac{m_{MalH_2}}{s_{MalH_2,100°C}}$ avec $m_{FumH_2} = 10{,}0$ g et $m_{MalH_2} = 1{,}0$ g. AN $\boxed{V_{min} = 1{,}0 \cdot 10^{-1}\ \text{L}}$.

2. Après refroidissement à 25 °C, la masse d'acide fumarique dissoute vaut : $m_{FumH_2,dissoute} = s_{FumH_2,25°C} \cdot V_{min}$, soit $m_{FumH_2,dissoute} = 0{,}7$ g. On peut donc isoler après filtration $\boxed{m_{FumH_2,isolée} = 9{,}3\ \text{g}}$.

$m_{MalH_2} = 1{,}0\ \text{g} < s_{MalH_2,25°C} \cdot V_{min} = 79{,}2$ g donc tout l'acide maléique est dissous. L'acide fumarique obtenu est pur.

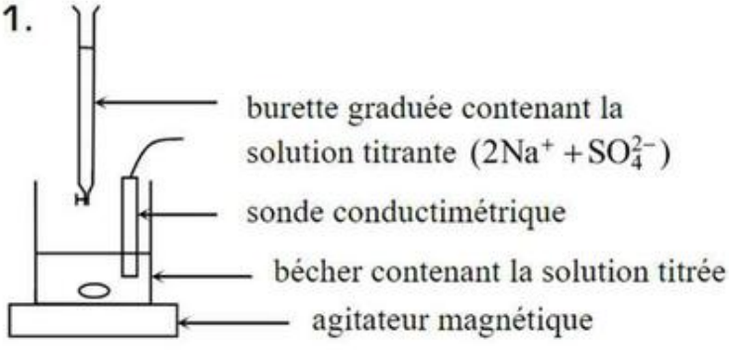
3. Si on utilise un volume d'eau supérieur au volume minimal nécessaire V_{min}, une masse plus importante du composé d'intérêt restera dissoute dans le solvant. Le rendement de recristallisation sera alors plus faible.

4. Pour récupérer de l'acide fumarique pur après recristallisation, il faut que la masse d'acide benzoïque dissoute soit telle que : $m_{PhCOOH,dissoute} < s_{PhCOOH,25°C} \cdot V_{min}$.

AN $\boxed{m_{PhCOOH,dissoute} < 0{,}24\ \text{g}}$.

Exercice 27.13

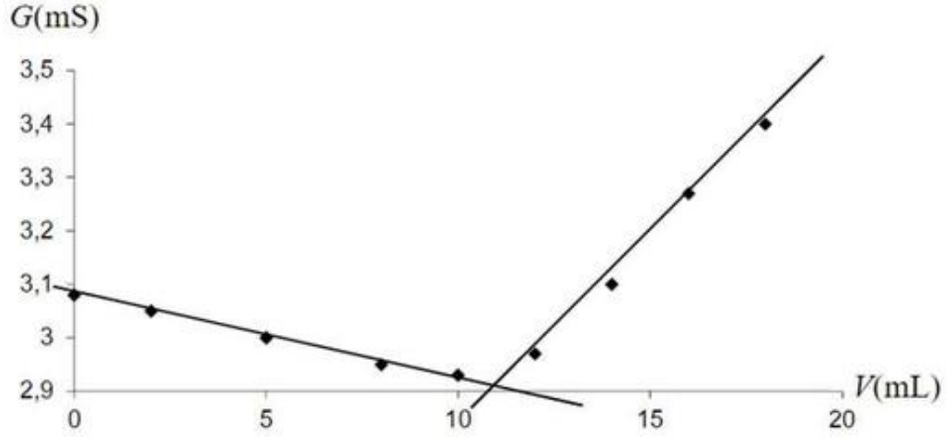
1.



On a représenté ci-contre le dispositif de titrage. La sonde conductimétrique est reliée à un conductimètre. Le conductimètre mesure la conductance (inverse de la résistance) de la portion de solution contenue dans la cellule conductimétrique.

2. Les ions sulfate réagissent avec les ions baryum pour former un précipité de sulfate de baryum selon l'équation : $\boxed{Ba^{2+}_{(aq)} + SO^{2-}_{4(aq)} = BaSO_{4(s)}}$

3. La courbe $G = f(V)$ est tracée ci-dessous :



On distingue une portion de courbe décroissante, puis une portion de courbe croissante. La conductance est proportionnelle à la conductivité selon : $G = k \times \sigma$, où k est la constante de cellule du conductimètre (que l'on peut déterminer par un étalonnage préalable à l'aide d'une solution de chlorure de potassium de concentration fixée, dont on connaît la conductivité à la température du laboratoire).

La conductivité de la solution s'écrit :

$$\sigma = \lambda_{Na^+} \cdot [Na^+] + \lambda_{Cl^-} \cdot [Cl^-] + \lambda_{Ba^{2+}} \cdot [Ba^{2+}] + \lambda_{SO_4^{2-}} \cdot [SO_4^{2-}] + \lambda_{HO^-} \cdot [HO^-] + \lambda_{H_3O^+} \cdot [H_3O^+].$$

La concentration des ions H_3O^+ et HO^-, issus de l'autoprotolyse de l'eau, peut être négligée.

Initialement, les ions Ba^{2+} et Cl^- sont présents dans le bécher de titrage. On ajoute progressivement la solution de sulfate de sodium $(2Na^+ + SO_4^{2-})$. Avant l'équivalence, les ions SO_4^{2-} constituent le réactif limitant de la réaction de titrage, et sont totalement consommés à chaque ajout. Les ions Ba^{2+} sont consommés par la réaction de précipitation et leur concentration diminue dans la solution titrée. La concentration des ions Cl^- reste pratiquement constante (en réalité, elle diminue très légèrement par dilution) et la concentration des ions Na^+ augmente. Or, la conductivité molaire ionique des ions Ba^{2+} est plus élevée que celle des ions Na^+. La conductivité, donc la conductance, diminuent.

Après l'équivalence, les ions Ba^{2+} ont été totalement consommés par la réaction de précipitation. On continue à verser la solution titrante, donc la concentration des ions Na^+ et SO_4^{2-} augmente dans le bécher de titrage. La concentration des ions Cl^- peut toujours être considérée comme constante. La conductivité, donc la conductance, augmentent. On retrouve l'allure de la courbe.

4. À un instant donné, les concentrations des espèces ioniques dans le bécher de titrage sont égales à $\frac{n_{\text{ion } i}}{V_{\text{tot}}} = \frac{n_{\text{ion } i}}{V_S + V_{\text{eau}} + V}$. Un large ajout d'eau à la solution titrée permet de faire l'approximation : $V \ll V_S + V_{\text{eau}}$, donc $\frac{n_{\text{ion } i}}{V_{\text{tot}}} \approx \frac{n_{\text{ion } i}}{V_S + V_{\text{eau}}}$. On peut ainsi négliger la dilution due à l'ajout de solution titrante. Dans ces conditions, les portions de courbe peuvent être assimilées à des segments de droite.

5. À l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques :

$$n_{Ba^{2+},\text{titré}} = n_{SO_4^{2-},\text{versé}} \Leftrightarrow c_{Ba^{2+},S} \cdot V_S = c_{SO_4^{2-}} \cdot V_{éq} \Leftrightarrow c_{Ba^{2+},S} = \frac{c_{SO_4^{2-}} \cdot V_{éq}}{V_S}.$$

Le volume à l'équivalence correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux segments de droite que l'on peut tracer sur la courbe $G = f(V)$, soit : $\boxed{V_{éq} = 11 \text{ mL}}$.

Alors $\boxed{c_{Ba^{2+},S} = 1{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

Exercice 27.14

1. Dans l'eau pure :

$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	$AgSCN_{(s)}$	$= Ag^+_{(aq)}$	$+ SCN^-_{(aq)}$
$t = 0$	excès	0	0
t	excès	s	s

$K_s = 10^{-12}$

$$K_s = \frac{[Ag^+] \cdot [SCN^-]}{(c^\circ)^2} = \frac{s^2}{(c^\circ)^2} \text{ donc } \boxed{s = c^\circ \sqrt{K_s}}. \text{ AN } \boxed{s = 1{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}.$$

⇨ *Méthode 27.3*

2. a) Le trouble blanc observé correspond à l'apparition du précipité de thiocyanate d'argent selon l'équation : $\boxed{Ag^+_{(aq)} + SCN^-_{(aq)} = AgSCN_{(s)}}$

La coloration rouge est due à l'ion complexe $Fe(SCN)^{2+}$, qui se forme selon l'équation :

$$\boxed{Fe^{3+}_{(aq)} + SCN^-_{(aq)} = Fe(SCN)^{2+}_{(aq)}}$$

b) La coloration rouge sang du complexe est perceptible lorsque sa concentration atteint $x = [Fe(SCN)^{2+}] = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La concentration en ions Fe^{3+} vaut alors :

$[Fe^{3+}] = [Fe^{3+}]_0 - x \approx [Fe^{3+}]_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Calculons la concentration en ions thiocyanate.

$$K^\circ = \frac{[Fe(SCN)^{2+}] \cdot c^\circ}{[Fe^{3+}] \cdot [SCN^-]} \Leftrightarrow [SCN^-] = \frac{[Fe(SCN)^{2+}] \cdot c^\circ}{[Fe^{3+}] \cdot K^\circ}. \text{ AN } [SCN^-] = 1{,}0 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Comme le précipité de thiocyanate d'argent $AgSCN_{(s)}$ est présent en solution, la concentration résiduelle en ions argent dans la solution peut être calculée à partir de l'expression du produit de solubilité de $AgSCN_{(s)}$.

$$K_s = \frac{[Ag^+] \cdot [SCN^-]}{(c^\circ)^2} \Leftrightarrow [Ag^+] = \frac{K_s (c^\circ)^2}{[SCN^-]}. \text{ AN } \boxed{[Ag^+] = 1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}.$$

⇨ *Méthode 27.5*

c) La concentration résiduelle en ions argent dans la solution est négligeable devant la concentration initiale en ions argent dans la solution $[Ag^+]_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Au moment où la coloration rouge sang du complexe $Fe(SCN)^{2+}$ apparaît, la totalité des ions Ag^+ ont donc été précipités. Le complexe peut donc servir d'indicateur de fin de réaction pour le titrage des ions argent par précipitation.

Exercice 27.15

1. Le précipité blanc qui se forme au cours du dosage est l'hydroxyde de zinc $Zn(OH)_2(s)$, dont l'apparition est marquée sur la courbe $pH = f(V)$ par le point anguleux B.

2. Sur la portion AB, avant l'apparition du précipité, les ions hydroxyde ajoutés réagissent avec les ions oxonium de la solution selon la réaction d'équation : $\boxed{H_3O^+ + HO^- = 2\,H_2O}$

À partir du point anguleux B, les ions hydroxyde réagissent avec les ions zinc de la solution et le précipité d'hydroxyde de zinc commence à se former. Dans le domaine BC, l'équation de la réaction est alors : $\boxed{Zn^{2+} + 2\,HO^- = Zn(OH)_2}$

Le point C correspond à la fin du dosage des ions Zn^{2+} par la soude. Les ions hydroxyde introduits en excès peuvent alors réagir avec le précipité amphotère $Zn(OH)_2$ pour conduire au complexe $Zn(OH)_4^{2-}$ selon l'équation : $Zn(OH)_2 + 2\,HO^- = Zn(OH)_4^{2-}$

On n'observe pas de saut de pH associé à cette troisième équation car la redissolution du précipité sous forme de complexe n'est pas totale.

3. À la première équivalence, $n_{H_3O^+,\text{initiale}} = n_{HO^-,\text{versé}} \Leftrightarrow C_1 \cdot V_0 = c \cdot V_{e1} \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{c \cdot V_{e1}}{V_0}$.

On détermine $V_{e1} = 5{,}0$ mL au niveau du point anguleux B. AN $\boxed{C_1 = 1{,}0.10^{-2}\ \text{mol.L}^{-1}}$.

À la deuxième équivalence, $n_{Zn^{2+},\text{initiale}} = \dfrac{n_{HO^-,\text{ajouté}}}{2}$, soit :

$C_2 \cdot V_0 = \dfrac{c \cdot (V_{e2} - V_{e1})}{2} \Leftrightarrow C_2 = \dfrac{c \cdot (V_{e2} - V_{e1})}{2 \cdot V_0}$. On détermine graphiquement $V_{e2} = 14{,}8$ mL, et on en déduit : $\boxed{C_2 = 9{,}8.10^{-3}\ \text{mol.L}^{-1}}$.

4. Sur la portion BC, $V_{e1} < V < V_{e2}$. On effectue un bilan de matière pour la réaction de dosage des ions Zn^{2+} se déroulant dans ce domaine, sachant que le réactif titrant HO^- est le réactif limitant avant la deuxième équivalence.

mol	Zn^{2+}	$+\,2\,HO^-$	$= Zn(OH)_2$
$t = 0$	$C_2 \cdot V_0$	$c \cdot (V - V_{e1})$	0
t	$C_2 \cdot V_0 - \dfrac{c \cdot (V - V_{e1})}{2} = \dfrac{c \cdot (V_{e2} - V)}{2}$	ε	$\dfrac{c \cdot (V - V_{e1})}{2}$

Considérons le point de coordonnées $(V = 10{,}0\ \text{mL};\ pH = 7{,}7)$ sur la courbe $pH = f(V)$.

En ce point, on a : $[Zn^{2+}] = \dfrac{c \cdot (V_{e2} - V)}{2 \cdot (V_0 + V)}$ et $[HO^-] = \dfrac{K_e \cdot c^\circ}{10^{-pH}}$.

On en déduit donc :

$K_s = \dfrac{[Zn^{2+}] \cdot [HO^-]^2}{(c^\circ)^3} = \dfrac{c \cdot (V_{e2} - V)}{2(V_0 + V) \cdot (c^\circ)^3} \left(\dfrac{K_e \cdot c^\circ}{10^{-pH}} \right)^2$. AN $\boxed{K_s = 1{,}0 \cdot 10^{-15}}$ ou $\boxed{pK_s = 15}$.

Chapitre 28

Réactions d'oxydo-réduction

UN SCIENTIFIQUE



Antoine-Laurent de Lavoisier (1743-1794) est souvent considéré comme l'un des plus grands chimistes, au point qu'on oublie qu'il s'intéressait aussi à la géologie et à l'économie. Il instaure une étude scientifique de la chimie qui lui permet de déterminer la composition de l'eau et de l'air ; il met ainsi fin à la compréhension de la matière basée sur les quatre éléments de base, la terre, l'air, le feu et l'eau. Il meurt sur l'échafaud durant la Terreur.

Un peu d'histoire

On attribue à Antoine Lavoisier la découverte du phénomène d'oxydo-réduction grâce à une expérience sur le mercure datant de 1772. Pour ceci, il fait bouillir du mercure dans un récipient communiquant avec une bonbonne d'air : il constate au bout de quelques jours qu'un dépôt rouge recouvre le métal et que le volume d'air a diminué. Il comprend alors que l'oxygène de l'air s'est combiné avec le mercure, provoquant l'oxydation ; il constate qu'en revanche le volume d'air a diminué, d'où le nom de réduction. Bien sûr, à l'époque, la structure de la matière était inconnue et il était impossible de comprendre ce qui se passait au niveau moléculaire.

L'année précédente, le savant français avait donné son nom à l'oxygène, en combinant le terme grec *oxy* signifiant aigu, pointu et le suffixe *gène* : ainsi le nom de ce gaz signifie *qui produit des acides.*

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les notions d'oxydant, de réducteur et de nombre d'oxydation (NO)
- ▷ Les noms et formules d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels
- ▷ Les couples oxydant/réducteur de l'eau
- ▷ La formule de Nernst
- ▷ La notion d'électrode de référence
- ▷ Les réactions de dismutation et de médiamutation

■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Lier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant
- ▷ Prévoir les NO extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique
- ▷ Déterminer le NO d'un élément dans un édifice
- ▷ Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple
- ▷ Établir une demi-équation électronique et l'équation d'une réaction d'oxydo-réduction
- ▷ Calculer le potentiel d'électrode d'un couple
- ▷ Décrire le fonctionnement d'une pile
- ▷ Déterminer les domaines de prédominance ou d'existence de l'oxydant et du réducteur en fonction du potentiel
- ▷ Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles
- ▷ Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé d'une transformation d'oxydo-réduction

■■ Résumé de cours

■ Transformation d'oxydo-réduction

❑ Couple oxydant/réducteur

Un **oxydant** est une espèce chimique susceptible de capter un ou plusieurs électrons.
Un **réducteur** est une espèce chimique susceptible de céder un ou plusieurs électrons.
L'oxydant Ox et le réducteur Red d'un couple d'oxydo-réduction Ox/Red sont reliés par une **demi-équation** d'échange électronique : $\mathrm{Ox} + n\,\mathrm{e^-} + x\,\mathrm{H^+} = \mathrm{Red} + y\,\mathrm{H_2O}$
Un **ampholyte** oxydo-réducteur peut jouer le rôle d'oxydant et de réducteur.

⇨ Méthode 28.4. Établir une demi-équation électronique en milieu acide
⇨ Méthode 28.5. Établir une demi-équation électronique en milieu basique

Exemples courants

Nom	*Formule*	*Nature*	*Couples usuels*
ion thiosulfate	$S_2O_{3(aq)}^{2-}$	ampholyte	$S_2O_{3(aq)}^{2-}/S_{(s)}$ et $S_4O_{6(aq)}^{2-}/S_2O_{3(aq)}^{2-}$
ion permanganate	$MnO_{4(aq)}^-$	oxydant	$MnO_{4(aq)}^-/Mn_{(aq)}^{2+}$
ion hypochlorite	$ClO_{(aq)}^-$	oxydant	$ClO_{(aq)}^-/Cl_{(aq)}^-$
peroxyde d'hydrogène	$H_2O_{2(aq)}$	ampholyte	$H_2O_{2(aq)}/H_2O_{(l)}$ et $O_{2(aq)}/H_2O_{2(aq)}$

Le dioxygène $O_{2(g)}$ est l'oxydant conjugué de l'eau, le dihydrogène $H_{2(g)}$ le réducteur conjugué de l'eau (couples $H_2O_{(l)}/H_{2(g)}$ et $O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$).

❑ Nombre d'oxydation

Le **nombre d'oxydation** (NO) caractérise l'état d'oxydation d'un élément au sein d'un édifice moléculaire ou ionique, c'est-à-dire le déficit ou le gain en électrons de cet élément.
Dans un couple oxydant / réducteur, l'oxydant est l'espèce contenant l'élément au NO le plus élevé, le réducteur l'espèce contenant l'élément au NO le plus faible.
Une **oxydation** correspond à une perte d'électron(s), donc à une augmentation du NO.
Une **réduction** correspond à un gain d'électron(s), donc à une diminution du NO.
Le nombre d'électrons échangés par l'élément dont le NO varie est égal à la variation de son NO.

⇨ Méthode 28.1. Prévoir les NO extrêmes d'un élément
⇨ Méthode 28.2. Déterminer le NO d'un élément dans un édifice
⇨ Méthode 28.3. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple

❑ Réaction d'oxydo-réduction

Une transformation d'oxydo-réduction est un transfert d'électrons entre l'oxydant d'un couple et le réducteur d'un autre couple. Elle peut être modélisée par une réaction dont l'équation est obtenue à partir des demi-équations des couples mis en jeu.

⇨ Méthode 28.6. Établir l'équation d'une réaction d'oxydo-réduction

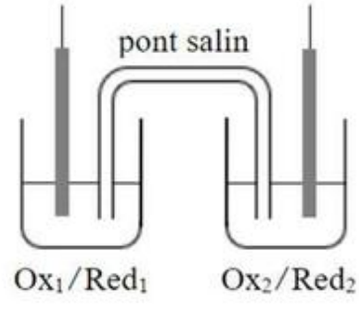
Dismutation et médiamutation

On appelle **dismutation** une réaction d'oxydo-réduction au cours de laquelle un ampholyte redox est à la fois réduit et oxydé. Le NO du même élément augmente et diminue simultanément. Une **médiamutation** est la réaction inverse d'une dismutation.

■ Pile

❑ Constitution

Une **pile** est un dispositif pouvant fournir de l'énergie sous forme de travail électrique à un circuit extérieur, grâce au déroulement d'une transformation chimique *spontanée* d'oxydo-réduction.
Une pile résulte de l'association de deux **demi-piles** (ou **électrodes**), séparées par un pont salin ou une jonction électrolytique (membrane). Chaque demi-pile est constituée d'un conducteur électronique (solide) et d'un conducteur ionique (électrolyte), mettant en jeu les deux espèces d'un couple.



❑ Réaction électrochimique dans une pile

Lorsque la pile est reliée à un circuit extérieur, on observe la circulation d'un courant électrique dans le circuit, traduisant un transfert d'électrons entre les deux couples Ox/Red : la pile débite.
L'**anode** est l'électrode où se produit la réaction d'oxydation, la **cathode** celle où se produit la réaction de réduction. La circulation du courant est assurée par les électrons dans les conducteurs électroniques du circuit (lame métallique, fil, conducteur ohmique), et par les ions dans les conducteurs ioniques (solutions et pont salin).
Le courant circule du pôle + de la pile (cathode) vers le pôle – (anode) dans le circuit extérieur.

⇨ **Méthode 28.9. Décrire le fonctionnement d'une pile**

❑ Bilans de charge et de matière

Pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ de fonctionnement, la charge débitée par une pile est $\delta q = i\,\mathrm{d}t$, où i est l'intensité du courant délivré. Si i est constante pendant une durée Δt de fonctionnement, la charge totale délivrée est $q = i\Delta t$, avec q en coulombs (C), i en ampères (A) et Δt en secondes (s).
La charge débitée peut aussi être reliée à l'avancement de la transformation associée au fonctionnement de la pile : $\delta q = z F\,\mathrm{d}\xi$, où z est le nombre d'électrons mis en jeu dans l'équation de fonctionnement, $F = 96485\ \mathrm{C\cdot mol^{-1}}$ la constante de Faraday et $\mathrm{d}\xi$ la variation de l'avancement pendant une durée $\mathrm{d}t$ de fonctionnement.
Sous forme intégrée : $q = z F \xi$ avec ξ en moles.

Capacité électrique d'une pile

C'est la charge électrique maximale que peut débiter une pile pendant toute sa durée de fonctionnement. On l'exprime généralement en A·h, sachant que 1 A·h = 3600 C. L'autonomie d'une pile (durée maximale de fonctionnement) est directement liée à sa capacité.

❑ Potentiel d'électrode

Un conducteur électronique plongeant dans une solution ionique acquiert un potentiel appelé **potentiel d'électrode**, que l'on assimile au potentiel d'oxydo-réduction du couple mis en jeu.

Potentiel standard d'oxydo-réduction

Le potentiel standard d'oxydo-réduction d'un couple Ox/Red, noté $E°$, est la valeur prise par le potentiel d'oxydo-réduction du couple quand les constituants sont dans leur état standard.

Unicité du potentiel à l'équilibre

Dans une solution à l'équilibre, les potentiels de tous les couples d'oxydo-réduction sont égaux.

Tension à vide (ou force électromotrice)

C'est la différence de potentiel mesurée aux bornes d'une pile en circuit ouvert. Par convention : $\Delta E = E^+ - E^- > 0$.

Une pile *usée* correspond à un état d'équilibre dans lequel la tension à vide est nulle : $\Delta E = 0$.

❑ Électrodes de référence

Le potentiel électrique étant défini à une constante près, on ne peut mesurer que des *différences de potentiel*. La détermination du potentiel d'électrode pour un couple d'oxydo-réduction se fait donc par comparaison avec une électrode de référence.

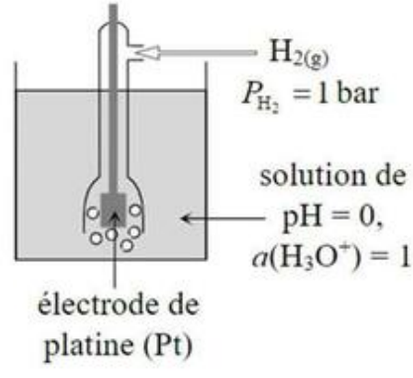
Électrode standard à hydrogène (ÉSH)

L'ÉSH, représentée ci-contre, met en jeu le couple $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$

de demi-équation électronique : $2H^+_{(aq)} + 2\,e^- = H_{2(g)}$

Elle est représentée schématiquement par : $Pt \,|\, H_{2(g)} \,|\, H_3O^+_{(aq)}$

Dans l'ÉSH, les constituants sont dans leur état standard : $E_{ÉSH} = E°_{H^+/H_2} = 0{,}000\,V$ par convention, à toute température.



Électrode au calomel saturée (ÉCS)

L'ÉSH est souvent remplacée par l'électrode au calomel saturée (ÉCS) :

$Pt \,|\, Hg_{(l)} \,|\, Hg_2Cl_{2(s)} \,|\, (K^+ + Cl^-)_{sat}$ de potentiel $E_{ÉCS} = 0{,}244$ V par rapport à l'ÉSH à 25 °C.

Électrode au chlorure d'argent

Avec l'interdiction progressive du mercure, on peut utiliser comme électrode de référence l'électrode au chlorure d'argent : $Ag_{(s)} \,|\, AgCl_{(s)} \,|\, (K^+ + Cl^-)_{sat}$ (photo ci-dessous) de potentiel $E_{réf} = 0{,}222$ V par rapport à l'ÉSH à 25 °C.



⇨ **Méthode 28.7. Expliquer le principe d'une électrode de référence**

❑ Relation de Nernst

Considérons la demi-équation : $\mathrm{Ox} + n\,\mathrm{e}^- + x\,\mathrm{H}^+ = \mathrm{Red} + y\,\mathrm{H_2O}$

La valeur du potentiel d'électrode associée à ce couple est donnée par la relation de Nernst :

$$\boxed{E = E^\circ_{\mathrm{Ox/Red}} + \frac{RT}{nF}\ln\frac{a_{\mathrm{Ox}} \cdot a_{\mathrm{H^+}}^x}{a_{\mathrm{Red}} \cdot a_{\mathrm{H_2O}}^y}}$$

où $R = 8{,}314\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ est la constante des gaz parfaits, $F = \mathscr{N}_\mathrm{A} e = 96485\ \mathrm{C\cdot mol^{-1}}$ la constante de Faraday, T la température absolue (en kelvins), a_i l'activité de l'espèce i.

À 25 °C, $\frac{RT}{F}\ln 10 \approx 0{,}06$ V, la formule de Nernst s'écrit alors de façon pratique :

$$E = E^\circ_{\mathrm{Ox/Red}} + \frac{0{,}06}{n}\log\frac{a_{\mathrm{Ox}} \cdot a_{\mathrm{H^+}}^x}{a_{\mathrm{Red}} \cdot a_{\mathrm{H_2O}}^y} \quad \text{avec } E \text{ et } E^\circ_{\mathrm{Ox/Red}} \text{ en volts.}$$

Remarque

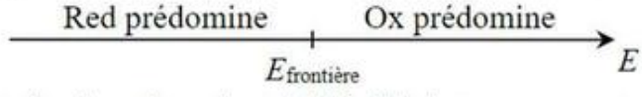
Les valeurs des potentiels standard des couples étant tabulées à pH = 0, pour appliquer la relation de Nernst il faut utiliser la demi-équation en milieu acide d'un couple.

⇨ **Méthode 28.8. Calculer un potentiel standard d'oxydo-réduction**

■ Aspect thermodynamique

❑ Diagramme de prédominance

À l'aide de conventions de tracé précisées dans les énoncés (en fonction de l'état physique des différentes espèces), on peut tracer un diagramme de prédominance, dont l'allure générale est :



Deux espèces présentant des domaines de stabilité disjoints ne peuvent coexister.

Pour une espèce en phase solide, on parle de *domaine d'existence*. Par convention, la frontière entre les deux espèces est alors définie comme la limite d'apparition du solide.

⇨ **Méthode 28.10. Prévoir des espèces incompatibles**

❑ Échelle des potentiels

Un oxydant est d'autant plus fort que le potentiel standard du couple est plus élevé.

Un réducteur est d'autant plus fort que le potentiel standard du couple est plus faible.

La transformation la plus favorisée thermodynamiquement est celle qui a lieu entre l'oxydant le plus fort et le réducteur le plus fort présents. Elle se déroule jusqu'à un état final d'équilibre où les potentiels des deux couples sont égaux, ou jusqu'à consommation du réactif limitant.

⇨ **Méthode 28.11. Utiliser l'échelle des potentiels**

❑ Constante d'équilibre

Pour les couples $\mathrm{Ox_1/Red_1}$ de potentiel standard E_1° et $\mathrm{Ox_2/Red_2}$ de potentiel standard E_2°, considérons la réaction d'équation : $\mathrm{Ox_1 + Red_2 = Red_1 + Ox_2}$

La constante d'équilibre associée à l'équation de cette réaction est égale à :

$$K^\circ = 10^{\frac{n(E_1^\circ - E_2^\circ)}{0,06}}$$

où n est le nombre d'électrons transférés dans l'équation de la réaction, et E_1° et E_2° les potentiels standard d'oxydo-réduction des deux couples, exprimés en volts.

➪ **Méthode 28.12. Calculer la constante d'équilibre associée à une équation d'oxydo-réduction**

En général, la transformation est considérée comme totale si $K > 10^4$ soit $E_1^\circ - E_2^\circ > 0,25$ V.

❑ Influence du milieu sur les propriétés oxydo-réductrices

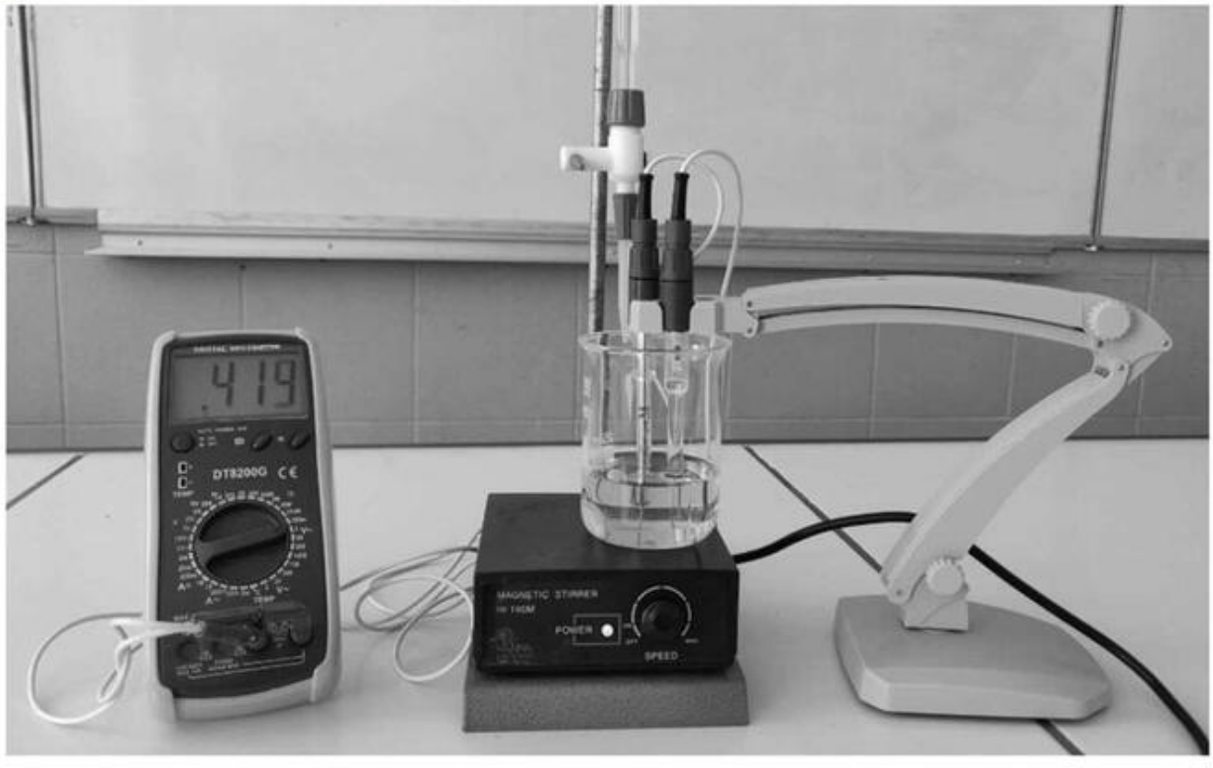
Les conditions expérimentales (pH de la solution, formation de précipité...) peuvent modifier le pouvoir oxydant ou réducteur d'une espèce et donc influer sur le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation d'oxydo-réduction.

■ Titrages d'oxydo-réduction

On peut utiliser une transformation d'oxydo-réduction comme support de titrage si elle est rapide et totale.

– Le suivi du titrage peut se faire par des méthodes usuelles telles que la colorimétrie.

– On peut aussi réaliser un titrage par **potentiométrie**, en mesurant la différence de potentiel entre une électrode de mesure (ou électrode indicatrice) et une électrode de référence ; à l'équivalence, on observe un saut de potentiel.



■■ Méthodes

■ Comment déterminer le nombre d'oxydation d'un élément ?

❑ Méthode 28.1. Prévoir les NO extrêmes d'un élément

Un élément aura tendance à céder ou gagner un certain nombre d'électrons de façon à posséder le même nombre d'électrons qu'un gaz noble (il est alors dit *isoélectronique* du gaz noble correspondant).
Le nombre maximal d'électrons ainsi gagnés ou perdus représente les valeurs extrêmes du NO de cet élément, qui peuvent directement se déduire de la position de cet élément dans le tableau périodique.

⇨ Exercice 28.1

– Les éléments des colonnes 1 et 2 du tableau périodique peuvent perdre leur(s) électron(s) de valence (1 ou 2 électrons) pour être isoélectroniques du gaz noble qui les précède dans le tableau périodique.
Ainsi, le NO maximal du sodium (Na, colonne 1) est +I, et celui du magnésium (Mg, colonne 2) est +II.

– Pour les éléments des colonnes 13 à 17 du tableau périodique, les NO extrêmes correspondent au nombre maximal d'électrons perdus ou gagnés de façon à être isoélectroniques d'un gaz noble.

Élément	*Colonne*	*NO extrêmes et exemples*	
aluminium (Al)	13		+III : Al^{3+}
carbone (C)	14	–IV : CH_4	+IV : CO_2
azote (N)	15	–III : NH_3	+V : HNO_3
oxygène (O)	16	–II : H_2O	
chlore (Cl)	17	–I : HCl	+VII : $HClO_4$

– Les métaux ont tendance à céder plusieurs électrons et se rencontrent sous plusieurs NO positifs. Ils conduisent très rarement à des NO négatifs.

❑ Méthode 28.2. Déterminer le NO d'un élément dans un édifice

– Pour un édifice monoatomique, le nombre d'oxydation de l'élément est égal à la charge algébrique de l'édifice.
– Pour un édifice polyatomique covalent, on peut représenter la formule de Lewis de l'édifice. Pour chaque liaison covalente, on attribue conventionnellement les électrons de la liaison à l'élément le plus électronégatif. Le NO de l'élément est égal à la différence entre le nombre d'électrons de valence de l'atome isolé et le nombre d'électrons qui entourent l'atome dans l'édifice.
– Pour un composé ionique, il faut identifier les ions constitutifs de l'édifice et calculer le NO des différents éléments dans ces ions à l'aide d'une des deux méthodes précédentes.

⇨ Exercices 28.1, 28.3

– Pour l'atome Fe, NO(Fe) = 0.
Pour le cation Ca^{2+}, NO(Ca) = +II. Pour l'anion Cl^-, NO(Cl) = –I.

– La formule de Lewis du dichlore est : $|\overline{\underline{Cl}}—\overline{\underline{Cl}}|$

Chaque élément a la même électronégativité, on attribue un électron de chaque liaison à chaque chlore, qui conserve ainsi le même nombre d'électrons qu'à l'état atomique : NO(Cl) = 0.

– L'eau a pour formule de Lewis : $H—\overline{\underline{O}}—H$

L'oxygène est le plus électronégatif : on lui attribue conventionnellement les deux électrons de chaque liaison. Il est donc entouré de deux électrons de plus qu'à l'état atomique : NO(O) = –II.
À l'inverse, chaque atome d'hydrogène a perdu un électron par rapport à l'atome isolé, donc NO(H) = +I.

– Considérons maintenant l'ion hydroxyde HO^-. Les électrons sont attribués à l'oxygène : NO(H) = +I. La conservation de la charge nous permet d'écrire : NO(H) + NO(O) = –1 d'où NO(O) = –II. Les NO des deux éléments sont donc les mêmes que dans la molécule d'eau.

Remarques

– De manière générale, le NO d'un élément dans un corps simple est nul.
– On observe souvent NO(O) = –II sauf dans les peroxydes, O_2 et F_2O ; et NO(H) = +I sauf dans les hydrures et H_2 par exemple.
– Si l'édifice est chargé, la conservation de la charge implique que la somme algébrique des NO des éléments engagés dans l'édifice est égale à la charge de l'édifice. Cette relation peut être utilisée pour déterminer certains NO, par résolution d'une équation simple à l'aide des NO usuels des éléments O et H.
– L'obtention par le calcul d'un NO fractionnaire traduit la présence de plusieurs NO pour un même élément dans l'édifice ; la valeur calculée correspond alors à une moyenne de ces NO.

■ Comment déterminer l'équation d'une réaction d'oxydo-réduction ?

❑ Méthode 28.3. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple

Calculer le NO de l'élément principal pour les deux espèces. L'oxydant est l'espèce contenant l'élément au NO le plus élevé. Le réducteur est l'espèce contenant l'élément au NO le plus faible.

⇨ Exercice 28.3

Prenons l'exemple des ions manganèse $Mn^{2+}_{(aq)}$ et permanganate $MnO^{-}_{4(aq)}$, et du dioxyde de manganèse $MnO_{2(s)}$.

– En appliquant la méthode précédente du calcul de NO à l'élément manganèse dans les différents édifices, on trouve NO(Mn) = +II dans l'ion $Mn^{2+}_{(aq)}$, NO(Mn) = +IV dans le dioxyde de manganèse $MnO_{2(s)}$ (en utilisant le fait que NO(O) = –II et que la charge globale est nulle) et NO(Mn) = +VII pour l'ion permanganate $MnO^{-}_{4(aq)}$ (en utilisant le fait que NO(O) = –II et que la charge globale est égale à –1).

– L'ion permanganate est associé à la valeur la plus élevée de NO(Mn). Il joue donc le rôle d'oxydant dans les deux couples $MnO^{-}_{4(aq)} / MnO_{2(s)}$ et $MnO^{-}_{4(aq)} / Mn^{2+}_{(aq)}$.

– Le dioxyde de manganèse est l'espèce oxydante du couple $MnO_{2(s)} / Mn^{2+}_{(aq)}$ et l'espèce réductrice du couple $MnO^{-}_{4(aq)} / MnO_{2(s)}$. Il s'agit d'un ampholyte oxydo-réducteur.

❑ Méthode 28.4. Établir une demi-équation électronique en milieu acide

– Écrire la demi-équation sous la forme Ox = Red
– Ajuster les nombres stœchiométriques de Ox et Red pour assurer la conservation des éléments autres que l'hydrogène et l'oxygène.
– Assurer la conservation de l'élément oxygène à l'aide de molécules d'eau.
– Assurer la conservation de l'élément hydrogène à l'aide de protons.
– Assurer la conservation de la charge à l'aide d'électrons.

⇨ Exercices 28.2 à 28.16

Prenons l'exemple du couple $Cr_2O_7^{2-} / Cr^{3+}$: $Cr_2O_7^{2-}$ est l'oxydant et Cr^{3+} le réducteur.

– On commence par écrire : $Cr_2O_7^{2-} = Cr^{3+}$

– On traduit la conservation de l'élément chrome : $Cr_2O_7^{2-} = \mathbf{2}\, Cr^{3+}$

– Puis afin d'assurer la conservation de l'élément oxygène : $Cr_2O_7^{2-} = 2\, Cr^{3+} + \mathbf{7\, H_2O}$

– L'ajout de protons permet de conserver l'élément hydrogène :

$$Cr_2O_7^{2-} + \mathbf{14\, H^+} = 2\, Cr^{3+} + 7\, H_2O$$

– Et pour assurer la conservation de la charge, 6 électrons sont échangés :

$$\boxed{Cr_2O_7^{2-} + 6\,e^- + 14\,H^+ = 2\,Cr^{3+} + 7\,H_2O}$$

❑ Méthode 28.5. Établir une demi-équation électronique en milieu basique

– Établir la demi-équation en milieu acide.
– Ajouter aux deux membres de la demi-équation autant d'ions hydroxyde HO^- qu'il y a de protons dans la demi-équation.
– Remplacer chaque terme $H^+ + HO^-$ par une molécule d'eau.
– Faire les éventuelles simplifications nécessaires.

⇨ Exercices 28.2, 28.9, 28.12

La demi-équation associée au couple IO_3^-/I_2 s'écrit en milieu acide :

$$2\,IO_3^- + 10\,e^- + 12\,H^+ = I_2 + 6\,H_2O$$

Comme 12 protons interviennent, on ajoute aux deux membres de la demi-équation 12 ions hydroxyde : $2\,IO_3^- + 10\,e^- + 12\,H^+ + 12\,HO^- = I_2 + 6\,H_2O + 12\,HO^-$

qui conduit finalement à : $\boxed{2\,IO_3^- + 10\,e^- + 6\,H_2O = I_2 + 12\,HO^-}$

Remarque

L'opération précédente revient à combiner la demi-équation en milieu acide à l'équation d'autoprotolyse de l'eau pour obtenir la demi-équation en milieu basique :

$$\begin{aligned} (1)\quad & 2\,IO_3^- + 10\,e^- + 12\,H^+ = I_2 + 6\,H_2O \\ (2)\quad & 12\,H_2O = 12\,H^+ + 12\,HO^- \\ \hline (1)+(2)\quad & 2\,IO_3^- + 10\,e^- + 6\,H_2O = I_2 + 12\,HO^- \end{aligned}$$

❑ Méthode 28.6. Établir l'équation d'une réaction d'oxydo-réduction

– Identifier les couples mis en jeu et écrire les demi-équations électroniques correspondantes.
– Faire une combinaison linéaire des demi-équations électroniques afin qu'aucun électron n'intervienne dans l'équation de la réaction.

⇨ Exercices 28.3 à 28.16

Écrivons l'équation de la réaction entre l'oxydant $Cr_2O_7^{2-}$ et le réducteur Cu. Les couples mis en jeu sont $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$ et Cu^{2+}/Cu associés aux demi-équations électroniques :

$$(1)\ Cr_2O_7^{2-} + 6\,e^- + 14\,H^+ = 2\,Cr^{3+} + 7\,H_2O \quad (6 \text{ électrons échangés})$$

$$\text{et}\quad (2)\ Cu = Cu^{2+} + 2\,e^- \quad (2 \text{ électrons échangés}).$$

La combinaison linéaire $(1) + 3 \times (2)$ conduit à l'équation :

$$\boxed{Cr_2O_7^{2-} + 3\,Cu + 14\,H^+ = 2\,Cr^{3+} + 3\,Cu^{2+} + 7\,H_2O}$$

■ Comment utiliser la relation de Nernst ?

❑ Méthode 28.7. Expliquer le principe d'une électrode de référence

– Écrire la demi-équation associée au couple mis en jeu dans l'électrode.
– Appliquer la relation de Nernst pour exprimer le potentiel d'électrode.
– Montrer que dans les conditions expérimentales utilisées, le potentiel de l'électrode garde une valeur constante.

⇨ Exercice 28.16

Considérons l'électrode au chlorure d'argent : $Ag_{(s)} \,|\, AgCl_{(s)} \,|\, (K^+ + Cl^-)_{sat}$

Dans cette électrode, un fil d'argent recouvert de chlorure d'argent $AgCl_{(s)}$ plonge dans une solution saturée de chlorure de potassium. Le couple mis en jeu est $AgCl_{(s)} / Ag_{(s)}$, de demi-équation : $AgCl_{(s)} + e^- = Ag_{(s)} + Cl^-$

On lui applique la relation de Nernst : $E = E^\circ_{AgCl_{(s)}/Ag_{(s)}} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{c^\circ}{[Cl^-]}$.

Dans la solution saturée, la concentration $[Cl^-] = s$ est constante et égale à la solubilité du chlorure de potassium $KCl_{(s)}$ à la température de travail. Ainsi, le potentiel de l'électrode au chlorure d'argent est constant : elle peut servir d'électrode de référence.

❑ Méthode 28.8. Calculer un potentiel standard d'oxydo-réduction

– Si les potentiels standard d'oxydo-réduction de deux couples *a/b* et *b/c*, impliquant le même élément à différents NO, sont connus, il est possible de calculer le potentiel standard d'oxydo-réduction du couple *a/c*. Pour cela, il faut écrire la demi-équation relative à chaque couple et exprimer le potentiel à l'aide de la relation de Nernst pour chaque couple. À l'équilibre, la valeur du potentiel d'électrode est unique : faire une combinaison linéaire des différentes expressions afin d'en déduire une relation simple liant $E^\circ_{a/c}$, $E^\circ_{a/b}$ et $E^\circ_{b/c}$.
– Si le potentiel standard d'oxydo-réduction d'un couple Ox/Red est connu, ainsi qu'une constante d'équilibre associée à une équation mettant en jeu l'espèce Ox ou Red (K_s, K_a ...), il est possible de calculer le potentiel standard d'oxydo-réduction du couple mettant en jeu la forme basique, le précipité… issu(e) de Ox ou Red (sans changement de NO de l'élément principal). Pour cela, il faut écrire la demi-équation relative à chaque couple et exprimer le potentiel à l'aide de la relation de Nernst pour chaque couple. À l'équilibre, la valeur du potentiel d'électrode est unique : en déduire une relation simple liant les potentiels standard des deux couples et les grandeurs thermodynamiques adéquates.

⇨ Exercices 28.6, 28.11

– Exemple 1

On donne $E°(NO_3^- / NO_{(g)}) = E_1° = 0{,}96\,V$ et $E°(HNO_2 / NO_{(g)}) = E_2° = 0{,}98\,V$, et on souhaite déterminer $E°(NO_3^- / HNO_2) = E_3°$.

Couple	*Demi-équation électronique*	*Expression du potentiel*
$NO_3^- / NO_{(g)}$	$NO_3^- + 4\,H^+ + 3\,e^- = NO_{(g)} + 2\,H_2O$	$E_1 = E_1° + 0{,}02 \cdot \log \dfrac{[NO_3^-] \cdot [H^+]^4 \cdot P°}{(c°)^5 P_{NO}}$
$HNO_2 / NO_{(g)}$	$HNO_2 + H^+ + e^- = NO_{(g)} + H_2O$	$E_2 = E_2° + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[HNO_2] \cdot [H^+] \cdot P°}{(c°)^2 P_{NO}}$
NO_3^- / HNO_2	$NO_3^- + 3\,H^+ + 2\,e^- = HNO_2 + H_2O$	$E_3 = E_3° + 0{,}03 \cdot \log \dfrac{[NO_3^-] \cdot [H^+]^3}{[HNO_2](c°)^3}$

À l'équilibre, la valeur du potentiel d'électrode est unique : $E_1 = E_2 = E_3$.

Pour obtenir uniquement une relation entre les potentiels standard d'oxydo-réduction, on réécrit la relation précédente :

$$3 \cdot E_1 = 2 \cdot E_3 + E_2 \Leftrightarrow 3 \cdot E_1° + 0{,}06 \cdot \log \frac{[NO_3^-][H^+]^4 P°}{(c°)^5 P_{NO}} = 2 \cdot E_3° + E_2° + 0{,}06 \cdot \log \frac{[NO_3^-][H^+]^4 P°}{(c°)^5 P_{NO}}$$

d'où $\boxed{E_3° = \dfrac{3 \cdot E_1° - E_2°}{2} = 0{,}95\,V}$.

– Exemple 2

On souhaite déterminer le potentiel standard d'oxydo-réduction du couple $AgI_{(s)} / Ag_{(s)}$ connaissant le potentiel standard d'oxydo-réduction du couple Ag^+ / Ag.

En présence d'ions iodure, l'ion argent précipite sous forme d'iodure d'argent $AgI_{(s)}$. La constante de solubilité du précipité (associée à l'équation $AgI_{(s)} = Ag^+ + I^-$) est $K_s = \dfrac{[Ag^+] \cdot [I^-]}{(c°)^2}$.

Couple	*Demi-équation électronique*	*Relation de Nernst*
$Ag^+ / Ag_{(s)}$	$Ag^+ + e^- = Ag_{(s)}$	$E = E°_{Ag^+/Ag_{(s)}} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[Ag^+]}{c°}$
$AgI_{(s)} / Ag_{(s)}$	$AgI_{(s)} + e^- = Ag_{(s)} + I^-$	$E = E°_{AgI_{(s)}/Ag_{(s)}} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{c°}{[I^-]}$

À l'équilibre, la valeur du potentiel d'électrode est unique : $E_{Ag^+/Ag_{(s)}} = E_{AgI_{(s)}/Ag_{(s)}}$, soit $E°_{Ag^+_{(aq)}/Ag_{(s)}} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[Ag^+]}{c°} = E°_{AgI_{(s)}/Ag_{(s)}} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{c°}{[I^-]}$. Sachant que $K_s = \dfrac{[Ag^+] \cdot [I^-]}{(c°)^2}$, on écrit $E°_{AgI_{(s)}/Ag_{(s)}} = E°_{Ag^+/Ag_{(s)}} - 0{,}06 \cdot pK_s$: on constate que le pouvoir oxydant de l'argent(I) diminue par précipitation.

■ Comment décrire le fonctionnement d'une pile électrochimique ?

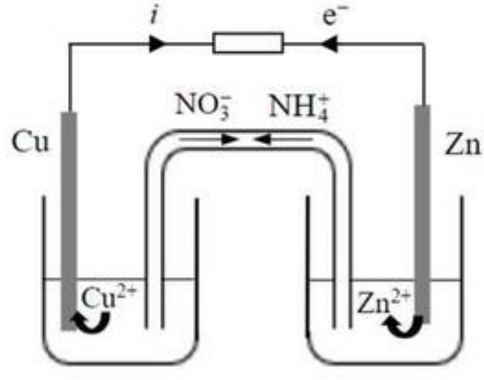
❑ Méthode 28.9. Décrire le fonctionnement d'une pile

– Calculer les potentiels d'électrode en appliquant la relation de Nernst à chacun des deux couples mis en jeu.
– L'électrode dont le potentiel est le plus élevé (resp. le plus faible) constitue le pôle + (resp. le pôle –) de la pile.
– Déterminer le sens de circulation du courant et celui des électrons.
– Écrire les demi-équations des réactions ayant lieu aux électrodes.
– Identifier la cathode, lieu de la réduction, et l'anode, lieu de l'oxydation.
– Calculer la tension à vide (ou force électromotrice) de la pile, c'est-à-dire la différence de potentiel mesurée aux bornes d'une pile en circuit ouvert. Par convention $\Delta E = E^+ - E^- > 0$.

⇨ Exercices 28.9 à 28.13

On considère la pile Daniell constituée d'une lame de cuivre plongeant dans une solution de sulfate de cuivre de concentration $[Cu^{2+}] = 0{,}10\ mol \cdot L^{-1}$ et d'une lame de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc de concentration $[Zn^{2+}] = 0{,}10\ mol \cdot L^{-1}$.
Les deux compartiments sont reliés entre eux par un pont salin et un circuit électrique comprenant un conducteur ohmique de résistance R. Les potentiels standard d'oxydo-réduction des couples mis en jeu sont $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = 0{,}34\ V$ et $E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} = -0{,}76\ V$ (à 25 °C).
– Le potentiel de l'électrode de cuivre vaut d'après la relation de Nernst (demi-équation $Cu^{2+} + 2e^- = Cu$) : $E_{Cu} = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} + \dfrac{0{,}06}{2} \log \dfrac{[Cu^{2+}]}{c^\circ} = 0{,}31\ V$.
De même, le potentiel de l'électrode de zinc vaut (demi-équation $Zn^{2+} + 2e^- = Zn$) : $E_{Zn} = E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} + \dfrac{0{,}06}{2} \log \dfrac{[Zn^{2+}]}{c^\circ} = -0{,}79\ V$.
– On a $E_{Cu} > E_{Zn}$. L'électrode de cuivre constitue donc le pôle + de la pile, l'électrode de zinc le pôle –.

– Le courant circule à l'extérieur de la pile du pôle positif vers le pôle négatif. On en déduit le sens de circulation des électrons, opposé au courant, de l'électrode de zinc vers l'électrode de cuivre.
– L'électrode de zinc est donc l'anode : il s'y produit une oxydation selon : $Zn = Zn^{2+} + 2e^-$
– L'électrode de cuivre est la cathode, à laquelle on observe la réduction : $Cu^{2+} + 2e^- = Cu$



L'équation de la réaction de fonctionnement de la pile s'écrit : $Zn + Cu^{2+} = Zn^{2+} + Cu$
Au sein de la pile, la circulation du courant est assurée par les ions de l'électrolyte présent dans le pont salin (les anions migrent vers l'anode, les cations vers la cathode). On peut alors représenter schématiquement la pile Daniell :

$$(-)Zn_{(s)} \mid Zn^{2+}_{(aq)} \,\vdots\, Cu^{2+}_{(aq)} \mid Cu_{(s)}(+)$$

– La tension à vide vaut $\Delta E = E_{Cu} - E_{Zn} = 1{,}10$ V.

Remarque

La polarité de la pile peut aussi se déduire du sens de circulation du courant électrique entre les électrodes : les électrons sont libérés par le zinc (d'après la demi-équation d'oxydation) et vont vers l'électrode de cuivre en passant par le circuit extérieur, le courant va donc conventionnellement en sens inverse ; puisqu'il circule du pôle + de la pile (cathode) vers le pôle – (anode), c'est donc l'électrode de cuivre qui est le pôle +.

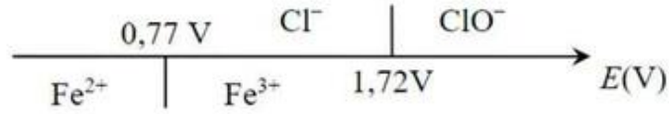
■ Comment prévoir si une transformation est thermodynamiquement favorisée ?

❑ Méthode 28.10. Prévoir des espèces incompatibles

– Superposer les diagrammes de prédominance des couples Ox/Red étudiés.
– Deux espèces présentant des domaines de prédominance disjoints sont incompatibles en solution et donnent lieu à une transformation favorisée thermodynamiquement.

⇨ Exercices 28.5, 28.6

– Considérons le couple Fe^{3+}/Fe^{2+}, dont le potentiel standard est égal à 0,77 V (demi-équation $Fe^{3+}_{(aq)} + e^- = Fe^{2+}_{(aq)}$). En considérant les concentrations des deux espèces dissoutes égales à la frontière, on a à la frontière $E = E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = 0{,}77$ V. On peut tracer le diagramme de prédominance correspondant : l'oxydant Fe^{3+} prédomine pour $E > 0{,}77$ V, le réducteur Fe^{2+} prédomine pour $E < 0{,}77$ V.
– On considère maintenant le couple $ClO^-_{(aq)}/Cl^-_{(aq)}$ (demi-équation $ClO^-_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- = Cl^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$) dont le potentiel standard est égal à 1,72 V. En considérant les concentrations des deux espèces dissoutes égales à la frontière et pH = 0, on a à la frontière $E = E^\circ_{ClO^-/Cl^-} = 1{,}72$ V et on peut tracer le diagramme de prédominance correspondant.
On observe que ClO^- et Fe^{2+} possèdent des domaines de prédominance disjoints : ces espèces sont incompatibles et ne peuvent coexister en solution. La transformation peut être modélisée par la réaction d'équation : $ClO^-_{(aq)} + 2\,Fe^{2+}_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} = Cl^-_{(aq)} + 2\,Fe^{3+}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$



Remarque

Si un ampholyte possède deux domaines de stabilité disjoints (sur un diagramme de prédominance tracé pour les deux couples auxquels cette espèce appartient), cette espèce est instable et se dismute.

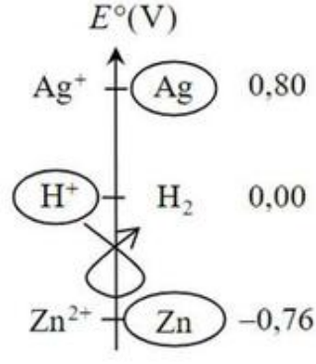
❑ Méthode 28.11. Utiliser l'échelle des potentiels

Classer les couples Ox/Red présents sur une échelle de potentiels en fonction de leur potentiel d'oxydo-réduction (ou en absence de données sur les activités des espèces, en fonction de leur potentiel standard d'oxydo-réduction). La transformation la plus favorisée thermodynamiquement a lieu entre l'oxydant le plus fort (E ou $E°$ le plus élevé) et le réducteur le plus fort (E ou $E°$ le plus faible).

⇨ Exercices 28.3, 28.6, 28.7

– Du zinc $Zn_{(s)}$ est plongé dans une solution d'acide chlorhydrique. On donne $E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} = -0,76\,V$. L'échelle des potentiels standard est représentée ci-contre. Selon la règle du gamma, l'oxydant le plus fort H^+ peut donc oxyder le zinc selon la transformation thermodynamiquement favorisée d'équation :

$$Zn + 2\,H^+ = Zn^{2+} + H_2$$



– On place de l'argent $Ag_{(s)}$ dans une solution aqueuse d'acide chlorhydrique. On donne $E^\circ_{Ag^+/Ag} = 0,80\,V$. Le potentiel standard du couple $Ag^+/Ag_{(s)}$ est plus élevé que celui de H^+/H_2 : H^+ n'est pas un oxydant assez fort pour oxyder $Ag_{(s)}$ et aucune réaction ne se produit.

Remarque

Une transformation favorisée thermodynamiquement peut ne pas être observée s'il existe un blocage cinétique.

❑ Méthode 28.12. Calculer la constante d'équilibre associée à une équation d'oxydo-réduction

Exprimer les potentiels associés aux deux couples mis en jeu à l'aide de la relation de Nernst. À l'équilibre, le potentiel est le même pour les deux couples : en déduire l'expression de la constante d'équilibre en fonction des potentiels standard des deux couples.

⇨ Exercices 28.4, 28.5, 28.7, 28.14, 28.16

On souhaite calculer la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction entre les ions argent et le cuivre. On donne $E^\circ(Ag^+/Ag_{(s)}) = E_1^\circ = 0,80\,V$ et $E^\circ(Cu^{2+}/Cu_{(s)}) = E_2^\circ = 0,34\,V$.

L'équation de la réaction est : $2\,Ag^+ + Cu_{(s)} = Cu^{2+} + 2\,Ag_{(s)}$ de constante d'équilibre $K^\circ = \dfrac{[Cu^{2+}]\cdot c^\circ}{[Ag^+]^2}$. Relation de Nernst : $E_1 = E_1^\circ + 0{,}06 \log\dfrac{[Ag^+]}{c^\circ}$ et $E_2 = E_2^\circ + \dfrac{0{,}06}{2}\log\dfrac{[Cu^{2+}]}{c^\circ}$.

L'égalité des potentiels à l'équilibre conduit à : $E_2^\circ + \dfrac{0{,}06}{2}\cdot\log\dfrac{[Cu^{2+}]}{c^\circ} = E_1^\circ + \dfrac{0{,}06}{2}\log\dfrac{[Ag^+]^2}{(c^\circ)^2}$

soit après réarrangement : $E_1^\circ - E_2^\circ = \dfrac{0{,}06}{2}\log\dfrac{[Cu^{2+}]\cdot c^\circ}{[Ag^+]^2} = \dfrac{0{,}06}{2}\log K^\circ$ d'où

$K^\circ = 10^{\frac{2(E_1^\circ - E_2^\circ)}{0{,}06}} = 2{,}2\cdot 10^{15}$. $K^\circ > 1$ donc la transformation est thermodynamiquement favorisée.

Remarque

Pour prévoir le sens d'évolution du système, il faut comparer les deux potentiels, que l'on peut calculer à l'aide de la relation de Nernst. Souvent, l'ordre des potentiels est le même que celui des potentiels standard.

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Le NO d'un élément est toujours entier.	☐	☐
2.	Une électrode quelconque peut jouer le rôle d'électrode de référence.	☐	☐
3.	Les ions permanganate ont un caractère oxydant.	☐	☐
4.	Lorsqu'une pile débite, le courant électrique circule de la cathode à l'anode dans le circuit extérieur.	☐	☐
5.	Plus le potentiel standard d'un couple Ox/Red est élevé, plus l'oxydant est fort.	☐	☐
6.	À l'équilibre, la valeur du potentiel est la même pour tous les couples d'oxydo-réduction présents.	☐	☐
7.	La valeur d'un potentiel d'électrode peut dépendre du pH.	☐	☐
8.	La constante d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction est déterminée à l'aide des potentiels standard des deux couples mis en jeu.	☐	☐
9.	L'évolution spontanée d'un système d'oxydo-réduction peut toujours être prévue à l'aide des potentiels standard des couples participant à la transformation.	☐	☐
10.	La transformation d'oxydo-réduction entre l'eau ($E°(O_2/H_2O) = 1,23$ V) et les ions permanganate ($E°(MnO_4^-/Mn^{2+}) = 1,51$ V) est thermodynamiquement favorisée.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

Donnée commune à tous les exercices : on travaille à 25 °C, avec $\frac{RT}{F}\ln 10 = 0{,}06\ \text{V}$.

■ Nombre d'oxydation et demi-équation électronique

❑ Exercice 28.1. Nombres d'oxydation du soufre

L'élément soufre appartient à la troisième période et à la seizième colonne du tableau périodique.

1. Déterminer les nombres d'oxydation extrêmes de l'élément soufre.

2. Calculer le nombre d'oxydation de l'élément soufre dans les espèces SO_2, SO_4^{2-}, SO_3, sans représenter la formule de Lewis de ces édifices.

3. On considère les espèces $S_2O_3^{2-}$ et $S_4O_6^{2-}$.

a) Calculer le NO de l'élément soufre dans ces espèces avec la méthode précédente.

b) Écrire la formule de Lewis de $S_2O_3^{2-}$ et $S_4O_6^{2-}$, et déterminer le NO de chacun des atomes de soufre. Commenter.

❑ Exercice 28.2. Établir une demi-équation électronique

1. Établir la demi-équation électronique des couples suivants en milieu acide :
$Fe^{3+}_{(aq)}/Fe^{2+}_{(aq)}$; $IO^-_{3(aq)}/I^-_{(aq)}$; $MnO^-_{4(aq)}/Mn^{2+}_{(aq)}$; $Fe(CN)^{3-}_{6(aq)}/Fe^{2+}_{(aq)}$; $Hg_2Cl_{2(s)}/Hg_{(l)}$.

2. Établir la demi-équation électronique des couples suivants en milieu basique :
$MnO^-_{4(aq)}/Mn(OH)_{2(s)}$; $Al(OH)^-_{4(aq)}/Al_{(s)}$.

■ Prévision de transformations d'oxydo-réduction

❑ Exercice 28.3. Peroxyde d'hydrogène

1. Déterminer les nombres d'oxydation de l'oxygène et de l'hydrogène dans le dioxygène O_2, dans l'eau H_2O et dans le peroxyde d'hydrogène H_2O_2.

2. En déduire l'existence des couples oxydant/réducteur $H_2O_{2(aq)}/H_2O_{(l)}$ et $O_{2(g)}/H_2O_{2(aq)}$.

Les potentiels standard associés à ces couples sont, à 25°C : $E°(O_{2(g)}/H_2O_{2(aq)}) = 0{,}68\ \text{V}$ et $E°(H_2O_{2(aq)}/H_2O_{(l)}) = 1{,}77\ \text{V}$.

3. Écrire les deux demi-réactions d'oxydo-réduction des couples où intervient le peroxyde d'hydrogène.

En solution aqueuse, le peroxyde d'hydrogène conduit à des solutions d'eau oxygénée, notamment utilisées pour leurs propriétés antiseptiques ou décolorantes, grâce au fort pouvoir oxydant de H_2O_2. Cette molécule se décompose en H_2O et O_2 selon une transformation lente.



4. Écrire l'équation de la réaction de décomposition du peroxyde d'hydrogène et indiquer la nature de cette transformation. Est-elle thermodynamiquement favorisée ?

❑ Exercice 28.4. Réactivité du lithium

L'élément lithium appartient à la première colonne du tableau périodique. Ce métal est très utilisé dans la constitution de batteries au lithium, mais sa réactivité vis-à-vis de l'eau nécessite d'utiliser un électrolyte non aqueux pour leur réalisation.

1. Quels critères font du lithium un matériau de choix dans les applications technologiques des piles ?

2. Écrire l'équation **(1)** de la réaction du lithium avec l'eau en milieu acide en prenant un coefficient stœchiométrique de 1 pour le lithium.

3. Calculer la constante d'équilibre K_1° associée à cette équation.

4. Écrire l'équation **(2)** de la réaction du lithium avec l'eau en milieu basique en prenant un coefficient stœchiométrique de 1 pour le lithium.

5. Exprimer la constante d'équilibre K_2° associée à cette équation en fonction de K_1° et K_e et calculer sa valeur. Conclure.

Données : $E^\circ_{Li^+/Li} = -3{,}0$ V ; $E^\circ_{H^+/H_2} = 0{,}0$ V ; $pK_e = 14$; $\rho_{Li} = 0{,}53$ kg · m^{-3}.

❑ Exercice 28.5. Équilibre de dismutation du dioxyde d'azote

1. Écrire la demi-équation de transfert électronique et la relation de Nernst correspondante pour le couple oxydo-réducteur $NO^-_{3(aq)} / NO_{2(g)}$ auquel on associe le potentiel standard E_1°.

Faire de même avec le couple $NO_{2(g)} / NO^-_{2(aq)}$ de potentiel standard E_2°.

2. En présence d'eau le dioxyde d'azote peut se dismuter en ions nitrates et nitrites suivant la réaction (à l'origine des pluies acides) : $2\,NO_{2(g)} + \alpha\,H_2O = \beta\,NO^-_{3(aq)} + \gamma\,NO^-_{2(aq)} + \delta\,H^+_{(aq)}$

a) Justifier le fait que $NO_{2(g)}$ se dismute à l'aide d'un diagramme de prédominance, tracé pour $P_{NO_2} = 1$ bar et pour une concentration de frontière $c = 1$ mol · L^{-1}, à pH = 0.

b) Ajuster l'équation-bilan de cette réaction de dismutation.

c) Exprimer sa constante d'équilibre K en fonction de la pression partielle P_{NO_2} du dioxyde d'azote et des concentrations des espèces en solution aqueuse à l'équilibre.

d) Calculer la valeur de K à 25 °C.

Données : $E_1^\circ(NO_{3(aq)}^- / NO_{2(g)}) = 0{,}83\ V$ et $E_2^\circ(NO_{2(g)} / NO_{2(aq)}^-) = 0{,}85\ V$.

❑ Exercice 28.6. Stabilisation du NO (I) du cuivre

On donne $E^\circ(Cu^+/Cu) = E_1^\circ = 0{,}52\ V$ et $E^\circ(Cu^{2+}/Cu^+) = E_2^\circ = 0{,}16\ V$.

1. Montrer à l'aide de diagrammes de stabilité que l'ion Cu^+ est instable (on prendra comme concentration à la frontière $c = 1\ mol \cdot L^{-1}$). Qu'observe-t-on ?

2. Les ions cuivre(I) forment avec les ions iodure le précipité $CuI_{(s)}$, de produit de solubilité $K_s = 10^{-11}$.

a) Calculer les potentiels standard des couples $CuI_{(s)} / Cu_{(s)}$ et $Cu_{(aq)}^{2+} / CuI_{(s)}$, que l'on notera respectivement $E_1'^\circ$ et $E_2'^\circ$.

b) Conclure sur la stabilité du cuivre(I) en présence d'ions iodure.

❑ Exercice 28.7. Confection d'un éthylotest jetable*
Résolution de problème

Un éthylotest jetable (aussi appelé alcootest) est constitué d'un sachet gonflable de capacité 1 L et d'un tube en verre contenant des cristaux de dichromate de potassium $K_2Cr_2O_7$ en milieu acide.

Déterminer la masse de dichromate de potassium nécessaire à la confection d'un éthylotest utilisable en France.

Données

Les vapeurs expirées par une personne ayant consommé de l'alcool contiennent 2 100 fois moins d'alcool que le sang.

En France, le taux légal d'alcoolémie maximal est de 0,5 g d'alcool par litre de sang.

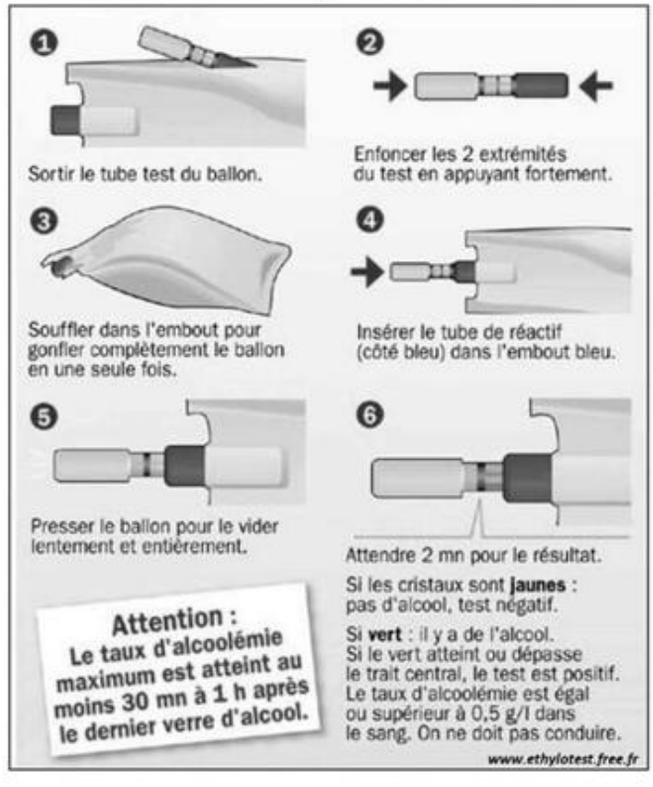
$E_1^\circ(Cr_2O_7^{2-} / Cr^{3+}) = 1{,}33\ V$;

$E_2^\circ(CH_3COOH / CH_3CH_2OH) = 0{,}19\ V$.

$M_{Cr} = 52{,}0\ g \cdot mol^{-1}$; $M_H = 1{,}0\ g \cdot mol^{-1}$;

$M_C = 12{,}0\ g \cdot mol^{-1}$; $M_O = 16{,}0\ g \cdot mol^{-1}$;

$M_K = 39{,}1\ g \cdot mol^{-1}$.



❑ Exercice 28.8. Précautions avec un produit ménager* *
Résolution de problème

Voici l'étiquette d'une bouteille d'eau de Javel, produit ménager couramment utilisé pour ses propriétés désinfectantes et détachantes.

Eau de Javel

Solution d'hypochlorite de sodium et de chlorure de sodium

C > 5 %

DANGER

H314 (1B): Provoque des brûlures de la peau et des lésions oculaires graves
H400: Très toxique pour les organismes aquatiques

Au contact d'un acide, dégage un gaz toxique.

P102: Tenir hors de portée des enfants
P260: Ne pas respirer les brouillards/vapeurs/aérosols.
P273: Éviter le rejet dans l'environnement
P280: Porter des gants de protection/des vêtements de protection/un équipement de protection des yeux/du visage.
P305: EN CAS DE CONTACT AVEC LES YEUX : consulter immédiatement un médecin spécialiste.
P262: Eviter tout contact avec les yeux, la peau ou les vêtements
P301+P310: EN CAS D'INGESTION : appeler immédiatement un CENTRE ANTIPOISON ou un médecin
P303+P361+P353: EN CAS DE CONTACT AVEC LA PEAU (ou les cheveux) : enlever immédiatement les vêtements contaminés. Rincer à l'eau/se doucher
P410+P403: Protéger du rayonnement solaire. Stocker dans un endroit bien ventilé



N° CAS : 7681-52-9 **N° CE : 231-668-3**

Création gratuite d'étiquette : http://etiquette.scienceamusante.net

Expliquer pourquoi l'étiquette met en garde contre l'emploi d'un produit acide en combinaison avec l'eau de Javel, et identifier le gaz toxique évoqué.

■ Piles électrochimiques

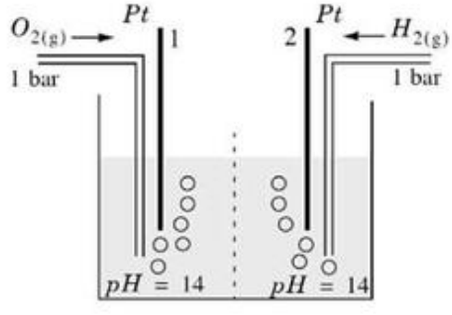
❑ Exercice 28.9. Étude de piles à combustible*

1. On réalise une pile à dihydrogène et dioxygène, dont on donne la représentation ci-contre.

a) Écrire les demi-équations des réactions ayant lieu aux électrodes. Identifier l'anode et la cathode.

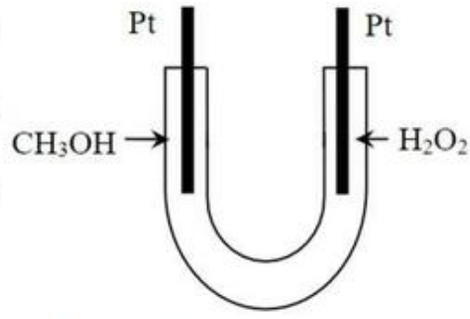
b) Écrire l'équation de la réaction chimique qui modélise la transformation qui se déroule lorsque la pile fonctionne. En déduire un avantage majeur des piles à combustible.

c) Calculer la force électromotrice de la pile dans les conditions de fonctionnement du schéma ci-contre.



Données : $E^\circ_{O_2/H_2O} = 1,23\ V$ et $E^\circ_{H^+/H_2} = 0,00\ V$ à pH = 0.

2. On envisage un second dispositif plus pratique à mettre en œuvre : la pile eau oxygénée/méthanol.



a) Le méthanol s'oxyde en ion carbonate CO_3^{2-}. Écrire les demi-équations des réactions ayant lieu aux électrodes.

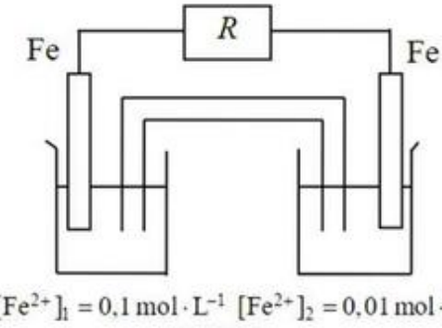
b) On observe à la cathode un dégagement de O_2. À quoi est-il dû ? Écrire l'équation de la réaction.

c) Que devient le dioxygène ainsi formé à l'électrode ?

Données : $E^\circ_{O_2/H_2O} = 1,23\ V$; $E^\circ_{H^+/H_2} = 0,00\ V$; $E^\circ_{H_2O_2/H_2O} = 1,78\ V$; $E^\circ_{O_2/H_2O_2} = 0,68\ V$.

❑ Exercice 28.10. Pile de concentration*

1. On réalise la pile ci-contre en associant deux demi-piles, toutes deux constituées d'une lame de fer plongeant dans une solution de sulfate de fer(II) $(Fe^{2+} + SO_4^{2-})$. On donne $E^\circ_{Fe^{2+}/Fe} = -0,44\ V$.



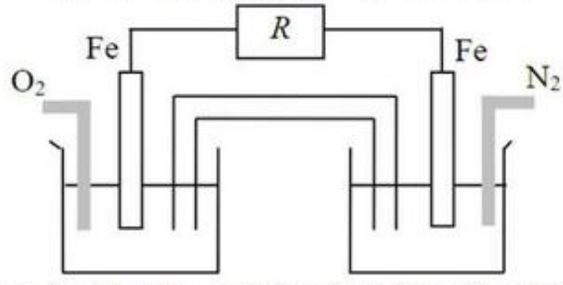
a) Calculer le potentiel de chaque électrode.

b) Identifier l'anode et la cathode.

c) Déterminer la composition de chaque solution dans l'état final.

2. On réalise maintenant un autre type de pile de concentration qui est la pile d'aération différentielle (ou pile d'Evans). Dans chacun des compartiments, un gaz (O_2 ou N_2) barbote dans de l'eau acidifiée.

Quel est le réactif dont la concentration varie ? Par analogie avec la question 1, en déduire le principe de fonctionnement de la pile.



3. Lorsqu'une pièce métallique est partiellement immergée dans une solution dont la surface est au contact de l'air, c'est la partie immergée qui se corrode (oxydation du fer en fer(II)). Expliquer pourquoi.

❑ Exercice 28.11. Détermination d'un produit de solubilité*

Dans un bécher n° 1, on verse environ 40 mL d'une solution de chlorure de potassium $(K^+ + Cl^-)$ de concentration $c_A = 1,00 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$. Après addition d'une goutte de nitrate d'argent $(Ag^+ + NO_3^-)$ de concentration $c_B = 1,00 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$, on observe la formation d'un précipité de chlorure d'argent $AgCl_{(s)}$. Dans un bécher n° 2, on verse environ 50 mL de nitrate d'argent de concentration $c_B = 1,00 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.

On plonge une lame d'argent dans chacun des béchers que l'on relie par un pont salin au nitrate d'ammonium $(NH_4^+ + NO_3^-)$. On mesure alors à 25 °C la force électromotrice de la pile ainsi constituée : $e = E_2 - E_1 = 0,36\ V$ où E_1 et E_2 représentent les potentiels des lames d'argent plongeant respectivement dans les béchers 1 et 2.

1. Réaliser un schéma légendé de la pile, en spécifiant les branchements du voltmètre (bornes COM et V).

2. Préciser le rôle du pont salin ; expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser un pont au bromure de potassium $(K^+ + Br^-)$.

3. Prévoir quel serait le sens de circulation des électrons à l'extérieur de la pile si on la faisait débiter. Identifier, en justifiant, l'anode et la cathode.

4. Proposer une expression de chacun des potentiels E_1 et E_2 en fonction du potentiel standard E_1° du couple Ag^+/Ag, des concentrations c_A et c_B et du produit de solubilité K_s de AgCl.

5. En déduire l'expression et la valeur du produit de solubilité du chlorure d'argent à 25 °C.

6. Exprimer puis calculer le potentiel standard du couple AgCl/Ag.
Expliquer qualitativement pourquoi sa valeur est inférieure à celle du couple Ag^+/Ag.

Données : $E^\circ_{Ag^+/Ag} = 0{,}80$ V ; $K_s(AgBr) = 7{,}7 \cdot 10^{-13}$.

❑ Exercice 28.12. Pile à combustible à borohydrure direct

Source : Actualité chimique, mars 2007, n° 306

Les hydrures de bore constituent un groupe de composés fortement hydrogénés, particulièrement intéressants pour la réalisation de piles à combustible. Le borohydrure de sodium $NaBH_4$ contient ainsi 10,6 % en masse d'hydrogène. L'ion borohydrure BH_4^- est instable dans l'eau, s'hydrolysant pour générer du dihydrogène selon l'équation :

$$BH^-_{4(aq)} + 2\,H_2O_{(l)} = 4\,H_{2(g)} + BO^-_{2(aq)}$$

Le dihydrogène ainsi produit peut alors être directement utilisé, puisque suffisamment pur, comme combustible des piles H_2/O_2. On parle alors de pile à combustible à borohydrure indirect.

Mais le borohydrure de sodium peut être utilisé directement comme combustible : c'est le principe de la pile à borohydrure direct (ou DBFC : *direct borohydride fuel cell*).

Dans les piles à borohydrure direct, une solution aqueuse de borohydrure de sodium $(Na^+ + BH_4^-)$ est utilisée comme carburant liquide. L'ion borohydrure et le dioxygène constituent les réactifs de cette pile. La réaction se produit en milieu basique, à pH = 14.

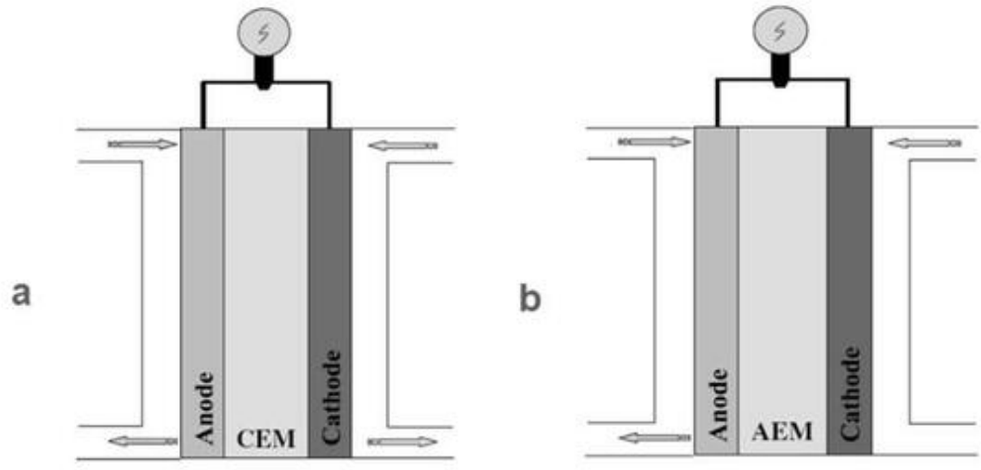
La pile à combustible à borohydrure direct est constituée de trois parties : les plaques bipolaires anodique et cathodique, et l'assemblage membrane/électrodes. Ce dernier, qui est le composant clef, est constitué d'une membrane polymère, conductrice d'ions et résistante aux électrons, séparant physiquement les électrodes anode et cathode de la pile. La membrane empêche le contact du combustible avec la cathode, afin d'éviter son hydrolyse.

Les membranes polymères existantes sont de deux types : échangeuse d'anions (AEM pour *anion exchange membrane*) et échangeuse de cations (CEM, *cation exchange membrane*).

1. Écrire les demi-équations électroniques pour chaque couple en milieu basique.

2. Écrire l'équation de la réaction de fonctionnement de la pile.

On a schématisé ci-après une pile à borohydrure direct avec membrane échangeuse de cations (CEM, figure a), et membrane échangeuse d'anions (AEM, figure b).



3. Compléter les schémas des figures a et b en indiquant :
- la nature des composés entrants et sortants (au niveau des flèches) ;
- la polarité de la pile ;
- le sens de circulation des électrons ;
- le sens de circulation du courant ;
- la nature des ions se déplaçant à travers la membrane séparatrice, ainsi que leur sens de déplacement.

4. Généralement, c'est la membrane échangeuse de cations qui est utilisée, plus particulièrement celle nommée Nafion® (commercialisée par la société DuPont). Proposer un avantage que peuvent avoir les membranes échangeuses de cations par rapport aux membranes échangeuses d'anions.

5. Dans le tableau comparatif présenté ci-après, compléter la colonne relative à la pile à borohydrure direct (DBFC). Commenter le résultat obtenu.

Caractéristiques de la pile	Unité	PEMFC H_2/O_2	DMFC CH_3OH/O_2	DBFC BH_4^-/O_2
Masse moléculaire du combustible	$g \cdot mol^{-1}$	2,014	32,042	37,832
Force électromotrice standard	V	1,23	1,21	

(PEMFC : *polymer exchange membrane fuel cell* ; DMFC : *direct methanol fuel cell*)

Données

Potentiels standard apparents à pH = 14 : $E°(BO_{2(aq)}^- / BH_{4(aq)}^-) = -1,24$ V ;

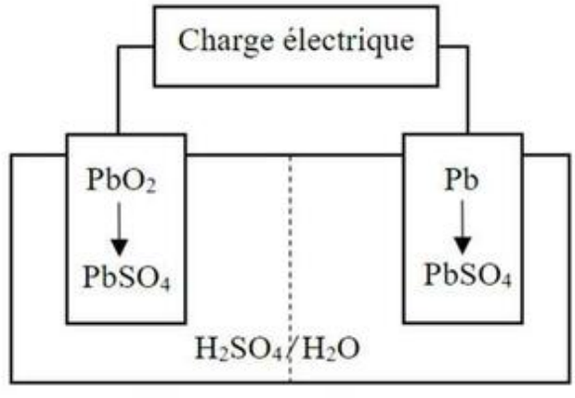
$E°(O_{2(g)} / H_2O_{(l)}) = 0,40$ V.

❑ Exercice 28.13. Accumulateur au plomb

Mise au point par le Français Gaston Planté en 1859, la batterie au plomb est encore aujourd'hui très compétitive et reste la principale technologie utilisée dans les véhicules thermiques. En effet, elle est capable de fournir un courant crête de grande intensité, nécessaire pour le démarrage électrique des moteurs à combustion interne.



Les couples d'oxydo-réduction qui interviennent dans l'accumulateur au plomb sont $PbO_{2(s)}/PbSO_{4(s)}$ et $PbSO_{4(s)}/Pb_{(s)}$. Le sens des demi-réactions mises en jeu lorsque l'accumulateur est en fonctionnement générateur est indiqué sur la figure au niveau des électrodes.



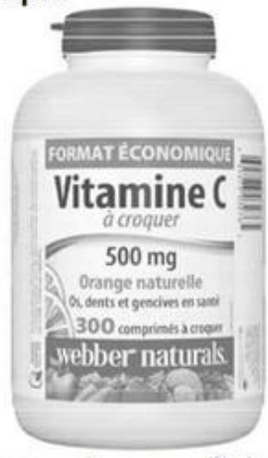
1. Écrire les deux demi-réactions chimiques, en fonctionnement générateur, en précisant celle qui a lieu à l'anode et celle qui a lieu à la cathode. En déduire la réaction globale de fonctionnement de l'accumulateur.
2. Indiquer sur le schéma la polarité de la pile ainsi que le sens de circulation des porteurs de charge dans le circuit extérieur et dans les demi-piles.
3. La force électromotrice de l'accumulateur au plomb dépend-elle du pH ? Si oui, est-il préférable d'utiliser dans l'accumulateur au plomb de l'acide sulfurique très concentré ou non ?
4. On désire réaliser une batterie au plomb dont la tension à vide U_0 est supérieure à 12 V. Combien faut-il associer d'éléments, en série, pour satisfaire le cahier des charges ?

Données : $E°(PbO_{2(s)}/PbSO_{4(s)}) = 1{,}69$ V ; $E°(PbSO_{4(s)}/Pb_{(s)}) = -0{,}36$ V.

D'après CCINP

■ Titrages d'oxydo-réduction

❑ Exercice 28.14. Titrage d'un comprimé d'acide ascorbique



La vitamine C ou acide ascorbique (de formule $C_6H_8O_6$), dont les sources principales sont les légumes et les fruits frais, intervient dans l'assimilation des glucides et la synthèse du glycogène musculaire ; et elle a un rôle antihémorragique et anti-infectieux. Sa carence provoque le scorbut avec en particulier des lésions au niveau des gencives. Les besoins quotidiens en vitamine C sont estimés de 40 à 90 mg. La vitamine C est aussi utilisée comme additif alimentaire pour ses propriétés réductrices. Sa présence dans les aliments est alors indiquée par le code E300.

On souhaite doser l'acide ascorbique présent dans un comprimé grâce à un titrage d'oxydo-réduction indirect.

Pour cela, on écrase un comprimé de vitamine C et on place la poudre obtenue dans une fiole jaugée de 200,0 mL. Après dissolution du solide, on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge. Soit S_1 la solution obtenue. On prélève $V_1 = 50{,}0$ mL de la solution S_1 à laquelle on ajoute $V = 30{,}0$ mL d'une solution de diiode de concentration $c = 4{,}00 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1} dans l'iodure de potassium (cette solution contient des ions triiodure I_3^-).

Après 20 min d'agitation sur agitateur magnétique, on titre l'excès d'ions triiodure par une solution de thiosulfate de sodium $(2\,Na^+ + S_2O_3^{2-})$ de concentration $c_2 = 5{,}00 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}.

À proximité de l'équivalence, on introduit quelques gouttes d'empois d'amidon (ou de thiodène) dans le milieu réactionnel. L'équivalence du titrage est observée pour un volume de solution de thiosulfate de sodium versé égal à $V_2 = 19{,}6$ mL.

1. Pourquoi ce titrage est-il qualifié de titrage « indirect » ?
2. Écrire l'équation (1) de la réaction d'oxydation de l'acide ascorbique par les ions triiodure. Calculer sa constante d'équilibre K_1°.
3. Écrire l'équation (2) de la réaction de titrage des ions triiodure. Calculer sa constante d'équilibre K_2°.
4. Expliquer la méthode choisie pour la détection de l'équivalence et l'intérêt de l'empois d'amidon (ou thiodène).
5. Déterminer la masse d'acide ascorbique présente dans le comprimé de vitamine C.

Données

Le thiodène forme un complexe bleu sombre avec les ions triiodure I_3^-.

$E^\circ(I_3^- / I^-) = 0{,}62$ V ; $E^\circ(S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}) = 0{,}09$ V ; $E^\circ(C_6H_6O_6 / C_6H_8O_6) = 0{,}13$ V.

Masses molaires : $M(C) = 12{,}0$ g·mol^{-1} ; $M(O) = 16{,}0$ g·mol^{-1} ; $M(H) = 1{,}0$ g·mol^{-1}

❑ Exercice 28.15. Indice de permanganate d'une eau de piscine



Les matières organiques dissoutes dans l'eau favorisent le développement de germes, d'algues et de champignons entraînant une pollution des eaux de baignade. L'indice de permanganate, ou « oxydabilité au permanganate de potassium à chaud », est, par convention, une mesure de la contamination d'une eau en matières organiques (provenant essentiellement des baigneurs, dans une piscine).

Cet indice, noté IP, correspond à la concentration massique en dioxygène, exprimée en $mg \cdot L^{-1}$, équivalente au pouvoir oxydant de l'ion permanganate sur les matières organiques contenues dans 1,0 L d'eau.

Les normes sanitaires indiquent un IP maximal de 0,4 $mg \cdot L^{-1}$. Pour déterminer la valeur de l'IP d'un bassin d'une piscine municipale, on réalise un titrage selon les étapes suivantes.

Étape 1 : les polluants organiques de l'eau à doser sont oxydés en milieu acide par un excès d'ions permanganate.

Étape 2 : les ions permanganate restants sont entièrement réduits par des ions oxalate $C_2O_4^{2-}$ en excès.

Étape 3 : l'excès d'ions oxalate est à son tour dosé par les ions permanganate.

Le protocole opératoire suivi est le suivant.

– Dans un récipient adapté, introduire 100 mL d'eau à analyser puis ajouter 20 mL d'acide sulfurique à 2 $mol \cdot L^{-1}$. Introduire quelques billes de verre et porter à ébullition douce, sous reflux. Ajouter V_1 = 20,0 mL d'une solution S_1 de permanganate de potassium à $c_1 = 2{,}00 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot L^{-1}$. Maintenir l'ébullition pendant 10 minutes.

– Ajouter à chaud V_2 = 25,0 mL d'une solution S_2 d'oxalate de sodium de concentration $c_2 = 5{,}00 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot L^{-1}$.

– Titrer par la solution S_1 de permanganate de potassium, pendant que la solution est encore chaude, jusqu'à l'apparition d'une coloration rose pâle subsistant pendant 30 s. Soit V_E le volume versé.

1. Écrire l'équation de la réaction mise en jeu entre les ions permanganate et les ions oxalate en milieu acide.

2. Quel est l'intérêt du chauffage au cours de cette transformation ?

3. On note :

n_1 la quantité de matière des ions permanganate introduite initialement dans le récipient ;
n_0 la quantité de matière des ions permanganate ayant réagi avec les matières organiques ;
n_2 la quantité de matière des ions oxalate introduite dans le récipient ;
n_3 la quantité de matière des ions oxalate restante en fin d'étape 2 ;
n_E la quantité de matière d'ions permanganate versée jusqu'à l'apparition de la couleur rose pâle.

a) Exprimer n_0 en fonction de n_1, n_2 et n_E.

b) À l'aide des demi-équations associées aux couples $MnO_{4(aq)}^{-} / Mn_{(aq)}^{2+}$ et $O_{2(g)} / H_2O_{(l)}$, montrer que la quantité de dioxygène nécessaire pour oxyder une quantité n_0 de matières organiques est égale à $\frac{5}{4} n_0$.

c) Le titrage de 100 mL d'une eau de bassin d'une piscine parisienne selon le protocole précédent conduit à un volume à l'équivalence V_E = 6,0 mL. En déduire l'indice de permanganate de l'eau testée. Conclure.

Données : couples $MnO_{4(aq)}^{-} / Mn_{(aq)}^{2+}$; $CO_{2(g)} / C_2O_{4(aq)}^{2-}$; $M(O) = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

❑ Exercice 28.16. Titrage des ions fer(II) par les ions cérium(IV)

On place $V_0 = 10$ mL d'une solution de sulfate de fer(II) $(Fe^{2+} + SO_4^{2-})$ de concentration C_0 à déterminer dans un bécher. On y plonge une électrode de platine et une électrode au calomel saturée, reliées à un voltmètre. Dans la burette on introduit une solution de sulfate de cérium(IV) $(Ce^{4+} + 2\ SO_4^{2-})$ de concentration $C = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Comment mesure-t-on le potentiel E de la solution ? Décrire le rôle de l'électrode au calomel saturée, en expliquant brièvement son fonctionnement.

2. Comment justifier l'utilisation de cette transformation pour un titrage ?

3. On détermine $V_{éq}$ = 7,3 mL. Déterminer la concentration C_0.

4. Donner les expressions du potentiel avant et après l'équivalence en fonction des potentiels standard, de V et de $V_{éq}$, où V est le volume de solution titrante versé.

5. Quelle est la valeur du potentiel de l'électrode de platine à la demi-équivalence ? Commenter.

Données : $E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = 0,77$ V ; $E^\circ_{Ce^{4+}/Ce^{3+}} = 1,74$ V.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 28.4. Question 1 : observer les données relatives au lithium et leur intérêt pratique pour les propriétés d'une pile.
Exercice 28.6. Question 2.b : montrer que la dismutation de $CuI_{(s)}$ est thermodynamiquement défavorisée.
Exercice 28.7. La quantité d'ions dichromate doit permettre de consommer la totalité de l'éthanol présent dans l'air expiré.
Exercice 28.9. Écrire les demi-équations en milieu basique. Question 2.b : montrer que le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 peut se dismuter.
Exercice 28.10. Question 2 : identifier le réducteur le plus fort présent, qui subit une oxydation à l'anode. Question 3 : les rôles d'anode et de cathode sont joués par deux zones de la pièce métallique.
Exercice 28.12. Question 4 : réfléchir au réactif que pourrait laisser passer la membrane perméable aux anions. Question 5 : l'énergie électrique fournie est égale au produit de la charge par la tension à vide de la pile.
Exercice 28.13. Question 2 : l'anode est le lieu de l'oxydation ; les ions sont les porteurs de charge en solution. Question 3 : on cherche à avoir une tension à vide la plus élevée possible.
Exercice 28.14. Question 3 : les ions I_3^- réagissent avec les ions $S_2O_3^{2-}$.
Exercice 28.15. Question 3.a : faire des tableaux d'avancement relatifs aux étapes 2 et 3 du protocole pour relier n_3 à n_0, n_1 et n_2 d'une part, et à n_E d'autre part. Question 3.c : penser à se ramener au traitement d'1 L d'eau.
Exercice 28.16. Question 5 : calculer les quantités de matière des ions Fe^{3+} et Fe^{2+} à la demi-équivalence.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai

1. Le NO correspond au nombre d'électrons perdus par rapport à l'atome isolé, il est donc forcément entier. En revanche, l'obtention par le calcul d'un NO fractionnaire traduit la présence d'un même élément à différents NO au sein de l'édifice.

2. Pour qu'elle puisse jouer le rôle d'électrode de référence, il faut que le potentiel de l'électrode soit constant. On utilise couramment des électrodes dites « de 2e espèce » mettant en jeu un métal recouvert d'un composé insoluble du cation métallique correspondant, plongeant dans une solution de l'anion constitutif du précipité. Il est possible de fixer le potentiel d'une telle électrode en utilisant une solution saturée en anion de façon à fixer sa concentration.

3. Les ions permanganate appartiennent au couple $MnO_{4(aq)}^{-} / Mn_{(aq)}^{2+}$, de potentiel standard $E^\circ = 1{,}51$ V. Les ions permanganate constituent donc un oxydant fort.

6. À l'équilibre, ce sont les *potentiels* et non les *potentiels standard* des couples mis en jeu qui sont égaux.

7. Si la demi-équation du couple mis en jeu à l'électrode fait intervenir des ions H^+, le potentiel d'électrode dépend du pH.

9. Pour connaître le sens d'évolution du système, il faut déterminer le potentiel pour chaque couple à l'aide de la relation de Nernst, et non se baser uniquement sur les valeurs des potentiels standard (même si souvent, l'ordre des potentiels est le même que celui des potentiels standard).

❑ Les erreurs classiques

- Ne pas ajuster directement une demi-équation en milieu basique. Il faut toujours utiliser rigoureusement la méthode 28.5.
- Ne pas faire intervenir simultanément des protons et des ions hydroxyde dans une demi-équation ou une équation-bilan.
- Ne pas confondre le potentiel et le potentiel standard d'un couple Ox/Red.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 28.1

1. L'élément soufre appartient à la seizième colonne du tableau périodique. Il peut donc gagner 2 électrons de sorte à acquérir la structure électronique du gaz noble qui le suit ($Z = 18$, il s'agit de l'argon) ou perdre ses 6 électrons de valence de sorte à acquérir la structure électronique du gaz noble qui le précède ($Z = 10$, il s'agit du néon). Les NO extrêmes de l'élément soufre sont donc +VI et –II.

⇨ *Méthode 28.1*

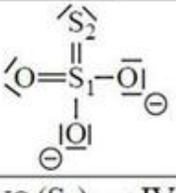
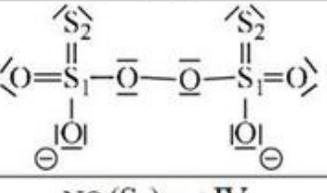
2. On peut calculer le NO du soufre par conservation de la charge avec NO(O) = –II, en supposant qu'il n'y a que des liaisons S–O dans ces composés.

Composé	SO_2	SO_4^{2-}	SO_3
Équation à résoudre	NO(S) + 2 NO(O) = 0	NO(S) + 4 NO(O) = –II	NO(S) + 3 NO(O) = 0
NO(S)	+IV	+VI	+VI

3. a) Pour $S_2O_3^{2-}$, en attribuant à l'oxygène le NO –II, la résolution de l'équation $2 \cdot \text{NO(S)} + 3 \cdot \text{NO(O)} = -\text{II}$ conduit à NO(S) = +II.

Pour $S_4O_6^{2-}$, la résolution de l'équation $4 \cdot \text{NO(S)} + 6 \cdot \text{NO(O)} = -\text{II}$ conduit à $\text{NO(S)} = +\dfrac{\text{V}}{\text{II}}$!

b) L'écriture des formules de Lewis des deux espèces (voir ci-dessous) montre qu'il existe des liaisons S=S dans ces deux édifices, pour lesquelles on attribue par convention la moitié des électrons à chaque atome de soufre pour le décompte des électrons et le calcul du NO.
On voit que dans ces édifices, le soufre est présent à deux nombres d'oxydation différents.

Composé	$S_2O_3^{2-}$	$S_4O_6^{2-}$
Formule de Lewis		
NO	$\text{NO}(S_1) = +\text{IV}$ $\text{NO}(S_2) = 0$	$\text{NO}(S_1) = +\text{IV}$ $\text{NO}(S_2) = 0$

Les valeurs calculées précédemment correspondent à une moyenne des NO du soufre. De plus la moyenne calculée pour $S_4O_6^{2-}$ était faussée par le fait que l'oxygène est également présent à deux NO différents : –II pour les quatre atomes périphériques, –I pour les deux centraux.

⇨ *Méthode 28.2*

Exercice 28.2

1. Fe^{3+}/Fe^{2+} : $Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$

IO_3^-/I^- : $IO_3^- + 6\,H^+ + 6e^- = I^- + 3\,H_2O$

$MnO_{4(aq)}^-/Mn_{(aq)}^{2+}$: $MnO_4^- + 8\,H^+ + 5e^- = Mn^{2+} + 4\,H_2O$

$Fe(CN)_6^{3-}/Fe^{2+}$: $Fe(CN)_6^{3-} + e^- = Fe^{2+} + 6\,CN^-$

Dans ce dernier, le nombre d'électrons échangés est le même que pour le couple Fe^{3+}/Fe^{2+}, puisque dans les deux cas il s'agit d'un couple d'oxydo-réduction mettant en jeu comme oxydant le fer au NO (III), et comme réducteur le fer au NO (II).

Hg_2Cl_2/Hg : $Hg_2Cl_{2(s)} + 2\,e^- = 2\,Hg_{(l)} + 2\,Cl^-$

C'est la demi-équation associée au fonctionnement de l'électrode au calomel saturée.
L'oxydant est le calomel, $Hg_2Cl_{2(s)}$, avec NO(Hg) = +I, le réducteur étant le métal $Hg_{(l)}$ avec NO(Hg) = 0.

Le nombre d'oxydation de l'élément chlore ne change pas dans cette demi-équation, c'est le nombre d'oxydation du mercure qui varie.

⇨ *Méthode 28.4*

2. Pour $MnO_{4(aq)}^-/Mn(OH)_{2(s)}$, la demi-équation en milieu acide s'écrit :

$$MnO_{4(aq)}^- + 6\,H^+ + 5\,e^- = Mn(OH)_{2(s)} + 2\,H_2O$$

On ajuste alors la demi-équation en milieu basique pour faire apparaître les ions hydroxyde :

$$MnO_{4(aq)}^- + 6\,H^+ + 6\,HO^- + 5\,e^- = Mn(OH)_{2(s)} + 6\,HO^- + 2\,H_2O$$

soit $MnO_{4(aq)}^- + 4\,H_2O + 5\,e^- = Mn(OH)_{2(s)} + 6\,HO^-$

Pour $Al(OH)_4^-/Al$, la demi-équation en milieu acide s'écrit :

$$Al(OH)_4^- + 4\,H^+ + 3\,e^- = Al + 4\,H_2O$$

d'où en milieu basique : $Al(OH)_4^- + 3\,e^- = Al + 4\,HO^-$

On rappelle que l'écriture systématique des demi-équations en milieu acide permet d'éviter de nombreuses erreurs.

⇨ *Méthode 28.5*

Exercice 28.3

1. O_2 est un corps simple, donc NO(O) = 0. Pour H_2O_2 et H_2O, on peut déterminer le nombre d'oxydation de O à partir de la formule de Lewis de l'édifice.

Molécule	$\langle O{=}O \rangle$	H—$\underline{\overline{O}}$—$\underline{\overline{O}}$—H	H—$\underline{\overline{O}}$—H
NO (O)	0	–I	–II

On retrouve un cas particulier où NO(O) = –I : le peroxyde d'hydrogène.

⇨ *Méthode 28.2*

2. Dans un couple d'oxydo-réduction, l'oxydant est l'espèce dans laquelle l'élément dont le NO varie (ici l'oxygène) est le plus élevé. On peut donc envisager les couples $H_2O_{2(aq)}/H_2O_{(l)}$ et $O_{2(g)}/H_2O_{2(aq)}$.

⇨ *Méthode 28.3*

3. Écrivons les demi-équations associées aux couples du peroxyde d'hydrogène :

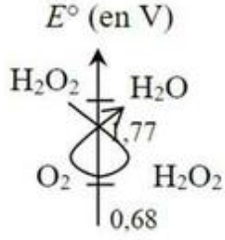
$$H_2O_{2(aq)} + 2\,H^+ + 2\,e^- = 2\,H_2O_{(l)}$$

$$O_{2(g)} + 2\,H^+ + 2\,e^- = H_2O_{2(aq)}$$

⇨ *Méthode 28.4*

4. $H_2O_{2(aq)}$ est un ampholyte redox et peut réagir en tant qu'oxydant et de réducteur. Une combinaison linéaire des demi-équations précédentes conduit à l'équation de la réaction de dismutation du peroxyde d'hydrogène :

$$\boxed{2\,H_2O_{2(aq)} = 2\,H_2O_{(l)} + O_{2(g)}}$$



On voit, grâce à une échelle de potentiels standard d'oxydo-réduction que la transformation est thermodynamiquement favorisée.

⇨ *Méthode 28.11*

La transformation est lente, donc les solutions d'eau oxygénée utilisées au laboratoire sont relativement stables. Les solutions commerciales sont souvent stabilisées : elles contiennent des composés permettant de complexer ou d'adsorber les impuretés en solution, qui catalysent la décomposition.

Exercice 28.4

1. D'après sa position dans le tableau périodique, le lithium est un métal donc possède des propriétés réductrices. La très faible valeur du potentiel standard d'oxydo-réduction du couple Li^+/Li fait de Li un réducteur particulièrement fort. Le lithium permet donc la constitution d'anodes de potentiel faible, utile pour réaliser des piles de tension à vide élevée, donc capables de délivrer une grande puissance. Par ailleurs, la faible densité du métal permet d'obtenir une puissance spécifique (égale au rapport de la puissance maximale à la masse de la pile) élevée.

2. L'équation de la réaction s'écrit :

$$Li_{(s)} = Li^+_{(aq)} + e^-$$

$$2\,H^+_{(aq)} + 2e^- = H_{2(g)} \qquad \left(\times\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{Li_{(s)} + H^+_{(aq)} = \frac{1}{2}H_{2(g)} + Li^+_{(aq)}} \quad \textbf{(1)}$$

en prenant un coefficient stœchiométrique de 1 pour Li.

⇨ *Méthode 28.4*

3. À l'équilibre, la valeur du potentiel est la même pour les deux couples.

$$E^\circ_{Li^+/Li} + 0{,}06 \cdot \log\frac{[Li^+]}{c^\circ} = E^\circ_{H^+/H_2} + \frac{0{,}06}{2} \cdot \log\frac{[H^+]^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{H_2}}$$

$$\Leftrightarrow E^\circ_{Li^+/Li} + 0{,}06 \cdot \log\frac{[Li^+]}{c^\circ} = E^\circ_{H^+/H_2} + 0{,}06 \cdot \log\frac{[H^+]}{c^\circ}\left(\frac{P^\circ}{P_{H_2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \log K_1^\circ = \frac{1}{0{,}06}(E^\circ_{H^+/H_2} - E^\circ_{Li^+/Li}) \text{ . AN } \boxed{K_1^\circ = 10^{50}}.$$

⇨ *Méthode 28.12*

4. En milieu basique, l'équation de la réaction entre le lithium et l'eau s'écrit :

$$\boxed{Li_{(s)} + H_2O_{(l)} = \frac{1}{2}H_{2(g)} + Li^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}} \qquad \textbf{(2)}$$

5. L'équation **(2)** peut être obtenue comme une combinaison linéaire des équations :

$$Li_{(s)} + H^+_{(aq)} = \frac{1}{2}H_{2(g)} + Li^+_{(aq)} \qquad K_1^\circ$$

$$H_2O_{(l)} = H^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \qquad K_e$$

$$Li_{(s)} + H_2O_{(l)} = \frac{1}{2}H_{2(g)} + Li^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \qquad K_2^\circ$$

On a donc $K_2^\circ = K_1^\circ K_e$. AN $\boxed{K_2^\circ = 10^{36}}$. La transformation est très favorisée.

Exercice 28.5

1. $NO^-_{3(aq)} / NO_{2(g)}$: $NO^-_{3(aq)} + 2\,H^+_{(aq)} + e^- = NO_{2(g)} + H_2O$

D'après la relation de Nernst : $\boxed{E_1 = E_1^\circ + 0{,}06 \cdot \log\frac{[NO_3^-] \cdot [H^+]^2 \cdot P^\circ}{(c^\circ)^3 P_{NO_2}}}$.

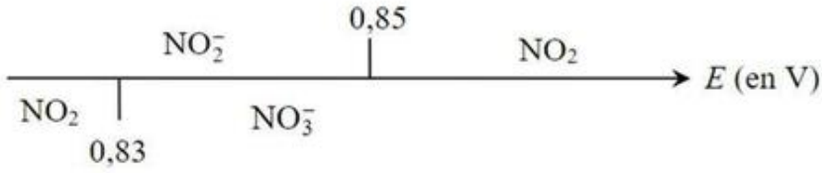
$NO_{2(g)} / NO^-_{2(aq)}$: $NO_{2(g)} + e^- = NO^-_{2(aq)}$ et $\boxed{E_2 = E_2^\circ + 0{,}06 \cdot \log\frac{P_{NO_2} \cdot c^\circ}{P^\circ \cdot [NO_2^-]}}$.

2. a) Superposons les diagrammes de prédominance associés aux couples $NO^-_{3(aq)} / NO_{2(g)}$ et $NO_{2(g)} / NO^-_{2(aq)}$.

D'après la question précédente, on a pour le couple $NO^-_{3(aq)} / NO_{2(g)}$:

$E_1 = E_1^\circ + 0{,}06 \cdot \log\frac{[NO_3^-] \cdot [H^+]^2 \cdot P^\circ}{(c^\circ)^3 P_{NO_2}}$. Avec $P_{NO_2} = 1$ bar et une concentration $[NO_3^-] = c$ à la frontière, on obtient $E_1 = E_1^\circ - 0{,}12 \cdot \text{pH}$ en volts , soit $E_1 = E_1^\circ = 0{,}83$ V à pH = 0.

Pour le couple $NO_{2(g)} / NO^-_{2(aq)}$: $E_2 = E_2^\circ + 0{,}06 \cdot \log\frac{P_{NO_2} \cdot c^\circ}{P^\circ \cdot [NO_2^-]}$. Avec $P_{NO_2} = 1$ bar et pour une concentration $[NO_2^-] = c$ à la frontière, $E_2 = E_2^\circ = 0{,}85$ V.



On constate que l'espèce $NO_{2(g)}$ possède deux domaines de stabilité disjoints. Elle est donc instable et se dismute.

⇨ *Méthode 28.10*

b) Il s'agit de la réaction entre les couples $NO_{3(aq)}^- / NO_{2(g)}$ et $NO_{2(g)} / NO_{2(aq)}^-$. À partir des demi-équations électroniques établies au 1, on obtient l'équation d'oxydo-réduction suivante :

$$2\,NO_{2(g)} + H_2O = NO_{3(aq)}^- + NO_{2(aq)}^- + 2\,H_{(aq)}^+$$

c) $\boxed{K = \dfrac{[NO_3^-]_{éq} \cdot [NO_2^-]_{éq} \cdot [H^+]_{éq}^2 (P^\circ)^2}{(c^\circ)^4 P_{NO_2,éq}^2}}$.

d) À l'équilibre, le potentiel est le même pour les couples $NO_{3(aq)}^- / NO_{2(g)}$ et $NO_{2(g)} / NO_{2(aq)}^-$. On peut donc exprimer le potentiel en écrivant la relation de Nernst pour chaque couple :

$$E_1^\circ + 0{,}06 \cdot \log \frac{[NO_3^-] \cdot [H^+]^2 \cdot P^\circ}{(c^\circ)^3 P_{NO_2}} = E_2^\circ + 0{,}06 \cdot \log \frac{P_{NO_2} \cdot c^\circ}{P^\circ \cdot [NO_2^-]}$$

soit en regroupant : $E_2^\circ - E_1^\circ = 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[NO_3^-] \cdot [NO_2^-] \cdot [H^+]^2 (P^\circ)^2}{(c^\circ)^4 P_{NO_2}^2} = 0{,}06 \cdot \log K$

d'où $K = 10^{\frac{E_2^\circ - E_1^\circ}{0{,}06}}$. AN $\boxed{K = 2{,}15}$.

La transformation est légèrement favorisée (l'écart entre les potentiels standard est faible).

⇨ *Méthode 28.12*

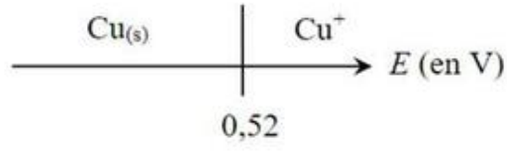
Exercice 28.6

1. Traçons les diagrammes de stabilité du cuivre aux degrés d'oxydation 0, +I et +II.

Pour le couple Cu^+ / Cu, $E = E_1^\circ + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[Cu^+]}{c^\circ}$

avec à la frontière $[Cu^+] = c$.

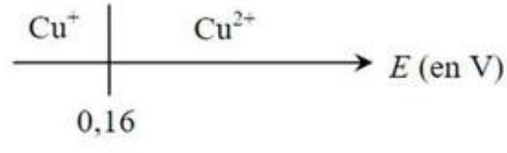
Donc Cu^+ est stable pour $E > E_1^\circ = 0{,}52\,V$.



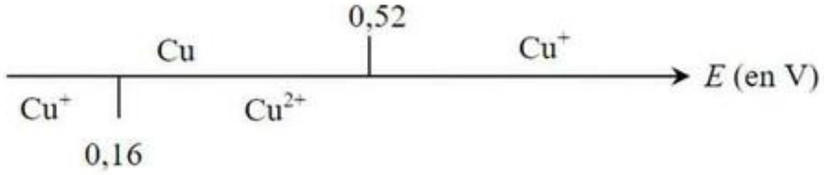
Pour le couple Cu^{2+} / Cu^+,

$E = E_2^\circ + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[Cu^{2+}]}{[Cu^+]}$ avec à la frontière $[Cu^+] = [Cu^{2+}]$.

Donc Cu^+ est stable pour $E < E_1^\circ = 0{,}16\,V$.



En superposant les deux diagrammes :



Cu^+ possède deux domaines de stabilité disjoints : il est instable. Il se produit alors une réaction de dismutation d'équation : $2Cu^+ = Cu^{2+} + Cu$

⇨ *Méthode 28.10*

2. a) – Couples Cu(I) / Cu

Couple	Cu^+/Cu	CuI/Cu
Demi-équation	$Cu^+ + e^- = Cu$	$CuI + e^- = Cu + I^-$
Relation de Nernst	$E_1 = E_1^\circ + 0{,}06 \cdot \log\dfrac{[Cu^+]}{c^\circ}$	$E_1' = E_1'^\circ + 0{,}06 \cdot \log\dfrac{c^\circ}{[I^-]}$

À l'équilibre le potentiel est le même pour les deux couples, d'où : $E_1'^\circ = E_1^\circ - 0{,}06 \cdot pK_s = -0{,}14\,V$. Le pouvoir oxydant du cuivre(I) a diminué par précipitation.

– Couples Cu(II) / Cu(I)

Couple	Cu^{2+}/Cu^+	Cu^{2+}/CuI
Demi-équation	$Cu^{2+} + e^- = Cu^+$	$Cu^{2+} + I^- + e^- = CuI$
Relation de Nernst	$E_2 = E_2^\circ + 0{,}06 \cdot \log\dfrac{[Cu^{2+}]}{[Cu^+]}$	$E_2' = E_2'^\circ + 0{,}06 \cdot \log\dfrac{[Cu^{2+}][I^-]}{(c^\circ)^2}$

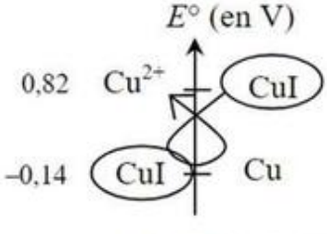
De même que précédemment, $E_2 = E_2'$ à l'équilibre :

$E_2^\circ + 0{,}06 \cdot \log\dfrac{[Cu^{2+}]}{[Cu^+]} = E_2'^\circ + 0{,}06 \cdot \log\dfrac{K_s.[Cu^{2+}]}{[Cu^+]}$, d'où $\boxed{E_2'^\circ = E_2^\circ + 0{,}06 \cdot pK_s}$.

AN $\boxed{E_2'^\circ = 0{,}82\,V}$. Le pouvoir réducteur du cuivre(I) a diminué par précipitation.

⇨ *Méthode 28.8*

b) Une échelle de potentiels standard permet de constater que le cuivre(I) est stable en présence d'ions iodure, sous forme du précipité $CuI_{(s)}$. En effet, la dismutation de $CuI_{(s)}$ est thermodynamiquement défavorisée. La précipitation a donc permis de stabiliser le cuivre au degré d'oxydation (+I).

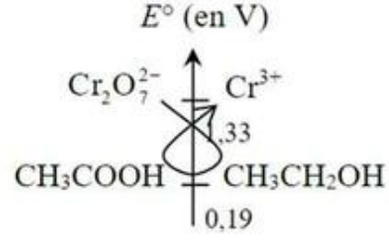


⇨ *Méthode 28.11*

Exercice 28.7

Afin de déterminer la masse de dichromate de potassium nécessaire à la confection de l'éthylotest jetable, il est nécessaire d'identifier la transformation mise en jeu dans son fonctionnement. Le tube contient des cristaux de dichromate de potassium. Les ions dichromate constituent un oxydant, et peuvent être réduits en ions chrome(III) de couleur verte en solution. D'après les données, l'éthanol CH_3CH_2OH est un réducteur.

On voit, grâce à une échelle de potentiels standard d'oxydo-réduction, que la transformation mettant en jeu $Cr_2O_7^{2-}$ et CH_3CH_2OH est thermodynamiquement favorisée.



On écrit dans un premier temps les demi-équations électroniques : $Cr_2O_7^{2-} + 14\,H^+ + 6\,e^- = 2\,Cr^{3+} + 7\,H_2O$

et $CH_3CH_2OH + H_2O = CH_3COOH + 4\,H^+ + 4\,e^-$

L'équation de la réaction mise en jeu lorsque l'éthanol expiré entre dans le tube de l'éthylotest est donc :

$$2\,Cr_2O_7^{2-} + 16\,H^+ + 3\,CH_3CH_2OH = 4\,Cr^{3+} + 11\,H_2O + 3\,CH_3COOH$$

⇨ *Méthodes 28.6 et 28.11*

Calculons la constante d'équilibre associée à cette équation. À l'équilibre, le potentiel est le même pour les deux couples, on peut donc écrire :

$$E_1^\circ + \frac{0,06}{6}\log\frac{[Cr_2O_7^{2-}]\cdot[H^+]^{14}}{[Cr^{3+}]^2(c^\circ)^{13}} = E_2^\circ + \frac{0,06}{4}\log\frac{[CH_3COOH]\cdot[H^+]^4}{[CH_3CH_2OH](c^\circ)^4}$$

d'où $E_1^\circ - E_2^\circ = \frac{0,06}{12}\log\frac{[CH_3COOH]^3\cdot[Cr^{3+}]^4\cdot(c^\circ)^{14}}{[CH_3CH_2OH]^3\cdot[H^+]^{16}\cdot[Cr_2O_7^{2-}]^2}$ soit finalement $K = 10^{\frac{E_1^\circ - E_2^\circ}{0,005}}$.

AN $\boxed{K = 10^{228}}$. La transformation est donc totale.

⇨ *Méthode 28.12*

La confection de l'éthylotest nécessite donc une quantité de matière de dichromate de potassium suffisante pour consommer la totalité de l'éthanol présent dans les vapeurs expirées.

D'après l'énoncé, la concentration en alcool des vapeurs expirées est 2100 fois plus faible que la concentration sanguine en alcool. Pour une concentration massique sanguine de $0,50\ g\cdot L^{-1}$, on a donc dans les vapeurs expirées $c_m = \frac{0,50}{2100} = 2,4\cdot10^{-4}\,g\cdot L^{-1}$.

La concentration molaire correspondante vaut $c = \frac{c_m}{M_{éthanol}}$ avec $M_{éthanol} = 46\ g\cdot mol^{-1}$.

AN $\boxed{c = 5,2\cdot10^{-6}\,mol\cdot L^{-1}}$.

Le sachet de l'éthylotest a un volume de 1 L. D'après le mode d'emploi proposé, on voit que la limite acceptable de $0,50\ g\cdot L^{-1}$ d'éthanol dans le sang correspond à la coloration de la moitié des cristaux en vert (donc transformation de la moitié des ions dichromate introduits en ions Cr^{3+}). Il faut donc que le sachet contienne le double de la quantité de dichromate de potassium nécessaire pour oxyder complètement $5,2\cdot10^{-6}\,mol$ d'éthanol, soit : $n_{Cr_2O_7^{2-}} = 2\times\frac{2\,n_{CH_3CH_2OH}}{3}$.

On en déduit : $m_{K_2Cr_2O_7} = n_{Cr_2O_7^{2-}} \cdot M_{K_2Cr_2O_7} = \dfrac{4\, n_{CH_3CH_2OH}}{3} M_{K_2Cr_2O_7}$ avec $M_{K_2Cr_2O_7} = 294{,}2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. AN $\boxed{m_{K_2Cr_2O_7} = 2{,}0 \text{ mg}}$.

Exercice 28.8

L'étiquette de la bouteille d'eau de Javel fait apparaître plusieurs informations importantes :
– la composition, l'eau de Javel est une solution d'hypochlorite de sodium ($Na^+ + ClO^-$) et de chlorure de sodium ($Na^+ + Cl^-$) ;
– le risque associé à l'action d'un acide, qui entraîne la libération d'un gaz toxique.
Étant donné la présence d'espèces chlorées dans l'eau de Javel, on peut identifier le gaz libéré comme étant du dichlore gazeux $Cl_2(g)$.

La libération de gaz O_2 ou H_2, qui pourrait être envisagée selon des réactions d'oxydo-réduction, ne peut pas convenir puisque ces deux gaz ne sont pas toxiques.

$Cl_2(g)$ contient l'élément chlore au nombre d'oxydation 0, tandis que dans ClO^-, NO(Cl) = +I. On peut alors envisager une transformation d'oxydo-réduction mettant en jeu le couple $ClO^-(aq)/Cl_2(g)$. Si les ions hypochlorite sont réduits, il faut aussi envisager la présence dans la solution d'un réducteur pouvant être oxydé. Or la solution contient aussi des ions chlorure Cl^- : dans ceux-ci, l'élément chlore se trouve au NO –I et appartient au couple $Cl_2(g)/Cl^-(aq)$.

L'eau de Javel est produite par l'action de la soude sur le dichlore, qui conduit à la formation d'ions hypochlorite et d'ions chlorure.

On peut alors écrire l'équation de la réaction suivante :

$$2\,Cl^- = Cl_2 + 2\,e^-$$
$$2\,ClO^- + 4\,H^+ + 2\,e^- = Cl_2 + 2\,H_2O$$
$$2\,ClO^- + 4\,H^+ + 2\,Cl^- = 2\,Cl_2 + 2\,H_2O$$
$$\text{soit } ClO^- + 2\,H^+ + Cl^- = Cl_2 + H_2O$$

Il s'agit d'une réaction de médiamutation (réaction inverse d'une dismutation) se déroulant en milieu acide, conduisant à la libération de dichlore toxique. Les produits ménagers acides ne doivent donc pas être utilisés en combinaison avec l'eau de Javel.

Exercice 28.9

1. a) On remarque tout d'abord que dans les deux compartiments le pH est basique.
À l'électrode (1) le dioxygène est réduit en eau selon la demi-équation électronique :

$$O_2 + 2\,H_2O + 4\,e^- = 4\,HO^-$$

Il s'agit donc de la cathode.
À l'électrode (2) le dihydrogène est oxydé en eau selon la demi-équation électronique :

$$H_2 + 2\,HO^- = 2\,H_2O + 2\,e^-$$

Il s'agit de l'anode.

⇨ *Méthodes 28.5 et 28.9*

b) Lorsque la pile fonctionne, la transformation chimique peut être modélisée par la réaction d'équation : $O_2 + 2\,H_2 = 2\,H_2O$

Ainsi la pile à combustible est une pile « propre » qui conduit à la synthèse de l'eau à partir de gaz.

Cependant un des grands obstacles à surmonter pour ces piles reste le stockage du dihydrogène.

c) Les valeurs des potentiels standard des couples sont tabulées à pH = 0, il faut donc écrire les demi-équations en milieu acide des couples pour appliquer la relation de Nernst.

Pour le couple O_2 / H_2O de demi-équation : $O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O$

et le potentiel d'électrode vaut :

$$E_1 = E^\circ_{O_2/H_2O} + \frac{0,06}{4}\log\frac{P_{O_2}\cdot[H^+]^4}{P^\circ\cdot(c^\circ)^4} = E^\circ_{O_2/H_2O} - 0,06\cdot pH\text{, avec } P_{O_2} = 1\,bar \text{ et } pH = 14.$$

AN $\boxed{E_1 = 0,39\,V}$.

Pour le couple H_2O / H_2 de demi-équation : $2\,H^+ + 2\,e^- = H_2$

le potentiel d'électrode vaut : $E_2 = E^\circ_{H^+/H_2} + \frac{0,06}{2}\log\frac{[H^+]^2\,P^\circ}{(c^\circ)^2\,P_{H_2}} = E^\circ_{H^+/H_2} - 0,06\cdot pH$, avec $P_{H_2} = 1\,bar$ et $pH = 14$. AN $\boxed{E_2 = -0,84\,V}$.

On en déduit $\Delta E = E_1 - E_2$. AN $\boxed{\Delta E = 1,23\,V}$.

2. a) À l'anode on observe l'oxydation du méthanol en milieu basique selon la demi-équation :

$$CH_3OH + 8\,HO^- = CO_3^{2-} + 6\,H_2O + 6\,e^-$$

À la cathode le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 est réduit selon : $H_2O_2 + 2\,e^- = 2\,HO^-$

⇨ *Méthode 28.9*

b) O_2 joue le rôle d'oxydant dans les deux couples O_2 / H_2O et O_2 / H_2O_2. Le dioxygène ne peut donc pas être issu d'une réduction parasite à la cathode. Les données montrent que le peroxyde d'hydrogène intervient en tant qu'oxydant dans le couple H_2O_2 / H_2O et en tant que réducteur dans le couple O_2 / H_2O_2. Le peroxyde d'hydrogène peut donc se dismuter en eau et dioxygène selon la réaction d'équation : $2\,H_2O_2 = O_2 + 2\,H_2O$

Cette transformation est thermodynamiquement favorisée car $E^\circ_{H_2O_2/H_2O} > E^\circ_{O_2/H_2O_2}$.

c) Le dioxygène ainsi formé est alors réduit à la cathode : $O_2 + 2\,H_2O + 4\,e^- = 4\,HO^-$

Exercice 28.10

1. a) Les deux demi-piles mettent en jeu le même couple Fe^{2+}/Fe, de demi-équation :

$$Fe^{2+} + 2\,e^- = Fe$$

À l'électrode (1) le potentiel vaut, d'après la relation de Nernst : $E_1 = E^\circ + \frac{0,06}{2}\log\frac{[Fe^{2+}]_1}{c^\circ}$.

AN $\boxed{E_1 = -0,47\,V}$. À l'électrode (2), on calcule de même $\boxed{E_2 = -0,50\,V}$.

b) L'électrode dont le potentiel est le plus élevé correspond au pôle + de la pile, donc à la cathode. On observe donc :

– la réduction des ions Fe^{2+} dans le compartiment 1 (cathode) : $Fe^{2+}_{(1)} + 2e^- = Fe_{(1)}$

– l'oxydation du fer dans le compartiment 2 (anode) : $Fe_{(2)} = Fe^{2+}_{(2)} + 2e^-$

Bilan : $Fe^{2+}_{(1)} + Fe_{(2)} = Fe_{(1)} + Fe^{2+}_{(2)}$

⇨ *Méthode 28.9*

c) La pile débite jusqu'à ce que les potentiels de la cathode et de l'anode soient égaux, ce qui se traduit par l'égalité des concentrations en ions Fe^{2+} dans chaque compartiment. À l'équilibre, $[Fe^{2+}]_{1,éq} = [Fe^{2+}]_{2,éq} \Leftrightarrow [Fe^{2+}]_1 - x = [Fe^{2+}]_2 + x$ en notant x l'avancement de la transformation à l'équilibre, d'où $x = \dfrac{[Fe^{2+}]_1 - [Fe^{2+}]_2}{2}$ et $\boxed{[Fe^{2+}]_{1,éq} = [Fe^{2+}]_{2,éq} = \dfrac{[Fe^{2+}]_1 + [Fe^{2+}]_2}{2}}$.

AN $\boxed{[Fe^{2+}]_{1,éq} = [Fe^{2+}]_{2,éq} = 5{,}5 \cdot 10^{-2}\,mol \cdot L^{-1}}$.

2. Le dioxygène est présent uniquement dans un compartiment. Le dioxygène est donc réduit à la cathode : $O_2 + 2\,H_2O + 4\,e^- = 4\,HO^-$

À l'anode, les deux réducteurs $Fe_{(s)}$ et $H_2O_{(l)}$ sont présents. On peut observer l'oxydation de l'eau en dioxygène ou bien du fer en fer(II). D'après les valeurs respectives des potentiels standard, le fer est un meilleur réducteur. On observe donc l'oxydation du fer à l'anode selon :

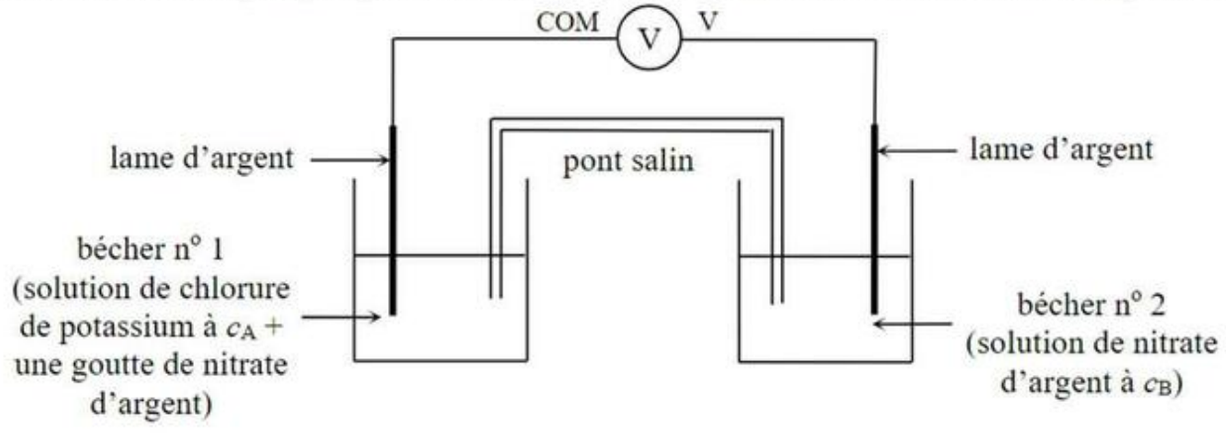
$$Fe = Fe^{2+} + 2e^-$$

3. On a vu dans le cas précédent que l'oxydation du fer se produisait dans le compartiment le moins oxygéné. Lorsqu'une pièce métallique est partiellement immergée dans une solution au contact de l'air, la concentration en dioxygène dissous est plus importante à proximité de la surface que dans la partie immergée. On peut alors raisonner par analogie avec la question précédente. Le système constitue une pile en court-circuit : la partie de la pièce métallique proche de la surface constitue la zone cathodique, et est le siège de la réduction du dioxygène, tandis que la partie immergée, où la concentration en dioxygène dissous est la plus faible, constitue la zone anodique et est le siège de l'oxydation du fer.

Le phénomène observé est appelé « corrosion par aération différentielle ».

Exercice 28.11

1. Le voltmètre affiche la différence de potentiel $E_2 - E_1$, la borne V du voltmètre est donc reliée à la lame d'argent plongeant dans le bécher n° 2 et la borne COM à la lame d'argent n° 1.



2. Le pont salin permet de fermer le circuit électrique. Dans le pont salin, les porteurs de charge sont les ions et assurent la circulation du courant électrique. On ne peut pas utiliser un pont au bromure de potassium car les ions bromure du pont salin réagiraient avec les ions argent des solutions pour former le précipité $AgBr_{(s)}$.

3. La différence de potentiel $E_2 - E_1$ est positive, on peut donc en déduire la polarité de la pile. La demi-pile n° 2 est le pôle positif de la pile, la demi-pile n° 1 le pôle négatif. Le courant électrique circule du pôle + vers le pôle – dans le circuit extérieur, en sens inverse des électrons. Les électrons sont donc libérés au pôle –, qui constitue l'anode, où se déroule une oxydation. Ils sont consommés au pôle +, qui constitue la cathode, où se déroule une réduction.

⇨ *Méthode 28.9*

4. On exprime les potentiels de la cathode et de l'anode à l'aide de la relation de Nernst : $E_1 = E^\circ_{Ag^+/Ag} + 0{,}06 \log \dfrac{[Ag^+]_{(1)}}{c^\circ}$, en notant $[Ag^+]_{(1)}$ la concentration en ions argent dans le premier compartiment. Dans le bécher n° 1, le précipité $AgCl_{(s)}$ est en équilibre hétérogène avec ses ions constitutifs. La dilution liée à l'ajout d'une goutte de nitrate d'argent est négligeable, donc $[Cl^-]_{(1)} = c_A$ et $[Ag^+]_{(1)} = \dfrac{K_s (c^\circ)^2}{[Cl^-]_{(1)}} = \dfrac{K_s (c^\circ)^2}{c_A}$ d'où $\boxed{E_1 = E^\circ_{Ag^+/Ag} + 0{,}06 \log \dfrac{K_s (c^\circ)^2}{c_A}}$.

D'autre part, $E_2 = E^\circ_{Ag^+/Ag} + 0{,}06 \log \dfrac{[Ag^+]_{(2)}}{c^\circ}$, soit $\boxed{E_2 = E^\circ_{Ag^+/Ag} + 0{,}06 \log \dfrac{c_B}{c^\circ}}$.

5. La FÉM de la pile de concentration vaut :

$$\Delta E = 0{,}06 \log c_B - 0{,}06 \log \frac{K_s (c^\circ)^2}{c_A} = 0{,}06 \log \frac{c_B \cdot c_A}{K_s (c^\circ)^2} \Leftrightarrow \boxed{K_s = \frac{c_B \cdot c_A}{(c^\circ)^2} \cdot 10^{-\frac{\Delta E}{0{,}06}}}.$$

AN $\boxed{K_s = 10^{-10}}$; $\boxed{pK_s = 10}$.

6. Considérons les deux couples Ag^+/Ag et $AgCl_{(s)} / Ag_{(s)}$, associés aux demi-équations respectives : $Ag^+_{(aq)} + e^- = Ag_{(s)}$ et $AgCl_{(s)} + e^- = Ag_{(s)} + Cl^-_{(aq)}$

À l'équilibre, le potentiel est le même pour les deux couples, soit $E^\circ_{Ag^+/Ag_{(s)}} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{[Ag^+]}{c^\circ} = E^\circ_{AgCl_{(s)}/Ag} + 0{,}06 \cdot \log \dfrac{c^\circ}{[Cl^-]}$. Sachant que $K_s = \dfrac{[Ag^+] \cdot [Cl^-]}{(c^\circ)^2}$, on écrit $\boxed{E^\circ_{AgCl_{(s)}/Ag} = E^\circ_{Ag^+/Ag_{(s)}} - 0{,}06 \cdot pK_s}$. AN $\boxed{E^\circ_{AgCl_{(s)}/Ag} = 0{,}20\ V}$.

Il est inférieur au potentiel standard du couple Ag^+ / Ag : le pouvoir oxydant de Ag^+ diminue par précipitation.

⇨ *Méthode 28.8*

Exercice 28.12

1. Écrivons les demi-équations électroniques en milieu acide, puis basique :

$$BH^-_{4(aq)} + 2\ H_2O = BO^-_{2(aq)} + 8\ H^+ + 8\ e^- \quad \text{d'où} \quad \boxed{BH^-_{4(aq)} + 8\ HO^-_{(aq)} = BO^-_{2(aq)} + 6\ H_2O + 8\ e^-}$$

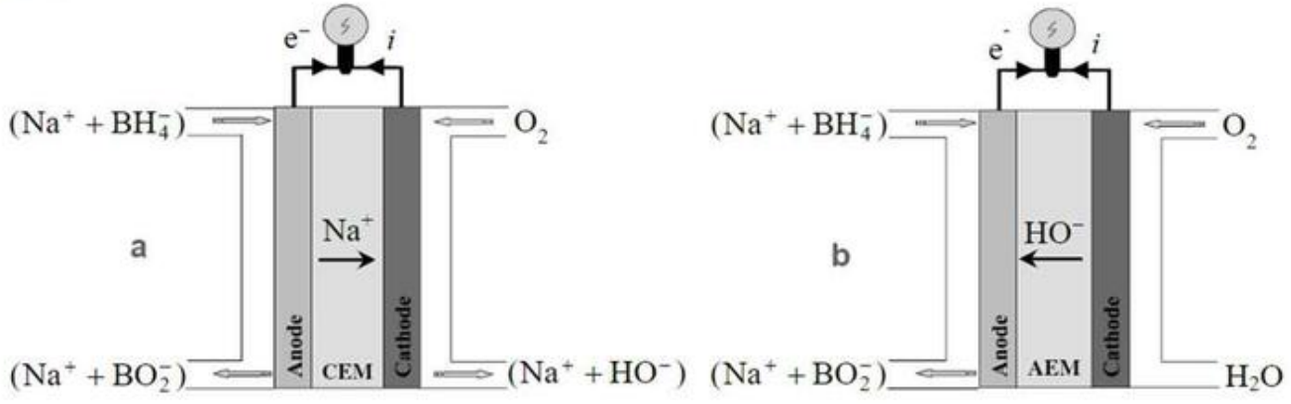
$$O_{2(g)} + 4\ H^+ + 4\ e^- = 2\ H_2O \quad \text{d'où} \quad \boxed{O_{2(g)} + 2\ H_2O + 4\ e^- = 4\ HO^-_{(aq)}}$$

⇨ *Méthodes 28.4, 28.5*

2. En combinant les demi-équations précédentes, déjà écrites dans le sens de leur déroulement dans la pile à combustible, on en déduit l'équation de la réaction de fonctionnement :

$$\boxed{BH^-_{4(aq)} + 2\ O_{2(g)} = BO^-_{2(aq)} + 2\ H_2O}$$

3. L'oxydation des ions borohydrure BH^-_4 se déroule à l'anode, la réduction du dioxygène à la cathode. Les électrons sont libérés à l'anode vers le circuit extérieur, et consommés à la cathode. Ils circulent dans le sens opposé à celui du courant électrique. La polarité de la pile peut être déduite du sens de circulation du courant électrique (du pôle + vers le pôle – à l'extérieur de la pile). Les porteurs de charge dans la pile sont les ions. Dans la pile avec membrane échangeuse de cations (CEM), ce sont les cations Na^+ qui se déplacent à travers la membrane séparatrice échangés, tandis que dans la pile avec membrane échangeuse d'anions (AEM) ce sont les anions HO^-.



⇨ *Méthode 28.9*

4. La membrane anionique laisse passer sélectivement les anions HO^-, mais pourrait être partiellement perméable aux ions borohydrure, qui pourraient réagir directement avec O_2 à la cathode et entraîner une baisse du rendement de la pile. Dans l'énoncé, le rôle de la membrane est d'« empêcher le contact du combustible avec la cathode, afin d'éviter son hydrolyse ». C'est pourquoi on privilégie une membrane échangeuse de cations.

> *L'article de* L'Actualité chimique *évoque aussi d'autres facteurs : la présence éventuelle d'ions borohydrure à la cathode désactiverait le catalyseur cathodique ; d'autre part, les membranes cationiques sont plus stables, mécaniquement et chimiquement, que les membranes anioniques à pH = 14.*

5. La force électromotrice standard, ou tension à vide standard de la pile, peut être calculée à partir des potentiels standard d'oxydo-réduction des couples mis en jeu.

$\Delta E° = E°(O_{2(g)} / H_2O_{(l)}) - E°(BO_{2(aq)}^- / BH_{4(aq)}^-)$. AN $\boxed{\Delta E° = 1,64\ V}$. Cette valeur est intéressante, car plus élevée que celle des autres piles à combustible présentées.

Exercice 28.13

1. À l'anode, on observe l'oxydation du plomb en sulfate de plomb selon :

$$Pb_{(s)} + SO_{4(aq)}^{2-} = PbSO_{4(s)} + 2\,e^-$$

À la cathode, le dioxyde de plomb est réduit en sulfate de plomb selon :

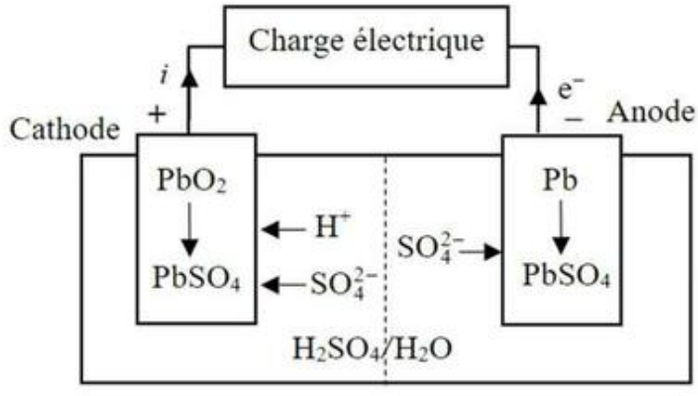
$$PbO_{2(s)} + 4\,H_{(aq)}^+ + SO_{4(aq)}^{2-} + 2\,e^- = PbSO_{4(s)} + 2\,H_2O_{(l)}$$

On en déduit l'équation de la réaction de fonctionnement de l'accumulateur en décharge :

$$\boxed{PbO_{2(s)} + Pb_{(s)} + 4\,H_{(aq)}^+ + 2\,SO_{4(aq)}^{2-} = 2\,PbSO_{4(s)} + 2\,H_2O_{(l)}}$$

⇨ *Méthode 28.4*

2. Les électrons circulent de l'anode vers la cathode dans le circuit extérieur, dans le sens opposé à celui du courant électrique. La cathode constitue le pôle + de la pile, l'anode le pôle −. Dans les demi-piles, les porteurs de charge sont les ions. Les ions sulfate se déplacent vers l'anode et la cathode où ils sont consommés, les ions H^+ se déplacent vers la cathode.



⇨ *Méthode 28.9*

3. La force électromotrice (ou tension à vide) de l'accumulateur au plomb en décharge s'exprime selon :

$$\Delta E = E_+ - E_- = E_{cathode} - E_{anode}$$

soit $\Delta E = E°_{PbO_2/PbSO_4} + \dfrac{0,06}{2}\log\dfrac{[H^+]^4[SO_4^{2-}]}{(c°)^5} - E°_{PbSO_4/Pb} - \dfrac{0,06}{2}\log\dfrac{c°}{[SO_4^{2-}]}$

et finalement $\boxed{\Delta E = E°_{PbO_2/PbSO_4} - E°_{PbSO_4/Pb} + 0,06\log\dfrac{[SO_4^{2-}]}{c°} - 0,12\,pH}$.

On voit que la FÉM dépend du pH : c'est une fonction décroissante du pH. Pour avoir une FÉM la plus élevée possible (ce qui assurera une puissance délivrée plus élevée), il est donc préférable d'utiliser de l'acide sulfurique très concentré.

4. Quand on associe des éléments en série, leurs tensions à vide s'ajoutent.
On ne connaît pas la concentration de la solution d'acide sulfurique utilisée dans l'accumulateur ; d'après la question **3**, le pH doit être le plus faible possible pour avoir une FÉM élevée, on

peut donc se placer dans le cas où le pH est proche de 0 : la FÉM est alors voisine de sa valeur standard. Celle-ci vaut : $\Delta E^\circ = E^\circ_{PbO_2/PbSO_4} - E^\circ_{PbSO_4/Pb}$. AN $\boxed{\Delta E^\circ = 2{,}05\ V}$. Une association de 6 éléments en série est donc nécessaire pour que la tension délivrée soit supérieure à 12 V.

Exercice 28.14

1. Ce titrage est qualifié de titrage indirect car la réaction support du titrage ne met pas en jeu l'acide ascorbique, dont on cherche à déterminer la concentration, mais l'excès d'ions triiodure restant après réaction avec l'acide ascorbique. C'est l'exploitation de l'équivalence du titrage des ions triiodure qui nous permettra de remonter à la concentration d'acide ascorbique.

2.
$$C_6H_8O_6 = C_6H_6O_6 + 2\,H^+ + 2\,e^-$$
$$I_3^- + 2\,e^- = 3\,I^-$$
$$\boxed{C_6H_8O_6 + I_3^- = C_6H_6O_6 + 3\,I^- + 2\,H^+} \quad \textbf{(1)}$$

À l'équilibre, le potentiel est le même pour les deux couples, soit :

$$E^\circ_{C_6H_6O_6/C_6H_8O_6} + \frac{0{,}06}{2}\cdot\log\frac{[C_6H_6O_6][H^+]^2}{[C_6H_8O_6](c^\circ)^2} = E^\circ_{I_3^-/I^-} + \frac{0{,}06}{2}\cdot\log\frac{[I_3^-]\cdot c^\circ}{[I^-]^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}06}{2}\cdot\log\frac{[C_6H_6O_6][H^+]^2[I^-]^2}{[C_6H_8O_6][I_3^-](c^\circ)^3} = E^\circ_{I_3^-/I^-} - E^\circ_{C_6H_6O_6/C_6H_8O_6}$$

soit $\log K_1^\circ = \dfrac{2}{0{,}06}(E^\circ_{I_3^-/I^-} - E^\circ_{C_6H_6O_6/C_6H_8O_6})$. AN $\boxed{K_1^\circ = 2{,}2\cdot10^{16}}$. La transformation est totale.

⇨ *Méthode 28.12*

3. L'excès d'ions triiodure est dosé par les ions thiosulfate selon la réaction d'équation :

$$I_3^- + 2\,e^- = 3\,I^-$$
$$2\,S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2\,e^-$$
$$\boxed{I_3^- + 2\,S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 3\,I^-} \quad \textbf{(2)}$$

En exprimant le potentiel avec la relation de Nernst pour les deux couples, on établit à l'équilibre : $\log K_2^\circ = \dfrac{2}{0{,}06}(E^\circ_{I_3^-/I^-} - E^\circ_{S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}})$. AN $\boxed{K_2^\circ = 4{,}6\cdot10^{17}}$. La transformation est totale.

4. La détection de l'équivalence se fait par colorimétrie. On utilise du thiodène, qui forme un complexe bleu sombre avec les ions triiodure, et permet de détecter l'équivalence par un changement de couleur bleu → incolore, plus aisé à déterminer qu'un changement de couleur jaune pâle → incolore.

5. À l'équivalence du titrage **(2)**, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. La quantité de matière d'ions triiodure titrée vaut donc :

$$n_{I_3^-,titré} = \frac{n_{S_2O_3^{2-},versé}}{2} = \frac{c_2V_2}{2}.\ \text{AN}\ n_{I_3^-,titré} = \frac{0{,}0500\times19{,}6\cdot10^{-3}}{2} = 4{,}90\cdot10^{-4}\ \text{mol}.$$

Un tableau d'avancement de la transformation pour la réaction **(1)** nous permet de déterminer l'avancement de la transformation, qui correspond à la quantité de matière initiale d'acide ascorbique.

mol	$C_6H_8O_6$	$+I_3^-$	$= C_6H_6O_6$	$+3\ I^-$	$+2\ H^+$
$t = 0$	n_0	$n_{I_3^-,\text{initial}}$	0	0	excès
t_f	$n_0 - \xi = 0$	$n_{I_3^-,\text{initial}} - \xi = n_{I_3^-,\text{titré}}$	ξ	3ξ	excès

$\boxed{n_0 = n_{I_3^-,\text{initial}} - n_{I_3^-,\text{titré}}}$. AN $n_0 = 7{,}10 \cdot 10^{-4}$ mol.

Il s'agit de la quantité de matière d'acide ascorbique présente dans le prélèvement de 50,0 mL de la solution S_1. La quantité de matière d'acide ascorbique présente dans les 200 mL de solution issus de la dissolution du comprimé vaut donc : $n_{acide} = 2{,}84 \cdot 10^{-3}$ mol, et correspondent à une masse : $m_{acide} = n_{acide} \times M_{acide}$.

AN $\boxed{m_{acide} = 0{,}500\ g}$. Le comprimé contient donc 500 mg d'acide ascorbique.

Exercice 28.15

1. Écrivons l'équation de la réaction :

$$MnO_{4(aq)}^- + 8\ H_{(aq)}^+ + 5e^- = Mn_{(aq)}^{2+} + 4\ H_2O_{(l)}$$

$$C_2O_{4(aq)}^{2-} = 2\ CO_{2(g)} + 2\ e^-$$

$$2\ MnO_{4(aq)}^- + 5\ C_2O_{4(aq)}^{2-} + 16\ H_{(aq)}^+ = 2\ Mn_{(aq)}^{2+} + 10\ CO_{2(g)} + 8\ H_2O_{(l)}$$

2. La transformation entre les ions permanganate et les ions oxalate est lente, le chauffage à reflux permet de l'accélérer.

Les ions Mn^{2+} formés accélèrent la transformation, celle-ci est auto-catalysée.

3.a) Dans la première étape, les ions permanganate sont mis à réagir avec les matières organiques présentes dans la solution analysée. Avec n_1 la quantité de matière des ions permanganate introduite initialement dans le récipient, et n_0 la quantité de matière des ions permanganate ayant réagi avec les matières organiques, on peut donc exprimer la quantité de matière d'ions permanganate restante à l'issue de cette étape : $\boxed{n_{MnO_4^-,\text{restante}} = n_1 - n_0}$.

Cette quantité de matière est mise à réagir avec un excès d'ions oxalate dans l'étape 2.
Faisons un bilan de matière pour la réaction mise en jeu dans cette étape.

mol	$2\ MnO_{4(aq)}^-$	$+5\ C_2O_{4(aq)}^{2-}$	$+16\ H_{(aq)}^+$	$= 2\ Mn_{(aq)}^{2+}$	$+10\ CO_{2(g)}$	$+8\ H_2O_{(l)}$
$t = 0$	$n_1 - n_0$	n_2	excès	/	/	excès
t_f	$n_1 - n_0 - 2\xi = 0$	$n_2 - 5\xi = n_3$	excès	/	/	excès

Les ions permanganate sont totalement consommés, donc : $\xi = \dfrac{n_1 - n_0}{2}$, et on peut aussi écrire : $\xi = \dfrac{n_2 - n_3}{5}$ à partir des quantités de matière initiale et finale d'ions oxalate pour cette étape, soit : $\dfrac{n_2 - n_3}{5} = \dfrac{n_1 - n_0}{2} \Leftrightarrow \boxed{n_3 = n_2 - \dfrac{5}{2}(n_1 - n_0)}$.

On n'a pas indiqué les quantités de matière des produits Mn^{2+} et CO_2 car on ne les utilisera pas par la suite. Leur quantité de matière est la somme de celle obtenue dans chacune des réactions mettant en jeu les ions permanganate (pour Mn^{2+}) ou oxalate (pour CO_2).

L'excès d'ions oxalate restant (correspondant à la quantité de matière n_3) est alors titré par la solution de permanganate de potassium.
Faisons à présent un bilan de matière pour l'étape 3.

mol	$2\ MnO_{4(aq)}^-$	$+5\ C_2O_{4(aq)}^{2-}$	$+16\ H_{(aq)}^+$	$=2\ Mn_{(aq)}^{2+}$	$+10\ CO_{2(g)}$	$+8\ H_2O_{(l)}$
$t=0$	n_E	n_3	excès	/	/	excès
t_f	$n_E-2\xi=0$	$n_3-5\xi=0$	excès	/	/	excès

À l'équivalence du titrage, les réactifs sont tous les deux limitants (ils ont été introduits dans les proportions stœchiométriques). On a donc : $\boxed{n_3=\frac{5}{2}n_E}$.

Les deux expressions obtenues pour n_3 nous permettent d'écrire : $n_2-\frac{5}{2}(n_1-n_0)=\frac{5}{2}n_E \Leftrightarrow \boxed{n_0=n_1-\frac{2}{5}n_2+n_E}$.

b) D'après les demi-équations : $MnO_{4(aq)}^- + 8\ H_{(aq)}^+ + 5e^- = Mn_{(aq)}^{2+} + 4\ H_2O_{(l)}$

et $O_{2(g)} + 4\ H_{(aq)}^+ + 4\ e^- = 2\ H_2O_{(l)}$

on voit que la quantité de matière d'électrons mise en jeu dans l'oxydation des matières organiques vaut $n_{e^-}=5n_{MnO_4^-}=4n_{O_2} \Leftrightarrow \boxed{n_{O_2}=\frac{5}{4}n_{MnO_4^-}=\frac{5}{4}n_0}$.

c) On calcule $n_0=c_1V_1-\frac{2}{5}c_2V_2+c_1V_E$. AN $n_0=2{,}0\cdot10^{-6}$ mol, dont on déduit la quantité de matière de O_2 nécessaire pour oxyder les matières organiques contenues dans l'échantillon de 100 mL : $n_{O_2}=\frac{5}{4}n_0$. AN $n_{O_2}=2{,}5\cdot10^{-6}$ mol. La masse de O_2 nécessaire pour oxyder les matières organiques contenues dans 1 L de l'eau de la piscine vaut donc : $m_{O_2}=10\times n_{O_2}M_{O_2}$.
AN $m_{O_2}=0{,}8$ mg. L'indice de permanganate de l'eau testée vaut donc $\boxed{0{,}8\ mg\cdot L^{-1}}$.
Cette valeur est supérieure à celle préconisée par les normes sanitaires, il est donc nécessaire de désinfecter la piscine.

Exercice 28.16

1. L'électrode de platine est l'électrode indicatrice de potentiel, tandis que l'électrode au calomel saturée (ÉCS) est l'électrode de référence. La mesure de la FÉM de la pile ainsi constituée donne directement accès au potentiel pris par l'électrode de platine, qui est le potentiel de la solution.
Dans l'électrode au calomel saturée, un fil de platine est en contact avec du mercure liquide, lui-même en contact avec du calomel (précipité de chlorure de mercure (+I)) Hg_2Cl_2. Le tout

plonge dans une solution de chlorure de potassium. Le couple mis en jeu est $Hg_2Cl_{2(s)} / Hg_{(l)}$, de demi-équation : $Hg_2Cl_{2(s)} + 2e^- = 2\,Hg_{(l)} + 2\,Cl^-_{(aq)}$

D'après la relation de Nernst, le potentiel s'écrit : $E = E^\circ_{Hg_2Cl_{2(s)}/Hg_{(l)}} + \dfrac{0{,}06}{2}\log\dfrac{(c^\circ)^2}{[Cl^-]^2}$.

Dans la solution saturée de chlorure de potassium, la concentration $[Cl^-] = s$ est constante et égale à la solubilité du chlorure de potassium $KCl_{(s)}$ à la température de travail. Ainsi, le potentiel de l'ÉCS est constant, d'où son utilisation comme électrode de référence.

⇨ *Méthode 28.7*

2. L'équation de la réaction de dosage est : $Fe^{2+} + Ce^{4+} = Fe^{3+} + Ce^{3+}$

La constante d'équilibre associée vaut : $K = 10^{\frac{(E^\circ(Ce^{4+}/Ce^{3+}) - E^\circ(Fe^{3+}/Fe^{2+}))}{0{,}06}} = 1{,}5\cdot10^{16}$. La transformation est totale. Elle peut donc être utilisée dans le cadre d'un dosage.

⇨ *Méthode 28.12*

De plus, la transformation est rapide et unique.

3. À l'équivalence : $n_{Fe^{2+},titré} = n_{Ce^{4+},versé} \Leftrightarrow C_0V_0 = CV_{éq}$ d'où $\boxed{C_0 = \dfrac{CV_{éq}}{V_0} = 7{,}3\cdot10^{-3}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$.

4. On peut exprimer le potentiel de l'électrode de platine en prenant comme couple Fe^{3+}/Fe^{2+} ou Ce^{4+}/Ce^{3+}.

Pour $V < V_{éq}$: le réactif titrant est limitant.

	Fe^{2+}	+ Ce^{4+}	= Fe^{3+}	+ Ce^{3+}
ÉI	C_0V_0	CV	0	0
ÉF	$C_0V_0 - CV$	ε	CV	CV

Avant l'équivalence, les ions Ce^{4+} ne sont présents qu'à l'état de traces. Le couple Fe^{3+}/Fe^{2+} impose le potentiel de la solution. D'après la relation de Nernst :

$$\boxed{E = E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} + 0{,}06\log\frac{CV}{C_0V_0 - CV} = E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} + 0{,}06\log\frac{V}{V_{éq} - V}}\ \text{(en volts)}.$$

Pour $V > V_{éq}$: le réactif titré est limitant.

	Fe^{2+}	+ Ce^{4+}	= Fe^{3+}	+ Ce^{3+}
ÉI	C_0V_0	CV	0	0
ÉF	ε	$CV - C_0V_0$	C_0V_0	C_0V_0

Après l'équivalence, les ions Fe^{2+} ne sont présents qu'à l'état de traces. Le couple Ce^{4+}/Ce^{3+} impose le potentiel de la solution. D'après la relation de Nernst :

$$\boxed{E = E^\circ_{Ce^{4+}/Ce^{3+}} + 0{,}06\log\frac{CV - C_0V_0}{C_0V_0} = E^\circ_{Ce^{4+}/Ce^{3+}} + 0{,}06\log\frac{V - V_{éq}}{V_{éq}}}\ \text{(en volts)}.$$

5. À la demi-équivalence, il reste une quantité de matière $n_{Fe^{2+}} = C_0V_0 - \dfrac{CV_{éq}}{2} = \dfrac{C_0V_0}{2}$ d'ions Fe^{2+} et il s'est formé une quantité de matière $n_{Fe^{3+}} = \dfrac{C_0V_0}{2}$ d'ions Fe^{3+}. Le potentiel de l'électrode indicatrice prend alors la valeur du potentiel standard d'oxydo-réduction du couple Fe^{3+}/Fe^{2+} : $\boxed{E = E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}}}$. On peut donc déterminer graphiquement celui-ci sur la courbe de dosage $E = f(V)$.

Si on a tracé la courbe $E - E_{ECS} = f(V)$, il faudra lire la valeur de la différence de potentiel à la demi-équivalence et ajouter la valeur de E_{ECS} pour obtenir le potentiel standard du couple Fe^{3+}/Fe^{2+}.

Corrigé

Chapitre 29

Diagrammes potentiel-pH

UN SCIENTIFIQUE



Le chimiste belge **Marcel Pourbaix** (1904-1998) effectue ses études à l'Université libre de Bruxelles et obtient un diplôme d'ingénieur en électrochimie en 1927. Il introduit en 1938 les diagrammes qui l'ont rendu célèbre, mais ce n'est qu'en 1945 qu'il obtient son doctorat. Dans les années qui suivent, il établit les diagrammes potentiel-pH de très nombreux éléments et les présente dans un *Atlas d'équilibres électrochimiques* publié en 1963.

Un peu d'histoire

Le chimiste danois Søren Sørensen dirige le laboratoire de recherche des bières Carlsberg lorsqu'il remarque que les ions H^+ jouent un rôle important dans les réactions enzymatiques. Il s'intéresse alors à leur concentration et introduit la notion de potentiel hydrogène, qu'il note p_H, en référence au latin *pondus hydrogenii* (poids de l'hydrogène). Il le définit lui-même à l'aide une échelle logarithmique et cette définition est toujours utilisée aujourd'hui.

En 1938, Marcel Pourbaix introduit une représentation graphique innovante permettant de traiter tous types d'équilibres homogènes ou hétérogènes : les diagrammes potentiel-pH. Ceci permet des avancées importantes dans l'étude de la thermodynamique de la corrosion et plus généralement de l'électrochimie, avec des applications allant de la conception de batteries au raffinage électrolytique.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Le principe et les règles de construction d'un diagramme potentiel-pH
- L'allure du diagramme potentiel-pH du solvant eau

Ce qu'il faut savoir faire

- Associer les différents domaines d'un diagramme à des espèces données
- Déterminer par le calcul la valeur de la pente d'une frontière d'oxydo-réduction
- Justifier la position d'une frontière verticale
- Prévoir si une transformation d'oxydo-réduction est thermodynamiquement favorisée, par superposition de diagrammes
- Discuter de la stabilité des espèces dans l'eau
- Prévoir la stabilité d'un état d'oxydation dans un milieu donné
- Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation en fonction du pH
- Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques

■■ Résumé de cours

■ Principe et construction d'un diagramme potentiel-pH

❑ Diagramme de principe

La précipitation ou la complexation, notamment avec les ions hydroxyde présents dans l'eau, peuvent influer sur le caractère oxydant ou réducteur d'une espèce.
Un diagramme potentiel-pH représente les domaines de stabilité (domaines de prédominance ou d'existence) d'espèces chimiques correspondant aux différents NO d'un même élément, en fonction du pH et du potentiel d'oxydo-réduction de la solution, à 25 °C.
Les espèces chimiques à prendre en compte peuvent être classées dans un diagramme de principe, qui rend compte de la position relative des domaines de stabilité correspondants sur le diagramme potentiel-pH.

⇨ **Méthode 29.1. Associer des domaines de stabilité aux espèces contenant un même élément**

❑ Équations de frontières

Le tracé d'un diagramme potentiel-pH nécessite d'établir les équations des frontières.
– Une frontière verticale sépare deux espèces associées au même NO d'un élément, mais liées par un équilibre acido-basique, de précipitation ou de complexation. La position de cette frontière est obtenue à partir de constantes thermodynamiques telles que K_a, K_s, etc.

– Une frontière oblique (ou horizontale) sépare deux espèces constituant un couple Ox/Red. L'équation d'une telle droite est obtenue à l'aide de la relation de Nernst.
Des **conventions de tracé** (en fonction de l'état physique des deux espèces considérées) sont précisées dans les énoncés pour établir ces équations.

⇨ **Méthode 29.2. Déterminer l'équation ou la pente d'une frontière d'oxydo-réduction**
⇨ **Méthode 29.3. Déterminer la position d'une frontière verticale**

Diagramme potentiel-pH du solvant eau

Le diagramme potentiel-pH de l'eau correspond au tracé des frontières associées aux deux couples d'oxydo-réduction $O_{2(g)} / H_2O$ et $H_2O / H_{2(g)}$.

– Couple $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$ (équivalent au couple $H_2O_{(l)} / H_{2(g)}$ en milieu acide) :

$E = -0{,}06\,\text{pH}$ (en V) pour $P_{H_2} = P^\circ = 1\,\text{bar}$.

– Couple $O_{2(g)} / H_2O$: $E = 1{,}23 - 0{,}06\,\text{pH}$ (en V) pour $P_{O_2} = P^\circ = 1\,\text{bar}$.

Ces deux frontières limitent le domaine d'inertie thermodynamique de l'eau.

⇨ **Méthode 29.4. Construire le diagramme potentiel-pH des couples de l'eau**

■ Prévision thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction

❑ Coexistence de deux espèces

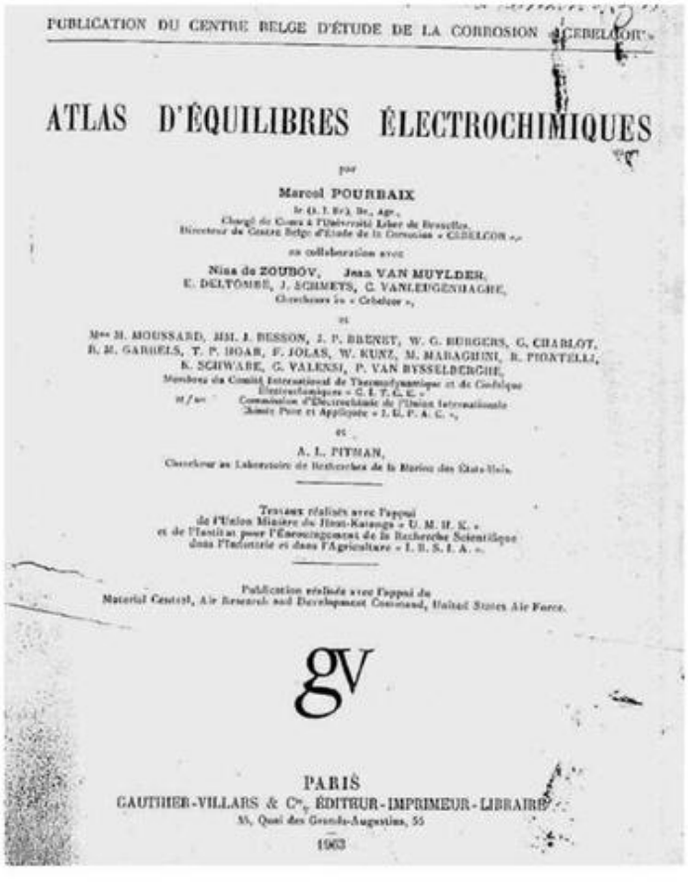
Lorsqu'un système d'espèces chimiques est à l'équilibre, les couples d'oxydo-réduction correspondants ont le même potentiel. Deux espèces peuvent coexister s'il existe une zone de pH où leur potentiel a la même valeur, donc si leurs domaines de prédominance (ou d'existence) possèdent une partie commune. Dans le cas contraire, les deux espèces ne peuvent coexister et réagissent selon une réaction thermodynamiquement favorisée.
En particulier, on peut prévoir ainsi la stabilité d'une espèce dans l'eau.

⇨ **Méthode 29.5. Déterminer si une transformation chimique est thermodynamiquement favorisée**

⇨ **Méthode 29.6. Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation**

❑ Confrontation entre prévisions et données expérimentales

Il arrive que deux espèces coexistent expérimentalement, alors que les diagrammes potentiel-pH indiquent que leurs domaines de stabilité sont disjoints. Cela est dû au fait que la réaction entre ces deux espèces est extrêmement lente. Un tel état, théoriquement instable du point de vue thermodynamique, mais expérimentalement observable pour des raisons cinétiques, est dit **métastable**.


PUBLICATION DU CENTRE BELGE D'ÉTUDE DE LA CORROSION « CEBELCOR »

ATLAS D'ÉQUILIBRES ÉLECTROCHIMIQUES

par

Marcel POURBAIX

Ir. (U. L. Br.), Dr., Agr.,
Chargé de Cours à l'Université Libre de Bruxelles,
Directeur du Centre Belge d'Étude de la Corrosion « CEBELCOR »,

en collaboration avec

Nina de ZOUBOV, Jean VAN MUYLDER,
E. DELTOMBE, J. SCHMETS, C. VANLEUGENHAGHE,
Chercheurs du « Cebelcor »,

et

Mmes M. MOUSSARD, Mlle J. BESSON, J. P. BRENET, W. G. BURGERS, G. CHARLOT,
R. M. GABRIELS, T. P. HOAR, F. JOLAS, W. KUNZ, M. MARAGHINI, B. PIONTELLI,
K. SCHWABE, G. VALENSI, P. VAN BYSSELBERGHE,
Membres du Comité International de Thermodynamique et de Cinétique
Électrochimiques « C. I. T. C. E. »
et/ou Commission d'Électrochimie de l'Union Internationale
de Chimie Pure et Appliquée « I. U. P. A. C. »,

et

A. L. PITMAN,
Chercheur au Laboratoire de Recherches de la Marine des États-Unis.

Travaux réalisés avec l'appui
de l'Union Minière du Haut-Katanga « U. M. H. K. »
et de l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique
dans l'Industrie et dans l'Agriculture « I. R. S. I. A. »,

Publication réalisée avec l'appui du
Material Central, Air Research and Development Command, United States Air Force.

gV

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
1963

*Édition originale (1963) de l'*Atlas d'équilibres électrochimiques *de Marcel* POURBAIX, *présentant après 25 ans de travaux des diagrammes potentiel-pH pour tous les éléments chimiques*

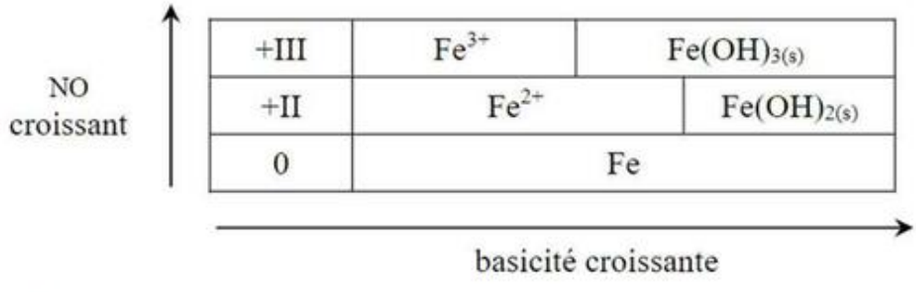
■ Comment construire ou interpréter un diagramme potentiel-pH ?

❑ Méthode 29.1. Associer des domaines de stabilité aux espèces contenant un même élément

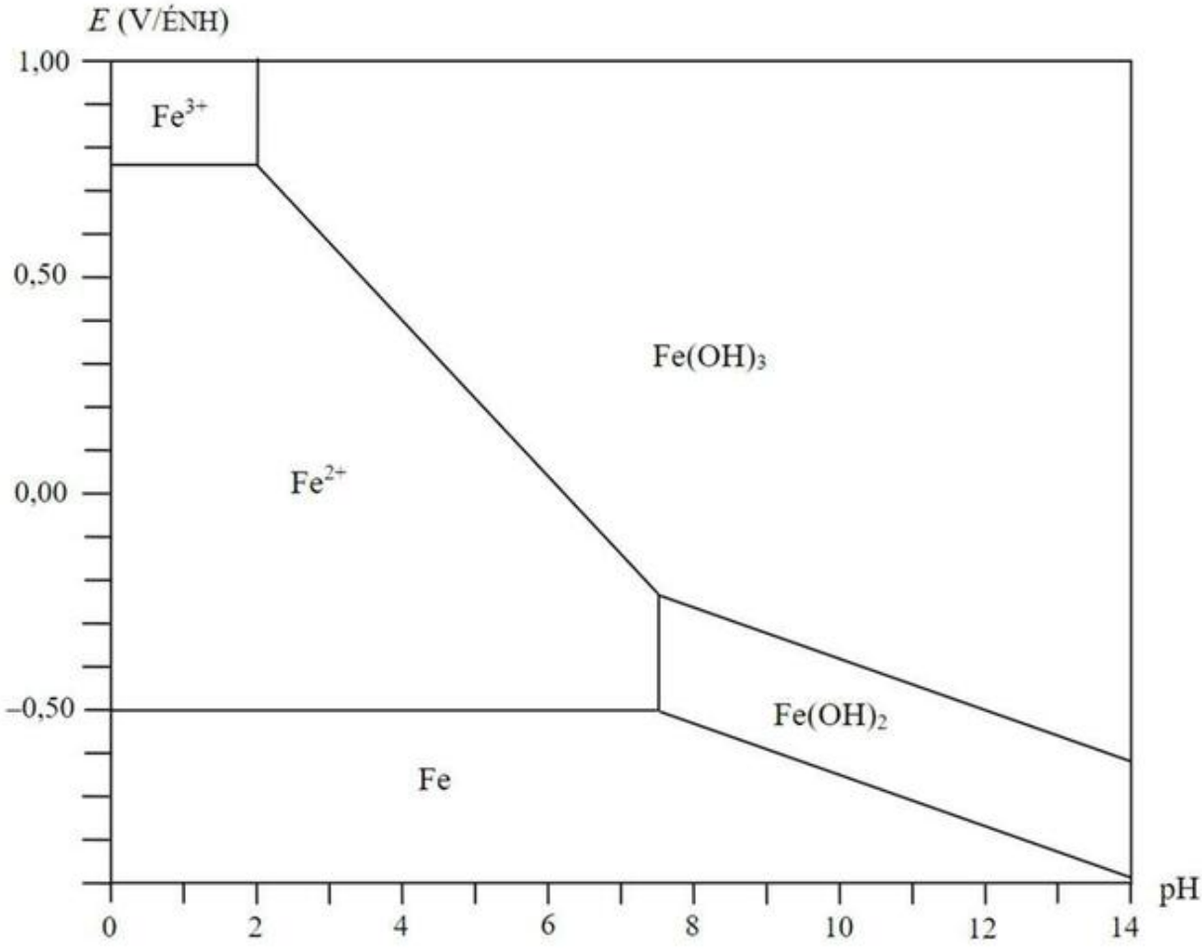
– Calculer le NO de l'élément principal dans les espèces chimiques étudiées.
– Classer les différentes espèces dans un diagramme de principe, par NO croissant de bas en haut et par basicité croissante de gauche à droite.
– La position des espèces dans le diagramme potentiel-pH se déduit de leur position relative dans le diagramme de principe.

⇨ Exercices 29.2 à 29.8

On donne l'allure du diagramme E-pH du fer, établi en tenant compte des espèces $Fe^{2+}(aq)$, $Fe(s)$, $Fe(OH)_3(s)$, $Fe^{3+}(aq)$, $Fe(OH)_2(s)$, avec la concentration de tracé $c_{tra} = 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.
Établissons le diagramme de principe pour les différentes espèces étudiées.
On calcule NO(Fe) = 0 dans Fe(s), NO(Fe) = +II dans $Fe^{2+}(aq)$ et $Fe(OH)_2(s)$ et NO(Fe) = +III dans $Fe^{3+}(aq)$ et $Fe(OH)_3(s)$.
D'autre part, $Fe(OH)_2(s)$ est plus basique que $Fe^{2+}(aq)$, et $Fe(OH)_3(s)$ est plus basique que $Fe^{3+}(aq)$.
On peut donc positionner les espèces ainsi (la position relative des frontières verticales $Fe^{2+}(aq)/Fe(OH)_2(s)$ et $Fe^{3+}(aq)/Fe(OH)_3(s)$ n'est connue qu'une fois que l'on a déterminé leur équation) :



Remarque
Pour déterminer l'ordre de basicité croissante des espèces, on peut écrire une équation acido-basique entre deux espèces successives afin d'identifier l'espèce qui joue le rôle de base et celle qui joue le rôle d'acide.



❑ Méthode 29.2. Déterminer l'équation ou la pente d'une frontière d'oxydo-réduction

– Établir la demi-équation associée au couple étudié.
– Exprimer le potentiel d'oxydo-réduction du couple à l'aide de la loi de Nernst.
– Utiliser les conventions de tracé pour exprimer les concentrations des espèces dissoutes à la frontière (cette étape n'est pas nécessaire si seule la pente est recherchée).
– Établir l'expression affine du potentiel $E = f(\text{pH})$ et en déduire la valeur de la pente (en volts par unité de pH, souvent écrite simplement en volts).

⇨ **Exercices 29.3, 29.4, 29.6, 29.7**

Dans le diagramme potentiel-pH du fer, déterminons la pente de la frontière entre $Fe(OH)_{3(s)}$ et $Fe^{2+}_{(aq)}$. Pour ce couple : $Fe(OH)_{3(s)} + 3\,H^+_{(aq)} + e^- = Fe^{2+}_{(aq)} + 3\,H_2O$

$$E = E^\circ_{Fe(OH)_3/Fe^{2+}} + 0,06\log\frac{[H^+]^3}{[Fe^{2+}](c^\circ)^2} = E^\circ_{Fe(OH)_3/Fe^{2+}} - 0,06\log\frac{[Fe^{2+}]}{c^\circ} - 0,18\,\text{pH (en V)}.$$

La pente de la frontière redox correspondante est donc égale à –0,18 V (par unité de pH).

❑ Méthode 29.3. Déterminer la position d'une frontière verticale

– Écrire une équation de réaction traduisant la transformation chimique entre les deux espèces séparées par la frontière verticale.
– Calculer la constante d'équilibre associée à l'équation précédente à partir des données thermodynamiques (telles que K_a, K_s par exemple).
– Utiliser les conventions de tracé pour calculer le pH à la frontière.

⇨ Exercices 29.4, 29.6, 29.7

Dans le diagramme potentiel-pH du fer, déterminons la position de la frontière verticale entre $Fe^{3+}_{(aq)}$ et $Fe(OH)_{3(s)}$. On a pour l'équation de dissolution du précipité :

$$Fe(OH)_{3(s)} = Fe^{3+}_{(aq)} + 3\ HO^-_{(aq)} \qquad K_s = 10^{-38}$$

soit $K_s = \dfrac{[Fe^{3+}][HO^-]^3}{(c^\circ)^4} = \dfrac{[Fe^{3+}](c^\circ)^2 K_e^3}{[H^+]^3} \Leftrightarrow [H^+] = \left(\dfrac{[Fe^{3+}](c^\circ)^2 K_e^3}{K_s}\right)^{1/3}$

d'où $pH = \dfrac{1}{3}\left(-\log\dfrac{[Fe^{3+}]}{c^\circ} + 3pK_e - pK_s\right)$.

La frontière entre $Fe^{3+}_{(aq)}$ et $Fe(OH)_{3(s)}$ correspond à la limite d'apparition du précipité. Pour le diagramme étudié précédemment, la convention de frontière donne $[Fe^{3+}] = c_{tra} = 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.

AN $pH = \dfrac{1}{3}\left(-\log\dfrac{[Fe^{3+}]}{c^\circ} + 3pK_e - pK_s\right)$, soit <u>pH = 2 à la frontière</u>.

❑ Méthode 29.4. Construire le diagramme potentiel-pH des couples de l'eau

Le diagramme potentiel-pH de l'eau correspond au tracé des frontières associées aux deux couples d'oxydo-réduction $O_{2(g)} / H_2O$ et $H_2O / H_{2(g)}$
Pour chacun des deux couples, on exprime la relation de Nernst. La convention usuelle consiste à considérer que $P_{H_2} = P^\circ = 1$ bar et $P_{O_2} = P^\circ = 1$ bar.

⇨ Exercices 29.6, 29.8

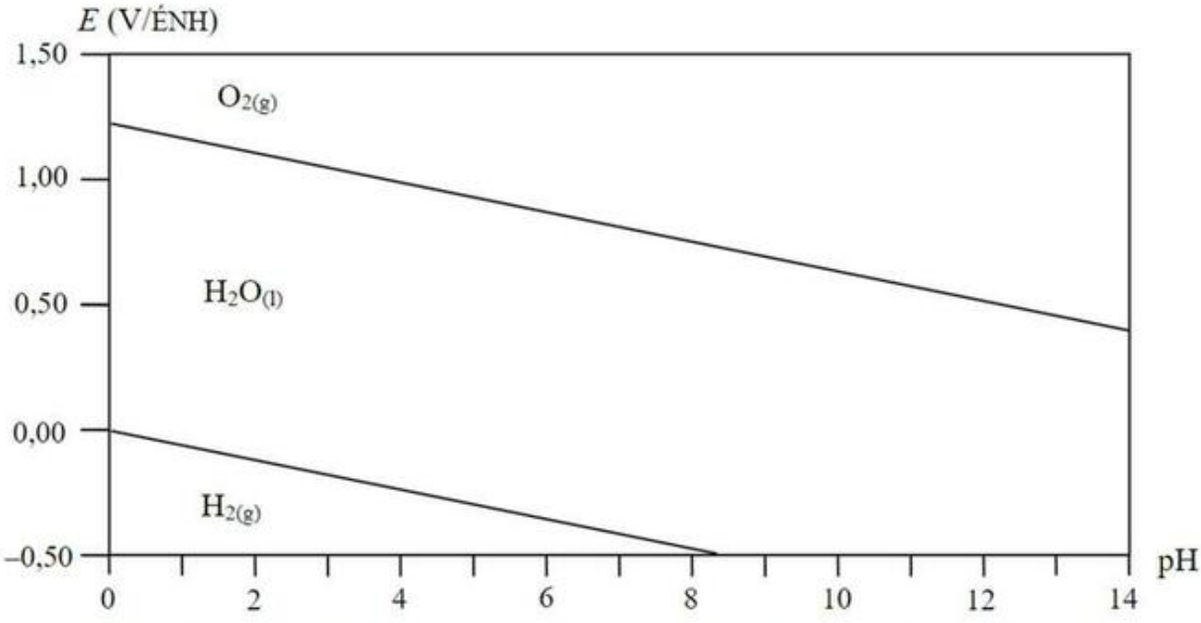
– Pour le couple $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$: $2H^+_{(aq)} + 2e^- = H_{2(g)}$ avec $E^\circ_{H^+/H_2} = 0,00$ V.

$$E = E^\circ_{H^+/H_2} + \frac{0,06}{2}\log\frac{[H^+]^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{H_2}} = -0,06\,pH \text{ (en V) pour } P_{H_2} = P^\circ = 1 \text{ bar}.$$

– Pour le couple $O_{2(g)} / H_2O$: $O_{2(g)} + 4\ H^+_{(aq)} + 4\ e^- = 2\ H_2O$ avec $E^\circ_{O_2/H_2O} = 1,23$ V à 25 °C.

$$E = E^\circ_{O_2/H_2O} + \frac{0,06}{4}\log\frac{[H^+]^4 P_{O_2}}{(c^\circ)^4 P^\circ} = 1,23 - 0,06\,pH \text{ (en V) pour } P_{O_2} = P^\circ = 1 \text{ bar}.$$

On en déduit l'allure du diagramme E-pH de l'eau.



Le domaine de stabilité thermodynamique de l'eau est compris entre ces deux droites parallèles.

■ Comment utiliser les diagrammes potentiel-pH ?

❑ Méthode 29.5. Déterminer si une transformation chimique est thermodynamiquement favorisée

Par superposition des diagrammes potentiel-pH associés aux espèces étudiées, il est possible de voir si un oxydant et un réducteur ont des domaines de prédominance (ou d'existence) disjoints au pH considéré. Si c'est le cas, la transformation chimique entre eux est thermodynamiquement favorisée.

⇨ **Exercices 29.4, 29.5, 29.7**

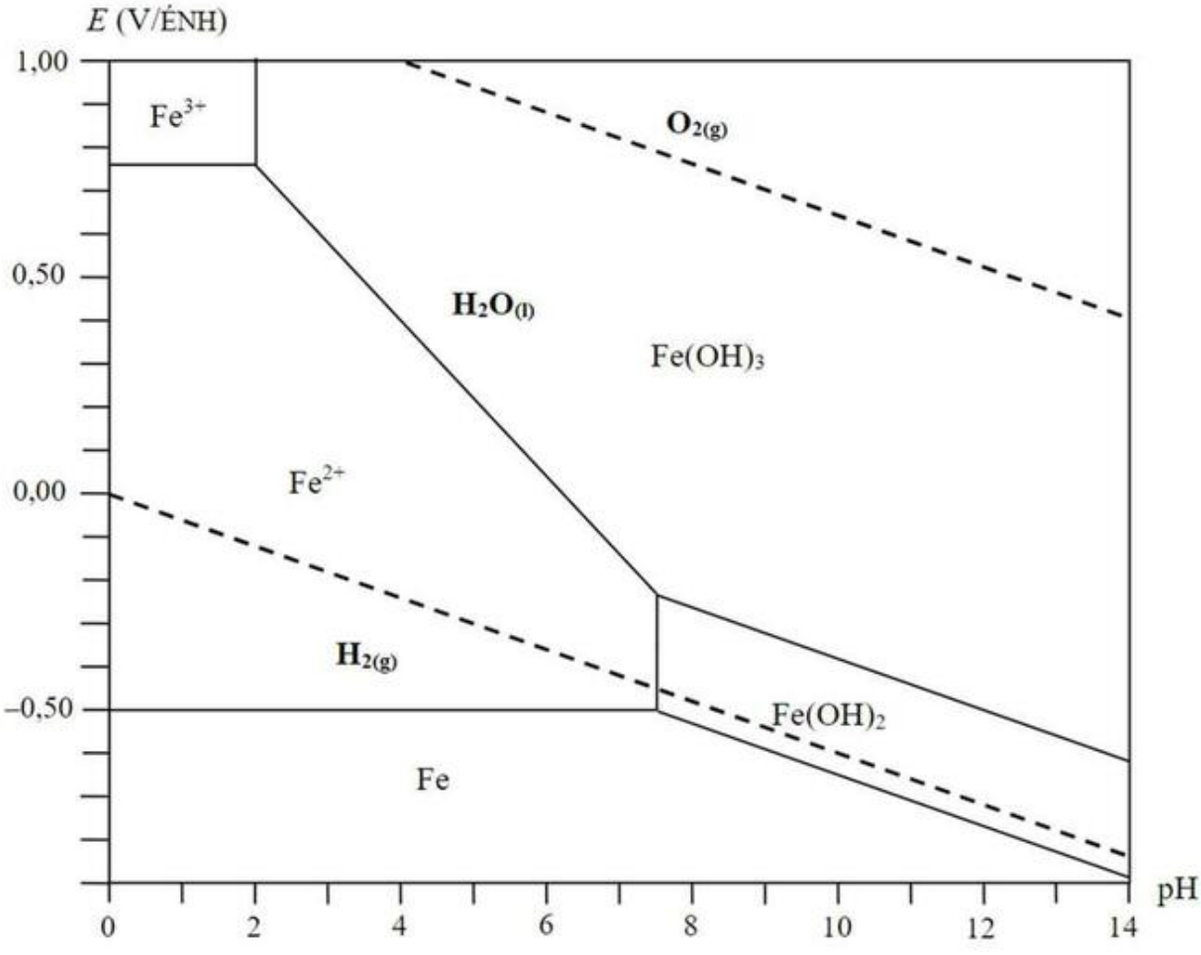
Déterminons si les ions Fe^{2+} sont stables en solution aqueuse. Pour cela, superposons les diagrammes E-pH du fer et de l'eau (le diagramme E-pH de l'eau est représenté en pointillés). On voit que le domaine de prédominance des ions Fe^{2+} et le domaine de stabilité thermodynamique de l'eau possèdent une partie commune quel que soit le pH, les ions Fe^{2+} sont donc stables dans une solution aqueuse désaérée. Par contre, Fe^{2+} et $O_{2(g)}$ ont des domaines de stabilité disjoints (ne possédant aucune partie commune) : dans une solution aqueuse aérée, les ions Fe^{2+} sont oxydés par le dioxygène. D'après le diagramme, si le pH est inférieur à 2, l'oxydation des ions Fe^{2+} conduit à Fe^{3+} selon la réaction d'équation :

$$Fe^{2+} = Fe^{3+} + e^-$$

$$\frac{O_2 + 4H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O}{O_2 + 4Fe^{2+} + 4H^+ = 4Fe^{3+} + 2\,H_2O}$$

Si le pH est compris entre 2 et 7,5 (au-delà de cette valeur $Fe(OH)_{2(s)}$ est l'espèce stable du fer(II)), l'oxydation des ions Fe^{2+} conduit à $Fe(OH)_{3(s)}$ selon la réaction d'équation :

$$Fe^{2+} + 3H_2O = Fe(OH)_3 + 3H^+ + e^-$$
$$\underline{O_2 + 4H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O}$$
$$O_2 + 4Fe^{2+} + 10\,H_2O = 4Fe(OH)_3 + 8H^+$$



Remarque

La réaction est d'autant plus favorisée que les frontières associées aux couples mis en jeu sont plus éloignées.

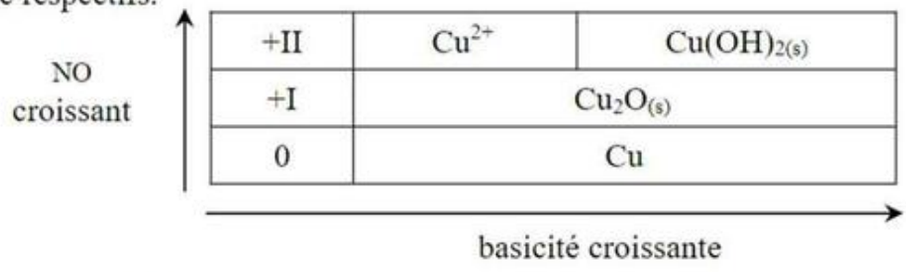
❑ Méthode 29.6. Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation

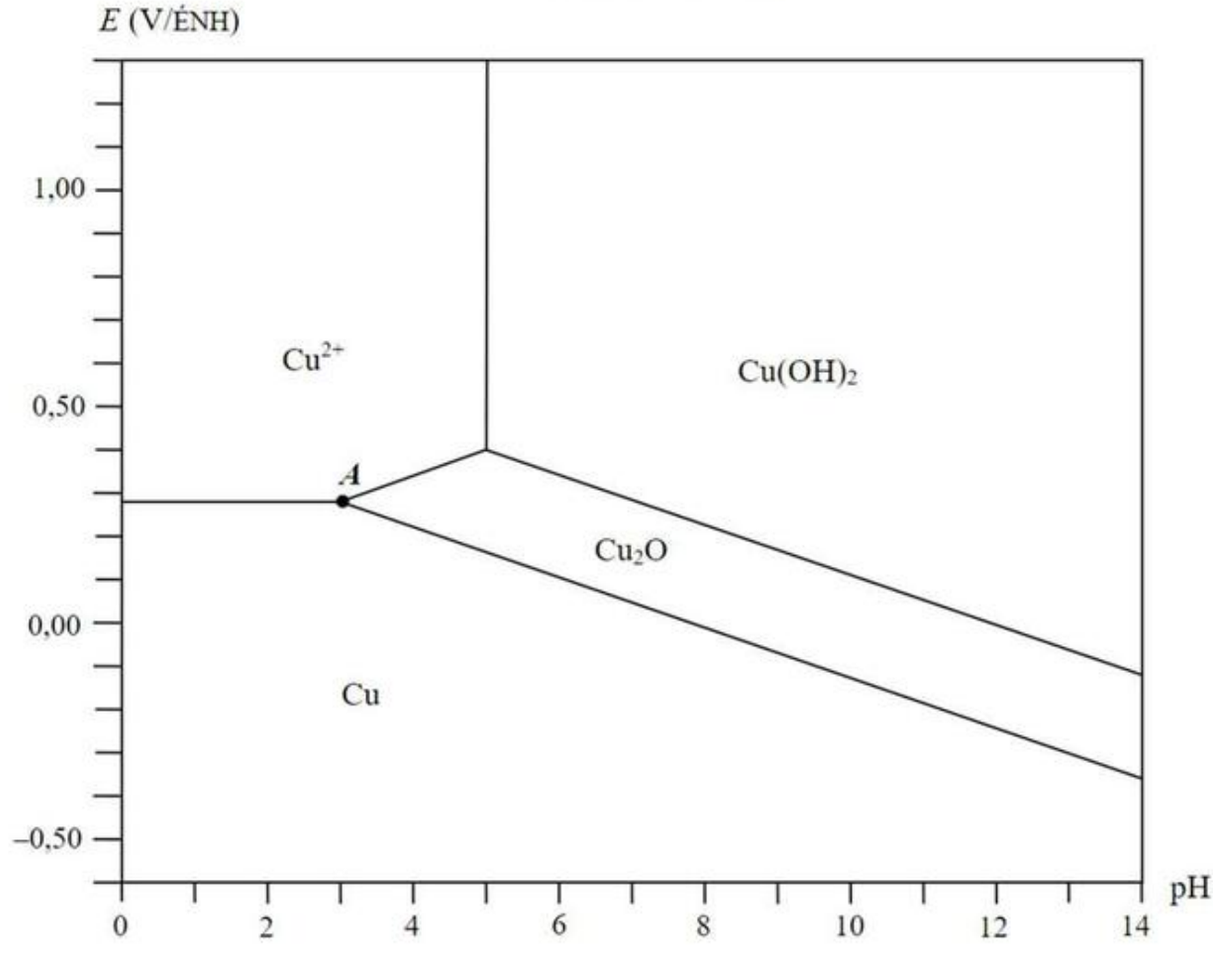
Si un diagramme potentiel-pH fait apparaître un point d'intersection entre trois frontières redox séparant trois espèces de nombres d'oxydation différents, tels que $a > b > c$, le pH correspondant est le pH limite à partir duquel on observe une réaction de dismutation de l'espèce au NO b ou une réaction de médiamutation entre les espèces aux NO a et c (selon le sens de lecture).

⇨ Exercices 29.3, 29.4, 29.7

Considérons le diagramme potentiel-pH du cuivre, établi en tenant compte des espèces Cu(s), $Cu_2O(s)$, $Cu^{2+}(aq)$, $Cu(OH)_2(s)$, avec la concentration de tracé $c_{tra} = 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$.

Le diagramme de principe suivant permet de positionner les espèces dans leurs domaines de stabilité respectifs.





Sur le diagramme, le point A (de coordonnées pH = 3 ; E = 0,28 V) est un point d'intersection entre les trois frontières redox Cu^{2+}/Cu, Cu^{2+}/Cu_2O et Cu_2O/Cu avec NO(Cu) = 0 dans Cu, +I dans Cu_2O et +II dans Cu^{2+}. Pour tout pH inférieur à 3, on constate que Cu_2O ne possède pas de domaine de stabilité. Il est instable et se dismute en Cu^{2+} et Cu selon la réaction d'équation :

$$Cu_2O + 2\,H^+ + 2\,e^- = 2\,Cu + H_2O$$

$$\underline{\qquad Cu_2O + 2\,H^+ = 2\,Cu^{2+} + H_2O + 2\,e^- \qquad}$$

$$Cu_2O + 2\,H^+ = Cu^{2+} + Cu + H_2O$$

Pour tout pH supérieur à 3 (et inférieur à 5, pH au-delà duquel Cu^{2+} n'est plus la forme stable de Cu(+II)), Cu^{2+} et Cu possèdent des domaines de stabilité disjoints et réagissent selon la réaction de médiamutation d'équation : $Cu^{2+} + Cu + H_2O = Cu_2O + 2\,H^+$

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Le potentiel du couple $I_{2(aq)}/I^-_{(aq)}$ dépend du pH.	☐	☐
2.	$O_{2(g)}$ est de moins en moins oxydant lorsque le pH augmente.	☐	☐
3.	Le domaine de stabilité de l'oxydant d'un couple Ox/Red est situé au-dessus de la frontière associée à ce couple.	☐	☐
4.	La valeur du potentiel standard d'un couple Ox/Red est égale à l'ordonnée à l'origine de la frontière relative à ce couple.	☐	☐
5.	Une frontière verticale traduit un équilibre entre deux espèces chimiques dont l'élément principal est au même nombre d'oxydation.	☐	☐
6.	Le domaine de stabilité d'une espèce chimique solide peut être qualifié de domaine d'existence.	☐	☐
7.	Une transformation d'oxydo-réduction entre deux espèces chimiques est favorisée si leurs domaines de stabilité se superposent.	☐	☐
8.	Une dismutation traduit une oxydation et une réduction simultanées d'une même espèce chimique.	☐	☐
9.	Une médiamutation est la transformation inverse d'une dismutation.	☐	☐
10.	Il arrive que les prévisions d'un diagramme potentiel-pH soient contredites expérimentalement, pour des raisons cinétiques.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

Donnée commune à tous les exercices : on travaille à 25 °C, avec $\frac{RT}{F}\ln 10 = 0{,}06$ V.

■ Lecture des diagrammes potentiel-pH

❑ Exercice 29.1. L'argent, un métal noble

On donne le diagramme potentiel-pH de l'argent, établi à 25 °C en tenant compte des espèces : $Ag_{(s)}$, $Ag_2O_{(s)}$ et $Ag^+_{(aq)}$, pour une concentration en ions argent égale à $c_{Ag^+} = 10^{-1}$ mol·L^{-1}.

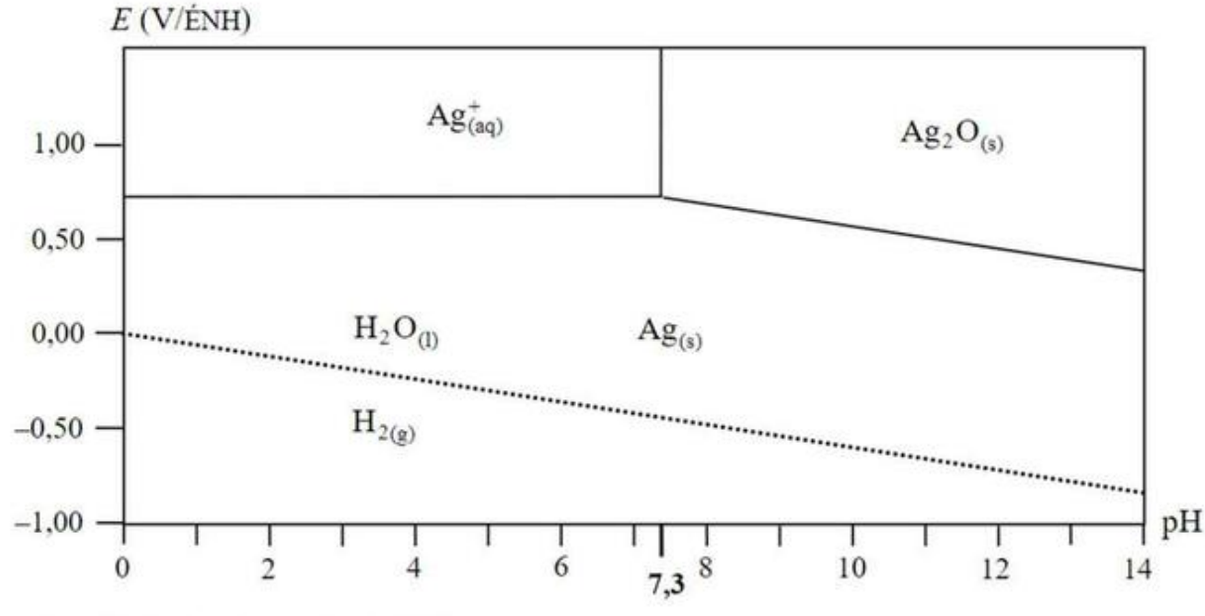
On a superposé au diagramme la droite relative au couple $H_2O_{(l)} / H_{2(g)}$, pour $P_{H_2} = 1$ bar.

1. Établir l'équation de la frontière relative au couple $Ag^+_{(aq)} / Ag_{(s)}$.

2. Quelle est la pente de la frontière relative au couple $Ag_2O_{(s)} / Ag_{(s)}$?

3. Qu'observe-t-on si on élève le pH d'une solution d'ions argent (sans variation de la concentration initiale en ions $Ag^+_{(aq)}$ dans la solution) ? Écrire l'équation de la réaction correspondante.

4. L'argent est-il oxydé par l'eau ?



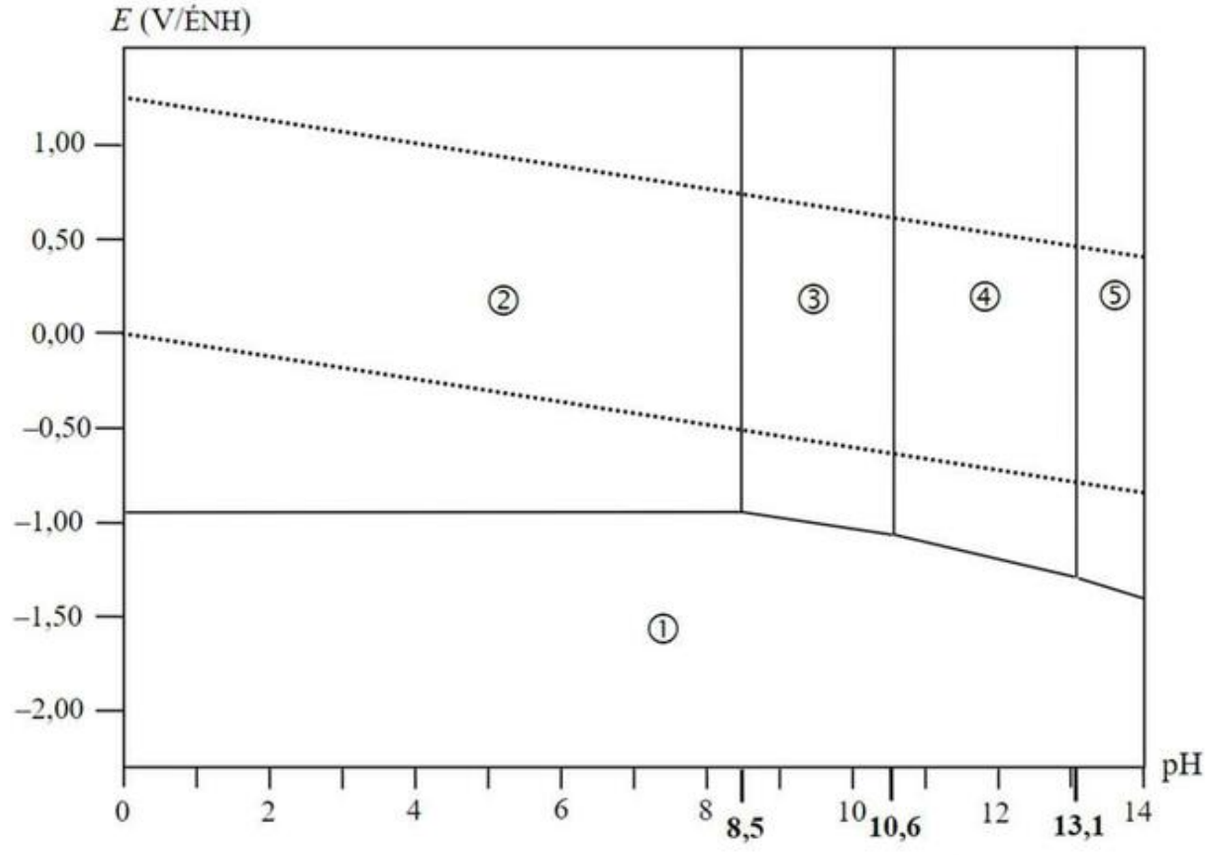
Donnée : $E°(Ag^+_{(aq)} / Ag_{(s)}) = 0{,}80$ V.

❑ Exercice 29.2. Corrosion du zinc

On peut étudier les aspects thermodynamiques de la corrosion du zinc par voie humide à l'aide du diagramme potentiel-pH ci-dessous, tracé à 25 °C pour une concentration de tracé égale à $c_0 = 10^{-6}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ pour les espèces : $Zn_{(s)}$, $HZnO_{2(aq)}^{-}$, $Zn(OH)_{2(s)}$, $ZnO_{2(aq)}^{2-}$, $Zn_{(aq)}^{2+}$. Les conventions de frontière sont les suivantes :

– il y a égalité des concentrations à la frontière entre deux espèces dissoutes ;

– à la frontière entre une espèce dissoute et une espèce solide, la concentration de l'espèce dissoute est prise égale à c_0.



1. Montrer que les espèces $HZnO_{2(aq)}^{-}$, $Zn(OH)_{2(s)}$, $ZnO_{2(aq)}^{2-}$ et $Zn_{(aq)}^{2+}$ sont liées par des équilibres acido-basiques. Écrire les équations des réactions correspondantes. Classer ces espèces par basicité croissante.

2. Les différents domaines du diagramme étant numérotés de ① à ⑤, attribuer à chaque espèce son domaine de stabilité. Préciser s'il s'agit de domaines de prédominance ou d'existence.

3. On a superposé au diagramme les droites délimitant le domaine de stabilité thermodynamique de l'eau. Indiquer les couples Ox/Red correspondants et établir l'équation des deux droites. On considèrera pour les espèces gazeuses une pression partielle $P_i = 1$ bar.

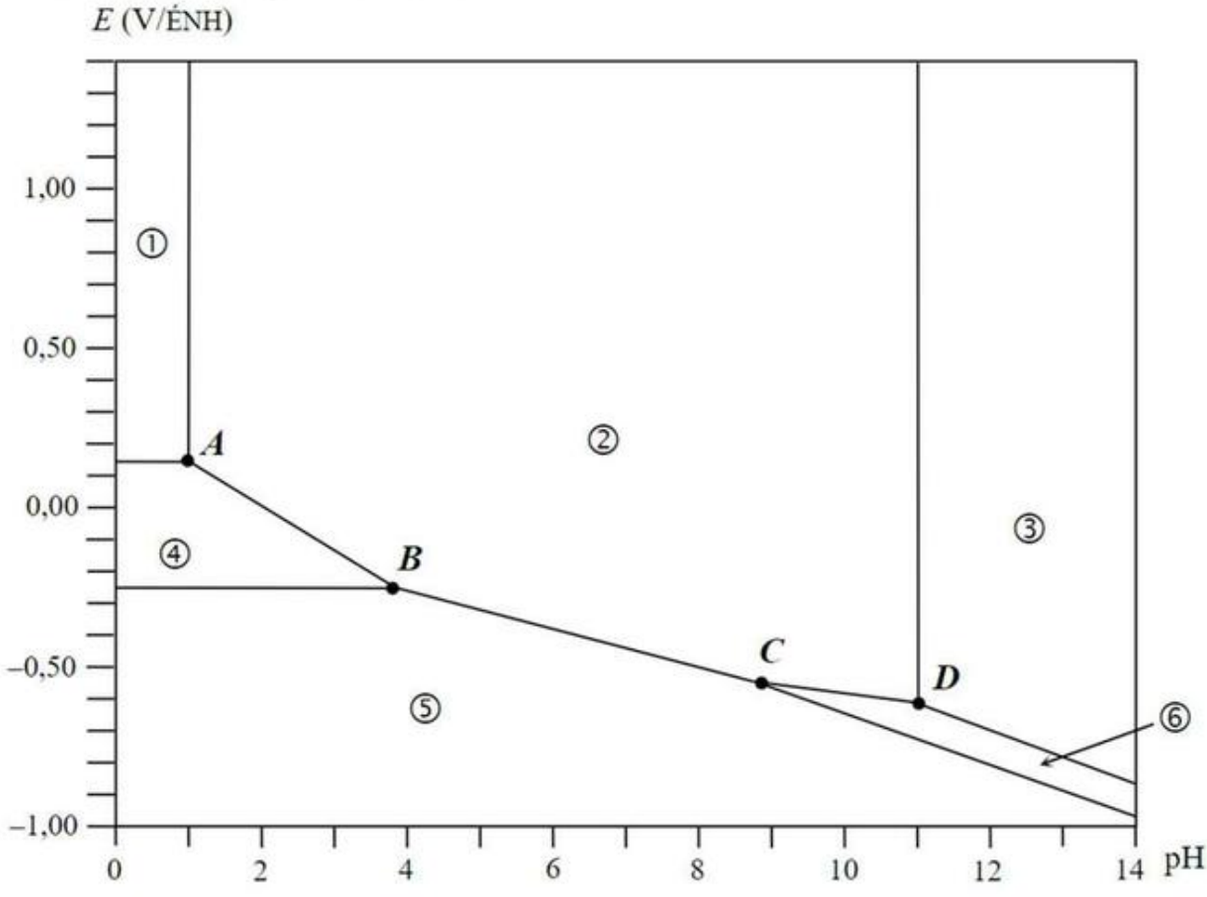
4. On place une lame de zinc dans une solution aqueuse désaérée. Le zinc est-il corrodé ? Écrire la (ou les) équation(s) de réaction associée(s).

5. Le diagramme permet-il de savoir si la corrosion du zinc a bien lieu, et si elle se déroule rapidement ?

Données : $E^\circ(O_2/H_2O) = 1{,}23$ V ; $E^\circ(H^+/H_2) = 0{,}00$ V.

❑ Exercice 29.3. Diagramme potentiel-pH de l'étain

Le diagramme potentiel-pH de l'étain, représenté ci-dessous de façon simplifiée, a été établi à 25 °C, en prenant en compte uniquement les espèces suivantes : $Sn_{(s)}$, $SnO_{2(s)}$, $HSnO^-_{2(aq)}$, $SnO^{2-}_{3(aq)}$, $Sn^{2+}_{(aq)}$, $Sn^{4+}_{(aq)}$. Le tracé a été réalisé en considérant que la somme des concentrations en espèces dissoutes est égale à $c_0 = 10^{-3}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; il y a égalité des concentrations à la frontière entre deux espèces dissoutes.



1. Les différents domaines du diagramme étant numérotés de ① à ⑥, attribuer à chaque espèce de l'étain son domaine de stabilité.
2. Déduire du diagramme la valeur du potentiel d'oxydo-réduction standard du couple Sn^{4+}/Sn^{2+} et déterminer la pente de la droite AB.
3. Retrouver par le calcul la valeur du pH au point B. Qu'observe-t-on en ce point ? Écrire l'équation de la réaction correspondante.
4. Montrer que le couple $SnO_{2(s)}/SnO^{2-}_{3(aq)}$ est un couple acide/base et déduire du diagramme la valeur de sa constante d'acidité K_a, exprimée pour un proton échangé ; donner la valeur de pK_a.

Données : $E°(Sn^{2+}/Sn) = -0{,}14$ V ; $E°(SnO_2/Sn^{2+}) = +0{,}14$ V.

D'après E3A-Polytech

❑ Exercice 29.4. Diagramme potentiel-pH du mercure

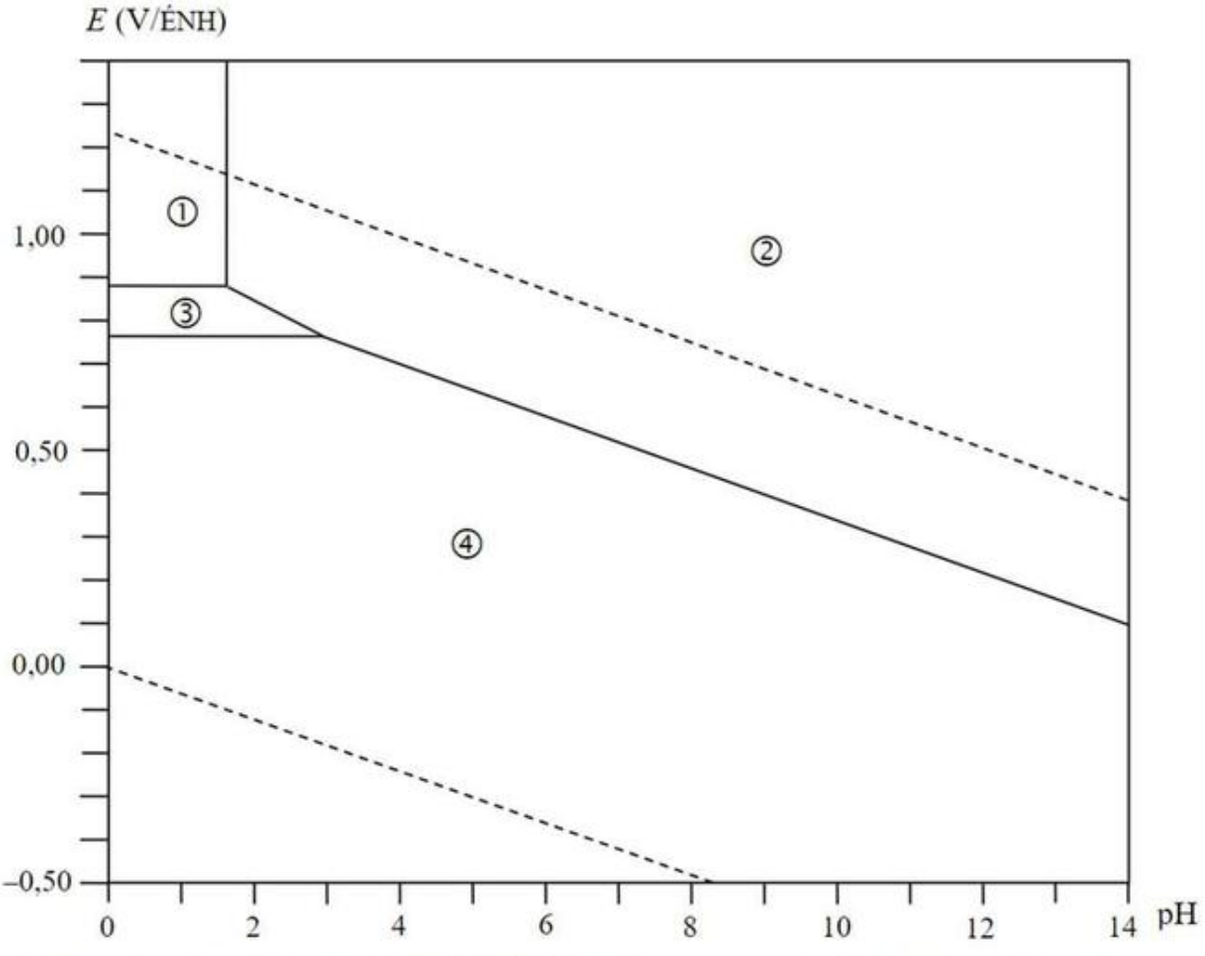
On donne le diagramme du mercure, établi en tenant compte des espèces $Hg^{2+}(aq)$, Hg(l), HgO(s), $Hg_2^{2+}(aq)$.

Le diagramme a été tracé à 298 K avec les conventions aux frontières suivantes :

– on fixe la concentration totale en ions mercure dissous (I) et (II) égale à $c_{tra} = 10^{-1}\ mol \cdot L^{-1}$;

– quand deux espèces solubles apparaissent dans un équilibre chimique, le rapport de leurs concentrations est fixé à 1 ;

– s'il s'agit d'un équilibre entre une espèce solide et une espèce soluble, la concentration de l'espèce soluble est choisie égale à $c_{tra} = 10^{-1}\ mol \cdot L^{-1}$.



1. Attribuer les domaines de stabilité ① à ④ du diagramme aux différentes espèces du mercure. Préciser s'il s'agit de domaines d'existence ou de prédominance.

2. Le mercure est-il stable dans l'eau désaérée ? dans l'eau aérée ?

3. Établir, à partir des données et des conventions de tracé fournies, l'équation des frontières ①/③ et ①/②. Calculer la pente de la frontière ②/③.

4. Qu'observe-t-on lorsqu'on augmente le pH d'une solution aqueuse contenant l'espèce ③ ? Écrire l'équation de réaction correspondante. Comment se nomme ce type de transformation ?

5. Lorsqu'on recherche des ions du mercure en solution aqueuse, on peut opérer de la manière suivante :

– déposer une goutte de solution aqueuse acidifiée contenant éventuellement des ions du mercure sur une lame de cuivre préalablement polie ;
– attendre quelques instants et laver la lame de cuivre à l'eau ;
– s'il se forme un amalgame blanc brillant sur la lame de cuivre, la solution contient alors des ions du mercure.

a) Pourquoi la solution contenant des ions du mercure doit-elle être acidifiée ? Pourquoi doit-on attendre ?

b) Pour quels ions du mercure ce protocole est-il valable ? Écrire les équations des réactions possibles en milieu acide.

Données : $E°(Hg^{2+}/Hg_2^{2+}) = 0{,}92\ V$; $E°(Hg_2^{2+}/Hg) = 0{,}80\ V$; $E°(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\ V$;

pour l'équation (1) $Hg_{(aq)}^{2+} + 3\,H_2O_{(l)} = HgO_{(s)} + 2\,H_3O_{(aq)}^{+}$ $\quad K_1° = 10^{-2,3}$.

D'après CCINP

■ Dosages d'oxydo-réduction

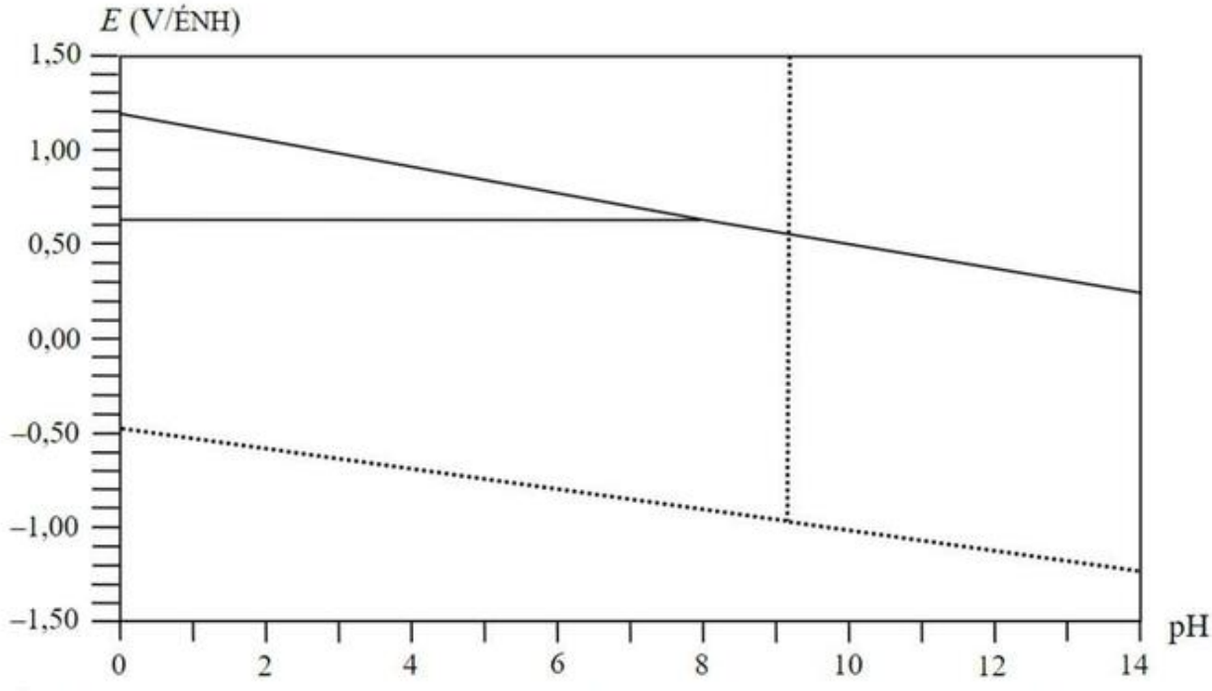
❑ Exercice 29.5. Dosage en retour des ions borohydrure * *



On cherche à vérifier la pureté d'un produit commercial de borohydrure de sodium $NaBH_4$. Pour cela, on réalise un dosage en retour des ions borohydrure BH_4^- par iodométrie.
Le protocole est le suivant.
– On ajoute lentement 0,189 g de borohydrure de sodium commercial dans 80,0 mL d'une solution de soude $(Na^+ + HO^-)$ de concentration $c_b = 0{,}1\ mol \cdot L^{-1}$, contenant 10,0 mmol d'iodate de potassium KIO_3.
– Après 10 min de réaction, on transvase la solution dans une fiole jaugée de 100 mL.

On complète au trait de jauge avec de la soude à $0{,}1\ mol \cdot L^{-1}$. On prélève 10,0 mL de cette solution, que l'on introduit dans une fiole jaugée de 50 mL, et on complète avec de l'eau distillée. On ajoute 1,0 g d'iodure de potassium KI (en excès), puis on acidifie la solution avec de l'acide chlorhydrique $(H_3O^+ + Cl^-)$ de concentration $2\ mol \cdot L^{-1}$, jusqu'à pH = 1. Le diiode formé est dosé par une solution de thiosulfate de sodium $(2\,Na^+ + S_2O_3^{2-})$ de concentration $c_t = 0{,}100\ mol \cdot L^{-1}$. La décoloration de la solution est observée pour un volume versé $V_{éq} = 21\ mL$.

1. Sur la figure ci-après, on a superposé les diagrammes potentiel-pH pour les espèces de l'iode, I^-, IO_3^- et I_2, et pour les espèces du bore, BH_4^-, $B(OH)_3$ et $B(OH)_4^-$. Indiquer dans chaque domaine la nature de l'espèce prédominante.



2. Écrire les équations des trois réactions d'oxydo-réduction mises en jeu dans le protocole expérimental.

3. Quel est le rôle de l'ajout d'ions iodure ? Pourquoi acidifie-t-on la solution pour obtenir le diiode ?

4. Calculer la quantité de matière de borohydrure de sodium dans la prise d'essai de 10 mL.

5. Déterminer la pureté du borohydrure de sodium commercial, définie par :

$$p = \frac{\text{masse de } NaBH_4}{\text{masse de l'échantillon}}.$$

Données : $M(NaBH_4) = 37{,}8\ g \cdot mol^{-1}$; $E^\circ(S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}) = 0{,}09\ V$;

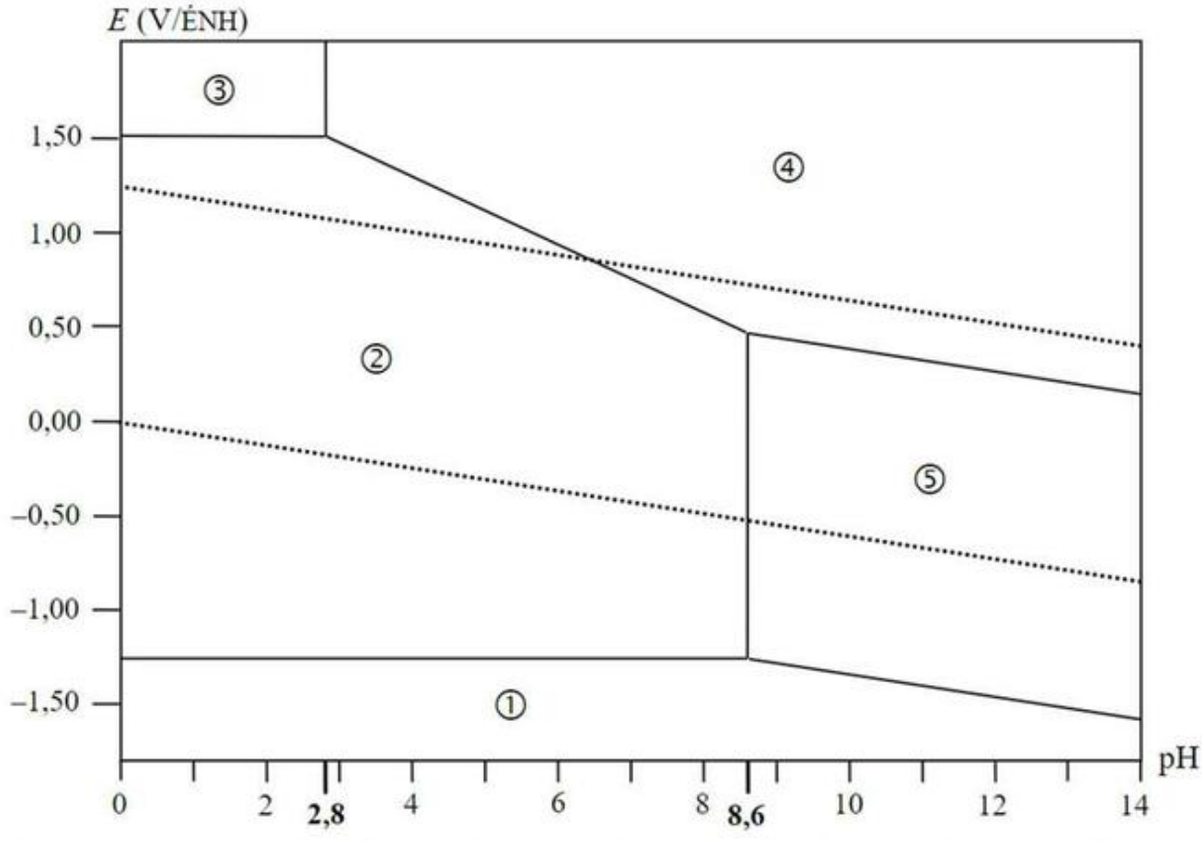
$pK_a(B(OH)_3 / B(OH)_4^-) = 9{,}2$; électronégativité $\chi(H) > \chi(B)$.

D'après Mines-Ponts

❑ Exercice 29.6. Dosage du dioxygène dissous dans l'eau par la méthode de Winkler

L'eau sous forme liquide est un élément essentiel à la vie telle que nous la connaissons. Néanmoins, elle doit aussi contenir une quantité suffisante de dioxygène dissous pour réguler la nature de la faune et de la flore.

On donne le diagramme potentiel-pH du manganèse à 298 K, pour une concentration totale en espèces dissoutes de $10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$. On s'intéresse aux espèces suivantes : $Mn_{(s)}$, $Mn(OH)_{3(s)}$, Mn^{2+}, $Mn(OH)_{2(s)}$ et Mn^{3+}. On superpose en pointillés le diagramme E-pH de l'eau.



1. Préciser le nombre d'oxydation du manganèse dans chacune des formes envisagées. En déduire quelles espèces correspondent à chacun des domaines numérotés de ① à ⑤.

2. Rappeler les deux demi-équations d'oxydo-réduction associées aux couples de l'eau. En déduire les deux équations des droites qui délimitent le domaine de stabilité de l'eau, avec la convention $P(H_2) = P(O_2) = 1$ bar, à $T = 298$ K.

3. D'après les positions des domaines de prédominance ou d'existence des différentes espèces liées au manganèse, déterminer les valeurs approchées du produit de solubilité de $Mn(OH)_2$ et du potentiel standard d'oxydo-réduction du couple $Mn^{2+}/Mn_{(s)}$.

4.a) Lorsqu'on verse un peu de poudre de manganèse dans de l'eau légèrement acidifiée, on observe un dégagement gazeux. De quel gaz s'agit-il ? Justifier.

b) Avec la même expérience effectuée en milieu basique ($pH \approx 11$), on n'observe aucun dégagement gazeux. Expliquer.

Dosage du dioxygène dissous



On détaille ci-après une méthode de dosage du dioxygène dissous que l'on peut attribuer au chimiste hongrois Lajos WINKLER (1863-1939).

5. *Première étape*

On remplit d'eau à doser une fiole de 250 mL jusqu'à son trait de jauge. On y place un barreau aimanté. On ajoute ensuite quelques pastilles de soude et 2,00 g de chlorure de manganèse.

On bouche immédiatement la fiole jaugée avant d'agiter jusqu'à dissolution des réactifs.

a) Justifier cette opération.

b) Écrire l'équation de la réaction entre la soude et le manganèse(II). Le composé obtenu est-il soluble ?

c) Écrire l'équation de la réaction entre le composé précédent et le dioxygène dissous dans l'eau. Justifier, par l'analyse du diagramme potentiel-pH, l'utilisation de la soude.

6. *Deuxième étape*

On ouvre la fiole jaugée au bout de 30 minutes, on verse son contenu dans un erlenmeyer et on ajoute immédiatement un peu d'acide sulfurique concentré et 1,00 g d'iodure de potassium.

a) Justifier pourquoi on doit attendre 30 minutes avant d'effectuer cette seconde étape. Quelles précautions indispensables, liées à la sécurité, doit-on prendre lors de cette deuxième étape ?

b) Après addition de l'acide sulfurique, sous quelle forme se trouve le manganèse(III) ?

c) Écrire l'équation de la réaction entre le manganèse(III) et les ions iodure.

d) En fait, le diiode est peu soluble dans l'eau, mais soluble dans une solution contenant des ions iodure. On obtient alors un ion complexe I_3^-. La solution est alors limpide et de couleur jaune. Quelle équation doit-on écrire en toute rigueur pour cette deuxième étape ?

7. *Troisième étape*

On prélève alors un volume $V_0 = 100$ mL de cette solution et on la dose par une solution de thiosulfate de sodium de concentration $C = 1{,}50 \cdot 10^{-2}$ mol·L^{-1}. On utilise du thiodène comme indicateur de fin de réaction (il donne une coloration bleue à la solution en présence de diiode).

a) Quel instrument de verrerie peut-on utiliser pour mesurer ce prélèvement ?

Le dosage effectué cet hiver nous a donné un volume à l'équivalence : $V_{éq} = 15{,}3$ mL avec une incertitude de 0,5 mL.

b) Écrire l'équation de la réaction entre les ions thiosulfate et les ions I_3^-.

c) En déduire la concentration du dioxygène dissous dans l'eau. On précisera l'incertitude relative associée à ce calcul.

d) Les quantités de chlorure de manganèse et d'iodure de potassium introduites initialement étaient-elles suffisantes ?

e) Le même dosage, effectué au printemps, nous avait fourni une concentration $[O_2] = 4{,}32 \cdot 10^{-4}$ mol·L^{-1} avec une incertitude de 3 %. Ce résultat est-il en accord avec le dosage réalisé cet hiver ? Sinon commenter.

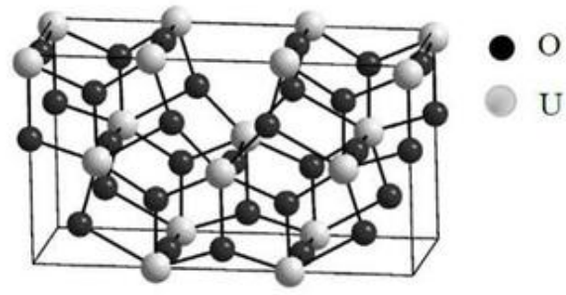
Données : masse molaire du chlorure de manganèse ($MnCl_2, 4H_2O$) 198 g·mol^{-1} ;
masse molaire de l'iodure de potassium (KI) 166 g·mol^{-1} ; $E°(I_{2(aq)}/I^-) = 0{,}62$ V ;
$E°(S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}) = 0{,}08$ V ; $E°(O_2/H_2O) = 1{,}23$ V ; $E°(H^+/H_2) = 0{,}00$ V.

D'après CCINP

■ Hydrométallurgie

❑ Exercice 29.7. Traitement d'un minerai d'uranium

Les centrales électriques nucléaires utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium-235. Le combustible est obtenu par traitement d'un minerai d'uranium : le principal minerai d'uranium est la pechblende, qui contient essentiellement U_3O_8 (dont la maille cristalline est représentée ci-contre).



Les premières étapes consistent, après extraction du minerai dans la mine, à un concassage puis à un broyage afin de le réduire sous forme de fine poudre (450 µm environ) avec addition d'eau. La poudre issue du minerai subit une attaque par l'acide sulfurique en présence d'un oxydant puissant : le chlorate de sodium ($Na^+ + ClO_3^-$).

1. Quel est le degré d'oxydation de l'uranium dans UO_2 et UO_3 ?

2. En supposant que la pechblende U_3O_8 est en fait un mélange des deux oxydes précédents, déduire sa composition.

En présence d'eau, on travaillera avec les espèces $U_{(s)}$, U^{3+}, U^{4+}, UO_2^{2+} , $U(OH)_{4(s)}$ et $UO_2(OH)_{2(s)}$. Le diagramme potentiel-pH (pour $C_{tra} = 1\,mol\cdot L^{-1}$) est fourni ci-après.

3. Attribuer chaque domaine ① à ⑥ à une espèce de l'uranium. On justifiera rapidement. Distinguer les domaines d'existence des domaines de prédominance.

4. Calculer les équations des deux frontières verticales.

5. Déterminer les pentes des segments séparant ② et ⑥ d'une part, ① et ⑥ d'autre part.

6. En quoi le point A est-il particulier ? Écrire la réaction que subit ② au-delà de ce point.

7. Calculer le potentiel du couple ClO_3^- / Cl^- en fonction du pH et superposer le graphe correspondant au diagramme potentiel-pH de l'uranium.

8. Sachant qu'on travaille en excès d'acide sulfurique et de chlorate de sodium, sous quelle forme trouvera-t-on l'uranium à la fin de cette étape ?

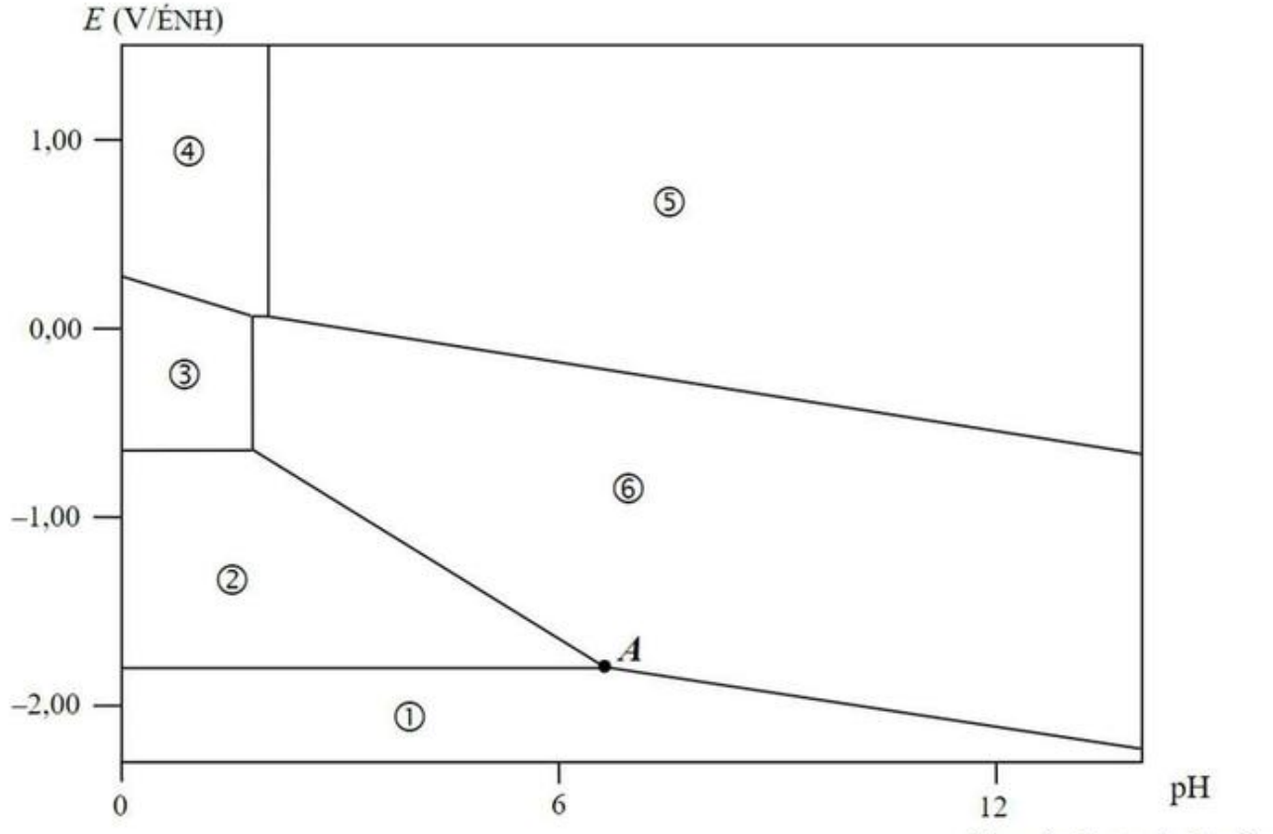
9. Écrire l'équation-bilan de la réaction de UO_2 avec ClO_3^- en milieu acide.

Après une série de transformations menant au fluorure UF_4, une réduction par voie sèche permet l'obtention d'uranium métallique.

Données : potentiel standard d'oxydo-réduction $E°(ClO_3^- / Cl^-) = 1,45\,V$ à $pH = 0$;

produits de solubilité $U(OH)_{4(s)} = U^{4+} + 4\,HO^-$ $K_{s1} = 10^{-49}$;

$UO_2(OH)_{2(s)} = UO_2^{2+} + 2\,HO^-$ $K_{s2} = 10^{-24}$.



D'après Centrale-Supélec

❑ Exercice 29.8. Traitement hydrométallurgique d'un minerai de cuivre

Les minerais de cuivre sont de deux types principaux : les minerais dits sulfurés, dans lesquels l'élément cuivre est associé à l'élément soufre et les minerais dits oxydés, dans lesquels il est associé à l'élément oxygène. On s'intéresse ici au traitement d'un minerai contenant l'élément cuivre uniquement sous la forme de l'oxyde de cuivre $CuO_{(s)}$. Le minerai est tout d'abord finement broyé, puis subit une lixiviation sulfurique par une solution d'acide sulfurique (acide fort) de concentration $0{,}8\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, en excès.

1. Quel est le rôle de l'opération de lixiviation ? Écrire l'équation de la réaction correspondante.

Une des principales impuretés métalliques contenues dans le minerai de départ correspond à l'élément fer. Ce fer passe en solution lors de la lixiviation, sous forme d'ions Fe^{2+}. Avant de réaliser l'électrolyse de la solution obtenue, il convient de la purifier de ces ions Fe^{2+}.
On a superposé sur un même diagramme potentiel-pH les diagrammes du fer et du cuivre (en trait pointillé celui du fer et en trait plein celui du cuivre). La convention pour le tracé est une concentration totale en espèces solubles de $1\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ pour le cuivre et de $0{,}010\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ pour le fer. Les espèces prises en compte pour le fer sont $Fe_{(s)}$, $Fe^{2+}_{(aq)}$, $Fe^{3+}_{(aq)}$, $Fe(OH)_{2(s)}$ et $Fe(OH)_{3(s)}$ et pour le cuivre $Cu_{(s)}$, $Cu^{2+}_{(aq)}$, $Cu_2O_{(s)}$ et $Cu(OH)_{2(s)}$. Ce sont toutes des espèces qui possèdent un domaine de stabilité.

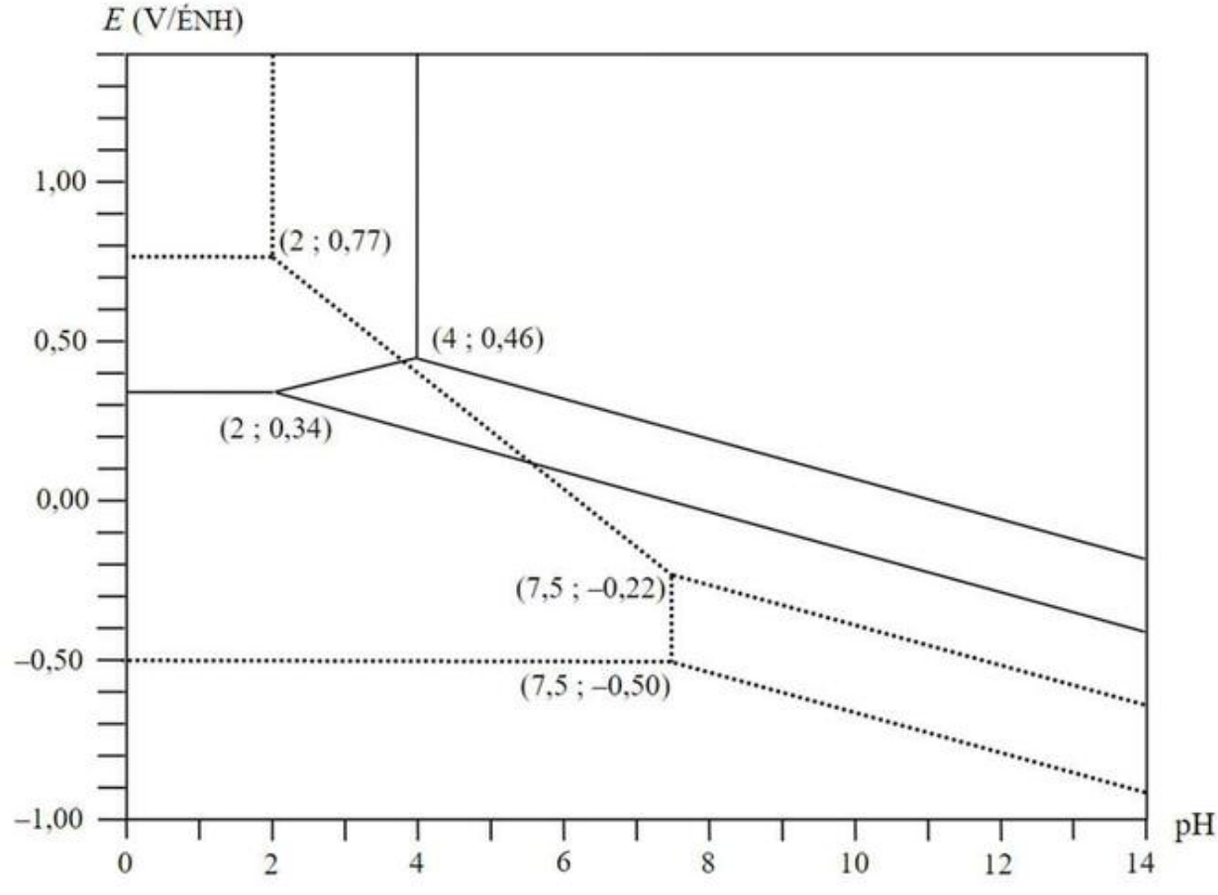
2. Placer les différentes espèces dans les différents domaines de ce diagramme, en justifiant votre choix.

3. Calculer le potentiel standard d'oxydo-réduction du couple $Cu(OH)_2/Cu_2O$ et le produit de solubilité de $Cu(OH)_2$, en utilisant à chaque fois les coordonnées d'un point commun à différents domaines du diagramme.

4. Placer sur le diagramme les deux droites correspondant aux couples de l'eau, les pressions partielles des gaz étant égales à 1 bar. On donnera au préalable les deux équations des droites.

5. On insuffle de l'air ou du dioxygène pur dans la solution obtenue après lixiviation. Écrire l'équation de la réaction ayant lieu. Calculer sa constante d'équilibre.

6. Proposer alors une opération à réaliser pour pouvoir séparer ensuite l'élément fer de l'élément cuivre par simple filtration.



D'après Centrale-Supélec

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 29.3. Question 1 : écrire des équations acido-basiques pour classer les espèces associées à un même NO de l'étain par basicité croissante. Question 4 : la constante d'acidité est la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction entre l'acide du couple et l'eau.
Exercice 29.5. Question 1 : dans les espèces borées, c'est l'élément H dont le NO change. Question 4 : calculer la quantité de matière initiale d'ions iodate dans le prélèvement de 10 mL, puis faire un bilan de matière pour les différentes réactions, totales.
Exercice 29.6. Question 4.b : la formation d'une espèce oxydée solide à la surface du manganèse protège le métal de l'oxydation. Question 7.d : vérifier que le manganèse(II) est en excès par rapport au dioxygène et que les ions iodure sont en excès par rapport aux ions Mn^{3+} dans la première transformation.
Exercice 29.7. Question 9 : combiner l'équation de dissolution de UO_2 et l'équation d'oxydation de U^{4+} par les ions chlorate.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai

1. La demi-équation relative au couple $I_{2(aq)}/I^-_{(aq)}$ ne fait pas intervenir de protons, le potentiel d'oxydo-réduction de ce couple ne dépend donc pas du pH.

2. Pour le couple $O_{2(g)}$ / H_2O : $E = 1,23 - 0,06\,\text{pH}$ (en V) . Le potentiel est une fonction décroissante du pH, le pouvoir oxydant de $O_{2(g)}$ diminue lorsque le pH augmente.

4. L'ordonnée à l'origine de la frontière relative à un couple Ox / Red dépend du potentiel standard, mais peut aussi faire intervenir la concentration de tracé. Il faut écrire la relation de Nernst pour le couple considéré afin de conclure.

7. Une transformation d'oxydo-réduction entre deux espèces chimiques est favorisée si leurs domaines de stabilité sont *disjoints* (aucune partie commune).

❑ Les erreurs classiques

– Bien respecter les conventions de tracé fournies dans l'énoncé : elles peuvent varier d'un énoncé à l'autre.
– Pour déterminer l'équation d'une frontière redox, il faut écrire la demi-équation en milieu acide si la valeur du potentiel standard du couple est fournie à pH = 0.
– Ne pas parler de domaine de prédominance pour une espèce chimique solide, liquide ou gazeuse : parler de domaine de stabilité (ou d'existence pour un solide).
– Ne pas confondre dismutation et médiamutation, inverses l'une de l'autre.

Exercice 29.1

1. Pour le couple $Ag^+_{(aq)} / Ag_{(s)}$, la demi-équation s'écrit : $Ag^+_{(aq)} + e^- = Ag_{(s)}$

D'après la relation de Nernst : $E = E^\circ_{Ag^+/Ag} + 0,06 \log \frac{[Ag^+]}{c^\circ} = 0,80 + 0,06 \log \frac{[Ag^+]}{c^\circ}$.

AN $\boxed{E = 0,74 \text{ V}}$ avec $[Ag^+] = c_{Ag^+} = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

2. Pour le couple $Ag_2O_{(s)} / Ag_{(s)}$, la demi-équation s'écrit :

$$Ag_2O_{(s)} + 2\ H^+ + 2\ e^- = 2\ Ag_{(s)} + H_2O_{(l)}$$

D'après la relation de Nernst : $E = E^\circ_{Ag_2O/Ag} + \frac{0,06}{2} \log \frac{[H^+]^2}{(c^\circ)^2} = E^\circ_{Ag_2O/Ag} - 0,06 \cdot \text{pH (en V)}$. La pente de la frontière est donc égale à $\boxed{-0,06 \text{ V}}$ (par unité de pH).

⇨ *Méthode 29.2*

3. D'après le diagramme, si on élève le pH d'une solution d'ions argent, on observe la formation de l'oxyde d'argent(I) $Ag_2O_{(s)}$. L'oxyde apparaît dès que $pH \geq 7,3$.

L'équation de réaction associée à la formation de l'oxyde s'écrit :

$$\boxed{2\ Ag^+_{(aq)} + H_2O_{(l)} = Ag_2O_{(s)} + 2\ H^+}$$

En milieu basique l'équation devient : $\boxed{2\ Ag^+_{(aq)} + 2\ HO^- = Ag_2O_{(s)} + H_2O_{(l)}}$

4. Les domaines de stabilité de $Ag_{(s)}$ et de $H_2O_{(l)}$ possèdent une partie commune quelle que soit la valeur du pH. L'argent n'est donc pas oxydé par l'eau.

⇨ *Méthode 29.5*

De nombreux métaux sont instables dans l'eau car ils sont oxydés par l'eau, à la différence de l'argent. L'argent est qualifié de métal noble.

Exercice 29.2

1. On calcule NO(Zn) = +II dans $Zn^{2+}_{(aq)}$, $HZnO^-_{2(aq)}$, $Zn(OH)_{2(s)}$ et $ZnO^{2-}_{2(aq)}$. Ces quatre espèces sont associées au même nombre d'oxydation de l'élément zinc. Montrons qu'elles sont liées par des équilibres acido-basiques. On peut écrire les équations suivantes, permettant de classer les espèces par basicité croissante.

$ZnO^{2-}_{2(aq)}$ est plus basique que $HZnO^-_{2(aq)}$ d'après l'équation suivante : $ZnO^{2-}_2 + H^+ = HZnO^-_2$

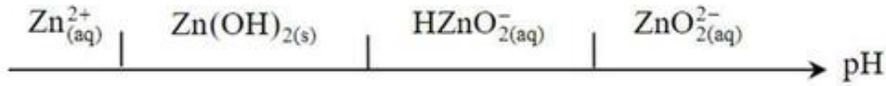
$HZnO^-_{2(aq)}$ est plus basique que $Zn(OH)_{2(s)}$ d'après l'équation suivante :

$$HZnO^-_2 + H^+ = Zn(OH)_{2(s)}$$

$Zn(OH)_{2(s)}$ est plus basique que Zn^{2+} d'après l'équation suivante :

$$Zn(OH)_{2(s)} + 2\ H^+ = Zn^{2+} + 2\ H_2O$$

On peut donc classer les espèces selon :



2. Comme NO(Zn) = 0 dans $Zn_{(s)}$, on peut associer les domaines de stabilité aux espèces du zinc : ① $Zn_{(s)}$; ② $Zn^{2+}_{(aq)}$; ③ $Zn(OH)_{2(s)}$; ④ $HZnO^-_{2(aq)}$; ⑤ $ZnO^{2-}_{2(aq)}$. Les domaines ① et ③, relatifs à des espèces chimiques solides, sont des domaines d'existence. Les domaines ② , ④ et ⑤, relatifs à des espèces chimiques dissoutes du zinc, sont des domaines de prédominance.

3. L'eau est un ampholyte redox associé aux couples : $H_2O / H_{2(g)}$ (ou $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$ en milieu acide) et $O_{2(g)} / H_2O$.

Pour le couple $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$, la demi-équation s'écrit : $2\,H^+_{(aq)} + 2\,e^- = H_{2(g)}$

$$E = E^\circ_{H^+/H_2} + \frac{0,06}{2}\log\frac{[H^+]^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{H_2}} \text{ soit } \boxed{E = -0,06\,\text{pH (en V)}} \text{ avec } P_{H_2} = P^\circ = 1\,\text{bar}.$$

Pour le couple $O_{2(g)} / H_2O$: $O_{2(g)} + 4\,H^+_{(aq)} + 4\,e^- = 2\,H_2O$

$$E = E^\circ_{O_2/H_2O} + \frac{0,06}{4}\log\frac{[H^+]^4 P_{O_2}}{(c^\circ)^4 P^\circ} \text{ soit } \boxed{E = 1,23 - 0,06\,\text{pH (en V)}} \text{ avec } P_{O_2} = P^\circ = 1\,\text{bar}.$$

⇨ *Méthode 29.4*

4. Les domaines de stabilité de $Zn_{(s)}$ et de $H_2O_{(l)}$ sont disjoints quelle que soit la valeur du pH. Le zinc est donc corrodé dans l'eau désaérée. La transformation chimique observée dépend de la valeur du pH.

Par lecture graphique, on voit que pour $pH \leq 8,5$ le zinc est oxydé en ions Zn^{2+}. L'équation de la réaction d'oxydation de Zn en Zn^{2+} par l'eau s'écrit :

$$\begin{array}{r} Zn = Zn^{2+} + 2\,e^- \\ 2\,H^+ + 2\,e^- = H_2 \\ \hline Zn_{(s)} + 2\,H^+ = Zn^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)} \end{array}$$

Pour $8,5 \leq pH \leq 10,6$, le zinc est oxydé en $Zn(OH)_{2(s)}$. L'équation de la réaction s'écrit :

$$\begin{array}{r} Zn + 2\,H_2O = Zn(OH)_2 + 2\,H^+ + 2\,e^- \\ 2\,H^+ + 2\,e^- = H_2 \\ \hline Zn_{(s)} + 2\,H_2O_{(l)} = Zn(OH)_{2(s)} + H_{2(g)} \end{array}$$

Pour $10,6 \leq pH \leq 13,1$, le zinc est oxydé en $HZnO^-_{2(aq)}$. L'équation de la réaction s'écrit :

$$\begin{array}{r} Zn + 2\,H_2O = HZnO^-_{2(aq)} + 3\,H^+ + 2\,e^- \\ 2\,H^+ + 2\,e^- = H_2 \\ \hline Zn_{(s)} + 2\,H_2O_{(l)} = HZnO^-_{2(aq)} + H^+ + H_{2(g)} \end{array}$$

soit en milieu basique : $Zn_{(s)} + H_2O_{(l)} + HO^-_{(aq)} = HZnO^-_{2(aq)} + H_{2(g)}$

Pour $pH \geq 13,1$, le zinc est oxydé en $ZnO^{2-}_{2(aq)}$. L'équation de la réaction s'écrit :

$$Zn + 2\,H_2O = ZnO_{2(aq)}^{2-} + 4\,H^+ + 2\,e^-$$
$$2\,H^+ + 2\,e^- = H_2$$
$$Zn_{(s)} + 2\,H_2O_{(l)} = ZnO_{2(aq)}^{2-} + 2\,H^+ + H_{2(g)}$$

soit en milieu basique : $Zn_{(s)} + 2\,HO_{(aq)}^- = ZnO_{2(aq)}^{2-} + H_{2(g)}$

⇨ *Méthode 29.5*

5. Le diagramme potentiel-pH permet de prévoir si une transformation chimique est thermodynamiquement favorisée ou défavorisée (c'est-à-dire si la constante d'équilibre associée à l'équation de réaction est supérieure ou inférieure à 1), mais ne donne aucune information sur l'aspect cinétique de la transformation. Il ne permet pas de prévoir s'il existe un blocage cinétique (auquel cas la transformation chimique n'est pas observée), ou si la transformation est rapide ou lente.

Exercice 29.3

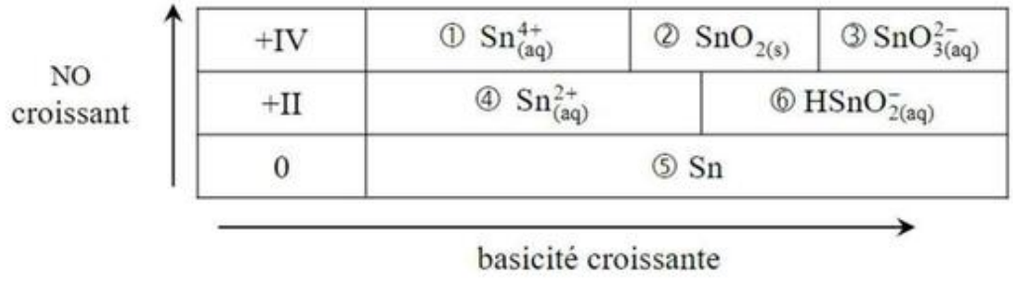
1. On calcule NO(Sn) = 0 dans $Sn_{(s)}$, NO(Sn) = +II dans $Sn_{(aq)}^{2+}$ et $HSnO_{2(aq)}^-$ et NO(Sn) = +IV dans $Sn^{4+}{}_{(aq)}$, $SnO_{2(s)}$ et $SnO_{3(aq)}^{2-}$.

$HSnO_2^-$ est plus basique que Sn^{2+} d'après l'équation suivante : $HSnO_2^- + 3\,H^+ = Sn^{2+} + 2\,H_2O$

SnO_2 est plus basique que Sn^{4+} d'après l'équation suivante : $SnO_2 + 4\,H^+ = Sn^{4+} + 2\,H_2O$

SnO_3^{2-} est plus basique que SnO_2 d'après l'équation suivante : $SnO_3^{2-} + 2\,H^+ = SnO_2 + H_2O$

Établissons le diagramme de principe pour les différentes espèces étudiées.



On peut alors attribuer les domaines de stabilité des différentes espèces.

⇨ *Méthode 29.1*

2. La frontière d'oxydo-réduction associée au couple Sn^{4+}/Sn^{2+} est la frontière ①/④.

Pour ce couple : $Sn^{4+} + 2\,e^- = Sn^{2+}$

donc $E = E^\circ_{Sn^{4+}/Sn^{2+}} + 0{,}03\log\dfrac{[Sn^{4+}]}{[Sn^{2+}]} = E^\circ_{Sn^{4+}/Sn^{2+}}$ car, par convention, $[Sn^{4+}] = [Sn^{2+}]$ à la frontière. On lit donc la valeur de $E^\circ_{Sn^{4+}/Sn^{2+}}$ sur le diagramme sur la frontière ①/④.

On trouve : $E^\circ_{Sn^{4+}/Sn^{2+}} = 0{,}14$ V.

La droite AB est la frontière d'oxydo-réduction associée au couple SnO_2/Sn^{2+}.

Pour ce couple : $SnO_2 + 4\,H^+ + 2\,e^- = Sn^{2+} + 2\,H_2O$

donc $E = E^\circ_{SnO_2/Sn^{2+}} + 0{,}03\log\dfrac{[H^+]^4}{[Sn^{2+}]\cdot(c^\circ)^3} = E^\circ_{SnO_2/Sn^{2+}} - 0{,}03\log[Sn^{2+}] - 0{,}12\cdot pH$.

La pente de la droite AB est donc égale à –0,12 V (par unité de pH).

⇨ *Méthode 29.2*

3. B est le point d'intersection entre les frontières AB et BC. La frontière AB a pour équation : $E_{AB} = E^\circ_{SnO_2/Sn^{2+}} - 0{,}03\log c_0 - 0{,}12\cdot pH = 0{,}23 - 0{,}12\cdot pH$ (en V).

La frontière BC est associée au couple Sn^{2+}/Sn ($Sn^{2+} + 2\ e^- = Sn$) et a pour équation :

$$E_{BC} = E^\circ_{Sn^{2+}/Sn} + 0{,}03\log\frac{[Sn^{2+}]}{(c^\circ)} = E^\circ_{Sn^{2+}/Sn} + 0{,}03\log c_0 = -0{,}23\ V.$$

À l'intersection de ces deux segments, $E_{AB} = E_{BC} \Leftrightarrow 0{,}23 - 0{,}12\cdot pH = -0{,}23$, soit pH = 3,8.

On voit sur le diagramme E-pH qu'au-delà de ce point, Sn^{2+} est instable et se dismute.

⇨ *Méthode 29.6*

Pour tout pH $\in [3{,}8\ ;\ pH_C]$, Sn^{2+} se dismute en $SnO_{2(s)}$ et $Sn_{(s)}$ selon la réaction d'équation :

$$Sn^{2+} + 2\ H_2O = SnO_2 + 4\ H^+ + 2\ e^-$$
$$Sn^{2+} + 2\ e^- = Sn$$
$$2\ Sn^{2+}_{(aq)} + 2\ H_2O = SnO_{2(s)} + Sn_{(s)} + 4\ H^+$$

Au-delà de pH_C, $SnO_{2(s)}$ *et* $Sn_{(s)}$ *ne peuvent coexister et réagissent pour conduire à* $HSnO_{2(aq)}^-$ *selon une réaction de médiamutation.*

4. Écrivons l'équation d'échange protonique qui lie les espèces $SnO_{2(s)}$ et $SnO_{3(aq)}^{2-}$:

$$SnO_{2(s)} + H_2O = SnO_{3(aq)}^{2-} + 2\ H^+$$

soit pour un proton échangé $\frac{1}{2}SnO_{2(s)} + \frac{1}{2}H_2O = \frac{1}{2}SnO_{3(aq)}^{2-} + H^+$ avec $K_a = \dfrac{[SnO_3^{2-}]^{1/2}\cdot[H^+]}{(c^\circ)^{3/2}}$.

À la frontière verticale entre $SnO_{2(s)}$ et $SnO_{3(aq)}^{2-}$ (frontière ②/③) on lit pH = 11.

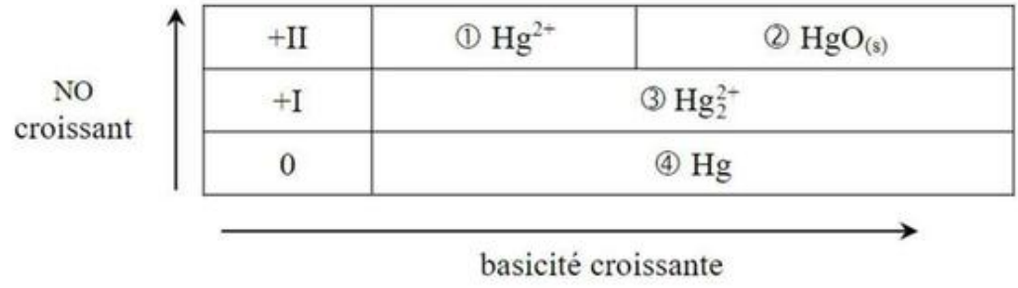
Or à la frontière, on a par convention : $[SnO_3^{2-}] = c_0$, d'où $K_a = (10^{-3})^{1/2}\cdot 10^{-11} = 3{,}2\cdot 10^{-13}$ soit $\boxed{pK_a = -\log K_a = 12{,}5}$.

Exercice 29.4

1. On calcule NO(Hg) = 0 dans $Hg_{(l)}$, NO(Hg) = +I dans $Hg_{2(aq)}^{2+}$ et NO(Hg) = +II dans $Hg^{2+}_{(aq)}$ et $HgO_{(s)}$. $HgO_{(s)}$ est plus basique que Hg^{2+} d'après l'équation suivante :

$$HgO + 2\ H^+ = Hg^{2+} + H_2O$$

Établissons le diagramme de principe pour les différentes espèces étudiées.



On peut alors attribuer les domaines de stabilité des différentes espèces. Il s'agit d'un domaine de prédominance pour les espèces dissoutes ① et ③, d'un domaine d'existence pour les espèces en phase condensée ② et ④.

⇨ *Méthode 29.1*

2. Les domaines de stabilité de $Hg_{(l)}$ et de $H_2O_{(l)}$ possèdent une partie commune quelle que soit la valeur du pH. Le mercure est donc stable dans l'eau désaérée. Dans l'eau aérée, l'oxydant $O_{2(g)}$ est présent. Les domaines de stabilité de $Hg_{(l)}$ et de $O_{2(g)}$ sont disjoints quelle que soit la valeur du pH, le mercure est donc instable en présence de dioxygène.
Par lecture graphique, on voit que pour tout $pH \leq 1{,}6$, le mercure est oxydé en ions Hg^{2+}. L'équation de la réaction d'oxydation du mercure en Hg^{2+} par $O_{2(g)}$ s'écrit :

$$Hg = Hg^{2+} + 2\,e^-$$
$$O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O$$
$$2\,Hg_{(l)} + O_{2(g)} + 4\,H^+ = 2\,Hg^{2+}_{(aq)} + 2\,H_2O$$

Pour tout $pH \geq 1{,}6$, le mercure est oxydé en $HgO_{(s)}$. L'équation de la réaction s'écrit :

$$Hg + H_2O = HgO + 2\,H^+ + 2\,e^-$$
$$O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O$$
$$2\,Hg_{(l)} + O_{2(g)} = 2\,HgO_{(s)}$$

⇨ *Méthode 29.5*

3. La frontière ①/③ est la frontière d'oxydo-réduction associée au couple Hg^{2+}/Hg_2^{2+}.

Pour ce couple : $2\,Hg^{2+} + 2\,e^- = Hg_2^{2+}$ donc $E_{1/3} = E^\circ_{Hg^{2+}/Hg_2^{2+}} + 0{,}03\log\dfrac{[Hg^{2+}]^2}{[Hg_2^{2+}]\cdot c^\circ}$.

Par convention $[Hg^{2+}] = [Hg_2^{2+}]$ et $[Hg^{2+}] + [Hg_2^{2+}] = c_{tra}$, soit $[Hg^{2+}] = [Hg_2^{2+}] = \dfrac{c_{tra}}{2}$ à la frontière. Donc $E_{1/3} = E^\circ_{Hg^{2+}/Hg_2^{2+}} + 0{,}03\log\dfrac{c_{tra}}{2\cdot c^\circ}$. AN $\boxed{E_{1/3} = 0{,}88\ V}$.

La frontière ①/② est la frontière associée au couple acido-basique Hg^{2+}/HgO.
Pour ce couple : $Hg^{2+}(aq) + 3\,H_2O(l) = HgO(s) + 2\,H_3O^+(aq)$ $K_1^\circ = 10^{-2{,}3}$

soit $K_1^\circ = \dfrac{[H_3O^+]^2}{[Hg^{2+}]\cdot c^\circ}$. Par convention $[Hg^{2+}] = c_{tra}$ à la frontière, d'où $[H_3O^+] = \sqrt{K_1^\circ \cdot c_{tra} \cdot c^\circ}$

soit finalement $\text{pH} = \frac{1}{2}(-\log K_1^\circ - \log c_{\text{tra}})$. AN $\boxed{\text{pH} = 1{,}65}$.

La frontière ②/③ est la frontière d'oxydo-réduction associée au couple HgO / Hg_2^{2+}.

Pour ce couple : $2\ HgO + 4\ H^+ + 2\ e^- = Hg_2^{2+} + 2\ H_2O$

donc $E_{2/3} = E^\circ_{HgO/Hg_2^{2+}} + 0{,}03 \log \frac{[H^+]^4}{[Hg_2^{2+}](c^\circ)^3} = E^\circ_{HgO/Hg_2^{2+}} - 0{,}03 \log \frac{[Hg_2^{2+}]}{c^\circ} - 0{,}12 \cdot \text{pH}$ (en V).

La pente de la frontière est donc égale à –0,12 V (par unité de pH).

⇨ *Méthodes 29.2 et 29.3*

4. On observe qu'à partir de $\text{pH} \approx 2{,}8$, l'espèce ③ ne possède plus de domaine de stabilité. Hg_2^{2+} se dismute en $Hg_{(l)}$ et $HgO_{(s)}$ selon la réaction d'équation :

$$Hg_2^{2+} + 2\ e^- = 2\ Hg$$
$$Hg_2^{2+} + 2\ H_2O = 2\ HgO + 4\ H^+ + 2\ e^-$$
$$2\ Hg_{2(aq)}^{2+} + 2\ H_2O_{(l)} = 2\ Hg_{(l)} + 2\ HgO_{(s)} + 4\ H^+_{(aq)}$$
$$\text{ou } Hg_{2(aq)}^{2+} + H_2O_{(l)} = Hg_{(l)} + HgO_{(s)} + 2\ H^+_{(aq)}$$

⇨ *Méthode 29.6*

5. a) La solution est acidifiée afin d'éviter la précipitation de l'oxyde de mercure $HgO_{(s)}$. En effet, on cherche à mettre en évidence les ions du mercure éventuellement présents : ceux-ci vont oxyder la lame métallique de cuivre. Cette réaction met en jeu des réactifs n'appartenant pas à la même phase ; elle est lente, d'où la nécessité d'attendre quelques instants.

b) Pour le couple $Cu^{2+}_{(aq)}/Cu_{(s)}$, de demi-équation $Cu^{2+} + 2e^- = Cu_{(s)}$, en adoptant la même convention de tracé que pour le mercure, le potentiel d'oxydo-réduction s'écrit :

$E_{Cu^{2+}/Cu} = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} + 0{,}03 \log \frac{[Cu^{2+}]}{c^\circ} = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} + 0{,}03 \log \frac{c_{\text{tra}}}{c^\circ}$, soit $E_{Cu^{2+}/Cu} = 0{,}31$ V.

Superposons la droite d'équation $E_{Cu^{2+}/Cu} = 0{,}31$ V au diagramme E-pH du mercure. On voit que le domaine d'existence du cuivre et les domaines de prédominance des ions Hg^{2+} et Hg_2^{2+} sont disjoints. Les réactions d'oxydation du cuivre par les deux ions du mercure sont donc thermodynamiquement favorisées. Le protocole est donc valable pour mettre en évidence les ions Hg^{2+} et Hg_2^{2+}. L'oxydation de la lame de cuivre par les ions Hg(+I) et Hg(+II) conduit à $Hg_{(l)}$, qui forme un amalgame avec le cuivre. Si on souhaite faire intervenir l'amalgame dans les équations de réaction, on peut écrire les équations suivantes :

$$Hg_{2(aq)}^{2+} + 3\ Cu_{(s)} = 2\ Cu(Hg) + Cu^{2+}_{(aq)} \quad \text{et} \quad Hg^{2+}_{(aq)} + 2\ Cu_{(s)} = Cu(Hg) + Cu^{2+}_{(aq)}$$

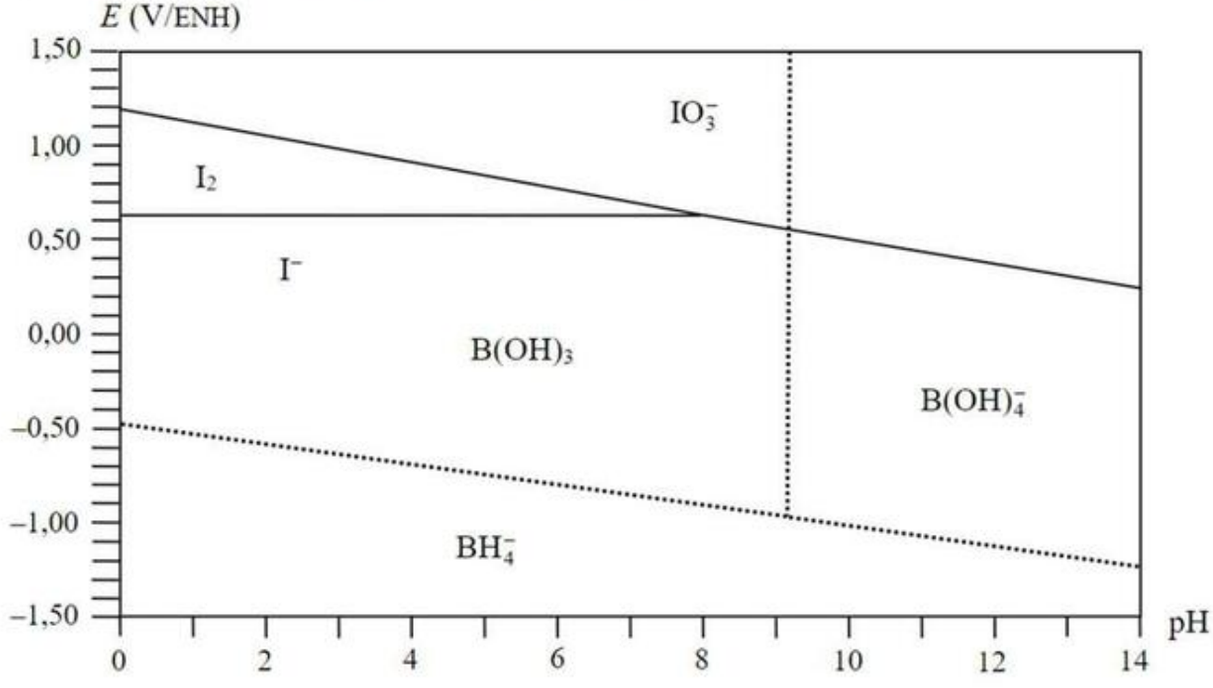
Exercice 29.5

1. Pour les espèces de l'iode, on calcule NO(I) = –I dans I^-, NO(I) = 0 dans I_2 et NO(I) = +V dans IO_3^-. Considérons à présent les espèces borées : dans BH_4^-, le bore est lié à l'hydrogène plus électronégatif, donc l'élément hydrogène est au nombre d'oxydation NO(H) = –I et le bore au nombre d'oxydation NO(B) = +III. Dans $B(OH)_3$ et $B(OH)_4^-$, le bore est lié à l'oxygène plus électronégatif que lui. Par conséquent, dans ces deux édifices, l'élément hydrogène est au

nombre d'oxydation NO(H) = +I et le bore au nombre d'oxydation NO(B) = +III. De plus, $B(OH)_4^-$ est plus basique que $B(OH)_3$.

> *On constate que pour les espèces borées, le nombre d'oxydation du bore ne varie pas. C'est l'élément* H *dont le nombre d'oxydation varie.*

On peut alors attribuer les différents domaines de stabilité :



2. Dans un premier temps, les ions borohydrure réagissent avec les ions iodate en milieu basique. La superposition des diagrammes *E*-pH montre que la transformation est thermodynamiquement favorisée puisque les domaines de prédominance de BH_4^- et IO_3^- sont disjoints. En milieu basique, l'oxydation de BH_4^- conduit à $B(OH)_4^-$. L'équation de la réaction s'écrit :

$$BH_4^- + 4\ H_2O = B(OH)_4^- + 8\ H^+ + 8\ e^-$$

$$IO_3^- + 6\ H^+ + 6\ e^- = I^- + 3\ H_2O$$

$$3\ BH_4^- + 4\ IO_3^- = 3\ B(OH)_4^- + 4\ I^- \qquad \textbf{(1)}$$

Il s'agit d'un dosage en retour des ions borohydrure. L'iodate de potassium a été introduit en excès, et les ions borohydrure ont été totalement consommés. Les ions iodate restants réagissent en milieu acide sur les ions iodure introduits : en effet, on voit sur le diagramme *E*-pH que pour tout $pH \leq 8$, les domaines de prédominance de IO_3^- et I^- sont disjoints. Il s'agit d'une réaction de médiamutation qui conduit à la formation de diiode selon l'équation :

$$2\ IO_3^- + 12\ H^+ + 10\ e^- = I_2 + 6\ H_2O$$

$$2\ I^- = I_2 + 2\ e^-$$

$$IO_3^- + 5\ I^- + 6\ H^+ = 3\ I_2 + 3\ H_2O \qquad \textbf{(2)}$$

Enfin, le diiode formé est réduit par les ions thiosulfate (la comparaison des potentiels d'oxydo-réduction des couples montre que cette réaction de dosage est thermodynamiquement favorisée) selon la réaction d'équation :

$$\begin{aligned} I_2 + 2\,e^- &= 2\,I^- \\ 2\,S_2O_3^{2-} &= S_4O_6^{2-} + 2\,e^- \\ \hline I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} &= 2\,I^- + S_4O_6^{2-} \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

⇨ *Méthode 29.5*

3. Les ions iodure introduits en excès réagissent avec les ions iodate restant à l'issue de la première transformation chimique (équation **(1)**) pour former du diiode. La quantité de matière de diiode formée (déterminée par titrage) permet de calculer la quantité de matière d'ions iodate restant après réaction, et donc d'en déduire la quantité de matière initiale d'ions borohydrure.
Il est nécessaire d'acidifier la solution pour obtenir le diiode. On voit en effet sur le diagramme *E*-pH de l'iode que I_2 est instable en milieu basique (à partir de pH = 8) : il se dismute en ions IO_3^- et I^-. Ainsi, pour que la réaction entre les ions iodate et iodure soit thermodynamiquement favorisée, il faut se placer à $\boxed{\text{pH} \leq 8}$.

4. À l'équivalence du titrage de I_2 : $n_{I_2,\text{titré}} = \dfrac{n_{S_2O_3^{2-},\text{versé}}}{2} = \dfrac{c_t V_{éq}}{2}$. Or d'après l'équation **(2)**, puisque les ions iodure ont été introduits en excès : $n_{IO_3^-,\text{ restant}} = \dfrac{n_{I_2,\text{titré}}}{3}$.

Il s'agit de la quantité de matière d'ions iodate restant en solution après réaction avec les ions borohydrure. Or la quantité de matière d'ions iodate introduite initialement dans la prise d'essai de 10,0 mL vaut : $n_{IO_3^-,\text{initial}} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol. Effectuons un bilan de matière :

	$3\ BH_4^-$	$+\ 4\ IO_3^-$	$= 3\ B(OH)_4^-$	$+\ 4\ I^-$
$t = 0$	$n_{BH_4^-,\text{initial}}$	$n_{IO_3^-,\text{initial}}$	0	0
t	$n_{BH_4^-,\text{initial}} - 3\xi = 0$	$n_{IO_3^-,\text{ restant}} = n_{IO_3^-,\text{initial}} - 4\xi$	3ξ	4ξ

On en déduit la quantité de matière d'ions borohydrure présente dans la prise d'essai de 10,0 mL : $\boxed{n_{BH_4^-,\text{initial}} = \dfrac{3}{4}\left(n_{IO_3^-,\text{initial}} - n_{IO_3^-,\text{ restant}}\right) = \dfrac{3}{4}\left(n_{IO_3^-,\text{initial}} - \dfrac{c_t V_{éq}}{6}\right)}$.

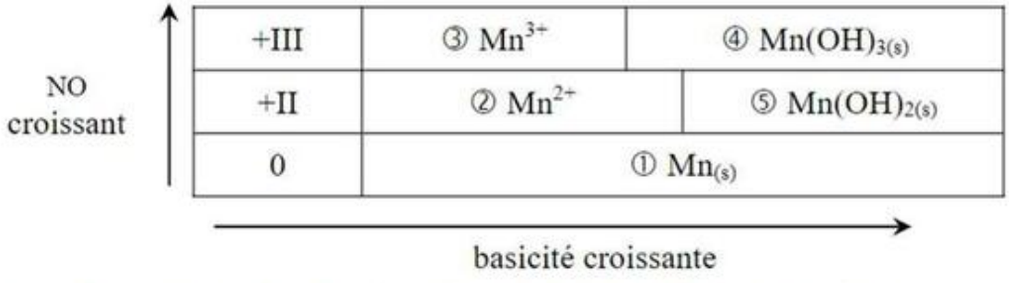
AN $\boxed{n_{BH_4^-,\text{initial}} = 4{,}88 \cdot 10^{-4}\ \text{mol}}$.

5. La prise d'essai de 10 mL a été prélevée à partir d'un volume $V = 100$ mL. La quantité de borohydrure de sodium présente dans l'échantillon de départ vaut donc : $n_{NaBH_4} = 4{,}88 \cdot 10^{-3}$ mol, soit une masse : $m_{NaBH_4} = n_{NaBH_4} M_{NaBH_4} = 184$ mg.
La pureté du borohydrure de sodium commercial est donc égale à :
$p = \dfrac{184}{189} = 0{,}976$, soit $\boxed{97{,}6\ \%}$.

Exercice 29.6

1. On calcule NO(Mn) = 0 dans $Mn_{(s)}$, ; NO(Mn) = +II dans $Mn^{2+}_{(aq)}$ et $Mn(OH)_{2(s)}$; et NO(Mn) = +III dans $Mn^{3+}_{(aq)}$ et $Mn(OH)_{3(s)}$.

Établissons le diagramme de principe pour les différentes espèces étudiées.



On peut alors attribuer les domaines de stabilité des différentes espèces.

⇨ *Méthode 29.1*

2. Pour le couple $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$: $2H^+_{(aq)} + 2e^- = H_{2(g)}$

$E = E^\circ_{H^+/H_2} + \dfrac{0,06}{2}\log\dfrac{[H^+]^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{H_2}}$ soit $\boxed{E = -0,06\,\text{pH (en V)}}$ avec $P_{H_2} = P^\circ = 1\,\text{bar}$.

Pour le couple $O_{2(g)} / H_2O$: $O_{2(g)} + 4\,H^+_{(aq)} + 4e^- = 2\,H_2O$

$E = E^\circ_{O_2/H_2O} + \dfrac{0,06}{4}\log\dfrac{[H^+]^4 P_{O_2}}{(c^\circ)^4 P^\circ}$ soit $\boxed{E = 1,23 - 0,06\,\text{pH (en V)}}$ avec $P_{O_2} = P^\circ = 1\,\text{bar}$.

⇨ *Méthode 29.4*

3. Déterminons le produit de solubilité de $Mn(OH)_2$ à partir de l'équation de la frontière verticale séparant le domaine de prédominance de Mn^{2+} et le domaine d'existence de $Mn(OH)_{2(s)}$. L'équation de dissolution du précipité s'écrit : $Mn(OH)_{2(s)} = Mn^{2+}_{(aq)} + 2\,HO^-_{(aq)}$

donc $K_s = \dfrac{[Mn^{2+}][HO^-]^2}{(c^\circ)^3} = \dfrac{[Mn^{2+}](c^\circ)K_e^2}{[H^+]^2}$. À la frontière ②/⑤, on a par convention $[Mn^{2+}] = c_{tra} = 10^{-2}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et on lit sur le diagramme E-pH : pH = 8,6.

AN $K_s = \dfrac{10^{-2}(10^{-14})^2}{(10^{-8,6})^2} = 10^{-12,8}$ soit $\boxed{pK_s = 12,8}$.

À la frontière associée au couple Mn^{2+}/Mn, on a : $Mn^{2+} + 2\,e^- = Mn$

$E = E^\circ_{Mn^{2+}/Mn} + 0,03\log\dfrac{[Mn^{2+}]}{c^\circ} = E^\circ_{Mn^{2+}/Mn} + 0,03\log\dfrac{c_{tra}}{c^\circ} \Leftrightarrow E^\circ_{Mn^{2+}/Mn} = E - 0,03\log\dfrac{c_{tra}}{c^\circ}$. On lit sur le diagramme : $E = -1,25\,\text{V}$ à la frontière. AN $\boxed{E^\circ_{Mn^{2+}/Mn} = -1,19\ \text{V}}$.

⇨ *Méthodes 29.2 et 29.3*

Corrigé

4. a) Les domaines de stabilité de $Mn_{(s)}$ et de $H_2O_{(l)}$ sont disjoints quelle que soit la valeur du pH. En milieu acide, l'eau oxyde le manganèse métallique en ions Mn^{2+}, avec formation de $H_{2(g)}$, selon la réaction d'équation : $Mn_{(s)} + 2\ H^+_{(aq)} = Mn^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)}$

b) L'oxydation du manganèse par l'eau est thermodynamiquement favorisée en milieu basique, avec formation de $Mn(OH)_{2(s)}$. Cet hydroxyde peut recouvrir le manganèse et empêcher son oxydation ultérieure : on dit que le manganèse est passivé. C'est pourquoi on n'observe pas de dégagement gazeux à sa surface.

5. a) L'objectif de l'expérience étant de doser le dioxygène dissous dans l'eau, il est nécessaire de boucher la fiole jaugée afin d'éviter toute dissolution ultérieure de dioxygène dans le mélange réactionnel.

b) Les ions Mn^{2+} réagissent avec les ions hydroxyde pour donner un précipité d'hydroxyde de manganèse (+II) insoluble, selon : $Mn^{2+}_{(aq)} + 2\ HO^-_{(aq)} = Mn(OH)_{2(s)}$

c) Les domaines de stabilité de $Mn(OH)_{2(s)}$ et de $O_{2(g)}$ sont disjoints, le dioxygène dissous oxyde donc l'hydroxyde de manganèse (+II) en $Mn(OH)_{3(s)}$ selon la réaction d'équation :

$$Mn(OH)_{2(s)} + H_2O = Mn(OH)_{3(s)} + H^+ + e^-$$

$$O_2 + 4\ H^+ + 4\ e^- = 2\ H_2O$$

$$4\ Mn(OH)_{2(s)} + O_{2(g)} + 2\ H_2O = 4\ Mn(OH)_{3(s)}$$

Il était important de travailler en milieu basique (utilisation de la soude pour former $Mn(OH)_{2(s)}$) car en milieu acide, les domaines de stabilité de Mn(+II) et $O_{2(g)}$ possèdent une partie commune, l'oxydation de Mn^{2+} par $O_{2(g)}$ est donc thermodynamiquement défavorisée.

6. a) Il faut attendre 30 minutes afin que tout le dioxygène dissous réagisse avec $Mn(OH)_{2(s)}$: la réaction est lente. L'utilisation d'acide sulfurique concentré nécessite le port de lunettes de sécurité et l'utilisation de gants de protection pour la manipulation.

b) L'acide sulfurique ajouté permet la dissolution de $Mn(OH)_{3(s)}$ en ions $Mn^{3+}_{(aq)}$ selon :

$$Mn(OH)_{3(s)} + 3\ H^+_{(aq)} = Mn^{3+}_{(aq)} + 3\ H_2O$$

c) Les ions $Mn^{3+}_{(aq)}$ sont réduits par les ions iodure selon la réaction d'équation :

$$Mn^{3+}_{(aq)} + e^- = Mn^{2+}_{(aq)}$$

$$2\ I^- = I_2 + 2\ e^-$$

$$2\ Mn^{3+}_{(aq)} + 2\ I^- = 2\ Mn^{2+}_{(aq)} + I_2$$

La comparaison des potentiels standard d'oxydo-réduction des deux couples montre que la transformation est thermodynamiquement favorisée.

d) Pour rendre compte de la formation du complexe : $2\ Mn^{3+}_{(aq)} + 3\ I^- = 2\ Mn^{2+}_{(aq)} + I^-_{3(aq)}$

7. a) Pour que le prélèvement soit précis, il est conseillé d'utiliser une pipette jaugée de 100 mL.

b) La réaction de titrage a pour équation :

$$I_3^- + 2\,e^- = 3\,I^-$$
$$2\,S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2\,e^-$$
$$I_3^- + 2\,S_2O_3^{2-} = 3\,I^- + S_4O_6^{2-}$$

c) À l'équivalence du titrage de I_3^- : $n_{I_3^-,\text{titré}} = \frac{n_{S_2O_3^{2-},\text{versé}}}{2} = \frac{CV_{éq}}{2}$. Or d'après l'équation du 6.d $n_{I_3^-,\text{titré}} = \frac{n_{Mn^{3+}}}{2}$, puisque les ions iodure ont été introduits en excès. La dissolution de $Mn(OH)_{3(s)}$ a été totale, donc : $n_{I_3^-,\text{titré}} = \frac{n_{Mn(OH)_3}}{2}$, et comme l'hydroxyde de manganèse(II) était en excès par rapport au dioxygène dans la transformation du 5.c, on a: $n_{Mn(OH)_3} = 4n_{O_2,\text{dissous}}$.

Finalement : $n_{O_2,\text{dissous}} = \frac{n_{Mn(OH)_3}}{4} = \frac{n_{I_3^-,\text{titré}}}{2} = \frac{CV_{éq}}{4}$ et $\boxed{[O_2] = \frac{CV_{éq}}{4V_0}}$.

AN $\boxed{[O_2] = 5{,}74 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$.

L'incertitude relative vaut : $\frac{\Delta[O_2]}{[O_2]} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta V_{éq}}{V_{éq}} + \frac{\Delta V_0}{V_0}$. Si on ne prend en compte que l'incertitude relative liée à la détermination du volume à l'équivalence (ce qui revient à négliger l'incertitude relative liée au prélèvement des 100 mL de solution et l'incertitude relative sur C, liée à la préparation de la solution titrante de thiosulfate de sodium) : $\boxed{\frac{\Delta[O_2]}{[O_2]} = \frac{\Delta V_{éq}}{V_{éq}} = 3{,}3\ \%}$.

d) Pour que le protocole expérimental soit valide, il faut que $Mn(OH)_2(s)$ soit en excès par rapport au dioxygène dans la première transformation, et que les ions iodure soient en excès par rapport aux ions Mn^{3+}. On calcule : $n_{O_2,\text{dissous}} = 1{,}44 \cdot 10^{-4}$ mol ;

$n_{Mn^{2+},\text{initial}} = n_{MnCl_2,4\,H_2O} = 1{,}01 \cdot 10^{-2}$ mol et $n_{I^-,\text{introduit}} = n_{KI} = 6{,}02 \cdot 10^{-3}$ mol.

On a bien : $n_{Mn^{2+},\text{initial}} > 4\,n_{O_2,\text{dissous}}$ et $n_{I^-,\text{introduit}} > n_{Mn^{3+}} = 4\,n_{O_2,\text{dissous}}$.

Les quantités étaient donc suffisantes.

e) En tenant compte de l'incertitude relative, le dosage effectué en hiver conduit à un encadrement de la concentration en dioxygène dissous :

$5{,}55 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \leq [O_2] \leq 5{,}93 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le dosage effectué au printemps conduit à l'encadrement suivant : $4{,}19 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \leq [O_2] \leq 4{,}45 \cdot 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Les deux résultats ne sont donc pas en accord. La solubilité du dioxygène dissous diminue quand la température augmente, ce qui peut expliquer que la concentration déterminée au printemps soit plus faible que celle déterminée en hiver.

Exercice 29.7

1. On calcule NO(U) = +IV dans UO_2 et NO(U) = +VI dans UO_3.

2. On constate que formellement, $U_3O_8 = (UO_2 + 2\,UO_3)$. La pechblende est donc composée de 2/3 d'uranium au nombre d'oxydation +VI et d'1/3 d'uranium au nombre d'oxydation +IV.

3. On calcule NO(U) = 0 dans $U_{(s)}$, NO(U) = +III dans U^{3+} , NO(U) = +IV dans U^{4+} et $U(OH)_{4(s)}$ et NO(U) = +VI dans UO_2^{2+} et $UO_2(OH)_{2(s)}$.

Établissons le diagramme de principe pour les différentes espèces étudiées.

+VI	④ UO_2^{2+}	⑤ $UO_2(OH)_{2(s)}$
+IV	③ U^{4+}	⑥ $U(OH)_{4(s)}$
+III	② U^{3+}	
0	① $U_{(s)}$	

basicité croissante

On peut alors attribuer les domaines de stabilité des différentes espèces.

⇨ *Méthode 29.1*

Les domaines de stabilité des espèces en phase condensée ①, ⑤ et ⑥ sont des domaines d'existence, ceux des espèces dissoutes ②, ③ et ④ sont des domaines de prédominance.

4. On considère la frontière verticale séparant les domaines de stabilité de U^{4+} et $U(OH)_{4(s)}$. L'équation de dissolution du précipité s'écrit : $U(OH)_{4(s)} = U^{4+}_{(aq)} + 4\ HO^-_{(aq)}$ avec :

$$K_{s1} = \frac{[U^{4+}][HO^-]^4}{(c^\circ)^5} = \frac{[U^{4+}](c^\circ)^3 K_e^4}{[H^+]^4} \Leftrightarrow [H^+] = \left(\frac{[U^{4+}](c^\circ)^3 K_e^4}{K_{s1}}\right)^{1/4}$$

$$\Leftrightarrow \text{pH} = \frac{1}{4}\left(-\log\frac{[U^{4+}]}{c^\circ} + 4\text{p}K_e - \text{p}K_{s1}\right).$$ Par convention, à la frontière, $[U^{4+}] = C_{tra} = 1\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

AN $\text{pH} = \frac{1}{4}(4\times 14 - 49)$, soit $\boxed{\text{pH} = 1,75}$ à la frontière.

De la même façon, pour la frontière verticale séparant les domaines de stabilité de $UO^{2+}_{2(aq)}$ et $UO_2(OH)_{2(s)}$, on a : $UO_2(OH)_{2(s)} = UO^{2+}_{2(aq)} + 2\ HO^-_{(aq)}$ avec :

$$K_{s2} = \frac{[UO_2^{2+}][HO^-]^2}{(c^\circ)^3} = \frac{[UO_2^{2+}]c^\circ K_e^2}{[H^+]^2} \Leftrightarrow [H^+] = \left(\frac{[UO_2^{2+}]c^\circ K_e^2}{K_{s2}}\right)^{1/2}$$ soit

$\boxed{\text{pH} = \frac{1}{2}(-\log C_{tra} + 2\,\text{p}K_e - \text{p}K_{s2})}$. AN $\text{pH} = \frac{1}{2}(2\times 14 - 24)$, soit $\boxed{\text{pH} = 2}$ à la frontière.

⇨ *Méthode 29.3*

5. La frontière ②/⑥ est la frontière d'oxydo-réduction associée au couple $U(OH)_{4(s)}/U^{3+}$. Pour ce couple : $U(OH)_{4(s)} + 4\,H^+ + e^- = U^{3+} + 4\,H_2O$

donc $E_{2/6} = E^\circ_{U(OH)_{4(s)}/U^{3+}} + 0,06\log\frac{[H^+]^4}{[U^{3+}](c^\circ)^3} = E^\circ_{U(OH)_{4(s)}/U^{3+}} - 0,06\log\frac{[U^{3+}]}{c^\circ} - 0,24\cdot\text{pH}$ (en V).

La pente de la frontière est donc égale à $\boxed{-0,24\ \text{V}}$ (par unité de pH).

La frontière ①/⑥ est la frontière d'oxydo-réduction associée au couple $U(OH)_{4(s)}/U$. Pour ce couple : $U(OH)_{4(s)} + 4\,H^+ + 4\,e^- = U + 4\,H_2O$

donc $E_{1/6} = E^\circ_{U(OH)_{4(s)}/U} + \dfrac{0,06}{4}\log\dfrac{[H^+]^4}{(c^\circ)^4} = E^\circ_{U(OH)_{4(s)}/U} - 0,06\cdot pH$ (en V).

La pente de la frontière est donc égale à $\boxed{-0,06\ V}$ (par unité de pH).

⇨ *Méthode 29.2*

6. On observe qu'à partir du point A, pour tout $pH \geq 7$ environ, l'espèce ② ne possède plus de domaine de stabilité. U^{3+} se dismute en $U_{(s)}$ et $U(OH)_{4(s)}$ selon la réaction d'équation :

$$U^{3+} + 3\,e^- = U$$

$$\underline{U^{3+} + 4\,H_2O = U(OH)_4 + 4\,H^+ + e^-}$$

$$4\,U^{3+}_{(aq)} + 12\,H_2O_{(l)} = U_{(s)} + 3\,U(OH)_{4(s)} + 12\,H^+_{(aq)}$$

soit en milieu basique : $4\,U^{3+}_{(aq)} + 12\,HO^-_{(aq)} = U_{(s)} + 3\,U(OH)_{4(s)}$

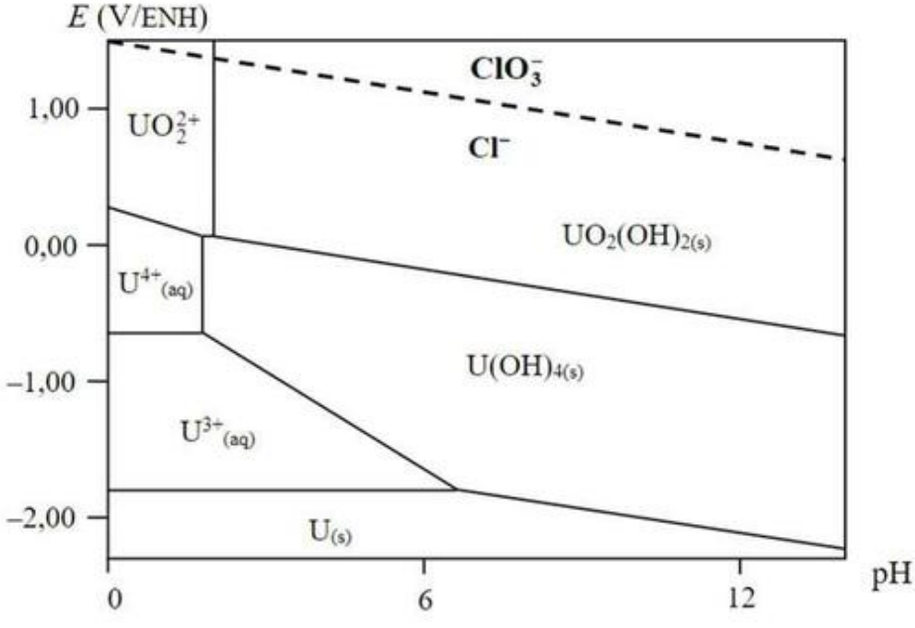
⇨ *Méthode 29.6*

7. Pour le couple ClO_3^- / Cl^-, de demi-équation : $ClO_3^- + 6\,H^+ + 6\,e^- = Cl^- + 3\,H_2O$

$E_{ClO_3^-/Cl^-} = E^\circ_{ClO_3^-/Cl^-} + 0,01\cdot\log\dfrac{[ClO_3^-][H^+]^6}{[Cl^-](c^\circ)^6}$. Par convention $[Cl^-] = [ClO_3^-]$ à la frontière.

Donc $E_{ClO_3^-/Cl^-} = E^\circ_{ClO_3^-/Cl^-} - 0,06\cdot pH = 1,45 - 0,06\cdot pH$ (en V).

Superposons cette droite au diagramme potentiel-pH de l'uranium.



8. La poudre issue du minerai U_3O_8 contient de l'uranium aux degrés d'oxydation +IV et +VI. On voit sur le diagramme E-pH que les domaines de stabilité de U(+IV) et des ions chlorate sont disjoints : en milieu acide (excès d'acide sulfurique), l'oxydation de U^{4+} par les ions

chlorate est thermodynamiquement favorisée. L'uranium(+IV) est transformé en uranium(+VI) : les ions UO_2^{2+} sont stables en milieu acide en présence d'ions chlorate.

⇨ *Méthode 29.5*

9. En milieu acide, UO_2 se dissout selon la réaction d'équation : $UO_2 + 4\,H^+ = U^{4+} + 2\,H_2O$

Puis les ions U^{4+} sont oxydés en ions UO_2^{2+} par les ions chlorate selon :

$$U^{4+} + 2\,H_2O = UO_2^{2+} + 4\,H^+ + 2\,e^-$$

$$\frac{ClO_3^- + 6\,H^+ + 6\,e^- = Cl^- + 3\,H_2O}{3\,U^{4+} + ClO_3^- + 3\,H_2O = 3\,UO_2^{2+} + Cl^- + 6\,H^+}$$

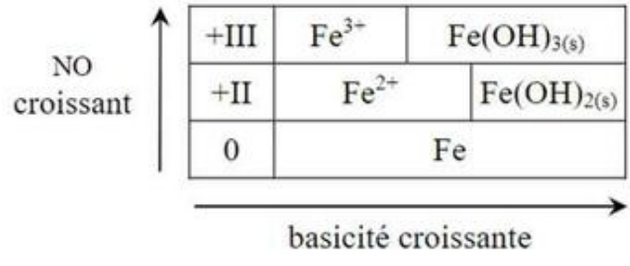
Finalement, on peut écrire une équation traduisant la transformation de UO_2 en combinant les deux équations précédentes : $3\,UO_2 + ClO_3^- + 6\,H^+ = 3\,UO_2^{2+} + Cl^- + 3\,H_2O$

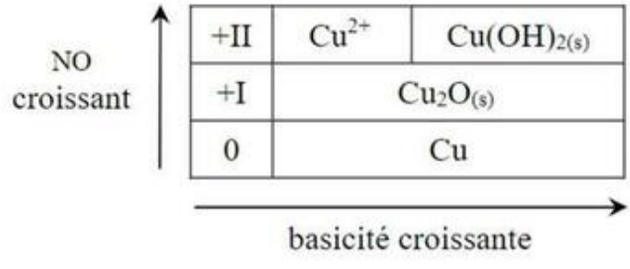
Exercice 29.8

1. La lixiviation correspond à l'attaque du minerai de cuivre par la solution d'acide sulfurique, de façon à dissoudre l'oxyde de cuivre contenu dans le minerai : $CuO_{(s)} + 2\,H^+ = Cu^{2+}_{(aq)} + H_2O$

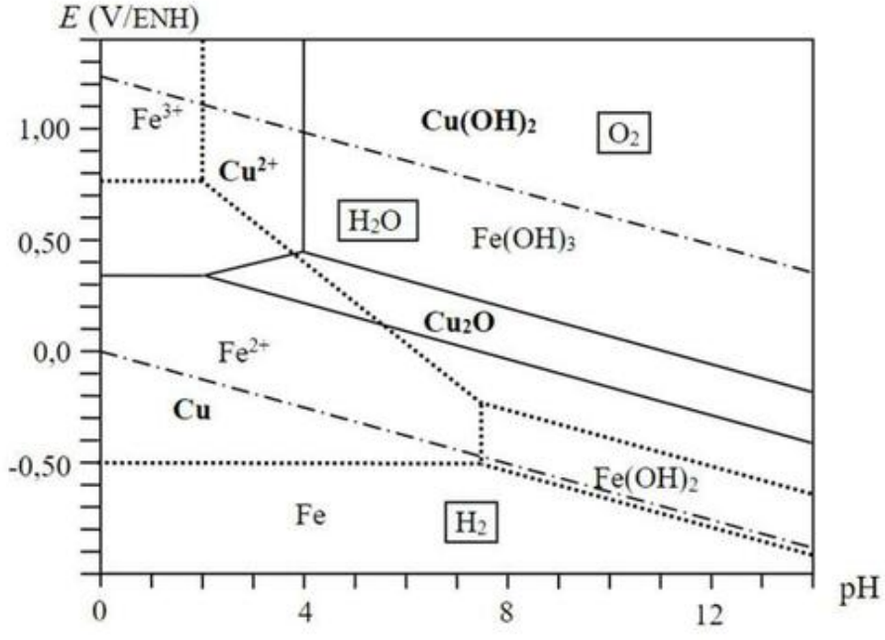
Le nombre d'oxydation du cuivre n'est pas modifié lors de cette opération.

2. Établissons le diagramme de principe pour les différentes espèces du fer d'une part, pour les différentes espèces du cuivre d'autre part :





On peut alors positionner les espèces sur le diagramme potentiel-pH (page suivante).



3. Pour le couple $Cu(OH)_2 / Cu_2O$: $2\,Cu(OH)_2 + 2\,H^+ + 2\,e^- = Cu_2O + 3\,H_2O$

donc $E_{Cu(OH)_2/Cu_2O} = E^\circ_{Cu(OH)_2/Cu_2O} - 0,06 \cdot pH$. Utilisons pour déterminer $E^\circ_{Cu(OH)_2/Cu_2O}$ le point de coordonnées (4 ; 0,46 V) : $E^\circ_{Cu(OH)_2/Cu_2O} = 0,46 + 0,06 \cdot 4$. AN $\boxed{E^\circ_{Cu(OH)_2/Cu_2O} = 0,70\ V}$.

On détermine le produit de solubilité K'_s de $Cu(OH)_{2(s)}$ en se plaçant à la frontière verticale entre Cu^{2+} et $Cu(OH)_2$. La réaction de dissolution du précipité a pour équation :

$$Cu(OH)_{2(s)} = Cu^{2+}_{(aq)} + 2\,HO^-_{(aq)}$$

donc $K'_s = \dfrac{[Cu^{2+}][HO^-]^2}{(c^\circ)^3} = \dfrac{[Cu^{2+}]\,c^\circ K_e^2}{[H^+]^2}$. À la frontière verticale, on a par convention $[Cu^{2+}] = 1,0\ mol \cdot L^{-1}$, et on lit sur le diagramme pH = 4. Donc $\boxed{K'_s = 10^{-20}}$.

4. Pour le couple $H^+_{(aq)} / H_{2(g)}$, la demi-équation s'écrit : $2\,H^+_{(aq)} + 2\,e^- = H_{2(g)}$

$E = E^\circ_{H^+/H_2} + \dfrac{0,06}{2} \log \dfrac{[H^+]^2 P^\circ}{(c^\circ)^2 P_{H_2}}$ soit $\boxed{E = -0,06\,pH\ (en\ V)}$ avec $P_{H_2} = P^\circ = 1\ bar$.

Pour le couple $O_{2(g)} / H_2O$: $O_{2(g)} + 4\,H^+_{(aq)} + 4\,e^- = 2\,H_2O$

$E = E^\circ_{O_2/H_2O} + \dfrac{0,06}{4} \log \dfrac{[H^+]^4 P_{O_2}}{(c^\circ)^4 P^\circ}$ soit $\boxed{E = 1,23 - 0,06\,pH\ (en\ V)}$ avec $P_{O_2} = P^\circ = 1\ bar$.

On trace les droites correspondantes en pointillés sur le diagramme précédent (voir question 2).

⇨ *Méthode 29.4*

5. La solution obtenue après lixiviation contient ses ions Cu^{2+} et Fe^{2+}. Le dioxygène et Fe^{2+} possèdent des domaines de stabilité disjoints, donc l'oxydation de Fe^{2+} en Fe^{3+} (le milieu réactionnel est acide après la lixiviation sulfurique) par le dioxygène est thermodynamiquement favorisée. L'équation de la réaction s'écrit :

$$Fe^{2+} = Fe^{3+} + e^-$$
$$\frac{O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O}{O_2 + 4\,Fe^{2+} + 4\,H^+ = 4\,Fe^{3+} + 2\,H_2O}$$

On calcule : $K^\circ = 10^{\frac{4}{0,06}\left(E^\circ(O_2/H_2O) - E^\circ(Fe^{3+}/Fe^{2+})\right)}$. Le potentiel standard d'oxydo-réduction du couple Fe^{3+}/Fe^{2+} est lu sur le diagramme E-pH du fer à la frontière entre ces deux espèces. En effet, celle-ci a pour équation $E = E^\circ_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = 0,77$ V.

AN $\boxed{K^\circ = 10^{30,7} = 4,6 \cdot 10^{30}}$. La transformation est totale.

6. On peut augmenter le pH pour que les ions Fe^{3+} précipitent sous forme de $Fe(OH)_{3(s)}$ sans que Cu^{2+} ne précipite sous forme de $Cu(OH)_{2(s)}$: pour cela, il faut faire en sorte que le pH de la solution soit compris entre 2 et 4 d'après le diagramme. Une filtration permet d'éliminer $Fe(OH)_{3(s)}$ solide, tandis que le filtrat contient les ions Cu^{2+}.

Index

A

absorbance, 448
accélération, 273
accélération angulaire, 557
accélération centripète, 275
accélération normale, tangentielle, 275
accommodation, 38
acide de Brønsted, 813
acide de Lewis, 486
acide fort, 813
action mécanique, 301
activité, 414
adiabatique, 618
admittance complexe, 168
afocal, 7, 39
agent thermique, 663
aimant, 689, 692
alternateur, 724
ampèremètre, 77
ampholyte (espèce amphotère), 813, 891
amplitude (oscillations), 138
amplitude complexe, 168
analyse de Fourier, 201
angle de réfraction limite, 5
anode, 892
antisymétrie, 691
aplanétisme, 7
appareil photographique, 36
approximation de l'optique géométrique, 3
ARQS, 103
association de lentilles, 38
athermane, 618
auto-induction, 104, 722
autoprotolyse de l'eau, 813
avance, 243
avancement, 415
axe optique, 7

B

bande passante, 203
barycentre, 302
base de Brønsted, 813
base de Frenet, 274
base de Lewis, 486
base forte, 814
base polaire, cylindrique, sphérique, 272
bilan énergétique (induction), 724
bilan énergétique d'un circuit, 105, 138
bobine, 104, 690
bobines de Helmholtz, 690
branche, 75
bras de levier, 515

C

calorifugé, 618
capacité (d'un condensateur), 103
capacité électrique (d'une pile), 892
capacité thermique, 616
caractéristique d'un dipôle, 77
carte de champ, 689
cas de Lorentz, 723
cas de Neumann, 722
cathode, 892
célérité, 3, 243
centre d'inertie (ou de masse), 302
centre optique, 35
chaleur, 618
champ de force conservative, 346
champ de pesanteur, 304
champ électrique, 383
champ magnétique, 383, 689
changement d'état, 588
charge formelle, 485
chute libre, 305
circuit, 75
circuit du deuxième ordre, 137
circuit du premier ordre, 104
circuit *LC*, 137
circuit *RLC* série, 138, 170
circuits électriques couplés, 723
circuits *RL*, *RC*, 105
coefficient de frottement, 304

coefficient de performance, 663
coefficient gamma, 619
coexistence de deux espèces, 942
cogénération, 664
colorimétrie, 817
compacité, 784
comportement asymptotique, 169
condensateur, 103, 384
condition de contact, 784
condition de précipitation, 849
conditions de Gauss, 7
conditions initiales d'un circuit, 105, 141
conductance, 78
conductance de fuite, 103
conductimétrie, 448
conductimétrie, 448
conductivité, 448
cône d'acceptance, 5
conservation de l'énergie mécanique, 347
conservation du moment cinétique, 517
constante d'acidité, 814
constante d'équilibre, 415, 814, 849, 894
constante de Boltzmann, 587
constante de Faraday, 892
constante de Planck, 757
constante de solubilité, 849
constante de vitesse, 446
constante des aires, 517
constante des gaz parfaits, 587
constituant physico-chimique, 413
construction graphique (optique), 36
convention de tracé, 941
convention récepteur, générateur, 77
coordinence, 784
coordonnées cartésiennes, 271
coordonnées cylindriques, sphériques, 272
corps pur diphasé, 588, 619, 642
couleur, 3
coupe-circuit, 77
couple acide/base, 813
couple de forces, 559, 693
couple oxydant/réducteur, 891
couples de l'eau, 813, 891
courant électrique, 75
courant électromoteur (CÉM), 78
courant induit, 721
courants de Foucault, 725
courbe de saturation, 588
courbes de gain et de phase, 202
cristal, 783
cristallin, 37
cubique à faces centrées (CFC), 785
cycle (thermodynamique), 615, 663
cycle de Carnot, 665

D

dégénérescence de l'ordre, 453
degré de liberté, 348
demi-équation, 891
demi-pile, 892
déphasage, 202, 244
dérivateur, 202
deuxième principe, 641
diagramme d'équilibre (P,T), 588
diagramme d'équilibre (P,v), 588
diagramme d'existence, 856
diagramme de Bode, 202
diagramme de Clapeyron, 617
diagramme de distribution, 816
diagramme de prédominance, 815, 894
diagramme de Raveau, 664
diagramme potentiel-pH, 941
diaphragme, 36
diatherme (ou diathermane), 618
différence de potentiel, 76
diffraction, 245
dioptre, 4
dipôle ohmique, 78
dipôles en série, en parallèle, 75, 79
dismutation, 892, 947
dispersion, 244
dispersion intermodale, 5
dissolution d'un précipité, 849
distance focale, 35
distance minimale de projection, 36
ditherme, 664
diviseur de tension, de courant, 79, 169
domaine d'existence, 850
domaine de stabilité (d'une espèce), 894, 941
dosage, 816
double périodicité, 244
doublet non liant, 485
dualité onde/corpuscule, 757
dynamique relativiste, 384

E

eau, 813, 891, 941
échelle d'acidité, 814
échelle des potentiels, 894
échelle mésoscopique, 585
échelon de tension, 104
effet Joule, 78
effet nivelant, 814
efficacité, 663
électrodes de référence (ÉSH, ECS), 893
ellipse, 518
emmétrope, 38
empilement compact, 784
énergie cinétique, 345, 558
énergie d'activation, 446
énergie de liaison, 485
énergie interne, 616
énergie mécanique, 347
énergie potentielle, 346, 384
énergie potentielle effective, 517
enthalpie, 618
enthalpie de transition de phase, 619
entropie, 641
entropie de transition de phase, 642
entropie statistique, 642
équation d'état, 586, 587
équation de frontière, 941
équation différentielle d'un circuit, 104, 137
équation différentielle du mouvement, 309
équation horaire, 271
équations cartésiennes de la trajectoire, 278

équilibre chimique, 415
équilibre diphasé, 588
équilibre mécanique, 348, 564, 586
équilibre stable, instable, 348
équilibre thermodynamique, 586
équivalence (de titrage), 817
espèce physico-chimique, 413
état lié, état de diffusion, 348, 517
état macroscopique, microscopique, 585, 642
état métastable, 942

F

facteur de qualité, 138, 204
facteurs cinétiques, 445
fibre optique, 5
figure d'interférences, 245
filtrage, 202
filtres d'ordre 1 ou 2, 203
fluide supercritique, 588
flux du champ magnétique, 721
flux propre, 722
focale, 35
fonction d'état, 586
fonction d'onde, 757
fonction de transfert, 201
fondamental, 201, 244
force, 301
force centrale, 516
force conservative, 346
force de frottement fluide, 304
force de frottement solide, 304
force de Laplace, 692
force de Lorentz, 383
force de pression, 304
force de rappel élastique, 303, 349
force électrique (coulombienne), 304, 516
force électromotrice (FÉM), 78, 893
force électromotrice induite, 721
force gravitationnelle, 304, 516
force newtonienne, 518
forces de Van der Waals, 487
formation d'une image, 36
formule de Fresnel, 245
formule de Nernst, 894
formules de conjugaison et de grandissement, 36
formules de Descartes, de Newton, 36
foyer principal, secondaire, 7, 35
fraction molaire, 414
franges d'interférences, 245
fréquence propre, 138
frottement visqueux, 304

G

gain, 202
gaz parfait, 413, 587, 616, 618, 641
gaz réel, 587, 617
générateur, 79
grandeur complexe, 167
grandeur intensive, extensive, 586
grandissement (transversal), 36
gravitation, 304, 516

H

harmonique, 201, 244
hyperbole, 518
hypervalent, 486

I

image réelle, virtuelle, à l'infini, 6
impédance complexe, 168
impédance d'entrée, de sortie, 204
impédance de charge, 201
indice de réfraction, 3
inductance (propre), 104, 722
inductance mutuelle, 723
induction électromagnétique, 721
inégalité de Clausius, 663
inégalité de Heisenberg spatiale, 758
instrument d'optique, 39
intégrale première de l'énergie mécanique, 348
intégrale première du moment cinétique, 517
intégrateur, 202
intensité du courant, 75
interactions de Keesom, Debye, London, 487
interférences, 245, 760
interprétation statistique de l'entropie, 642
interrupteur, 77
invariance par translation ou rotation, 691
irréversible, 615
isochronisme, 138
isolé, 301, 585, 641
isotherme d'Andrews, 589
isotherme, isobare, isochore, 615

L

lacune électronique, 486
lampe spectrale, 4
laser, 4
lentille mince, 35
liaison covalente, 485
liaison de Van der Waals, 487
liaison hydrogène, 487
liaison métallique, 786
liaison pivot, 559
liaison polarisée, 486
libre parcours moyen, 585
ligne de champ, 689
limite relativiste, 384
limites du mouvement, 348, 517
loi d'action des masses, 415
loi d'Arrhenius, 446
loi d'Ohm, 78, 168
loi de Beer–Lambert, 448
loi de Faraday, 722
loi de Laplace, 619, 641
loi de Le Chatelier, 850
loi de modération de Lenz, 721
loi de retour inverse, 4
loi de vitesse, 446
loi des aires, 517
loi des mailles, 76
loi des nœuds, 76
lois de Coulomb du frottement, 304
lois de Kepler, 519
lois de Kirchhoff, 76, 169

lois de Newton, 301, 302
lois de Snell–Descartes, 4
longueur d'onde, 3, 244, 757
longueur de liaison, 485
loupe, 39
lumière, 3
lunette, 39

M

machine à cylindre, à circuit, 666
machine frigorifique, 665
machine thermique, 663
macroétat, 585, 642
maille, 75
maille (de réseau cristallin), 783
maille CFC, 785
masse (d'un circuit), 76
masse (d'un corps), 301
masse volumique, 784
mécanique classique, 271
médiamutation, 892, 947
ménisque, 35
métal, 786
méthode complexe, 167
méthode d'Euler, 109
microétat, 585, 642
milieu dispersif, 244
miroir plan, 6
mise au point, 36
modèle de Bohr, 758
modèle de Thévenin, de Norton, 79, 169
moment cinétique, 515, 558
moment d'inertie, 558
moment d'un couple, 559
moment d'une force, 515
moment dipolaire, 486
moment magnétique, 691
monochromatique, 3
monotherme, monobare, 615
moteur à courant continu, 692
moteur ditherme, 664
moteur synchrone, 693
moteur thermique, 663
motif, 783
mouvement à force centrale, 516
mouvement accéléré, retardé, 273
mouvement circulaire, 275
mouvement conservatif unidimensionnel, 348
mouvement d'une particule chargée, 384
mouvement elliptique, hyperbolique, 518
mouvement parabolique, 275, 518
mouvement uniforme, 273
moyenneur, 202
mutuelle inductance, 723

N

nœud (de circuit), 75
nœud (de réseau cristallin), 783
nombre d'oxydation (NO), 891
nombre stœchiométrique, 414
non-métal, 786

O

objectif, 36, 39
objet réel, virtuel, à l'infini, 5
oculaire, 39
œil, 37
onde acoustique, 244
onde de matière, 757
onde électromagnétique, 3, 244
onde plane, 243
onde progressive unidimensionnelle, 243
onde sinusoïdale, 243
ordre de réaction (global, partiel), 445
orthoradial, 272
oscillateur amorti, 138, 305
oscillateur harmonique, 137, 142, 349
oscilloscope, 78
ouverture numérique, 5
oxydation, 891

P

parabole, 275, 518
paramètre de maille, 783
passe-haut, passe-bas, passe-bande, 203
pendule simple, 305
performance, 663
période propre, 138
période temporelle, 138, 167, 244
perméabilité du vide, 690
permittivité, 488
pH d'une solution, 815
phase (oscillations), 138, 202
phase (thermodynamique), 588
phase condensée, 587, 617, 619, 641
pH-métrie, 817
photon, 3, 757
pile, 79, 892
plan d'incidence, 4
plan focal, 7
planète, 519
poids, 304
point critique, 588
point matériel, 301
point objet, image, 5
point triple, 588
pôles nord et sud, 689, 695
pompe à chaleur, 665
pont diviseur, 79, 169
population de maille, 784
position d'équilibre, 348
potentiel d'électrode, 893
potentiel électrique, 76
potentiel standard, 893
potentiométrie, 895
pouvoir ionisant, dissociant, 488
précipité, 849
précipité amphotère, 849, 850
premier principe, 616
pression cinétique, 587
pression de vapeur saturante, 588
pression partielle, 414
principe d'inertie, 302
principe de Le Chatelier, 850
principe des interactions, 301
principe fondamental de la dynamique (PFD), 303

probabilité de présence, 757
produit de solubilité, 849
produit ionique de l'eau, 813
profondeur de champ, 37
programmation Python, 109
propagation dispersive, 244
protique (ou protogène), 488
pseudo-isolé, 301
puissance d'une force, 345
puissance des forces de Laplace, 693
puissance électrique, 76
puits d'énergie potentielle, 349
pulsation cyclotron, 385
pulsation de coupure, 203
pulsation propre, 137
pulsation spatiale, 243
pulsation temporelle, 137, 243
punctum proximum, remotum, 38

Q

quadripôle, 201
quadripôles en cascade, 204
quantification de l'énergie, du moment cinétique, 758
quantité de mouvement, 301, 302
quasi-statique, 615
quotient de réaction, 414

R

radial, 272
radical, 486
rails de Laplace, 692, 723
rayon de courbure, 274
rayon de Van der Waals, 784
rayon lumineux, 3
rayon métallique, covalent, ionique, 783
rayon paraxial, 7
réactif limitant, 415
réaction acido-basique, 813
réaction chimique, 414
réaction d'oxydo-réduction, 891
réaction d'un support, 303
réaction de précipitation, de dissolution, 849
réaction prépondérante (RP), 816, 820
récepteur (thermodynamique), 663
réduction, 891
référentiel, 271
référentiel galiléen (ou inertiel), 302
réflexion, 4
réflexion totale, 5
réfraction, 4
régime apériodique, pseudo-périodique, 139, 143
régime continu, 75
régime libre, 104
régime sinusoïdal forcé, 167
régime transitoire, permanent, 104
règle de l'octet, du duet, 485
règle du tire-bouchon, 689
relation de Louis de Broglie, 757
relation de Mayer, 619
relation de Nernst, 894
relations de Laplace, 619, 641
relations de Planck–Einstein, 757
rendement, 663
repère, 271
réponse en intensité, en tension, 170
représentation de Fresnel, 168, 173
représentation de Lewis, 485
réseau cristallin, 783
résistance, 78
résistance d'entrée, de sortie, 79
résistance interne, 79
résonance, 170
ressort, 303
retard, 243
réticule, 39
rétine, 37
réversible, 615
rotation, 557
rotor, 692

S

satellite, 519
schéma de Lewis, 485
second principe, 641
série de Fourier, 201
signal, 243
site interstitiel (tétraédrique, octaédrique), 784, 785
solénoïde, 690
solide, 557
solide covalent, 786
solide cristallin, amorphe, 783
solide moléculaire, ionique, 787
solubilité, 850
soluté et solvant, 487
solution saturée, 849
solvant polaire, apolaire, 488
solvant protique, aprotique, 488
solvatation, 488
source de chaleur, 618
source de lumière, 3
source de tension, de courant, 78
spectre, 3, 244
spectrophotométrie, 447
spectrophotométrie, 447
sphère dure, 783
spire circulaire, 689
spire rectangulaire en rotation, 724
stator, 692
stigmatisme, 5
suivi expérimental de cinétique, 447
symétrie, 691
système centré, 7
système de points matériels, 302
système optique, 5
système physico-chimique, 413
système thermodynamique, 585

T

tableau d'avancement, 417
température cinétique, 587
temps de demi-réaction, 447
temps de relaxation, 104
tension d'un fil, d'un ressort, 303
tension efficace, 167, 201
tension électrique, 76
théorème de l'énergie cinétique (TEC), 346, 349, 559

théorème de l'énergie mécanique (TÉM), 347
théorème de la quantité de mouvement (TQM), 303
théorème du centre de masse, 303
théorème du moment cinétique (TMC), 516, 559
théorie cinétique du gaz parfait, 587
thermostat, 618, 642
titrage, 816, 851, 895
titre massique, 589, 642
trajectoire elliptique, 518
transfert thermique, 618
transformation acido-basique, 813
transformation chimique, 414
transformation d'oxydo-réduction, 891
transformation thermodynamique, 615
transformation totale, limitée, 415
transition de phase, 588
translation, 557
travail d'une force, 345
travail des forces de pression, 617
travail électrique, 76
travail utile (ou indiqué), 667
trous de Young, 246

U

uniforme, 273

V

valeur efficace, 167, 201
valeur moyenne, 201
variable d'état, 586
vecteur d'onde, 243
vecteur de Fresnel, 168, 173
vecteur force, 301
vecteur position, 272
vecteur vitesse, accélération, 273
vergence, 35
viseur, 39
vitesse angulaire, 275, 557
vitesse de disparition, de formation, 445
vitesse de phase, 243
vitesse quadratique moyenne, 587
vitesse volumique de réaction, 445
voltmètre, 78

Dans la même collection

NOUVEAUX PROGRAMMES !



PRÉPAS SCIENCES

Les ouvrages de la collection ***PRÉPAS*** *SCIENCES* sont le complément indispensable à la réussite en CPGE. Ils ont été conçus et rédigés par des professeurs enseignant en classes préparatoires dans différents lycées de notre pays. Leur contenu a été discuté et pensé avec soin pour permettre la meilleure adéquation avec les attentes et les besoins des étudiants.

Pour intégrer, il faut assimiler le cours, en connaître les points fondamentaux et savoir le mettre en application dans des exercices ou des problèmes souvent ardus. Cette collection est conçue pour répondre à ces difficultés. Dans chaque chapitre, correspondant à peu près à une semaine de cours, vous trouverez :

- **Le résumé de cours**
  Il vous permettra d'accéder à une connaissance synthétique des notions.
- **Les méthodes**
  Elles vous initieront aux techniques usuelles qu'il faut savoir mettre en place.
- **Le vrai/faux**
  Il testera votre compréhension du cours et vous évitera de tomber dans les erreurs classiques.
- **Les exercices, avec des indications**
  Souvent tirés d'annales de concours, ils vous entraîneront aux écrits comme aux oraux.
- **Les corrigés**
  Toujours rédigés avec soin, ils vous aideront à progresser dans la résolution d'exercices.

Ainsi, avec un seul livre par année et par matière, la collection ***PRÉPAS*** *SCIENCES* vous permettra de surmonter les colles, d'affronter les devoirs, et elle vous guidera, jour après jour, dans votre cheminement vers la **réussite aux concours**.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 048539