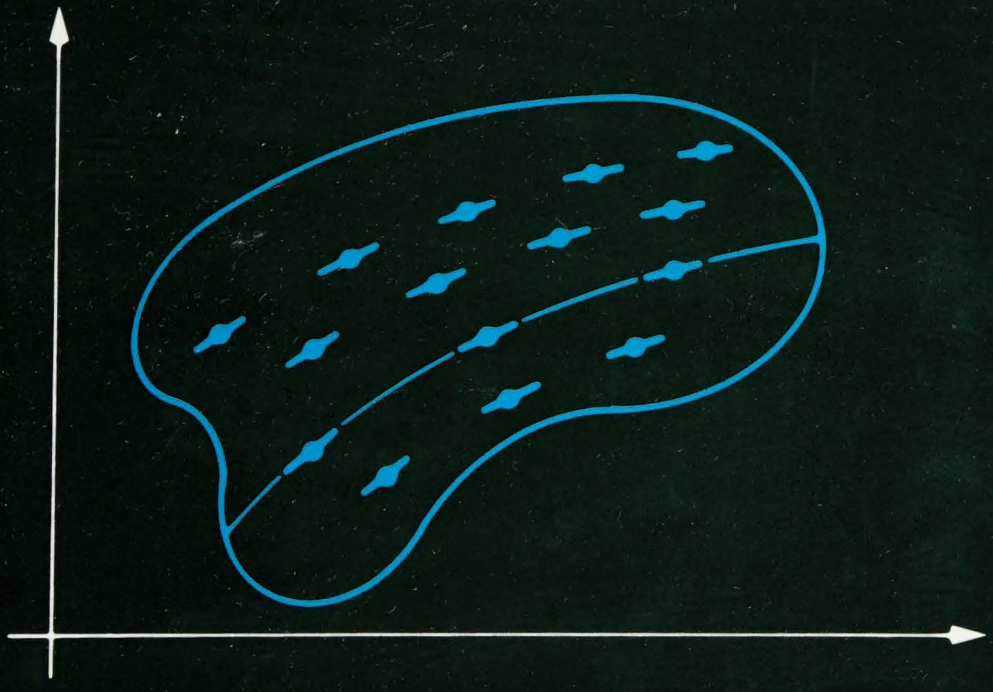
Cours d'Analyse

3 Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Srishti D. Chatterji



Presses polytechniques et universitaires romandes

Cours d'Analyse

3 Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Cours d'Analyse

3 Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Srishti D. Chatterji

Thomas J. Bata Library
TRENT UNIVERSITY
PETERBOROUGH, ONTARIO

Presses polytechniques et universitaires romandes

DANS LA COLLECTION «MATHÉMATIQUES»

Calcul différentiel et intégral
Jacques Douchet et Bruno Zwahlen
1 Fonctions réelles d'une variable réelle
2 Fonctions réelles de plusieurs variables réelles – Exercices résolus
3 Fonctions réelles d'une variable réelle – Exercices résolus
4 Fonctions réelles de plusieurs variables réelles – Exercices résolus

Analyse non standard
Alain Robert

Algèbre linéaire
Renzo Cairoli

Eléments de programmation linéaire avec applications aux graphes
Dominique de Werra

Introduction à la logique
André Delessert

Initiation aux probabilités
Sheldon M. Ross

Cours d'Analyse
Srishti Chatterji
1 Analyse vectorielle
2 Analyse complexe

Introduction à l'analyse numérique
Jacques Rappaz et Marco Picasso

DANS LA COLLECTION «CAHIERS MATHÉMATIQUES DE L'EPFL»

Mécanique analytique 1 et 2
Philippe Choquard

Introduction au calcul des variations
Bernard Dacorogna

Composition de polytopes combinatoires
François Margot

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, d'autres universités francophones ainsi que des écoles techniques supérieures. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

Vous pouvez consulter notre catalogue général sur notre serveur Internet http://ppur.epfl.ch

ISBN 2-88074-350-8
Imprimé en Suisse par Schüler SA, Bienne
© 1998, Presses polytechniques et universitaires romandes,
CH – 1015 Lausanne



Tous droits réservés.
Reproduction, même partielle, sous quelque forme ou sur quelque support
que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

à tous mes étudiantes et étudiants

Avant-propos

Le cours d'analyse de deuxième année pour les futurs ingénieurs mathématiciens et physiciens de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) comporte trois parties :

1) Analyse vectorielle
2) Analyse complexe
3) Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Le présent volume concerne la troisième partie du cours ; les deux volumes consacrés aux deux premières parties du cours sont déjà publiés (voir la bibliographie).

Un des objectifs de cet ouvrage est de présenter une introduction intégrée à la théorie des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Les cours avancés sur les équations différentielles ont tendance à séparer les équations différentielles ordinaires de celles aux dérivées partielles et ceci pour d'excellentes raisons pédagogiques, mathématiques et matérielles (disponibilité du temps). Si une introduction sérieuse aux équations différentielles ordinaires est parfaitement possible en utilisant seulement les méthodes d'analyse élémentaire (calcul différentiel et intégral, séries, algèbre linéaire élémentaire etc.), les problèmes les plus simples concernant les équations aux dérivées partielles exigent l'utilisation d'outils analytiques bien plus raffinés. Parmi ces derniers, on doit inclure les séries de Fourier et leurs généralisations, les transformées de Fourier, la théorie des distributions et la théorie des opérateurs dans les espaces hilbertiens. C'est pourquoi j'ai décidé de développer cette partie du cours en trois volets, chacun correspondant aux trois subdivisions de ce livre que j'ai intitulées

(i) Equations différentielles ordinaires
(ii) Analyse hilbertienne
(iii) Equations aux dérivées partielles

Les deux premiers chapitres sont consacrés aux équations différentielles ordinaires. Ils traitent les questions de l'existence et de l'unicité des solutions des systèmes d'équations générales, approfondissant ensuite les résultats au cas des équations linéaires. Ceci est le cœur de la théorie des équations différentielles ordinaires et tout cours, élémentaire ou avancé, est obligé de présenter cette théorie sous une forme ou une autre. Il y a suffisamment de matière dans ce domaine pour remplir plusieurs tomes et former le contenu de plusieurs cours indépendants ; en faisant un choix strict, nous avons pu concentrer l'essentiel dans les deux premiers chapitres.

Le second volet est formé des quatre chapitres suivants ; ils ont deux objectifs. Le premier est de servir de préparation à l'étude des équations aux dérivées partielles (ainsi qu'à l'étude des problèmes de Sturm-Liouville, qui sont formellement un chapitre de la théorie des équations différentielles ordinaires, mais qui doivent être vus plutôt comme des exemples particuliers des problèmes aux limites) ; le second objectif est de donner une introduction aux théories dont les physiciens ont immédiatement besoin dans leurs cours de mécanique quantique (et également pour d'autres branches de physique). Ces développements sont souvent présentés aux physiciens dans les cours intitulés « Méthodes mathématiques de la physique » (que j'ai enseignées plusieurs fois à l'EPFL) et j'ai voulu donner quelques éléments qui pourraient être utiles aux étudiants de ce type de cours. Les quatre chapitres de ce second volet (appelé « analyse hilbertienne ») concernent les sujets suivants : les espaces hilbertiens, les développements orthogonaux, les opérateurs dans les espaces hilbertiens et les transformées de Fourier et de Laplace. La notion de base orthogonale dans les espaces hilbertiens fournit une voie idéale pour les développements orthogonaux en série de Fourier et d'autres séries orthogonales ; j'ai introduit ici les distributions périodiques dans $\mathbb{R}$ pour montrer la grande simplification théorique qui en résulte. Les opérateurs hilbertiens permettent de donner un petit aperçu de l'axiomatique de la mécanique quantique, en plus de constituer une préparation indispensable pour les équations aux dérivées partielles. Dans le chapitre sur les transformées, j'ai introduit de nouveau les distributions (dans $\mathbb{R}^N$) pour illustrer leur rôle simplificateur dans le développement de la théorie ; il est bien connu que le rôle de la théorie des distributions n'est pas moins important dans la modélisation des problèmes pratiques.

Le dernier volet, formé de deux chapitres, concerne les équations aux dérivées partielles, presque exclusivement linéaires. Dans un premier chapitre, nous expliquons quels sont les problèmes principaux et comment on peut les résoudre (formellement) en utilisant quelques notions simples de la théorie des opérateurs. Le second chapitre, qui est peut-être le plus difficile de ce livre, donne les propositions et les démonstrations exactes pour quelques problèmes particuliers, traités dans le chapitre précédent de manière formelle. Ces problèmes concernent tous l'opérateur de Laplace dans différents domaines de $\mathbb{R}^N$; il est bien connu qu'une maîtrise de la théorie de cet opérateur est un pas essentiel pour un grand nombre de domaines mathématique et physique.

Le livre s'adresse aux lecteurs qui ont une connaissance du calcul différentiel et intégral dans $\mathbb{R}^N$ et de l'algèbre linéaire élémentaire, au niveau où ces disciplines sont enseignées dans la plupart des hautes écoles européennes pendant la première année des études universitaires scientifiques. Quelques notions de la topologie dans $\mathbb{R}^N$ et de la théorie de l'intégration (développée dans le volume 1) sont nécessaires pour pouvoir suivre les démonstrations ; de l'analyse complexe nous n'utilisons que le formalisme du calcul avec les nombres complexes, même si une connaissance de cette analyse (comme présentée dans le volume 2) ne peut être qu'avantageuse pour la lecture de ce volume. Nous nous sommes efforcé de faire une présentation aussi autonome que possible et

un effort considérable a été entrepris pour rendre possible la lecture de chaque chapitre (ainsi que de chaque section), sans se référer aux autres chapitres et sections ; bien entendu, les démonstrations sont plus difficiles (voire impossibles) à suivre sans une maîtrise d'une partie qui les précède. Néanmoins, il est possible d'acquérir une connaissance utile sans avoir décortiqué toutes les démonstrations.

De nombreux exercices apparaissent dans chaque chapitre ; la plupart sont des exercices résolus dans leur formulation même ; les autres demandent un calcul direct basé sur la théorie qui précède ; pour ces derniers, nous avons donné les réponses à la fin du livre.

Le texte contient un certain nombre de passages de nature historique ; leur objectif n'est pas de fixer définitivement l'histoire du développement concerné, ce qui demande beaucoup plus d'effort (même si c'était possible), mais d'illustrer succinctement le fait que les théories scientifiques progressent à petit pas, même lorsqu'elles sont poussées par des géants. Ces passages essaient aussi de servir de moment de repos dans notre marche ardue ; si ces digressions incitent quelques lecteurs à chercher des approfondissements sur les questions historiques traitées, leur objectif serait parfaitement atteint.

Dans un cours tel qu'il est professé à l'EPFL, je dispose approximativement de 26 semaines (3 heures de cours et 2 heures d'exercices hebdomadaires) pour couvrir les trois parties du cours citées au début ; seulement 10 semaines sont consacrées à la matière du présent livre. Dans ce laps de temps, je ne présente que la partie essentielle du contenu, en laissant de côté presque toutes les démonstrations. Un enseignement disposant de plus de temps trouvera donc suffisamment de matière dans ce livre pour un cours annuel ; on peut aussi imaginer des cours semestriels introductifs basés sur les différentes parties du livre. J'espère aussi que les autodidactes trouveront la lecture de ce livre profitable ; en tout cas, la composition de ce volume, ainsi que celle des deux volumes précédents, a été conçue pour de tels lecteurs.

S. D. Chatterji

Table des matières

CONVENTIONS, NOTATIONS ET RAPPELS 1
1 Ensembles et fonctions 1
2 Nombres réels 3
3 Cardinalité 5
4 Quelques fonctions réelles 6
5 Notations topologiques 6
6 Espaces C^k 7
7 Intégration 8
8 Algèbre linéaire 9
9 Conventions diverses 10

PARTIE I ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

CHAPITRE 1 EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS
1.1 Généralités sur les équations différentielles ordinaires . 13
1.1.1 Terminologie 13
1.1.2 Motivation intuitive 15
1.1.3 Quelques exemples simples 16
1.1.4 Conclusion tirées des exemples précédents 21
1.2 Théorèmes généraux 21
1.2.1 Préliminaires 21
1.2.2 Fonction lipschitzienne 24
1.2.3 Fonction lipschitzienne en x 26
1.2.4 Proposition (*théorème local*) 28
1.2.5 Proposition (*théorème local*) 31
1.2.6 Proposition (*théorème local*) 32
1.2.7 Proposition (*théorème global*) 32
1.2.8 Inégalité de Gronwall 34
1.3 Equations linéaires 36
1.3.1 Introduction 36
1.3.2 Proposition 36
1.3.3 Equation linéaire scalaire d'ordre supérieur 37
1.3.4 Proposition 38

1.3.5 Un procédé général 38
1.3.6 Un procédé inverse 40
1.4 Prolongement des solutions 41
1.4.1 Préliminaires 41
1.4.2 Proposition 41
1.4.3 Remarques 43
1.4.4 Interprétation géométrique 44
1.5 Exemples 44
1.6 Compléments 50
1.6.1 Théorème de Peano 50
1.6.2 Dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres 51
1.6.3 Systèmes autonomes 54
1.7 Remarques 57
1.7.1 Remarques méthodologiques 57
1.7.2 Remarques bibliographiques 58
1.7.3 Remarques historiques 58
1.8 Exercices 60

CHAPITRE 2 ÉQUATIONS LINÉAIRES

2.1 Systèmes linéaires généraux du premier ordre 65
2.1.1 Introduction 65
2.1.2 Proposition 65
2.1.3 Remarques 66
2.1.4 Matrice résolvante 67
2.1.5 Dérivation des fonctions matricielles 68
2.1.6 Proposition 69
2.1.7 Solution de l'équation non homogène 71
2.2 Systèmes linéaires du premier ordre à coefficients constants 72
2.2.1 Préliminaires 72
2.2.2 Proposition 73
2.2.3 Propriétés de $\exp(tA)$ 74
2.2.4 Discussion directe de $\exp(tA)$ 75
2.3 Calcul de $\exp(tA)$ 77
2.3.1 Introduction 77
2.3.2 Une méthode générale pour le calcul de $\exp(tA)$ 78

2.3.3 Remarque 80
2.3.4 Cas où A est de type $(2,2)$ 81
2.4 Equations linéaires d'ordre supérieur 83
2.4.1 Introduction 83
2.4.2 Proposition 84
2.4.3 Corollaire 85
2.4.4 Remarques 86
2.4.5 Wronskiens 87
2.4.6 Equations à coefficients constants 89
2.5 Equations linéaires du second ordre 92
2.5.1 Introduction 92
2.5.2 Solution de l'équation inhomogène 93
2.5.3 Détermination d'un système fondamental 95
2.6 Solutions à l'aide des séries entières 98
2.6.1 Introduction 98
2.6.2 Proposition (*solutions en séries entières d'une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients analytiques*) 99
2.6.3 Exemple (*équation d'Airy*) 100
2.6.4 Equations à singularité isolée 101
2.6.5 Proposition (*solutions d'une équation linéaire du second ordre ayant une singularité faible*) . 103
2.6.6 Remarques sur les équations holomorphes 105
2.6.7 Equation de Bessel 107
2.6.8 Remarques sur les fonctions de Bessel 113
2.6.9 Démonstration de la proposition 2.6.5 115
2.7 Etude qualitative des équations différentielles linéaires du second ordre 120
2.7.1 Introduction 120
2.7.2 Transformation des équations 120
2.7.3 Zéros des solutions 122
2.7.4 Méthode de Prüfer 125
2.7.5 Proposition (*théorème d'oscillation*) 127
2.7.6 Amplitudes des oscillations 128
2.7.7 Zéros des fonctions de Bessel 129
2.7.8 Proposition 131
2.7.9 Comportement asymptotique des fonctions de Bessel 132

2.8 Exercices 133
2.9 Quelques compléments 151
2.9.1 Remarques générales 151
2.9.2 Stabilité 153
2.9.3 Equations et solutions périodiques 154
2.9.4 Intégrales premières 156
2.9.5 Théorie de perturbation 158
2.9.6 Remarques historiques 159
2.9.7 Remarques bibliographiques 161

PARTIE II ANALYSE HILBERTIENNE

CHAPITRE 3 ESPACES DE HILBERT
3.1 Notions fondamentales 163
3.1.1 Préliminaires 163
3.1.2 Proposition 165
3.1.3 Forme hermitienne strictement positive 166
3.1.4 Espaces préhilbertiens 167
3.1.5 Topologie des espaces préhilbertiens 168
3.1.6 Proposition 170
3.1.7 Complétion des espaces préhilbertiens 171
3.2 Exemples 172
3.2.1 Espace $\mathbb{C}^N$ 172
3.2.2 Espace ℓ^2 172
3.2.3 Espace $C([a\,,b])$ 174
3.2.4 Espace L^2 175
3.2.5 Espaces de Sobolev 179
3.2.6 Exercices 180
3.3 Espaces séparables 184
3.3.1 Définitions 184
3.3.2 Proposition 184
3.3.3 Exemples d'espaces séparables 186
3.3.4 Exercices 189
3.4 Systèmes orthogonaux 190
3.4.1 Définition 190
3.4.2 Proposition 190
3.4.3 Proposition (*projection orthogonale*) 191
3.4.4 Définition d'une projection 192

3.4.5 Corollaire (*inégalité de Bessel*) 193
3.4.6 Remarques 194
3.4.7 Orthonormalisation de Gram-Schmidt 194
3.4.8 Exercices 195
3.5 Séries et sommes dans un espace préhilbertien 197
3.5.1 Préliminaires 197
3.5.2 Proposition (*sommabilité et convergence commutative*) 198
3.5.3 Remarques 201
3.5.4 Proposition (*convergence absolue*) 202
3.5.5 Proposition (*propriétés des séries et des sommes*) 204
3.5.6 Remarques 205
3.5.7 Proposition (*somme d'une famille orthogonale*) 205
3.5.8 Remarques 207
3.5.9 Exercices 207
3.6 Bases orthonormales 209
3.6.1 Proposition (*caractérisation des bases orthonormales*) 209
3.6.2 Remarques 211
3.6.3 Proposition (*existence d'une base othonormale*) 211
3.6.4 Isomorphisme 212
3.6.5 Proposition (*caractérisation de $\mathbb{C}^N$ et ℓ^2*) 212
3.6.6 Remarques 213
3.6.7 Système orthonormal complet 214
3.6.8 Terminologie 215
3.6.9 Exercices 216
3.7 Approximation optimale 218
3.7.1 Préliminaires 218
3.7.2 Proposition (*projection sur un ensemble convexe*) 219
3.7.3 Caractérisation d'une approximation optimale 220
3.7.4 Contractivité des projections 222
3.7.5 Projection sur un sous-espace vectoriel 223
3.7.6 Proposition (*projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel*) 224

3.7.7 Proposition (*caractérisation des projections orthogonales*) 225
3.7.8 Proposition (*projection orthogonale dans un espace hilbertien*) 226
3.7.9 Remarques 227
3.7.10 Proposition (*caractérisation des sous-espaces vectoriels fermés dans un espace hilbertien*) .. 227
3.7.11 Corollaire (*critère pour qu'un ensemble soit total*) 228
3.7.12 Proposition (*théorème de Fréchet-Riesz sur la représentation des fonctionnelles linéaires continues*) 228
3.7.13 Un contre-exemple 229
3.7.14 Exercices 230
3.8 Compléments 232
3.8.1 Espaces vectoriels topologiques 232
3.8.2 Remarques historiques 232
3.8.3 Suggestions bibliographiques 236

CHAPITRE 4 DÉVELOPPEMENTS ORTHOGONAUX
4.1 Séries de Fourier 239
4.1.1 Introduction 239
4.1.2 Formules préliminaires 241
4.1.3 Sommes partielles d'une série de Fourier 245
4.1.4 Quelques conventions 247
4.1.5 Proposition (*théorème de Fejér*) 248
4.1.6 Compléments concernant le théorème de Fejér 249
4.1.7 Remarques concernant les moyennes de Cesàro 251
4.1.8 Complétude des fonctions trigonométriques .. 252
4.1.9 Formules pour les séries de Fourier dans $[a, a+2\pi]$ 255
4.1.10 Séries de Fourier dans $[a, a+p]$ 258
4.1.11 Séries de Fourier en sinus et en cosinus dans $[0, \ell]$ 260
4.2 Convergence ponctuelle des séries de Fourier 264
4.2.1 Préliminaires 264
4.2.2 Une condition nécessaire et suffisante 265
4.2.3 Lemme de Riemann-Lebesgue 266

4.2.4 Déductions du lemme de Riemann-Lebesgue . 267
4.2.5 Critères de convergence pontuelle 269
4.2.6 Remarques et compléments sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier 271
4.2.7 Convergence uniforme 274
4.2.8 Quelques conseils pratiques 279
4.2.9 Comment reconnaître une série de Fourier ... 282
4.3 Exercices 284
4.4 Compléments et généralisations 293
4.4.1 Phénomène de Gibbs 293
4.4.2 Remarques 300
4.4.3 Séries de Fourier multiples 300
4.4.4 Généralisation 303
4.5 Séries de Fourier des distributions 304
4.5.1 Préliminaires 304
4.5.2 Exemples de distributions 304
4.5.3 Condition de continuité 307
4.5.4 Opérations sur les distributions 309
4.5.5 Série de Fourier d'une distribution périodique 313
4.5.6 Proposition (*théorème fondamental pour la série de Fourier des distributions 2π-périodiques*) 316
4.5.7 Complément et remarques historiques 319
4.6 Exercices 321
4.7 Polynômes orthogonaux 325
4.7.1 Préliminaires 325
4.7.2 Proposition (*complétude des polynômes orthogonaux dans un intervalle borné*) 327
4.7.3 Complétude des polynômes orthogonaux au cas d'intervalle non borné 328
4.7.4 Proposition (*condition suffisante pour la complétude des polynômes orthogonaux dans un intervalle non borné*) 328
4.7.5 Exemples : polynômes orthogonaux classiques 330
4.7.6 Propriétés générales des polynômes orthogonaux 333
4.7.7 Polynômes de Jacobi 336
4.7.8 Polynômes de Legendre 342
4.7.9 Polynômes de Laguerre 343

4.7.10 Polynômes d'Hermite 345
4.7.11 Bases orthogonales dans $L^2(X)$ 348
4.8 Exercices 350
4.9 Compléments et remarques 353
4.9.1 Convergence ponctuelle des développements orthogonaux 353
4.9.2 Problème des moments 356
4.9.3 Remarques bibliographiques sur les polynômes orthogonaux 358
4.9.4 Ondelettes 359
4.9.5 Conclusion 359

CHAPITRE 5 OPÉRATEURS DANS LES ESPACES HILBERTIENS
5.1 Notions fondamentales 361
5.1.1 Définitions générales 361
5.1.2 Opérateur adjoint 363
5.1.3 Spectre d'un opérateur 366
5.2 Exemples 367
5.2.2 Cas $E = \ell^2$ 369
5.2.3 Cas $E = C([a, b])$ 371
5.2.4 Cas $E = L^2$ 372
5.2.5 Projections orthogonales 374
5.3 Opérateurs compacts 375
5.3.1 Définition 375
5.3.2 Exemples d'opérateurs compacts 375
5.3.3 Proposition (*théorème d'Arzelà-Ascoli*) 380
5.4 Théorie spectrale pour les opérateurs compacts symétriques 381
5.4.1 Introduction 381
5.4.2 Proposition (*théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints*) 382
5.4.3 Lemme 383
5.4.4 Lemme 385
5.4.5 Remarques 390
5.4.6 Solution des équations 395
5.5 Equations intégrales 398
5.5.1 Préliminaires 398
5.5.2 Opérateurs de rang finis 399

5.5.3 Opérateurs intégraux symétriques 403
5.5.4 Remarques et compléments 406
5.6 Spectre d'un opérateur borné 414
5.6.1 Proposition (*série de Neumann*) 414
5.6.2 Proposition 415
5.6.3 Proposition 416
5.6.4 Remarque 416
5.6.5 Proposition 417
5.6.6 Proposition 418
5.7 Exercices 419
5.8 Opérateurs non bornés 424
5.8.1 Introduction 424
5.8.2 Définitions fondamentales 426
5.8.3 Proposition 427
5.8.4 Opérateurs autoadjoints non bornés 428
5.8.5 Prolongements symétriques des opérateurs symétriques 430
5.8.6 Proposition 432
5.8.7 Corollaire 435
5.8.8 Exemples 436
5.9 Spectre des opérateurs non bornés 443
5.9.1 Préliminaires 443
5.9.2 Proposition 444
5.9.3 Remarques 445
5.9.4 Proposition 446
5.9.5 Spectre des opérateurs symétriques 448
5.9.6 Théorème spectral 451
5.10 Langage de la mécanique quantique 454
5.10.1 Préliminaires 454
5.10.2 Observables discrètes 455
5.10.3 Observables générales 459
5.10.4 Relations d'incertitude 460
5.10.5 Equation de Schrödinger 463
5.10.6 Commentaires 464
5.11 Remarques 465
5.11.1 Remarques historiques 465
5.11.2 Suggestions bibliographiques 466

CHAPITRE 6 TRANSFORMATIONS DE FOURIER ET DE LAPLACE

6.1 Transformation de Fourier 467
6.1.1 Définition 467
6.1.2 Conventions 468
6.1.3 Propriétés principales de la transformation de Fourier 469
6.1.4 Remarques sur les propriétés énumérées ci-avant 471
6.1.5 Exemples 472
6.2 Développements théoriques 475
6.2.1 Préliminaires 475
6.2.2 Continuité et bornitude de $\widehat{f}$ 475
6.2.3 Lemme de Riemann-Lebesgue 476
6.2.4 Dérivabilité de $\widehat{f}$ 477
6.2.5 Transformée des dérivées 478
6.2.6 Convolutions 479
6.2.7 Lemme 480
6.2.8 Formule d'inversion de Fourier 480
6.3 Formule de Stirling 484
6.3.1 Introduction 484
6.3.2 Démonstration de l'équation (6.34) 485
6.3.3 Remarques 487
6.4 Distributions 489
6.4.1 Préliminaires 489
6.4.2 Définition des distributions dans $\mathbb{R}^N$ 489
6.4.3 Exemples des distributions 490
6.4.4 Conditions de continuité 491
6.4.5 Opérations sur les distributions 492
6.4.6 Remarques 494
6.4.7 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 494
6.4.8 Proposition (*propriété des transformées des fonctions de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) 495
6.4.9 Distributions tempérées 497
6.4.10 Transformées de Fourier des distributions tempérées 499
6.4.11 Proposition (*transformation de Fourier comme isomorphisme de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$) 501
6.4.12 Proposition (*théorème de Plancherel*) 503

6.4.13 Remarques 504
6.4.14 Exemples 506
6.5 Quelques compléments élémentaires 508
6.5.1 Préliminaires 508
6.5.2 Formules intégrales de Fourier 509
6.5.3 Proposition 513
6.5.4 Lemme (*de Riemann-Lebesgue*) 513
6.5.5 Lemme 513
6.5.6 Corollaire 515
6.5.7 Remarques 516
6.5.8 Un raisonnement heuristique 516
6.6 Exercices 518
6.7 Compléments concernant la transformation de Fourier 527
6.7.1 Analyse harmonique 527
6.7.2 Remarques historiques et bibliographiques ... 528
6.8 Transformation de Laplace 529
6.8.1 Définition 529
6.8.2 Conventions et préliminaires 529
6.8.3 Propriétés principales de la tranformation de Laplace 531
6.8.4 Remarques 532
6.8.5 Exemples 534
6.9 Développements théoriques 539
6.9.1 Holomorphie des transformées 539
6.9.2 Unicité, formule d'inversion 540
6.9.3 Convolution 543
6.9.4 Formules de dérivation et d'intégration 544
6.9.5 Théorèmes abélien et taubérien 546
6.10 Transformée de Laplace des distributions 549
6.10.1 Préliminaires 549
6.10.2 Deux autres procédés 550
6.10.3 Résumé des propriétés 552
6.11 Applications aux équations différentielles 553
6.11.1 Equations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants 553
6.11.2 Solution généralisée 555

6.11.3 Fonctions rationnelles comme transformées de Laplace 557
6.11.4 Quelques exemples 559
6.11.5 Remarques 562
6.12 Exercices 565
6.13 Remarques complémentaires concernant la transformation de Laplace 569
6.13.1 Calcul opérationnel et théorie des systèmes .. 569
6.13.2 Remarques historiques 570
6.13.3 Remarques bibliographiques 571

PARTIE III ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CHAPITRE 7 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : INTRODUCTION

7.1 Généralités 573
7.1.1 Préliminaires 573
7.1.2 Quelques exemples 575
7.1.3 Equation des ondes dans $\mathbb{R}$ 577
7.1.4 Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}$ 580
7.2 Equations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre 585
7.2.1 Préliminaires 585
7.2.2 Méthode des courbes caratéristiques 586
7.2.3 Exemples 588
7.3 Equations aux dérivées partielles linéaires du second ordre 590
7.3.1 Préliminaire 590
7.3.2 Problèmes elliptiques concernant $\triangle$ 591
7.3.3 Problèmes paraboliques concernant $\triangle$ 593
7.3.4 Problèmes hyperboliques concernant $\triangle$ 594
7.3.5 Généralisations 595
7.3.6 Remarques physiques intuitives 596
7.4 Solutions formelles 597
7.4.1 Préliminaires 597
7.4.2 Solution de $Lu = f$ 599
7.4.3 Equation parabolique 601
7.4.4 Equation hyperbolique 604
7.4.5 Equation de Schrödinger 606

7.5 Conditions aux limites non homogènes 608
7.5.1 Préliminaires 608
7.5.2 Cas des autres équations 608
7.5.3 Exemple 609
7.5.4 Une méthode alternative 611
7.6 Exemples d'opérateurs 613
7.6.1 Introduction 613
7.6.2 Opérateurs réguliers de Sturm–Liouville 613
7.6.3 Problème général de Sturm–Liouville 621
7.6.4 Opérateur d'oscillateur harmonique linéaire .. 622
7.6.5 Enumération de quelques autres exemples 624
7.7 Appendice 625
7.7.1 Préliminaires 625
7.7.2 Régularité de Fr Ω 626
7.7.3 Sur la définition de $C^k(\overline{\Omega})$ 627
7.8 Exercices 628
7.9 Compléments 635
7.9.1 Remarques historiques 635
7.9.2 Calcul des variations 637
7.9.3 Brachistochrone 640
7.9.4 Remarques bibliographiques 643

CHAPITRE 8 PROBLÈMES ASSOCIÉS AU LAPLACIEN
8.1 Formules préliminaires 645
8.1.1 Formules de Green 645
8.1.2 Volumes des boules et des sphères 647
8.1.3 Moyennes sphériques et spatiales 648
8.2 Fonctions harmoniques 649
8.2.1 Définitions préliminaires 649
8.2.2 Lemme 650
8.2.3 Proposition (*principe du maximum et du minimum*) 652
8.2.4 Proposition (*unicité des solutions*) 653
8.2.5 Solutions fondamentales de l'équation de Laplace 654
8.2.6 Formule fondamentale 655
8.2.7 Fonction de Green pour une boule 658
8.2.8 Proposition (*solution du problème de Dirichlet dans une boule*) 660

8.3 Fonctions sous-harmoniques 663
8.3.1 Préliminaires 663
8.3.2 Proposition (*caractérisation des fonctions sous-harmoniques*) 664
8.3.3 Propriétés des fonctions sous-harmoniques ... 666
8.3.4 Proposition (*solution de l'équation de Poisson*) 668
8.4 Propriétés des fonctions harmoniques 669
8.4.1 Préliminaires 669
8.4.2 Proposition (*caractérisation des fonctions harmoniques*) 669
8.4.3 Proposition (*inégalités de Harnack*) 670
8.4.4 Corollaire 673
8.4.5 Proposition (*principe de Harnack*) 673
8.4.6 Proposition (*solution fondamentale*) 674
8.4.7 Proposition (*singularités artificielles*) 675
8.4.8 Analyticité des fonctions harmoniques 676
8.5 Problème de Dirichlet 676
8.5.1 Préliminaires 676
8.5.2 Méthode de Perron 678
8.5.3 Proposition (*harmonicité de la fonction de Perron*) 679
8.5.4 Résolutivité 680
8.5.5 Points réguliers de la frontière 680
8.5.6 Proposition (*existence d'une solution du problème de Dirichlet*) 681
8.5.7 Conditions géométriques pour la régularité ... 683
8.5.8 Domaines non bornés 684
8.6 Valeurs propres 687
8.6.1 Préliminaires 687
8.6.2 Proposition (*positivité des valeurs propres*) ... 688
8.6.3 Remarques méthodologiques 689
8.6.4 Valeurs propres pour un pavé borné 690
8.6.5 Valeurs propres pour un disque 691
8.6.6 Fonctions harmoniques sphériques 695
8.6.7 Proposition 696
8.6.8 Remarques complémentaires sur les fonctions harmoniques sphériques 698

8.6.9 Valeurs propres pour une boule 700
8.6.10 Séparation des variables 704
8.6.11 Valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger 706
8.7 Equations de la chaleur 710
8.7.1 Introduction 710
8.7.2 Solution dans $\mathbb{R}^N$ 711
8.7.3 Proposition 712
8.7.4 Unicité des solutions 716
8.7.5 Proposition (*principe du maximum et du minimum*) 717
8.7.6 Proposition (*théorème d'unicité*) 718
8.7.7 Solution dans des domaines autres que $\mathbb{R}^N$ ... 719
8.8 Equation des ondes 719
8.8.1 Introduction 719
8.8.2 Solutions dans $\mathbb{R}^N$ 719
8.8.3 Solutions dans $\mathbb{R}^2$ 723
8.8.4 Unicité des solutions 724
8.9 Exercices 725
8.10 Indications bibliographiques 737

RÉPONSES AUX EXERCICES 739

BIBLIOGRAPHIE 743

INDEX 745

Conventions, notations et rappels

1 Ensembles et fonctions

$x \in A$	x appartient à l'ensemble A
$x \notin A$	x n'appartient pas à l'ensemble A
$A \subset B$	l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B ; ceci équivaut à $B \supset A$ et n'exclut pas que $A = B$; on dit que A est une partie de B
A^c	le complémentaire de A
$A \cup B$	la réunion des ensembles A et B
$A \cap B$	l'intersection des ensembles A et B
$A \setminus B$	l'ensemble formé des éléments de A qui ne sont pas dans B ; donc $A \setminus B = A \cap B^c$
$\emptyset$	l'ensemble vide

Une ***fonction*** (les mots fonction, ***application***, ***correspondance***, ***transformation*** sont des synonymes) est notée comme $f : X \to Y$ où X est le ***domaine*** de définition de f et Y, l'***espace image***, contient les ***images*** ou les ***valeurs*** $f(x)$, $x \in X$; on écrit aussi $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, pour indiquer la fonction f ; pour $x \in X$, il existe un unique élément $y \in Y$ tel que $y = f(x)$; f s'appelle ***injective*** si $x \neq x'$ dans X entraîne que $f(x) \neq f(x')$ dans Y ; f s'appelle ***surjective*** si chaque $y \in Y$ est de la forme $y = f(x)$ pour $x \in X$; f est dite ***bijective*** si f est à la fois injective et surjective. Si $f : X \to Y$ on utilise aussi les phrases du type : f est une fonction sur X à valeurs dans Y.

Si $f : I \to J$ est une fonction, on dit que $\{f(i)\}_{i \in I}$ est une ***famille d'éléments dans*** J ***indexée pour*** I ; on note cette famille aussi par $\{f_i\}_{i \in I}$ ou simplement $\{f_i\}$ si I n'est pas en doute.

Soit $f : I \to J$; il est souvent commode de décrire l'ensemble $f(I) \subset J$ comme suit :

$$f(I) = \{f(i) : i \in I\}.$$

Il est important de distinguer l'ensemble $f(I) \subset J$ de la famille $\{f(i)\}_{i \in I}$ dans J.

Une famille finie (appelée aussi ***suite finie***) dans un ensemble X est notée $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$; ici, les x_i ne sont pas nécessairement distincts ; par contre, une partie finie de X est aussi notée $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ ou $\{x_1, \ldots, x_n\}$ mais avec la convention tacite que les x_i sont *distincts*.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une famille de parties d'un ensemble X, on note par

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{ou} \quad \bigcup \{A_i : i \in I\} \quad \text{ou} \quad \bigcup_i A_i$$

la réunion des A_i ; on note par

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{ou} \quad \bigcup\{A_i : i \in I\} \quad \text{ou} \quad \bigcup_i A_i$$

l'intersection des A_i.

Rappelons que les opérations ensemblistes $\bigcap$, $\bigcup$ sont commutatives, associatives et distributives. On a les formules suivantes :

$$A \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$$

$$A \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$$

$$\left\{\bigcup_{i\in I} A_i\right\}^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c\,, \quad \left\{\bigcap_{i\in I} A_i\right\}^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c\,.$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n ensembles, on note par $X_1 \times \cdots \times X_n$ l'ensemble formé de tous les n-uples $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$; on écrit

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i\,,\ i = 1, \ldots, n\}\,;$$

$X_1 \times \cdots \times X_n$ s'appelle le ***produit cartésien*** des X_i, $i = 1, \ldots, n$.

Soit $f : X \to Y$ une fonction ; l'ensemble

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

s'appelle le ***graphe*** de f ; si $A \subset X$, on écrit

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset Y\,;$$

$f(A)$ s'appelle l'***image*** de A sous f ; si $A \subset Y$, on écrit

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \subset X\,;$$

$f^{-1}(A)$ s'appelle l'***image inverse*** de A sous f.

Le symbole f^{-1} est utilisé dans un autre contexte. Soit $f : X \to Y$ une fonction *bijective* ; pour tout $y \in Y$ il existe alors un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$; on écrit $f^{-1}(y) = x$; alors $f^{-1} : Y \to X$ est une fonction telle que

$$f^{-1}(f(x)) = x\,,\ x \in X\,; \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ y \in Y\,;$$

f^{-1} s'appelle la fonction ***inverse*** ou ***réciproque*** de f.

Soit $f : X \to Y$; si $A \subset X$ on écrit $f|_A$ pour la ***restriction*** de f à A ; donc $f|_A : A \to Y$ est une fonction telle que $f(x) = f|_A(x)$ si $x \in A$; s'il n'y a aucune confusion à craindre, nous indiquerons $f|_A$ par $f : A \to Y$.

Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux fonctions ; alors $g \circ f : X \to Z$ est la fonction définie par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\,, \quad x \in X\,;$$

$g \circ f$ s'appelle la ***composition*** des fonctions f et g.

Soit X un ensemble ; une ***partition*** de X est une famille de sous-ensembles $\{A_i\}_{i\in I}$ de X telle que les A_i sont deux à deux disjoints et leur réunion est égale à X ; la partition s'appelle ***finie*** (ou ***dénombrable***, cf. § 7) si I est fini ou dénombrable.

2 Nombres réels

Nous notons par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Rappelons que $\mathbb{R}$ est caractérisé par la description suivante : $\mathbb{R}$ est un corps ***commutatif***, ***ordonné***, ***archimédien*** et ***complet***. Expliquons les deux derniers termes ; dans $\mathbb{R}$, on note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ les sous-ensembles suivants :

$$\mathbb{N} = \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\} \quad \text{nombres naturels}$$

$$\mathbb{Z} = \{0,\, 1,\, -1,\, 2,\, -2,\, \ldots\} \quad \text{nombres entiers}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ n \geqslant 1\right\} \quad \text{nombres rationnels.}$$

$\mathbb{R}$ est archimédien : pour tout $x > 0$, $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$. $\mathbb{R}$ est complet : toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge vers un élément de $\mathbb{R}$. Nous supposons connues les définitions et les propriétés des suites des nombres réels invoquées dans la phrase précédente.

Si $A \subset \mathbb{R}$, A^* sera l'ensemble $A \setminus \{0\}$ et A_+ sera l'ensemble $\{x \in A : x \geqslant 0\}$. Ainsi,

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\,, \quad \mathbb{N}^* = \{1,\, 2,\, \ldots\}\,.$$

De même, $A_- = \{x \in A : x \leqslant 0\}$.

Par $\overline{\mathbb{R}}$ nous noterons l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\,, -\infty\}$ où ∞, $-\infty$ sont deux symboles distincts et différents des éléments de $\mathbb{R}$; parfois, ∞ sera noté par $+\infty$. On écrit : $-\infty < x < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si A est une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, on définit

$$M = \sup\{x : x \in A\} = \sup_{x\in A} x$$

comme l'unique élément $M \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que

$$M \geqslant x\,,\ x \in A\,; \quad \text{si } M' \geqslant x\,,\ x \in A \text{ alors } M' \geqslant M$$

(M est le plus petit majorant des éléments de A) ; de manière analogue, on définit

$$m = \inf\{x : x \in A\} = \inf_{x\in A} x$$

comme l'unique élément $m \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que

$$m \leqslant x\,,\ x \in A\,; \quad \text{si } m' \leqslant x\,,\ x \in A \text{ alors } m' \leqslant m$$

(m est le plus grand minorant des éléments de A).

Si X est un ensemble quelconque, une ***suite*** dans X est une famille d'éléments de X indexée par $\mathbb{N}$; une suite sera notée comme

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad \{x_n\}_{n\geqslant 0} \quad \text{ou} \quad \{x_n\}_{n=0,\,1,\,\ldots} \quad \text{ou simplement } \{x_n\}\,;$$

souvent, les familles indexées par $\{k,\, k+1,\, \ldots\}$ où $k \in \mathbb{Z}$ seront aussi appelées les suites ; elles seront notées

$$\{x_n\}_{n\geqslant k} \quad \text{ou} \quad \{x_n\}_{n=k,\,k+1,\,\ldots} \quad \text{ou simplement} \quad \{x_n\} \text{ ou } \{x_i\} \text{ etc.}$$

Nous écrirons simplement $\{x_n\}$ ou $\{x_i\}$, etc., s'il n'y a aucune confusion à craindre concernant le domaine de variation de n ou i.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On pose

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geqslant 0}\left(\sup_{k\geqslant n} x_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geqslant 0}\left(\inf_{k\geqslant n} x_k\right)\,;$$

si $M_n = \sup_{k\geqslant n} x_k$, on voit que

$$M_n \geqslant M_{n+1}\,, \quad n \geqslant 0\,;$$

donc

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} x_k\right)\,.$$

De même, si $m_n = \inf_{k\geqslant n} x_k$, on a

$$m_n \leqslant m_{n+1}\,, \quad n \geqslant 0\,,$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} x_k\right)\,.$$

On démontre que

$$-\infty \leqslant \liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \infty$$

et que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si

$$\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n\,;$$

on a alors $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$. Pour alléger la notation, nous écrivons

$$\limsup x_n\,, \quad \liminf x_n\,, \quad \lim x_n$$

en supprimant $n \to \infty$ ou en ajoutant à côté $n \to \infty$; ainsi, nous écrivons $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ pour $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. L'utilisation de lim sup, lim inf ne sera pas très fréquente dans ce volume ; néanmoins, leur maniement correct est essentiel pour tout étudiant en analyse.

Un ***intervalle ouvert*** de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ (notée par $]\,a\,,\,b\,[$) déterminé par a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$; on a

$$]\,a\,,\,b\,[\; = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\;;$$

l'intervalle ouvert $]\,a\,,\,b\,[$ s'appelle ***borné*** si a, b sont dans $\mathbb{R}$. Noter que $\mathbb{R} =]\,-\infty\,,\,\infty\,[$.

Avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on définit

$$\begin{aligned}
[\,a\,,\,b\,[\; &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \quad (\text{si } a \in \mathbb{R}) \\
]\,a\,,\,b\,] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \quad (\text{si } b \in \mathbb{R}) \\
[\,a\,,\,b\,] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad (\text{si } a,\, b \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

On dit que $[\,a\,,\,b\,]$ est un intervalle ***fermé***, ***borné*** dans $\mathbb{R}$ ou un intervalle ***compact*** dans $\mathbb{R}$; d'autres intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont

$$]\,-\infty\,,\,b\,]\,,\; b \in \mathbb{R}\,; \quad [\,a\,,\,\infty\,[\;,\; a \in \mathbb{R}\,.$$

un ***intervalle de*** $\mathbb{R}$ est un ensemble d'un des quatres types $]\,a\,,\,b\,[$, $[\,a\,,\,b\,[$, $]\,a\,,\,b\,]$, $[\,a\,,\,b\,]$, définis ci-dessus. Noter que, selon notre définition, un intervalle contient toujours une infinité de points.

Soit X un ensemble. Si $f : X \to \mathbb{R}$, on dit que f est une ***fonction réelle*** sur X ; si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est une ***fonction numérique*** sur X. Si $A \subset X$, on note par 1_A la ***fonction indicatrice de*** A ; c'est la fonction réelle 1_A sur X telle que

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in A^c. \end{cases}$$

3 Cardinalité

Si X et Y sont deux ensembles, on dit que X et Y sont ***équipotents*** ou que X, Y sont de ***même cardinalité*** s'il existe une bijection de X sur Y. Si X est vide ou équipotent à $\{1, \ldots, n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que X est un ensemble ***fini*** (de cardinalité 0 ou n). Si X n'est pas un ensemble fini, on dit que X est un ensemble ***infini*** ou que X et de ***cardinalité infinie***. Si X est équipotent à $\mathbb{N}$, on dit que X est ***dénombrable*** (ou que X est dénombrablement infini). Un ensemble X est ***au plus dénombrable*** s'il est dénombrable ou fini. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables. On montre que $\mathbb{R}$ n'est pas

dénombrable ; ainsi, on dit que $\mathbb{R}$ est ***non dénombrable*** (ou de cardinalité infinie non dénombrable). On peut démontrer les affirmations suivantes :

- soit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ avec $X_i \neq \emptyset$, $i \in I \neq \emptyset$; si I est dénombrable et les X_i sont au plus dénombrables alors X est dénombrable ; si I est fini et les X_i sont au plus dénombrables avec un au moins des X_i dénombrable alors X est dénombrable ;
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$ et tout sous-intervalle de $\mathbb{R}$ sont de même cardinalité.

4 Quelques fonctions réelles

Les fonctions trigonométriques (réelles) sont notées comme suit : sin, cos, tg, ctg, sec, cosec ; leurs fonctions réciproques sont notées comme suit : arc sin, arc cos, arc tg, etc. Rappelons que

$$\begin{aligned}
&\arcsin : [\,-1\,,\,1\,] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\\
&\arccos : [\,-1\,,\,1\,] \longrightarrow [\,0\,,\,\pi\,]\\
&\operatorname{arc\,tg} : \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}$$

avec $\operatorname{arc\,tg}(\pm\pi/2) = \pm\infty$. La fonction exponentielle (réelle) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit aussi comme $\exp x = \mathrm{e}^x$. La fonction logarithmique (réelle) sera notée ln ; on a

$$\ln : \,]\,0\,,\,\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$$

avec $\ln(\mathrm{e}^x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $\exp(\ln x) = x$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions hyperboliques (réelles) sont notées comme suit : sh, ch, th, cth, sech, cosech avec

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \text{ si } x \neq 0\\
&\operatorname{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\\
&\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\,, \quad \operatorname{cth}(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)} \text{ si } x \neq 0\,.
\end{aligned}$$

5 Notations topologiques

Il s'agit surtout de la topologie dans $\mathbb{R}^N$ expliquée dans le chapitre 1 (vol. 1).

Si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, on écrit

$$\|x\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_N^2\right)^{1/2}, \quad |x| = \max_{1\leqslant j\leqslant N} |x_j|\,;$$

on pose, pour $0 < r < \infty$,

$$B(x;r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \|y - x\| < r \right\} ;$$

$B(x;r)$ s'appelle ***boule ouverte*** de centre x et de rayon r ; au chapitre 8, il sera plus commode d'écrire $B_r(x)$ au lieu de $B(x;r)$.

Si $A \subset \mathbb{R}^N$, on écrit

$$\mathring{A}, \quad \overline{A}, \quad \operatorname{Fr} A, \quad \operatorname{ext} A$$

pour l'***intérieur*** de A, l'***adhérence*** (ou la ***fermeture***) de A, la ***frontière*** de A et l'***extérieur*** de A respectivement ; rappelons que

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}, \quad \operatorname{ext} A = \left(\overline{A}\right)^c = \left(A^c\right)^0, \quad \operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} A^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

A est dit ***ouvert*** si $A = \mathring{A}$ et A est dit ***fermé*** si $A = \overline{A}$. Si $B \subset A$, on dit que B est ***ouvert*** (resp. ***fermé***) *dans* A s'il existe $X \subset \mathbb{R}^N$, X ouvert (resp. fermé) tel que $B = X \cap A$.

A est dit ***connexe*** si toute partie non vide B de A telle que B est à la fois ouverte et fermée dans A, coïncide avec A.

Une partie A de $\mathbb{R}^N$ est ***compacte*** si A est fermée et *bornée* (ce qui veut dire que $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$).

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$; alors (pour un ensemble d'indices J approprié)

$$A = \bigcup_{i \in J} A_i$$

où $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, chaque A_i étant connexe ; autrement dit, toute partie A de $\mathbb{R}^N$ est la réunion d'une famille de sous-ensembles A_i, $i \in J$, deux à deux disjoints, tels que chaque A_i est connexe ; les A_i s'appellent les ***composantes connexes*** de A. Pour cette propriété ainsi que pour les notions de base concernant la compacité, la connexité et autres notions topologiques, on consultera le volume 1 (chap. 1). Certaines de ces notions sont revues dans un contexte plus général dans ce présent livre.

6 Espaces C^k

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$; par $C(X)$ nous notons l'ensemble formé de toutes les fonctions (réelles ou complexes) définies et continues dans X. Si X est une *partie ouverte* de $\mathbb{R}^N$ et $k = 1, 2, \ldots$, $C^k(X)$ est l'ensemble formé de toutes les fonctions (réelles ou complexes) *de classes* C^k dans X ; ainsi, $f \in C^k(X)$ si

$$f : X \to \mathbb{C}$$

avec $\mathrm{D}^\alpha f : X \to \mathbb{C}$ continue où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ avec

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leqslant k .$$

Rappelons que

$$\mathrm{D}^\alpha f = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{D}_N^{\alpha_N} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad .$$

avec $\mathrm{D}_j f = \partial f / \partial x_j$. Pour f réelles, cette notation standard est expliquée dans le volume 1 (chap. 3) ; $\alpha \in \mathbb{N}^N$ s'appelle un ***multi-indice*** à N-variables ; c'est un N-tuple d'entiers $\geqslant 0$. Si $f = g + ih$, g et h réelles,

$$\mathrm{D}^\alpha f = \mathrm{D}^\alpha g + i\,\mathrm{D}^\alpha h\,.$$

On écrit $C^\infty(X)$ pour l'ensemble formé de toutes les fonctions (réelles ou complexes) de classe C^k dans X pour tout $k = 1, 2, \ldots$; on dit aussi que $f \in C^\infty(X)$ si f est de classe C^∞ dans X (partie ouverte de $\mathbb{R}^N$), c'est-à-dire $\mathrm{D}^\alpha f : X \to \mathbb{C}$ existe et est continue pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Pour X une partie quelconque de $\mathbb{R}^N$, on dit que $f \in C^k(X)$ $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ s'il existe une partie ouverte $\Omega \supset X$ est une fonction $\widetilde{f} \in C^k(\Omega)$ telle que $\widetilde{f}\big|_X = f$; ce point est discuté plus en détail au paragraphe 7.7.3 lorsque $X = \overline{\Omega}$, Ω ouvert. Quelquefois, nous écrivons $C^0(X)$ pour $C(X)$.

Soit $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{R}^N$; on dit que f est à ***support compact*** s'il existe $R > 0$ (R dépendant de f) tel que $f(x) = 0$ dès que $\|x\| > R$, $x \in X$. Par $C_0^k(X)$ nous notons l'ensemble des fonctions f de $C^k(X)$ à support compact.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; si $a \in \mathbb{R}$ est l'extrémité gauche de I et $a \in I$, alors pour $f : I \to \mathbb{C}$ nous écrivons $f'(a)$ pour la *dérivée à droite* de f en a ; de même, si $b \in \mathbb{R}$ est l'extrémité droite de I et $b \in I$, alors $f'(b)$ représente la *dérivée à gauche* de f en b (en supposant évidemment que ces dérivées existent).

7 Intégration

Les intégrales dans ce volume sont à prendre au sens de la théorie de Lebesgue expliquée dans le chapitre 5 (vol. 1). En pratique, lorsqu'il s'agit des intégrales des fonctions (réelles ou complexes) continues d'une ou de plusieurs variables réelles, la théorie d'intégration utilisée n'a pas d'importance, sauf que la théorie de Lebesgue permet des justifications plus simples de l'échange de l'ordre d'une limite et d'une intégrale ou de deux intégrales. Les théorèmes concernés s'appellent *théorème de convergence dominée de Lebesgue* et *théorème de Fubini*.

Lorsque $X \subset \mathbb{R}^N$, nous notons par $\mathcal{L}^p(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty\,;$$

ici $0 < p < \infty$, mais seuls les cas $p = 1$ (*fonctions intégrables*) et $p = 2$ (*fonctions de carré intégrables*) nous seront utiles. Dans cette définition, il est sous-entendu que X est une partie *borélienne* (ou *mesurable*) de $\mathbb{R}^N$ et que $f : X \to \mathbb{C}$ est *borélienne* (ou *mesurable*) ; ceux qui ignorent ces notions n'ont rien à craindre, ils peuvent simplement considérer que *toute* fonction et

toute *partie* dans $\mathbb{R}^N$ est mesurable (ou même borélienne). Rappelons que si $f : X \to \mathbb{C}$ est intégrable ($f \in \mathcal{L}^1(X)$), alors

$$\int_X f = \int_X g + i \int_X h$$

où $g = \operatorname{Re} f$, $h = \operatorname{Im} f$ (où on a écrit $\int_X f$ au lieu de $\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$).

Si $X \subset \mathbb{R}^N$, on écrit $\lambda_N(X)$ pour la *mesure de Lebesgue* de X ; on a

$$\lambda_N(X) = \int_X 1\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} 1_X(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi λ_1 est la *longueur* dans $\mathbb{R}$, λ_2 est l'*aire* dans $\mathbb{R}^2$, λ_3 est le *volume* dans $\mathbb{R}^3$, etc. Si $\lambda_N(X) = 0$, on dit que X est une partie *négligeable*. On écrit

$$f = g \text{ p.p.} \quad \text{ou} \quad f(x) = g(x) \text{ p.p. } x \in X$$

si $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable.

Au chapitre 3, on introduit $L^1(X)$, $L^2(X)$ qui proviennent de $\mathcal{L}^1(X)$, $\mathcal{L}^2(X)$, en identifiant les fonctions qui sont égales presque partout (p.p.). Cette subtilité, théoriquement indispensable, ne sera utilisée que rarement.

A l'occasion (par exemple aux chapitres 3 et 5) nous introduisons des espaces $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ (pour $p = 1, 2$) lorsque (X, Σ, μ) est un espace mesuré tel que défini dans le volume 1 (chap. 5). Leur utilité pour notre volume réside dans le cas où X est une surface dans $\mathbb{R}^3$ (plus généralement une variété de dimension k dans $\mathbb{R}^N$) munie de sa mesure naturelle ; de nouveau, les lecteurs qui ignorent ces notions, peuvent procéder sans crainte en considérant ces itégrales comme celles de l'analyse vectorielle élémentaire.

8 Algèbre linéaire

Nous supposons connues les notions élémentaires concernant un espace vectoriel réel (ou complexe). Ainsi, $\mathbb{R}^N$ est une espace vectoriel réel de dimension N ; sa base ***canonique*** sera notée par $e_1, \ldots, e_N$ où

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,, \ \ldots\,, \ e_N = (0, 0, \ldots, 0, 1)\,.$$

Les éléments $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ seront considérés comme des *matrices colonnes* ; une matrice (m, n) (ou du type (m, n)) sera notée

$$A = \left[a_{ij}\right]_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n}\,;$$

A est dite *réelle* (resp. *complexe*) si les a_{ij} sont réels (resp. complexes). Ainsi, $x \in \mathbb{R}^N$ sera considérée comme une matrice du type $(N, 1)$. On note ${}^tA$ (*transposée* de A) la matrice

$${}^tA = \left[b_{ij}\right], \quad b_{ij} = a_{ji}$$

et $A^* = {}^t(\overline{A}) = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$; A^* s'appelle la *transposée conguguée* (ou *hermitienne*) de A ; $A^* = {}^tA$ si A est une matrice réelle. Une matrice A du type (n, n) est dite *matrice carrée d'ordre n.*

Avec ces notations, si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, alors

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad {}^tx = [x_1, \ldots, x_N], \quad {}^txx = x_1^2 + \cdots + x_N^2 = \|x\|^2$$

selon les règles usuelles de la multiplication matricielle ; de même, si $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$,

$${}^txy = {}^tyx = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N$$

ce que nous notons par $x \cdot y$ (*produit scalaire canonique* dans $\mathbb{R}^N$). On a, $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$.

Rappelons que toute application linéaire

$$T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$

est donnée par une unique matrice réelle $[t_{ij}]$ du type (M, N) *par rapport aux bases canoniques de* $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^M$; avec $x = (x_1, \ldots, x_N)$ comme matrice colonne, on a

$$Tx = [t_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N t_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N t_{Mj}x_j \end{bmatrix} = \left(\sum_{j=1}^N t_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^N t_{Mj}x_j \right) \in \mathbb{R}^M .$$

Nous écrivons $T = [t_{ij}]$ s'il n'y a aucune ambiguïté à craindre. Nous utiliserons aussi des conventions analogues pour $\mathbb{C}^N$.

Dans tout espace vectoriel (réel ou complexe) E (en particulier pour $E = \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^N$), nous définissons un ***segment fermé*** $[x, y]$, un ***segment ouvert*** $]x, y[$ d'extrémités x, y, $x \neq y$, dans E par les formules suivantes :

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$
$$]x, y[= \{(1-t)x + ty : 0 < t < 1\}.$$

Une partie $A \subset E$ est dite ***convexe*** si pour tout x, y dans A $(x \neq y)$, le segment fermé $[x, y]$ est contenu dans A.

9 Conventions diverses

Si $f : X \to Y$ nous écrivons quelquefois $f(x) \equiv c$ ou $f \equiv c$ pour indiquer que

$$f(x) = c, \quad x \in X,$$

ce qui veut dire que pour tout $x \in X$, $f(x)$ est égal à un élément fixe $c \in Y$.

Soient $f : X \to Y$, $g : X \to Y$; on exprimera ceci brièvement en écrivant $f, g : X \to Y$; une formule de type

$$f(x) = g(x), \quad x \in A,$$

(où $A \subset X$) veut dire que pour tout x dans A on a $f(x) = g(x)$.

Soit X un ensemble ; si $a \in X$ et $b \in X$ on écrit brièvement : $a, b \in X$.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$; si $f(x) \geqslant 0$, $x \in X$, on dit que f est (une fonction) ***positive*** ; si $f(x) > 0$, $x \in X$, on dit que f est ***strictement positive*** ; de même, pour f ***négative*** et ***strictement négative***.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$; on dit que f est (une fonction) ***croissante*** (resp. ***décroissante***) si $x < y$ dans I entraîne que $f(x) \leqslant f(y)$ ($f(x) \geqslant f(y)$) ; f s'appelle ***strictement croissante*** (resp. ***strictement décroissante***) si $x < y$ dans I entraîne que $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

Quelquefois (mais rarement) on a utilisé les symboles $\exists$ (il existe), $\forall$ (pour tout) et l'abréviation t.q. (tel que).

CHAPITRE 1

Existence et unicité des solutions

1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

1.1.1 Terminologie

La forme générale d'une *équation différentielle ordinaire du premier ordre* est

$$F(t, x, x') = 0 ; \tag{1.1}$$

ici, t est une variable réelle, x est une fonction inconnue de t et x' est sa dérivée par rapport à t ; la fonction F est prescrite et le problème est de déterminer les fonctions x qui satisfont à l'équation donnée. L'équation s'appelle *ordinaire*, car la fonction à déterminer est une fonction *d'une variable* ; l'adjectif « différentielle » fait référence au fait que l'équation contient certaines dérivées de x, en l'occurence seulement la dérivée première d'où la qualification supplémentaire « du premier ordre ». Ainsi, une équation du type

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.2}$$

s'appelle une *équation différentielle ordinaire d'ordre n*. Les équations contenant des fonctions inconnues de *plusieurs* variables réelles et leurs dérivées partielles sont appelées les *équations aux dérivées partielles* ; nous les étudierons dans la troisième partie de ce volume.

Il y a bien d'autres types d'équations contenant des fonctions inconnues d'une variable et de leurs dérivées ; par exemple, les équations

$$x'(t) = x(t-1) \tag{1.3}$$

$$x'(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.4}$$

concernent une fonction inconnue x de la variable réelle t et sa dérivée première, mais elles ne s'appellent pas équations différentielles ordinaires du premier ordre. Une équation du type (1.3) est une équation différentielle ordinaire *avec délai* et celle du type (1.4) est une équation *intégro-différentielle*. Nous n'étudierons pas ces équations et leurs généralisations, même si leur théorie a été développée en relation avec certaines applications physiques et techniques.

Un *système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre* est donné par

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_N, x_1', \ldots, x_N') = 0\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{1.5}$$

où il s'agit de la détermination de N fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_N$ d'une variable réelle t satisfaisant à (1.5) ; c'est une généralisation évidente de (1.1) à $N \geqslant 1$. Il est clair que (1.2) possède aussi une telle généralisation

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_N, x_1', \ldots, x_N', \ldots, x_1^{(n)}, \ldots, x_N^{(n)}) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, N\,. \tag{1.6}$$

En posant

$$F = (F_1, \ldots, F_N)\,, \quad x = (x_1, \ldots, x_N)\,, \quad x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_N^{(j)})$$

on voit que (1.5) et (1.6) prennent les mêmes formes que (1.1) et (1.2) ; en fait, cette similarité formelle conduit à une théorie unique valable aussi bien pour les équations « simples » comme (1.1) et (1.2) que pour les systèmes d'équations comme (1.5) et (1.6).

Nous étudierons les équations (1.1) et (1.5) seulement lorsqu'elles sont résolues par rapport aux dérivées premières ; autrement dit, les systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre étudiés seront de la forme

$$x_j' = f_j(t, x_1, \ldots, x^{(n)})\,, \quad j = 1, \ldots, N\,. \tag{1.7}$$

En posant

$$x = (x_1, \ldots, x_N)\,, \quad f = (f_1, \ldots, f_N)$$

on écrit (1.7) comme suit :

$$x' = f(t, x)\,. \tag{1.8}$$

Nous indiquerons dans la suite comment un système d'équations d'ordre supérieur tel que (1.6) peut être écrit comme (1.8), pourvu que le système (1.6) soit résolu par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé.

Une fonction $u : I \to \mathbb{R}^N$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, s'appelle une ***solution*** de (1.8) si $u'(t)$ existe pour tout $t \in I$ (comme une dérivée unilatérale si t est une extrémité de I) et

$$u'(t) = f\big(t, u(t)\big)\,, \quad t \in I\,;$$

il est sous-entendu que, pour tout $t \in I$, $\big(t, u(t)\big)$ est dans le domaine de définition de f. La solution u satisfait la ***condition initiale*** (t_0, x_0) si $t_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$; on dit alors aussi que u est une solution du ***problème de Cauchy*** relatif aux conditions initiales (t_0, x_0) et l'équation (1.8).

L'équation (1.8) s'appelle une équation ***autonome*** (ou un système autonome) si f ne dépend pas de t. On dit que (1.8) est une équation ***linéaire*** (ou un système linéaire) si

$$f(t, x) = A(t)x + b(t)$$

où $t \mapsto A(t)$ est une fonction matricielle (matrices de type (N, N)) et $t \mapsto b(t)$ est une fonction vectorielle ($b(t) \in \mathbb{R}^N$) ; si $b(t) \equiv 0$, on dit que l'équation est ***linéaire homogène*** (ou qu'il s'agit d'un système linéaire homogène) du premier ordre.

1.1.2 Motivation intuitive

Supposons que l'état d'un système physique à un instant t est donné par $x(t) \in \mathbb{R}^N$; l'évolution temporelle du système est alors représentée par la fonction vectorielle $t \mapsto x(t)$. Une modélisation possible de cette évolution consiste dans la description du changement instantané dans l'état $x(t)$ en posant

$$x'(t)\,\mathrm{d}t = x(t + \mathrm{d}t) - x(t) = f\big(t, x(t)\big)\,\mathrm{d}t\ ; \tag{1.9}$$

cette relation heuristique est à l'origine de l'équation (1.8). Ici, la fonction f de t et de x incorpore notre connaissance physique de l'évolution et notre modélisation est basée sur l'hypothèse que l'état $x(t+\mathrm{d}t)$ au temps $t+\mathrm{d}t$ est entièrement déterminé par la connaissance de $x(t)$ grâce à la formule (1.9) dont la forme mathématique exacte est (1.8). En poursuivant ce principe de déterminisme, on voit que la connaissance de $x(t_0)$ (l'état au temps t_0) conjuguée à la loi (1.8) donnant l'évolution du système, doit, en principe, déterminer $x(t)$ pour *tous* les temps t ; autrement dit, la condition initiale $(t_0, x(t_0))$ détermine la solution $t \mapsto x(t)$ de (1.8). On verra que ceci est effectivement vrai pourvu que f satisfasse une condition générale simple.

Pour résumer la discussion intuitive précédente, on peut dire que la fonction f dans l'équation (1.8) reflète notre connaissance physique (ou phénoménologique) de l'évolution du système ; si f est indépendant de t (système autonome), ceci indique que les conditions de l'évolution du système restent invariantes dans le temps.

Supposons que $x(t)$ représente la position au temps t d'un point matériel dans $\mathbb{R}^3$; d'après une loi de mécanique (loi de Newton),

$$mx''(t) = f\big(t,\, x(t),\, x'(t)\big) \tag{1.10}$$

où $m > 0$ est la masse du point matériel et f représente le champ de force dans lequel le mouvement a lieu ; ici $x'(t)$ et $x''(t)$ sont interprétées comme les vecteurs de la vitesse et de l'accélération du point matériel au temps t. Ceci donne un système de trois équations du second ordre (résolu par rapport à x''). Si l'on considère un ensemble de p points matériels dans $\mathbb{R}^3$ dont les positions au temps t sont données par $\xi_1(t), \ldots, \xi_p(t)$, alors les équations différentielles de la mécanique classique s'écrivent comme suit :

$$m_j \xi_j'' = f_j\big(t,\, \xi_1(t), \ldots, \xi_p(t),\, \xi_1'(t), \ldots, \xi_p'(t)\big)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant p\,.$$

Ici $m_j > 0$ est la masse du point matériel représenté par ξ_j et on a un système de $3p = N$ équations différentielles du second ordre.

Rappelons que le mouvement d'un point matériel dans $\mathbb{R}^3$ (de masse $m > 0$) soumis à un champ de force centrale attractive est modélisé par

$$mx''(t) = -\varphi\big(x(t)\big)\frac{x(t)}{\|x(t)\|}$$

où $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$; autrement dit, dans (1.10) on prend

$$f(t, x, x') = -\varphi(x)\frac{x}{\|x\|}\,,$$

une fonction indépendante de t et de x'.

Si $\varphi(x) = k\|x\|^{-2}$, alors on a l'équation du mouvement sous la loi de la gravitation universelle où la force est proportionnelle au carré de l'inverse de la distance du point matériel du centre d'attraction (k étant la constante de proportionnalité) ; ici, on prend

$$f(t, x, x') = -k\frac{x}{\|x\|^3}$$

dans (1.10).

1.1.3 Quelques exemples simples

Les exemples donnés ici sont sans doute connus de tous les lecteurs. Nous les rappelons pour pouvoir nous y référer dans la suite. Les équations concernées sont scalaires : la fonction inconnue est $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$.

1 Equation linéaire scalaire du premier ordre

L'équation est

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{1.11}$$

où a et b sont deux fonctions réelles continues définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. La solution générale $t \mapsto x(t)$, $t \in I$, de l'équation (1.11), est donnée par la formule suivante : soit t_0 un point de I et x_0 un nombre réel ; soit P une primitive de la fonction a dans l'intervalle I (c'est-à-dire $P'(t) = a(t)$, $t \in I$), alors

$$x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{P(t)} + \mathrm{e}^{P(t)}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-P(u)}b(u)\,\mathrm{d}u\,, \quad t \in I\,. \tag{1.12}$$

Si l'on veut que x satisfasse la condition initiale $x(t_0) = x_0$, alors il suffit de choisir P dans (1.12) tel que $P(t_0) = 0$; autrement dit, on pose

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\,, \quad t \in I\,.$$

Notons que la solution x dans (1.12) est de la forme

$$x(t) = h(t) + g(t)\,, \quad h(t) = x_0\,\mathrm{e}^{P(t)}\,,$$

où h satisfait l'équation homogène associée à (1.11) et g est une solution de (1.11) telle que $g(t_0) = 0$; autrement dit,

$$h'(t) = a(t)\,h(t)\,, \quad t \in I$$
$$g'(t) = a(t)\,g(t) + b(t)\,, \quad t \in I$$

avec $g(t_0) = 0$, $h(t_0) = x_0\,\mathrm{e}^{P(t_0)}$. On vérifie cette affirmation par un calcul direct. On verra dans la suite que (1.12) donne toutes les solutions de (1.11) définies dans I ; de plus, à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ correspond l'unique solution définie dans I donnée par (1.12) avec $P(t_0) = 0$.

Si $a(t) \equiv 0$, (1.11) donne l'équation différentielle

$$x' = b(t)$$

avec la solution générale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)\,\mathrm{d}u\,, \quad t \in I\,.$$

Si $b(t) \equiv 0$, $a(t) \equiv k$, $t \in \mathbb{R}$, k une constante, (1.11) devient l'équation différentielle

$$x' = kx$$

dont la solution générale est

$$x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{kt}\,, \quad t \in I\,.$$

Observons que toutes les solutions explicitées de (1.11) sont définies dans l'intervalle le plus grand I dans lequel l'équation est donnée. Pour les équations non linéaires qui suivent, les solutions ne seront définies, en général, que dans un sous-intervalle I_0 contenant t_0 où (t_0, x_0) est la condition initiale donnée ; de plus, I_0 dépend en général de x_0 (et naturellement de t_0).

Un procédé élémentaire qui nous amène à (1.12) est donné par le raisonnement suivant : si P est une primitive de a dans I et x vérifie (1.11), alors

$$\left(\mathrm{e}^{-P}x\right)' = \mathrm{e}^{-P}b \tag{1.13}$$

car

$$\left(\mathrm{e}^{-P}x\right)' = \mathrm{e}^{-P}(x' - ax)\,;$$

on obtient de (1.13) par intégration entre t_0 et t, que

$$\mathrm{e}^{-P(t)}x(t) - \mathrm{e}^{-P(t_0)}x(0) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-P(u)}b(u)\,\mathrm{d}u$$

ce qui donne (1.12) avec $x_0 = x(0)\,\mathrm{e}^{-P(t_0)}$.

En vue de (1.13), on appelle e^{-P} un *facteur intégrant* pour (1.11).

2 Equation aux variables séparées

L'équation est de la forme

$$x' = a(t)\,b(x)\,. \tag{1.14}$$

Si nous supposons que a est continue dans un intervalle I_1 et b est continue et toujours *non nulle* dans un intervalle ouvert I_2, on peut obtenir les solutions de (1.14) en raisonnant comme suit : si $t_0 \in I_1$, une solution $t \mapsto x(t)$ doit satisfaire

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(u)}{b\big(x(u)\big)}\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$$

où l'on suppose que $x(u) \in I_2$ pour les u en question de sorte que $b\big(x(u)\big) \neq 0$ pour ces u. Si P est une primitive pour a dans I_1 et Q est une primitive pour $1/b$ dans I_2, alors on a

$$Q\big(x(t)\big) - Q\big(x(t_0)\big) = P(t) - P(t_0)$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,Q\big(x(u)\big) = \frac{x'(u)}{b\big(x(u)\big)}\,.$$

Si la condition initiale est $x(t_0) = x_0 \in I_2$, on a

$$Q\big(x(t)\big) = Q(x_0) + \big\{P(t) - P(t_0)\big\} = Q(x_0) + P(t)$$

si P est choisie telle que $P(t_0) = 0$. Si l'on pose

$$Q(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{1}{b(v)}\,\mathrm{d}v\,, \quad y \in I_2\,,$$

alors Q est une primitive de $1/b$ dans I_2 avec $Q(x_0) = 0$; puisque $b(v) \neq 0$, $v \in I_2$, on a $b(v) > 0$, $v \in I_2$ ou $b(v) < 0$, $v \in I_2$, et dans les deux cas Q est une fonction strictement monotone dans I_2. Aussi, $Q(I_2) = J$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et la fonction inverse $Q^{-1} : J \to I_2$ est une fonction continûment dérivable avec

$$Q^{-1\prime}\big(Q(y)\big) = \frac{1}{Q'(y)} = b(y) \neq 0\,, \quad y \in I_2\,.$$

Puisque $P(t_0) = 0$, il existe un intervalle I_0 contenant t_0 tel que $I_0 \subset I_1$ avec

$$P(I_0) \subset J\,;$$

alors,

$$x(t) = Q^{-1}\big(P(t)\big)\,, \quad t \in I_0 \tag{1.15}$$

définit une solution de (1.14). En effet, de (1.15), on a

$$x'(t) = Q^{-1\prime}\big(P(t)\big)P'(t) = Q^{-1\prime}\big(Q\big(x(t)\big)\big)\,a(t) = b\big(x(t)\big)a(t)$$

pour $t \in I_0$; de plus, en posant $t = t_0$ dans (1.15), on obtient

$$x(t_0) = Q^{-1}(0) = x_0\,,$$

ce qui montre que la solution (1.15) satisfait la condition initiale (t_0, x_0). On peut démontrer directement que la solution donnée par (1.15) est unique parmi les solutions de (1.14) définies dans I_0 et satisfaisant la condition initiale (t_0, x_0), $t_0 \in I_1$, $x_0 \in I_2$; en effet, si ξ est une telle solution avec $\xi(t_0) = x_0$, alors, pour $t \in I_0$,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\xi'(u)}{b\big(\xi(u)\big)}\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u = P(t)$$

d'où

$$Q\big(\xi(t)\big) = P(t)$$

car $Q(x_0) = 0$ et $P(t_0) = 0$; ainsi $\xi(t) = Q^{-1}\big(P(t)\big)$, $t \in I_0$.

La solution (1.15) est obtenue souvent par le calcul formel suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{b(x)} = \frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \Longrightarrow Q(x) = P(t) \Longrightarrow x = Q^{-1}\big(P(t)\big)\,.$$

La discussion précédente rend ce calcul formel rigoureux en mettant en évidence l'importance de l'hypothèse que $b(x) \neq 0$ pour les x en question.

Pour voir l'effet de l'annulation de b à certains points, nous considérons deux exemples particuliers.

Soit l'équation

$$x' = x^2\,. \tag{1.16}$$

Si la condition initiale est $x(0) = x_0 > 0$, on obtient la solution

$$x(t) = \big(x_0^{-1} - t\big)^{-1}\,, \quad t \in I_0$$

définie dans $I_0 = \,]-\infty\,,\, x_0^{-1}\,[$. Ici, on prend $I_1 = \mathbb{R}$, $I_2 = \,]\,0\,,\,\infty\,[$ dans la discussion précédente, avec $a(t) = 1$, $b(x) = x^2$. Pour la condition initiale $x(0) = x_0 < 0$, on obtient de même (avec $I_2 = \,]-\infty\,,\,0\,[$ dans ce cas) la solution

$$x(t) = \big(x_0^{-1} - t\big)^{-1}\,, \quad t \in I_0$$

définie dans $I_0 = \,]\,x_0^{-1}\,,\,\infty\,[$. Si la condition initiale est $x(0) = 0$, la discussion précédente n'est pas applicable mais on voit directement que $x(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution ; un théorème général (prop. 1.2.6, 1.4.2) établit que c'est l'unique solution de (1.16) satisfaisant à la condition initiale $x(0) = 0$. On peut démontrer cette affirmation directement aussi (voir ci-dessous).

On observe que l'intervalle maximal I_0 où une solution correspondant à la condition initiale $x(0) = x_0$ existe, dépend fortement de la valeur de x_0 ; aussi, dans l'exemple donné, la solution « explose » (tend vers $+\infty$ ou $-\infty$) lorsque t tend vers l'extrémité x_0^{-1}, $x_0 \neq 0$. Une explication heuristique (mécanique)

de ce comportement est facile à fournir : soit $x(t)$ la position d'une particule soumise à une force telle que au point $x(t)$ sa vitesse est $x^2(t)$; si $x(0) = x_0 > 0$, alors $x(t)$ s'éloignera vers la « droite » de plus en plus vite de telle sorte que $x(t) \to \infty$ dans un temps fini (en l'occurence égal à x_0^{-1}). D'autre part, si $x(0) = 0$, la particule possède la vitesse initiale $x'(0) = 0$ et elle ne se déplace jamais dans la suite ; en effet, $t \mapsto x(t)$ étant une fonction croissante continûment dérivable, si $x(t) \not\equiv 0$ pour $t > 0$, il existe un $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$ mais $x(t) > 0$ pour $t > t_0$; à un tel t_0, on aura les relations

$$x(t_0) = 0\,, \quad x'(t) = x^2(t)\,, \quad t \geqslant t_0\,,$$

ce qui donne la contradiction

$$\infty = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(u)}{x^2(u)}\,\mathrm{d}u = (t - t_0)\,.$$

Le même raisonnement donne $x(t) \equiv 0$ pour $t < 0$ si $x(0) = 0$.

Soit l'équation

$$x' = |x|^{1/2}\,. \tag{1.17}$$

Pour la condition initiale $x(0) = 0$, on voit que $x(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution de (1.17). Mais il y en a une infinité d'autres solutions de (1.17) satisfaisant la même condition initiale $x(0) = 0$: soient $-\infty \leqslant t_1 \leqslant 0 \leqslant t_2 \leqslant \infty$; alors

$$x(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t - t_2}{2}\right)^2 & \text{si } t > t_2 \\ 0 & \text{si } t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ -\left(\dfrac{t_1 - t}{2}\right)^2 & \text{si } t < t_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

donne une solution de (1.17) définie dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition initiale $x(0) = 0$; si $t_1 = -\infty$, on interprète (1.18) comme $x(t) = 0$, $t \leqslant 0$, et si $t_2 = \infty$, alors $x(t) = 0$, $t \geqslant 0$; la solution $x(t) \equiv 0$ correspond à avoir $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$. Pour voir que (1.18) donne toutes les solutions x de (1.17) définies dans $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$, on peut raisonner comme suit : une telle x est croissante ; posons

$$t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} : x(t) = 0\}\,, \quad t_2 = \sup\{t \in \mathbb{R} : x(t) = 0\}\,;$$

puisque $x(0) = 0$, on a $-\infty \leqslant t_1 \leqslant 0 \leqslant t_2 \leqslant \infty$; si $t_2 < \infty$, on a

$$\frac{x'(t)}{(x(t))^{1/2}} = 1\,, \quad t > t_2$$

car $x(t) > 0$ si $t > t_2$; donc

$$\int_{t_2}^{t} \frac{x'(u)}{\sqrt{x(u)}}\,\mathrm{d}u = (t - t_2)\,, \quad t > t_2$$

d'où

$$x(t) = \left(\frac{t - t_2}{2}\right)^2 , \quad t > t_2 .$$

La vérification pour $t < t_1$ si $t_1 > -\infty$ est similaire.

1.1.4 Conclusion tirées des exemples précédents

On a vu que les solutions d'une équation linéaire sont uniquement déterminées par la condition initiale (t_0, x_0) et sont définies dans un intervalle maximal indépendant de la condition initiale. On démontre (prop. 1.3.2) que cette affirmation reste vraie pour un système d'équations linéaires du premier ordre quelconque ; voir aussi la proposition 1.3.3.

On a vu que certaines équations non linéaires telles (1.14) possèdent des solutions uniquement déterminées par la condition initiale (t_0, x_0) mais définies seulement dans certains intervalles I_0 contenant t_0, I_0 dépendant de x_0. Dans la proposition 1.2.6, on démontre la validité de cette affirmation dans un contexte général.

Finalement, il y a des équations comme (1.17) où la condition initiale n'assure pas l'unicité de la solution ; néanmoins, on peut démontrer qu'une équation du type

$$x' = f(t, x)$$

avec f *continue* possède toujours au moins une solution satisfaisant à chaque condition initiale (t_0, x_0) appropriée. Nous discuterons cette affirmation (appelée *théorème de Peano*) dans la suite mais le phénomène de la non-unicité des solutions du problème de Cauchy ne sera pas étudié en détail. Fort heureusement, des conditions très simples et générales sur $f(t, x)$ garantissent l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy.

1.2 THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1.2.1 Préliminaires

Il sera commode de travailler avec la norme

$$|x| = \max_j |x_j| , \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N .$$

On vérifie facilement que $x \mapsto |x|$ est une norme dans $\mathbb{R}^N$:

$$|x| \geqslant 0 , \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 , \quad x \in \mathbb{R}^N$$

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x| , \quad \lambda \in \mathbb{R} , \; x \in \mathbb{R}^N$$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| , \quad x , \; y \in \mathbb{R}^N .$$

Entre la norme $|x|$ et la norme euclidienne

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

on a les inégalités suivantes :

$$N^{-1/2}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent, toutes les notions topologiques dans $\mathbb{R}^N$ (vol. 1, chap. 1) peuvent être traitées en utilisant $|x|$ au lieu de $\|x\|$; ainsi, si $\{x_n\}$ est une suite dans $\mathbb{R}^N$, alors, pour un $x \in \mathbb{R}^N$, $x_n \to x$ $(x \to \infty)$ équivaut à avoir

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Aussi, une partie non vide A de $\mathbb{R}^N$ est ouvert si et seulement si pour tout point $x \in A$, il existe un nombre $r > 0$ tel que

$$K(x; r) \subset A$$

où

$$K(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < r\}.$$

L'ensemble $K(x, r)$ est un carré ouvert de centre x et des côtés de longueur $2r$ si $N = 2$; pour $N \geqslant 3$, on dira que $K(x; r)$ est un cube ouvert de centre x et des côtés de longueur $2r$. On voit que l'adhérence de $K(x; r)$ est

$$\overline{K}(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| \leqslant r\}$$

que l'on appellera les cubes ou les carrés fermés correspondants. On démontre sans peine que A est ouvert si et seulement pour tout $x \in A$ il existe un nombre $\rho > 0$ tel que

$$\overline{K}(x; \rho) \subset A ;$$

il suffit de choisir $r > 0$ tel que $K(x; r) \subset A$ et observer que si $0 < \rho < r$, alors

$$\overline{K}(x; \rho) \subset K(x; r) \subset A.$$

Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ (a, b réels, $a < b$) est une fonction continue, on définit

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b g_1(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b g_N(t)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathbb{R}^N$$

où $g = (g_1, \ldots, g_N)$. Rappelons que g est continue si et seulement si chaque g_j est continue. Puisque

$$\left|\int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |g_j(t)|\,\mathrm{d}t, \quad |g(t)| = \max_{1\leqslant j\leqslant N} |g_j(t)|,$$

on obtient

$$\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\int_a^b g_j(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant N}\int_a^b |g_j(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

une inégalité qui sera utilisée dans la suite fréquemment.

Soit $\{u_n\}$ une suite de fonctions définies dans $[a\,,\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$; on sait que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)\,,\quad t\in[a\,,\,b]$$

existe si et seulement si $\{u_n(t)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^N$, pour tout $t\in[a\,,\,b]$; on dit que $\{u_n\}$ converge uniformément vers u dans I si

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{t\in I}|u_n(t)-u(t)|\right\} = 0\,.$$

Rappelons que (vol. 1, chap. 1) si les u_n sont continues dans I et que $\{u_n\}$ converge uniformément vers u dans I, alors u est continue dans I ; de plus,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$$

car

$$\left|\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |u_n(t)-u(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\sup_{t\in I}|u_n(t)-u(t)| \longrightarrow 0$$

lorsque $n\to\infty$.

Soit $g : [a\,,\,b]\to\mathbb{R}^N$ (a, b réels, $a<b$) avec $g=(g_1,\ldots,g_N)$. Si $a<t<b$, on définit

$$g'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{g(t+h)-g(t)\}\,,$$

étant toujours entendu dans ce genre de formules que $h\neq 0$; si $t=a$, on définit $g'(a)$ en prenant la limite sur $h>0$ et si $t=b$, $g'(b)$ est défini en prenant la limite sur $h<0$; autrement dit, $g'(a)$ est la dérivée unilatérale à droite et $g'(b)$ est la dérivée unilatérale à gauche. Il est clair que

$$g'(t) = \big(g_1'(t),\ldots,g_N'(t)\big)$$

et que l'existence de $g'(t)$ entraîne la continuité de g au point t[23051969].

Supposons que pour $1 \leqslant i, j \leqslant N$, on a une fonction $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$; alors

$$A(t) = \left[a_{ij}(t)\right], \quad t \in I$$

donne ce que nous appellerons une fonction matricielle de type (N, N) définie dans I (I sera, en général, un intervalle de $\mathbb{R}$). On dit que A est une fonction matricielle continue (resp. dérivable ou de classe C^k) si chaque fonction réelle a_{ij} est continue (resp. dérivable ou de classe C^k) ; aussi, on écrit

$$A'(t) = \left[a'_{ij}(t)\right]$$

et on fait de même pour les dérivées supérieures $A^{(k)}(t)$ (en supposant dans la suite que I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Si A est continue et a, b sont dans I, on écrit

$$\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int_a^b a_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

1.2.2 Fonction lipschitzienne

Soit $f : X \to \mathbb{R}^N$, $X \subset \mathbb{R}^M$. On dit que f est ***lipschitzienne*** dans X s'il existe $k \geqslant 0$ tel que

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k|x - y|, \quad x, y \in X.$$

En se rappelant que

$$f(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_N(x)\right),$$

on voit que f est lipschitzienne si et seulement si

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left|f_i(x) - f_i(y)\right| \leqslant k|x - y|, \quad x, y \in X$$

pour un nombre $k \geqslant 0$, ce qui équivaut à avoir que chacune des N fonctions réelles $f_1, \ldots, f_N$ est lipschitzienne dans X. On dit que f est ***localement lipschitzienne*** dans X si, pour tout $x_0 \in X$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de f à $K(x_0; \varepsilon) \cap X$ est lipschitzienne ; autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$, $k \geqslant 0$ tels que

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k|x - y|$$

dès que $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - x_0| < \varepsilon$, $x, y \in X$.

Il est clair qu'une fonction lipschitzienne est continue. Pour les applications, il est commode d'avoir le critère suivant : soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ où Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^M$; *si $f = (f_1, \ldots, f_N)$ est dérivable dans Ω, alors f est lipschitzienne dans $X \subset \Omega$ si X est convexe et*

$$C = \sup_{x \in X} \left|\mathrm{D}_j f_i(x)\right| < \infty, \quad i = 1, \ldots, N, \; j = 1, \ldots, M$$

où

$$\mathrm{D}_j f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) ;$$

f est localement lipschitzienne dans Ω si les dérivées partielles $D_j f_i$ sont localement bornées (en particulier, si elles sont continues) dans Ω. (Rappelons que f est dite de classe C^1 dans Ω si les $D_j f_i$ existent et sont continues dans Ω.)

En effet, si $x, y \in X$, il existe $\xi \in [x, y]$ tel que

$$f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{M} D_j f_i(\xi)(x_j - y_j)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_M)$, $y = (y_1, \ldots, y_M)$ et $\xi \in X$ car X est convexe ; par conséquent,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant C \sum_{j=1}^{M} |x_j - y_j| \leqslant CM|x - y|$$

d'où

$$|f(x) - f(y)| = \max_i |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant CM|x - y|, \quad x, y \in X,$$

ce qui prouve que f est lipschitzienne dans X. D'autre part, si les $D_j f_i$ sont localement bornées dans Ω (ouvert), alors pour $x_0 \in \Omega$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$K = \overline{K}(x_0; \varepsilon) \subset \Omega, \quad C = \sup_{x \in K} |D_j f_i(x)| < \infty ;$$

puisque K est convexe, le raisonnement précédent établit que f est lipschitzienne dans K. Ceci étant pour tout $x_0 \in \Omega$, f est localement lipschitzienne dans Ω. Noter que si f est de classe C^1 dans Ω (c'est-à-dire les $D_j f_i$ sont continues dans Ω), alors la quantité C est bornée pour tout ensemble compact $X \subset \Omega$.

Comme exemple simple d'une fonction lipschitzienne non dérivable, on peut considérer

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On sait que f n'est pas dérivable en $x = 0$; néanmoins, l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| = \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

montre que f est lipschitzienne dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, la fonction continue donnée par

$$f(x) = |x|^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

est dérivable partout sauf en $x = 0$; mais f n'est pas lipschitzienne dans un intervalle quelconque ayant 0 pour extrémité ; par exemple, si $x > 0$, $y > 0$,

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \longrightarrow \infty$$

lorsque $x, y \to 0$, ce qui exclut la possibilité que f soit lipschitzienne dans un intervalle du type $]0, a[$.

1.2.3 Fonction lipschitzienne en x

Dans la suite, nous aurons besoin d'une notion de fonction lipschitzienne un peu particulière ; soit $f : X \to \mathbb{R}^N$ où $X \subset \mathbb{R}^{N+1}$ et notons un point de $\mathbb{R}^{N+1}$ par (t, x) où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. On dit que f est ***lipschitzienne en*** x (dans l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^{N+1}$) s'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que

$$\left|f(t,x) - f(t,y)\right| \leqslant k|x - y| \tag{1.19}$$

pour tous t, x et y tels que (t, x), (t, y) sont dans X.

On dit que f est ***localement lipschitzienne en*** x (dans l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^{N+1}$) si pour tout $(t_0, x_0) \in X$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une constante $k \geqslant 0$, dépendant éventuellement de (t_0, x_0), tels que (1.19) est vérifiée pour tous (t, x) et (t, y) dans X tels que

$$|t - t_0| < \varepsilon\,, \quad |x - x_0| < \varepsilon\,, \quad |y - y_0| < \varepsilon\,;$$

autrement dit, f est localement lipschitzienne en x (dans X) si tout point $(t_0, x_0) \in X$ possède un voisinage ouvert V tel que f est lipschitzienne en x dans $V \cap X$.

En fixant les notations comme ci-dessus, on a la proposition suivante : *si f est localement lipschitzienne en x (dans l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^{N+1}$) et si $t \mapsto f(t, x)$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$ tel que*

$$\left\{t : (t, x) \in X\right\} \neq \emptyset\,,$$

alors f est continue dans X.

DÉMONSTRATION

Si $(t_0, x_0) \in X$, on a

$$\left|f(t,x) - f(t_0,x_0)\right| \leqslant \left|f(t,x) - f(t,x_0)\right| + \left|f(t,x_0) - f(t_0,x_0)\right|$$

pour (t, x) et (t, x_0) dans X ; si (t, x) est dans un voisinage ouvert approprié de (t_0, x_0), alors de (1.19), on a

$$\lim_{x \to x_0} \left|f(t,x) - f(t,x_0)\right| = 0$$

et

$$\lim_{t \to t_0} \left|f(t,x_0) - f(t_0,x_0)\right| = 0$$

par la continuité de $t \mapsto f(t, x_0)$; donc

$$\lim_{(t,x) \to (t_0,x_0)} \left|f(t,x) - f(t_0,x_0)\right| = 0$$

ce qui prouve la continuité de f en (t_0, x_0). ♦

Supposons que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ où Ω est une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^{N+1}$. Si $(t, x) \in R^{N+1}$ et $X \subset \mathbb{R}^{N+1}$, nous écrivons

$$X_t = \{x \in \mathbb{R}^N : (t, x) \in X\}, \quad X^x = \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in X\};$$

si X est ouvert, alors X_t est une partie ouverte de $\mathbb{R}^N$ et X^x est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Posons $f = (f_1, \ldots, f_N)$. *Si $x \mapsto f_i(t, x)$ est dérivable dans Ω_t (pour chaque t tel que $\Omega_t \neq \emptyset$), alors f est lipschitzienne en x dans $X \subset \Omega$ si X_t est convexe pour chaque t et*

$$C = \sup_{(t,x)\in X} |\mathrm{D}_j f_i(t, x)| < \infty, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N$$

où

$$\mathrm{D}_j f_i(t, x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x);$$

f est localement lipschitzienne en x dans Ω si les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f_i$ sont localement bornées (en particulier si elles sont continues) dans Ω.

La démonstration de cette affirmation est similaire à celle donnée précédemment (§ 1.2.2) pour les fonctions lipschitziennes.

Par exemple, si (t, x) et (t, y) sont dans X,

$$f_i(t, x) - f_i(t, y) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{D}_j f_i(t, \xi)(x_j - y_j)$$

pour un $\xi \in [x, y]$ (car X_t est convexe) d'où

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leqslant CM|x - y|$$

ce qui donne

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant CM|x - y|$$

dès que (t, x) et (t, y) sont dans X. D'autre part, si les $\mathrm{D}_j f_i$ sont localement bornées dans Ω, alors pour $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$K_\varepsilon = \{(t, x) : |t - t_0| < \varepsilon, \ |x - x_0| < \varepsilon\}$$

possède la propriété suivante :

$$K_\varepsilon \subset \Omega, \qquad \sup_{(t,x)\in K_\varepsilon} |\mathrm{D}_j f_i(t, x)| < \infty;$$

on observe que K_ε est convexe (et ouvert) dans $\mathbb{R}^{N+1}$. On conclut du raisonnement précédent que f est lipschitzienne en x dans K_ε, ce qui complète la démonstration.

1.2.4 **Proposition** (*théorème local*)

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $a > 0$, $b > 0$,

$$\overline{K}(x_0; b) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leqslant b\}$$

et $f : [\,t_0\,,\, t_0 + a\,] \times \overline{K}(x_0; b) \to \mathbb{R}^N$ *une fonction continue, lipschitzienne en* x. *Soient*

$$M = \sup\{|f(t,x)| : t \in [\,t_0\,,\, t_0 + a\,],\ x \in \overline{K}(x_0; b)\}\,, \quad \alpha = \min\Big(a\,,\, \frac{b}{M}\Big).$$

Alors il existe une solution $u : [\,t_0\,,\, t_0 + \alpha\,] \to \mathbb{R}^N$ *à l'équation*

$$x' = f(t,x)\,,$$

vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) *; cette solution est unique et on a*

$$|u(t) - x_0| \leqslant b\,, \quad t \in [\,t_0\,,\, t_0 + \alpha\,].$$

REMARQUE. Puisque $|f|$ est continue dans une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^{N+1}$, son supremum M est fini ; si $M = 0$, alors $f \equiv 0$ et $\alpha = a$, la proposition étant banale dans ce cas car $u(t) \equiv x_0$ est l'unique solution. Dans la suite, nous supposons donc que $M > 0$. L'unicité affirmée de u est à comprendre dans le sens suivant : si $v : [\,t_0\,,\, t_0 + \alpha'\,] \to \mathbb{R}^N$, $v(t_0) = x_0$, est une solution (avec α' quelconque), alors $u(t) = v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \min(\alpha', \alpha)$; naturellement, $v(t) \in \overline{K}(x_0; b)$ pour t dans $[\,t_0\,,\, t_0 + \alpha'\,]$ car f est définie seulement dans $[\,t_0\,,\, t_0 + a\,] \times \overline{K}(x_0; b)$.

DÉMONSTRATION (*méthode d'itération de Picard*)

On observe d'abord que le problème de Cauchy

$$x' = f(t,x)\,, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.20}$$

équivaut au problème de la solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s \tag{1.21}$$

dans le sens que si $x : [\,t_0\,,\, t_0 + \alpha\,] \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue qui vérifie (1.21) pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$, alors x est une solution du problème de Cauchy (1.20) et vice versa. Ceci est une conséquence du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et du fait que $x \mapsto f\big(t, x(t)\big)$ est continue ; pour vérifier la dernière affirmation, prenons $k \geqslant 0$ tel que

$$|f(t,\xi) - f(t,\eta)| \leqslant k|\xi - \eta| \tag{1.22}$$

si $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$, ξ, $\eta \in \overline{K}(x_0; b)$; alors on a, pour s, $t \in [\,t_0\,,\, t_0 + a\,]$,

$$\begin{aligned}\big|f\big(t,x(t)\big) - f\big(s,x(s)\big)\big| &\leqslant \big|f\big(t,x(t)\big) - f\big(t,x(s)\big)\big| + \big|f\big(t,x(s)\big) - f\big(s,x(s)\big)\big| \\ &\leqslant k\big|x(t) - x(s)\big| + \big|f\big(t,x(s)\big) - f\big(s,x(s)\big)\big| \ ;\end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{t\to s} x(t) = x(s)\,, \quad \lim_{t\to s} f\big(t,x(s)\big) = f\big(s,x(s)\big)\,,$$

on conclut que

$$\lim_{t\to s} f\big(t,x(t)\big) = f\big(s,x(s)\big)\,.$$

Posons $I = [\,t_0\,,\, t_0 + \alpha\,]$; pour une fonction continue $x : I \to \overline{K}(x_0; b)$, écrivons

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\ ;$$

alors, si $t \in I$,

$$\big|Tx(t) - x_0\big| \leqslant \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s,x(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s \leqslant M(t - t_0) \leqslant M\alpha \leqslant b$$

ce qui montre que Tx est une fonction définie dans I à valeurs dans $\overline{K}(x_0; b)$; de plus, Tx est continue dans I et $Tx(t_0) = x_0$. Ainsi, on peut définir les fonctions continues T^2x, T^3x, ... à valeurs dans $\overline{K}(x_0; b)$ par récurrence :

$$x_1 = Tx\,,\ x_2 = Tx_1 = T^2x\,,\ \ldots$$

Posons $u_0 \equiv x_0$ et définissons

$$u_1 = Tu_0\,,\ u_2 = Tu_1\,,\ \ldots\,,\ u_n = Tu_{n-1}\,,\ \ldots$$

On a vu que $u_n : I \to \overline{K}(x_0; b)$ est continue et $u_n(t_0) = x_0$, $n \geqslant 0$. Nous établissons maintenant par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\big|u_n(t) - u_{n-1}(t)\big| \leqslant M\frac{k^{n-1}}{n!}\,\big(t - t_0\big)^n\,, \quad t \in I \tag{1.23}$$

où k est la constante qui apparaît dans (1.22) et $I = [\,t_0\,,\, t_0 + \alpha\,]$. En effet, on a déjà vérifié (1.23) ci-dessus pour $n = 1$; supposons que (1.23) vaut pour un $n \geqslant 1$, alors, pour $t \in I$,

$$\begin{aligned}\big|u_{n+1}(t) - u_n(t)\big| &= \left|\int_{t_0}^{t} \big\{f\big(s,u_n(s)\big) - f\big(s,u_{n-1}(s)\big)\big\}\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} k\big|u_n(s) - u_{n-1}(s)\big|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant M\frac{k^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\big(s - t_0\big)^n\,\mathrm{d}s = M\frac{k^n}{(n+1)!}\,\big(t - t_0\big)^{n+1}\,,\end{aligned}$$

ce qui établit (1.23) pour n remplacé par $n + 1$; ainsi, (1.23) est établie pour tout $n \geqslant 1$.

Si $n > m$,

$$u_n(t) - u_m(t) = \sum_{j=m+1}^{n} \{u_j(t) - u_{j-1}(t)\},$$

ce qui donne, au vue de (1.23), pour $t \in I$,

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} M\frac{k^{j-1}}{j!}(t-t_0)^j \leqslant \frac{M}{k}\sum_{j>m}\frac{(k\alpha)^j}{j!} = \beta_m . \quad (1.24)$$

Puisque $\beta_m \to 0$ lorsque $m \to \infty$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t), \quad t \in I$$

existe ; en faisant $n \to \infty$ dans (1.24), on obtient

$$|u(t) - u_m(t)| \leqslant \beta_m, \quad t \in I,$$

ce qui donne la convergence uniforme de $\{u_m\}$ vers u dans I :

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\sup_{t\in I}|u(t) - u_m(t)|\right\} = 0 .$$

On conclut que $u : I \to \overline{K}(x_0; b)$ est continue avec $u(t_0) = x_0$; de plus,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

car

$$\left|\int_{t_0}^{t}\{f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\}\,\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant k\int_{t_0}^{t}|u_n(s) - u(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant k\beta_n(t - t_0) \leqslant k\beta_n\alpha \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. En faisant $n \to \infty$ dans la formule

$$u_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

on voit que $x(t) = u(t)$, $t \in I$, vérifie (1.21) ; ainsi, u est une solution du problème de Cauchy (1.20).

Soit v une seconde solution définie dans $[t_0, t_0 + \alpha']$; posons

$$\delta(t) = |u(t) - v(t)|, \quad t \in J = [t_0, t_0 + \alpha''], \ \alpha'' = \min(\alpha', \alpha) .$$

Alors

$$\begin{aligned}\delta(t) &\leqslant \int_{t_0}^{t}|f(s, u(s)) - f(s, v(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant k\int_{t_0}^{t}\delta(s)\,\mathrm{d}s \leqslant k\cdot 2b(t - t_0),\end{aligned} \quad (1.25)$$

car

$$\delta(s) \leqslant \left|u(s) - x_0\right| + \left|v(s) - x_0\right| \leqslant 2b\,.$$

De (1.25), on obtient par récurrence que, pour $n \geqslant 1$,

$$\delta(t) \leqslant (2b)\frac{k^n}{n!}\left(t - t_0\right)^n, \quad t \in J\,. \tag{1.26}$$

En effet, le cas $n = 1$ est donné par (1.25) : si (1.26) est vérifiée pour n, alors de (1.25) on a

$$\delta(t) \leqslant k\int_{t_0}^{t}\delta(s)\,\mathrm{d}s \leqslant k\int_{t_0}^{t}(2b)\frac{k^n}{n!}\left(s - t_0\right)^n\mathrm{d}s = (2b)\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\left(s - t_0\right)^{n+1},$$

ce qui est (1.26) avec n remplacé par $(n + 1)$. Puisque la série $\sum_{n\geqslant 0}\beta^n/n!$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^n}{n!} = 0\,, \quad \beta \in \mathbb{R}\,,$$

d'où en faisant $n \to \infty$ dans (1.26), on obtient $\delta(t) = 0$, $t \in I$, c'est-à-dire

$$u(t) = v(t) \quad t \in J\,. \qquad \blacklozenge$$

REMARQUE. La proposition précédente possède deux autres variantes, une variante « gauche » où f est définie dans $[\,t_0 - a\,,\,t_0\,] \times \overline{K}(x_0; b)$ et une variante « bilatérale » où f est définie dans $[\,t_0 - a\,,\,t_0 + a\,] \times \overline{K}(x_0; b)$. A cause de son importance nous donnons la seconde variante en détail, en maintenant les notations de la proposition 1.2.4.

1.2.5 **Proposition** (*théorème local*)

Soit $f : [\,t_0 - a\,,\,t_0 + a\,] \times \overline{K}(x_0; b) \to \mathbb{R}^N$ *continue, lipschitzienne en* x ; *soient*

$$M = \sup\left\{\left|f(t,x)\right| : t \in [\,t_0 - a\,,\,t_0 + a\,]\,,\ x \in \overline{K}(x_0; b)\right\}\,, \quad \alpha = \min\left(a\,,\,\frac{b}{M}\right).$$

Alors le problème de Cauchy (1.20) possède une unique solution $u : [\,t_0 - \alpha\,,\,t_0 + \alpha\,] \to \overline{K}(x_0; b)$. (L'unicité de u est à comprendre comme suit : si $v : J \to \mathbb{R}^N$ est une solution avec $t_0 \in J$, J un intervalle de $\mathbb{R}$, et $v(t_0) = x_0$, alors $u(t) = v(t)$, $t \in [\,t_0 - \alpha\,,\,t_0 + \alpha\,] \cap J$.)

La démonstration donnée pour la proposition 1.2.4 peut être adaptée sans peine pour établir la proposition 1.2.5.

Nous formulons un corollaire important de la proposition 1.2.5 comme suit.

1.2.6 Proposition (*théorème local*)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^{N+1}$.

Supposons que f est continue et localement lipschitzienne en x ; alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$ le problème de Cauchy (1.20) possède une unique solution définie dans un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur.

REMARQUE. Pour établir cette proposition, il suffit d'observer que f est lipschitzienne en x dans $[\,t_0 - a\,,\, t_0 + a\,] \times \overline{K}(x_0; b)$ pour un choix approprié de a et b ; la proposition 1.2.5 permet alors de conclure l'existence et l'unicité d'une solution définie dans un intervalle I du type $[\,t_0 - \alpha\,,\, t_0 + \alpha\,]$. Dans la suite on discutera la question de la possibilité de prolonger cette solution à un intervalle maximal (sect. 1.4).

Nous passons maintenant à un autre type d'énoncé appelé « théorème global » ; dans ce genre d'énoncé on affirme l'existence (et éventuellement l'unicité) des solutions définies dans un intervalle global I, contenant t_0, mais où I ne dépend pas de la condition initiale (t_0, x_0).

1.2.7 Proposition (*théorème global*)

Soit $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Supposons que f est continue et que pour tout sous-intervalle compact $J \subset I$, f est lipschitzienne en x dans $J \times \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire il existe $k(J) \geqslant 0$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant k(J)|x - y|\,, \quad t \in J\,,\ x, y \in \mathbb{R}^N\,.$$

Alors pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique solution $u : I \to \mathbb{R}^N$ au problème de Cauchy (1.20).

DÉMONSTRATION

Le principe de base de cette démonstration est le même que celui utilisé dans la démonstration de la proposition 1.2.4.

Soit $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-intervalles compacts de I telle que

$$t_0 \in J_n\,, \quad J_n \subset J_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad I = \bigcup_{n\geqslant 0} J_n\,.$$

Nous démontrons que, pour chaque n, il existe une unique solution $u_n : J_n \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy (1.20). L'unicité des solutions entraîne que

$$u_{n+1}(t) = u_n(t)\,, \quad t \in J_n\ ;$$

ceci permet de définir $u : I \to \mathbb{R}^N$ en posant

$$u(t) = u_n(t)$$

si $t \in J_n$; cette fonction u est l'unique solution dont l'existence est affirmée.

Il suffit donc de démontrer que pour tout sous-intervalle compact $J \subset I$, $t_0 \in J$, il existe une unique solution à (1.20) définie dans J. Pour cela, posons $\xi_0(t) \equiv x_0$, $t \in J$ et définissons

$$\xi_1 = T\xi_0\,, \quad \xi_2 = T\xi_1\,,$$

où

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in J\,,$$

si $x : J \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue, avec la convention habituelle

$$\int_{t_0}^{t} = -\int_{t}^{t_0}\,, \quad \int_{t_0}^{t_0} = 0\,.$$

Si $M = \sup_{t\in J}|f(t, x_0)|$, alors

$$\big|\xi_1(t) - \xi_0(t)\big| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M|t - t_0|\,, \quad t \in J\,.$$

L'analogue de (1.23) est ici

$$\big|\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)\big| \leqslant M\frac{k^{n-1}(J)}{n!}\,|t - t_0|^n\,, \quad t \in J$$

pour $n \geqslant 1$; c'est vrai pour $n = 1$ comme l'on vient de voir et pour $n > 1$, on procède par récurrence ; par exemple, pour $t \in J$,

$$\begin{aligned}\big|\xi_2(t) - \xi_1(t)\big| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, \xi_1(s)\big) - f\big(s, \xi_0(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant k(J)\left|\int_{t_0}^{t} M|s - t_0|\,\mathrm{d}s\right| = M\frac{k(J)}{2!}\,|t - t_0|^2\,.\end{aligned}$$

On démontre ensuite, comme dans la démonstration de la proposition 1.2.4, que $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t)$, $t \in J$, existe et que ξ est continue et vérifie

$$\xi(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \xi(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in J\,;$$

ceci démontre que ξ est une solution de (1.20) définie dans J. Si η est une autre telle solution, on pose

$$\delta(t) = \big|\xi(t) - \eta(t)\big|\,, \quad t \in J$$

et on obtient, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}\delta(t) &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, \xi(s)\big) - f\big(s, \eta(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant k(J)\left|\int_{t_0}^{t} \delta(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant k(J)\cdot c|t - t_0|\end{aligned}$$

où $c = \sup_{s\in J} \delta(s) < \infty$ car δ est continue dans l'intervalle compact J. Le reste de la démonstration procède exactement comme dans la démonstration de la proposition 1.2.4 à partir de (1.25) et établit que $\delta(t) = 0$, $t \in J$, de sorte que $\xi(t) = \eta(t)$, $t \in J$. ♦

REMARQUE. En général, on utilise cette proposition comme suit : si $f = (f_1, \ldots, f_N)$, on vérifie que

$$\sup\left\{\left|\mathrm{D}_j f_i(t,x)\right| : t \in J\,,\ x \in \mathbb{R}^N\right\} < \infty$$

pour tout sous-intervalle compact $J \subset I$ et pour tout i, j dans $\{1, \ldots, N\}$; si $k(J)$ est égal à $\sup\left|\mathrm{D}_j f_i(t,x)\right|$ lorsque $t \in J$, $x \in \mathbb{R}^N$ et $1 \leqslant i, j \leqslant N$, alors la condition lipschtzienne de la proposition 1.2.7 est vérifiée. La démonstration de ce fait est obtenue facilement à l'aide de la discussion du paragraphe 1.2.3.

1.2.8 Inégalité de Gronwall

Cette inégalité simple est souvent utile ; elle permet, par exemple, une démonstration rapide de l'unicité des solutions dans les propositions précédentes.

Soient φ, ψ deux fonctions continues, $\geqslant 0$, définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; soient $t_0 \in I$ et $c \geqslant 0$ tels que

$$\psi(t) \leqslant c + \left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s\right|\,, \quad t \in I\,,$$

alors

$$\psi(t) \leqslant c\exp\left\{\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right|\right\}\,, \quad t \in I\,.$$

En particulier si $c = 0$, alors $\psi = 0$.

DÉMONSTRATION

Supposons d'abord que $c > 0$ et posons

$$F(t) = c + \left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s\right|\,, \quad t \in I\,;$$

notre hypothèse est que $\psi(t) \leqslant F(t)$, $t \in I$.

Si $t \geqslant t_0$,

$$F(t) = c + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

$$F'(t) = \varphi(t)\,\psi(t) \leqslant \varphi(t)\,F(t)$$

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leqslant \varphi(t)$$

car $F(t) \geqslant c > 0$, $t \in I$. Puisque $F(t_0) = c$, on obtient

$$\ln F(t) - \ln c = \int_{t_0}^{t} \frac{F'(s)}{F(s)}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geqslant t_0\,,\ t \in I$$

d'où

$$\psi(t) \leqslant F(t) \leqslant c \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geqslant t_0\,,\ t \in I\,.$$

Si $t < t_0$,

$$F(t) = c + \int_{t}^{t_0} \varphi(s)\,\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

$$F'(t) = -\varphi(t)\,\psi(t) \geqslant -\varphi(t)\,F(t)$$

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \geqslant -\varphi(t)$$

et

$$\ln c - \ln F(t) = \int_{t}^{t_0} \frac{F'(s)}{F(s)}\,\mathrm{d}s \geqslant -\int_{t}^{t_0} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

d'où

$$\psi(t) \leqslant F(t) \leqslant c \exp\left\{\int_{t}^{t_0} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right\} = c \exp\left\{\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right|\right\}$$

pour $t < t_0$, $t \in I$.

Si $c = 0$, on a $\psi(t) \leqslant \varepsilon + F(t)$, $t \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$; on en déduit que

$$\psi(t) \leqslant \varepsilon \exp\left\{\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right|\right\}\,, \quad t \in I\,,$$

d'où, en faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\psi \equiv 0$.

REMARQUE. Dans la démonstration de la proposition 1.2.7, on a

$$\delta(t) \leqslant k(J)\left|\int_{t_0}^{t} \delta(s)\,\mathrm{d}s\right|\,, \quad t \in J\,,$$

ce qui donne $\delta(t) = 0$, $t \in J$, grâce à l'inégalité établie ci-dessus. La même observation vaut pour δ qui apparaît dans la démonstration de la proposition 1.2.4.

1.3 ÉQUATIONS LINÉAIRES

1.3.1 Introduction

Les deux théorèmes de cette section sont des corollaires au théorème global (prop. 1.2.7) ; nous les formulons séparément à cause de leur importance. Dans le premier (prop. 1.3.2)

$$f(t,x) = A(t)x + b(t)\,, \quad t \in I\,,\ x \in \mathbb{R}^N$$

où $t \mapsto A(t)$ est une fonction matricielle continue dans I, un intervalle de $\mathbb{R}$, chaque matrice $A(t) = \big[a_{ij}(t)\big]$ étant une matrice de type (N,N) avec a_{ij} fonction réelle continue dans I, et $t \mapsto b(t)$ est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^N$, continue dans I. Si $x = (x_1, \ldots, x_N) = \big(x_j\big)_{1 \leqslant j \leqslant N}$,

$$A(t)\,x = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\,x_j\right)_{1 \leqslant i \leqslant N}$$

et $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue ; de plus, si $y = (y_1, \ldots, y_N)$ et si J est un sous-intervalle compact de I, alors

$$\begin{aligned} \big|f(t,x) - f(t,y)\big| &= \big|A(t)(x-y)\big| \\ &= \max_i \left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)(x_j - y_j)\right| \leqslant k(J)|x-y|\,, \quad t \in J \end{aligned}$$

où

$$k(J) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{N}\big|a_{ij}(t)\big| : t \in J\,,\ 1 \leqslant i \leqslant N\right\}.$$

Puisque J est compact et les a_{ij} sont continues, on a $0 \leqslant k(J) < \infty$; ainsi, f est lipschitzienne en x dans $J \times \mathbb{R}^N$ si J est un sous-intervalle compact de $\mathbb{R}^N$.

1.3.2 Proposition

Soit l'équation

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{1.27}$$

où $t \mapsto A(t)$ est une fonction matricielle de type (N,N) continue dans I, un intervalle de $\mathbb{R}$, et $t \mapsto b(t)$ une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^N$, continue dans I. Pour toute condition initiale (t_0, x_0), $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique solution $u : I \to \mathbb{R}^N$ à l'équation (1.27) vérifiant $u(t_0) = x_0$.

DÉMONSTRATION

On a vu ci-dessus que $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ donne une fonction continue, lipschitzienne en x dans $J \times \mathbb{R}^N$ pour tout sous-intervalle compact J de I ; la proposition est donc une conséquence directe de la proposition 1.2.7. ♦

1.3.3 Equation linéaire scalaire d'ordre supérieur

Soit l'équation

$$a_n(t)\,x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = g(t) \tag{1.28}$$

où g et a_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, sont des fonctions réelles définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; on suppose que $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$. La fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ est à valeur réelle.

On transforme l'équation (1.28) en une équation linéaire du premier ordre comme (1.27) par un procédé standard et général applicable à d'autres équations d'ordre supérieur.

Posons

$$y_1 = x\,,\ y_2 = x'\,,\ \ldots\,,\ y_n = x^{(n-1)}\,,\ y = (y_1, \ldots, y_n)\ ;$$

alors,

$$y' = (y_1', \ldots, y_n') = \big(y_2, y_3, \ldots, y_n, \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)\big) = f(t,y)$$

où

$$\varphi(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{-1}{a_n(t)}\left\{a_{n-1}(t)y_n + \cdots + a_0(t)y_1\right\} + \frac{g(t)}{a_n(t)}\,.$$

On voit que

$$f(t,y) = A(t)y + b(t) \tag{1.29}$$

où $A(t)$ est la matrice du type (n,n) donnée par

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & & & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

et $b(t)$ est le vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\left(0, 0, \ldots, 0, \frac{g(t)}{a_n(t)}\right)\,,$$

y étant considéré comme le vecteur colonne $(y_1, \ldots, y_n)$.

Si la condition initiale pour (1.28) est

$$x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont n nombres réels, alors la condition initiale pour (1.29) devient

$$y(t_0) = y_0\,, \quad y_0 = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^N\,.$$

1.3.4 Proposition

Soit l'équation (1.28) où les coefficients a_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, et g sont des fonctions réelles définies dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ assujetties à la condition d'être continues dans I avec $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$. Alors pour chaque condition initiale

$$x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

avec $t_0 \in I$, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ réels, il existe une unique solution $u : I \to \mathbb{R}$ à l'équation (1.28), vérifiant la condition initiale imposée.

DÉMONSTRATION

Compte tenu de la discussion précédente, l'existence et l'unicité de u équivaut à l'existence et l'unicité d'une solution de (1.29), définie dans I et vérifiant la condition initiale

$$y(t_0) = y_0 = (x_0, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Puisque les conditions sur les a_j et g sont telles que les fonctions $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ de (1.29) deviennent continues dans I, l'énoncé donné est une conséquence directe de la proposition 1.3.3. ♦

1.3.5 Un procédé général

Nous démontrons ici que le procédé présenté dans le paragraphe 1.3.3 est applicable aux équations non linéaires générales d'ordre supérieur.

Pour fixer les idées, considérons une équation différentielle d'ordre n :

$$x^{(n)} = \varphi(t, x, \ldots, x^{(n-1)}) \tag{1.30}$$

où $x^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction réelle inconnue $t \mapsto x(t)$, t parcourant un intervalle de $\mathbb{R}$. En posant

$$y_1 = x\,,\ y_2 = x'\,,\ \ldots\,,\ y_n = x^{(n-1)}\,,$$

on obtient

$$y_1' = y_2\,,\ y_2' = y_3\,,\ \ldots\,,\ y_n' = \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)\ ;$$

en écrivant

$$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad f(t,y) = \big(y_2, \ldots, y_n, \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)\big),$$

on voit que (1.30) équivaut à

$$y' = f(t,y). \tag{1.31}$$

Autrement dit, si x satisfait (1.30), alors la fonction vectorielle y satisfait (1.31) ; inversement, si y vérifie (1.31), la première composante y_1 de y vérifie (1.30). De plus, une condition initiale pour (1.30) de la forme

$$x(t_0) = x_0\,,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

avec $t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}$ dans les domaines de définition de φ, correspond à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $y_0 = (x_0, \ldots, x_{n-1})$.

La discussion précédente s'applique aussi aux systèmes d'équations d'ordre supérieur. Pour illustration, considérons un système de deux équations :

$$\begin{aligned} a^{(m)} &= \varphi\big(t, a, \ldots, a^{(m-1)}, b, \ldots, b^{(n-1)}\big) \\ b^{(n)} &= \psi\big(t, a, \ldots, a^{(m-1)}, b, \ldots, b^{(n-1)}\big) \end{aligned} \tag{1.32}$$

où $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ sont deux fonctions réelles inconnues (d'une variable réelle t). En posant

$$y_1 = a, \ldots, y_m = a^{(m-1)}\,, \quad y_{m+1} = b, \ldots, y_{m+n} = b^{(n-1)}$$
$$y = (y_1, \ldots, y_{m+n})\,,$$

on voit que (1.32) équivaut à $y' = f(t,y)$ où

$$f(t,y) = \big(y_2, \ldots, y_m, \varphi(t,y), y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}, \psi(t,y)\big)\,.$$

Les conditions initiales de (1.32) de la forme

$$a(t_0) = a_0, \ldots, a^{(m-1)}(t_0) = a_m\,, \quad b(t_0) = b_0, \ldots, b^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1}$$

deviennent $y(t_0) = y_0 = (a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_{n-1})$.

En appliquant ce procédé aux équations de mouvement d'un système de n particules dans $\mathbb{R}^3$ où il s'agit de $3n$ équations du second ordre du type

$$x_j'' = \varphi_j(t, x, x')\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3n$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_{3n})$ les $3n$ coordonnées spatiales des n particules, on obtient un système équivalent de $6n$ équations du premier ordre ; une condition initiale typique est de la forme

$$x_j(t_0) = \alpha_j\,, \quad x_j'(t_0) = \beta_j\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3n\,;$$

elle spécifie les positions et les vitesses des n particules à un instant initial t_0.

1.3.6 Un procédé inverse

Quelquefois il peut être utile de faire l'inverse du procédé précédent, c'est-à-dire de transformer un système d'équations à une équation d'ordre supérieur. Considérons, par exemple, un système de deux équations du premier ordre :

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad x_1' = f_1(t, x_1, x_2) \\ &\text{(ii)} \quad x_2' = f_2(t, x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.33}$$

où x_1, x_2 sont deux fonctions réelles de la variable réelle t ; nous supposons que f_1, f_2 sont continûment dérivables et que l'on peut résoudre x_2 en termes de t, x_1, x_1' de (1.33)(i). En dérivant par rapport à t dans (1.33)(i), on obtient

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2' = g(t, x_1, x_2)$$

où nous avons substitué les expressions pour x_1', x_2' de (1.33) pour obtenir $g(t, x_1, x_2)$. De (1.33)(i), on obtient

$$x_2 = h(t, x_1, x_1')$$

et on introduit cette expression pour x_2 dans $g(t, x_1, x_2)$; alors, on obtient l'équation différentielle du second ordre pour x_1 :

$$x_1'' = \varphi(t, x_1, x_1') .$$

En résolvant celle-ci, on obtient x_1, ce qui donne ensuite $x_2 = h(t, x_1, x_1')$.

Comme exemple simple prenons les équations

$$x_1' = 3x_1 - x_2 , \quad x_2' = x_1 + x_2 .$$

On obtient

$$x_1'' = 3x_1' - x_2' = 3x_1' - (x_1 + x_2) = 3x_1' - x_1 + (x_1' - 3x_1)$$

en utilisant

$$x_2 = -x_1' + 3x_1 ;$$

ainsi, on a

$$x_1'' - 4x_1' + 4x_1 = 0$$

dont la solution générale est (§ 2.4.6)

$$x_1(t) = (a + bt)\, \mathrm{e}^{2t}$$

d'où

$$x_2(t) = -x_1'(t) + 3x_1(t) = (a - b + bt)\, \mathrm{e}^{2t} .$$

Si les conditions initiales $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$ sont données, alors celles-ci déterminent les constantes a, b ; par exemple, si $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 0$, alors $a = 3$, $b = 3$.

1.4 PROLONGEMENT DES SOLUTIONS

1.4.1 Préliminaires

Considérons l'équation

$$x' = f(t,x) \tag{1.34}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, Ω étant une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^{N+1}$. Rappelons qu'une ***solution*** de (1.34) est une fonction $u : I \to \mathbb{R}^N$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (appelé le ***domaine*** de définition de la solution) telle que

$$\big(t,u(t)\big) \in \Omega\,, \quad u'(t) = f\big(t,u(t)\big)\,, \quad t \in I\,;$$

si $t_0 \in I$ et $u(t_0) = x_0$, on dit que la solution vérifie la condition (souvent dite initiale) (t_0,x_0) ou que la trajectoire, ou courbe, définie par u (dans $\mathbb{R}^N$), passe par le point x_0 au temps t_0. Si u, v sont deux solutions de (1.34) ayant les domaines de définitions I, J respectivement (I et J étant des intervalles de $\mathbb{R}$), on dit que v est un ***prolongement*** de u si

$$u(t) = v(t)\,, \quad t \in I \subset J\,;$$

évidemment, si v est un prolongement de u et u est un prolongement de v, alors $u = v$ (et $I = J$).

Une solution $u : I \to \mathbb{R}^N$ de (1.34) se dit ***non prolongeable*** si toute solution v de (1.34) qui est un prolongement de u coïncide avec u ; on dit que u est définie sur un intervalle maximal I.

1.4.2 Proposition

Supposons que f dans (1.34) est continue dans $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, Ω ouvert et non vide, et que f est localement lipschitzienne en x dans Ω.

(i) Si u et v sont deux solutions de (1.34) ayant les domaines respectifs I, J, et si $u(t_0) = v(t_0)$ pour un $t_0 \in I \cap J$, alors $u(t) = v(t)$, $t \in I \cap J$.

(ii) (Théorème global) Soit $(t_0,x_0) \in \Omega$; il existe une unique solution non prolongeable u de (1.34) telle que $u(t_0) = x_0$; le domaine de définition de u est un intervalle ouvert I. Si $v : J \to \mathbb{R}^N$ est une solution quelconque de (1.34) telle que $v(t_1) = u(t_1)$ pour un $t_1 \in I \cap J$, alors u est un prolongement de v.

DÉMONSTRATION

(i) Soit $K = \big\{t \in I \cap J : u(t) = v(t)\big\}$; on sait que $t_0 \in K$ et que $I \cap J$ est soit un intervalle, soit l'ensemble $\{x_0\}$, le second cas étant banal pour notre énoncé. Evidemment, K est fermé dans $I \cap J$ car u, v sont continues ; K est aussi ouvert dans $I \cap J$; en effet, si $t_1 \in K$, il existe une unique

solution ξ de (1.34) définie dans un intervalle ouvert $]\,t_1-\varepsilon\,,\,t_1+\varepsilon\,[$ avec $\xi(t_1)=u(t_1)=v(t_1)$ (prop. 1.2.6) ; alors

$$\widetilde{K}=I\cap J\cap\,]\,t_1-\varepsilon\,,\,t_1+\varepsilon\,[\,\subset K$$

car pour t dans l'ensemble $\widetilde{K}$, on a $\xi(t)=u(t)=v(t)$ à cause de l'unicité des solutions. Puisque $I\cap J$ est connexe (étant un intervalle de $\mathbb{R}$), on conclut que $K=I\cap J$.

(ii) Considérons toutes les solutions ξ de (1.34) telles que $\xi(t_0)=x_0$; si I_ξ est le domaine de définition de ξ, posons a_ξ pour l'extrémité gauche de I_ξ et b_ξ pour son extrémité droite ; évidemment, $t_0\in I_\xi$ pour chaque ξ ; définissons

$$a=\inf_\xi a_\xi\,,\quad b=\sup_\xi b_\xi$$

où ξ parcourt toutes les solutions en question. D'après la proposition 1.2.6, il existe une solution ξ vérifiant (t_0,x_0), définie dans un intervalle $]\,t_0-\varepsilon\,,\,t_0+\varepsilon\,[$, pour un $\varepsilon>0$; donc

$$-\infty\leqslant a<t_0<b\leqslant\infty\,.$$

Soit $b_n=b_{\xi_n}$, $n\geqslant 1$, une suite croissante telle que $b_n\to b$ $(n\to\infty)$; puisque $\xi_{n+1}=\xi_n$ au moins dans $[\,t_0\,,\,b_n\,[$ (d'après (i)), on obtient une solution δ de (1.34) définie dans $[\,t_0\,,\,b\,[$ en posant

$$\delta(t)=\xi_n(t)\,,\quad t\in[\,t_0\,,\,b_n\,[\,.$$

Si $b=\infty$, δ est définie dans $[\,t_0\,,\,\infty\,[$; si $b<\infty$, δ est définie dans $[\,t_0\,,\,b\,[$. De même, on obtient une solution γ définie dans $]\,a\,,\,t_0\,]$ avec $a=-\infty$ ou $a>-\infty$; en posant

$$u(t)=\begin{cases}\delta(t) & \text{si } t\in[\,t_0\,,\,b\,[\\ \gamma(t) & \text{si } t\in\,]\,a\,,\,t_0\,],\end{cases}$$

on obtient une solution de (1.34) définie dans $]\,a\,,\,b\,[$ telle que $u(t_0)=\delta(t_0)=\gamma(t_0)=x_0$. Cette solution u est non prolongeable car s'il existait un prolongement v, alors ou bien a ou bien b serait dans le domaine de définition J de v. Supposons que $a\in J$, ce qui veut dire que $a>-\infty$; si ξ était une solution de (1.34) définie dans un intervalle du type $]\,a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon\,[\,,\,\varepsilon>0$, avec $\xi(a)=v(a)$, alors $\widetilde{\xi}(t)=v(t)$, $t\in J$, $\widetilde{\xi}(t)=\xi(t)$, $t\in\,]\,a-\varepsilon\,,\,a\,]$, définirait une solution $\widetilde{\xi}$ telle que $a_{\widetilde{\xi}}=a-\varepsilon<a$, ce qui serait une contradiction. De même, b ne peut pas être dans J ; on conclut qu'un prolongement v de u (avec $v\neq u$) ne peut pas exister. Grâce à (i), cette solution non prolongeable est unique.

Observons maintenant que si $t_1\in I=\,]\,a\,,\,b\,[$ et $u(t_1)=x_1$ (u étant la solution non prolongeable obtenue ci-dessus), alors u est aussi l'unique solution non prolongeable parmi les solutions ξ de (1.34) telles que $\xi(t_1)=x_1$; en effet, s'il existait un prolongement de u par une solution v de (1.34)

telle que $v(t_1) = u(t_1) = x_1$ avec le domaine de définition J de v tel que $J \supset I$, $J \neq I$, alors en posant $\widetilde{u}(t) = u(t)$, $t \in I$, $\widetilde{u}(t) = v(t)$, $t \in J \setminus I$, on obtiendrait une solution $\widetilde{u}$ de (1.34) avec $\widetilde{u}(t_0) = u(t_0) = x_0$; mais $\widetilde{u}$ serait alors un prolongement de u ayant un domaine strictement plus grand que u, ce qui contredirait la définition de u. ♦

1.4.3 Remarques

Le domaine de définition I de la solution non prolongeable u dans le théorème global de la proposition 1.4.2 dépend, en général, de (t_0, x_0) ; sur ce point, le théorème global de la proposition 1.2.7 est très différent car dans ce dernier, le domaine de définition I de la solution (qui est évidemment non prolongeable) ne dépend pas de la condition initiale (t_0, x_0). Il est en fait assez difficile de déterminer exactement de façon générale l'intervalle I qui est le domaine de définition de la solution non prolongeable u ; nous nous contentons ici de faire quelques remarques à ce sujet ; les exemples ci-après (ainsi que l'exemple (1.16)) illustrent concrètement nos propos.

Soit $I =]\, a\,,\, b\,[$ l'intervalle maximal de définition d'une solution non prolongeable u de l'équation (1.34) ; considérons le comportement de $u(t)$ lorsque t tend vers b, le raisonnement pour $u(t)$, t tendant vers a, étant similaire. Supposons que $\{t_n\}$ est une suite croissante dans I telle que $t_n \to b$ et $u(t_n) \to \xi \in \mathbb{R}^N$ lorsque $n \to \infty$ ou $|u(t_n)| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Si $b < \infty$ et $|u(t_n)| \to \infty$ $(n \to \infty)$, alors il est clair que la solution ne peut pas être prolongée à b et au-delà ; on peut interpréter cette situation comme un phénomène « d'explosion » de la solution dans un temps fini ; si $b = \infty$, la question du prolongement au-delà de b ne se pose pas. D'autre part, si $b < \infty$ et $u(t_n) \to \xi$ $(n \to \infty)$, (b, ξ) étant dans $\operatorname{Fr}\Omega$ où la fonction f n'est pas définie a priori, alors le prolongement de u à b et au-delà est clairement impossible ; en fait, si $u(t_n) \to \xi$ avec $(b, \xi) \in \Omega$ pour toute suite croissante $t_n \to b$ $(n \to \infty)$, alors on peut prolonger u à b et au-delà comme suit : soit v une solution de (1.34) définie dans $[\, b\,,\, b + \varepsilon\,[$ (pour un $\varepsilon > 0$) telle que $v(b) = \xi$; l'existence de v est évidente à cause de la proposition 1.2.6 ; si $\widetilde{u}(t) = u(t)$ pour $a < t < b$ et $\widetilde{u}(t) = v(t)$ pour $t \in [\, b\,,\, b + \varepsilon\,[$, alors $\widetilde{u}$ est une solution de (1.34) qui prolonge u, contredisant la non-prolongeabilité de u.

On conclut que *si* $b < \infty$, *alors il existe au moins une suite croissante* $\{t_n\}$ *dans* I *telle que* $\lim_n t_n = b$ *et ou bien* $\lim_n |u(t_n)| = \infty$ *ou bien* $\lim_n u(t_n) = \xi$ *avec* $(b, \xi) \in \operatorname{Fr}\Omega$. *De même, si* $a > -\infty$, *alors il existe au moins une suite décroissante* $\{t_n\}$ *dans* I *telle que* $\lim_n t_n = a$ *et ou bien* $\lim_n |u(t_n)| = \infty$ *ou bien* $\lim_n u(t_n) = \xi$ *avec* $(b, \xi) \in \operatorname{Fr}\Omega$.

Ces conclusions deviennent encore plus simple à formuler si f est définie dans une partie ouverte Ω de la forme $T \times D$, T intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et D une partie ouverte de $\mathbb{R}^N$; c'est le cas où (1.34) est un système autonome ; alors, f ne dépend pas de t et Ω est de la forme $\mathbb{R} \times D$. Dans ce cas, si $I \neq T$ et si l'extrémité droite b de I est dans T (donc b ne coïncide pas avec l'extrémité droite de T), alors on aura ou bien $\lim_n |u(t_n)| = \infty$ ou bien $\lim_n u(t_n) = \xi \in$

Fr D pour au moins une suite croissante $\{t_n\}$ dans I telle que $t_n \to b$ $(n \to \infty)$. Une description analogue vaut pour l'extrémité gauche a de I.

1.4.4 Interprétation géométrique

Considérons l'équation (1.34) pour le cas $N = 1$; dans $\mathbb{R}^2$, on interprète t comme définissant l'axe des abscisses et x celui des ordonnées. L'équation donne alors un *champ de direction* dans une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$: à chaque point (t, x) de Ω, la direction est donnée par une droite $d(t, x)$ passant par (t, x), de coefficient angulaire $f(t, x)$. Une solution $t \mapsto u(t)$, $t \in I$, donne une courbe (dite *intégrale*) dans Ω qui est tangente en chacun des points $\big(t, u(t)\big)$ à la droite spécifiée $d\big(t, u(t)\big)$ en ce point ; si la solution vérifie la condition initiale (t_0, x_0), alors la courbe intégrale passe par (t_0, x_0). Une solution non prolongeable u est définie dans un intervalle maximal I et on voit géométriquement (fig. 1.1) qu'aux extrémités de I le graphe de u s'approche de Fr Ω. La proposition 1.4.2 devient ainsi géométriquement évidente : par chaque point (t_0, x_0) de Ω, passe une unique courbe intégrale maximale respectant le champ de direction donné, la courbe intégrale étant définie par une solution non prolongeable vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) ; deux telles courbes distinctes ne s'intersectent jamais. Rappelons que pour la validité de cet énoncé, on doit avoir la *continuité* du champ de direction $f(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$ et la validité de la *propriété de Lipschitz en* x de $f(t, x)$.

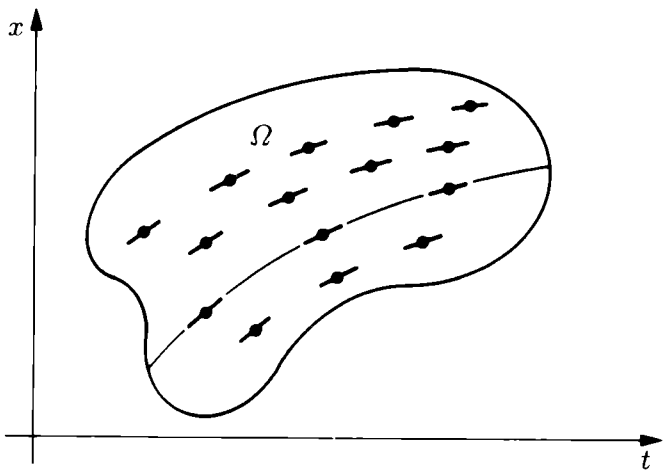


Fig. 1.1 L'interprétation géométrique reste valable pour $N \geqslant 1$, quitte à transposer la discussion à $\mathbb{R}^{N+1}$.

1.5 EXEMPLES

Exemple 1

Soit l'équation

$$x' = x$$

avec la condition initiale $x(0) = c$.

Dans ce cas, la méthode de Picard donne,

$$u_0 \equiv c\,, \quad u_1(t) = c + \int_0^t c\,\mathrm{d}s = c + ct$$

$$u_2(t) = c + \int_0^t (c + cs)\,\mathrm{d}s = c\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right)$$

$$u_n(t) = c\left(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)\,, \quad n \geqslant 1$$

par récurrence. On constate que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = c\,\mathrm{e}^t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

où $u(t) = c\,\mathrm{e}^t$, $t \in \mathbb{R}$, est la solution bien connue de l'équation.

Il faut ajouter que la méthode de Picard, tout en étant très utile comme outil de démonstration théorique, est assez rarement applicable pour obtenir la solution explicite d'une équation.

Exemple 2

Soit l'équation

$$x' = x^2 + \cos t^2$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$.

Ici $f(t, x) = x^2 + \cos t^2$ et f satisfait aux conditions d'application de la proposition 1.2.6 avec $\Omega = \mathbb{R}^2$, $N = 1$, mais non à celles de la proposition 1.2.7 (théorème global). On vérifie ceci en remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

mais que

$$\big|f(t, x) - f(t, y)\big| = |x^2 - y^2| \leqslant k|x - y|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

est impossible pour $k \geqslant 0$ quelconque. Appliquons la proposition 1.2.5 avec un choix de $a > 0$, $b > 0$ quelconque et $t_0 = 0$, $x_0 = 0$; alors

$$M = \sup\big\{|x^2 + \cos t^2| : |t| \leqslant a\,,\ |x| \leqslant b\big\} \leqslant b^2 + 1$$

et

$$\alpha = \min\left(a\,,\ \frac{b}{M}\right) \geqslant \min\left(a\,,\ \frac{b}{b^2 + 1}\right).$$

Si $a = 1$, $b = 1$, on a $\alpha \geqslant 1/2$ et on obtient l'existence d'une unique solution u définie au moins dans $[-1/2\,,\ 1/2\,]$ avec $u(0) = 0$ et $\big|u(t)\big| \leqslant 1$ pour $|t| \leqslant 1/2$.

Si $a = 4$, $b = 2$, on a $a \geqslant \min(4, 2/5) = 2/5 = 0,4$ et on obtient l'existence d'une unique solution u définie dans au moins $[-0,4, 0,4]$ avec $u(0) = 0$, $|u(t)| \leqslant 1$ pour $|t| \leqslant 0,4$, un résultat moins précis que celui obtenu par le choix $a = 1$, $b = 1$. En fait,

$$\sup_{b \geqslant 0} \frac{b}{b^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

le supremum étant atteint à $b = 1$ (car, pour $b \geqslant 0$, $b^2 + 1 \geqslant 2b$, avec égalité seulement si $b = 1$) de sorte que le choix $b = 1$, $a \geqslant 1$, donne le « meilleur » résultat en partant du raisonnement indiqué ; ici « meilleur » est utilisé dans le sens d'avoir un intervalle le plus long possible pour le domaine de définition de la solution et en même temps d'obtenir les bornes les plus strictes possibles sur la solution.

Dans cet exemple, la solution unique non prolongeable est un intervalle ouvert I contenant $[-1/2, 1/2]$; nous n'essayons pas de déterminer I plus précisément.

Exemple 3

Soit l'équation

$$x' = \exp(x^2) - 1$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$.

Ici $f(t, x) = \exp(x^2) - 1$, f étant une fonction localement lipschitzienne en x, indépendante de t (système autonome) ; le théorème global (prop. 1.2.7) n'est pas applicable mais néanmoins, l'équation possède l'unique solution non prolongeable $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Pour démontrer ceci rigoureusement, il suffit de vérifier que $u \equiv 0$ satisfait $u(0) = 0$ et l'équation donnée et d'utiliser la proposition 1.4.2 (théorème global) pour établir son unicité. C'est la condition initiale $x(0) = x_0$ avec $x_0 = 0$ qui a facilité le travail car

$$f(t, x_0) = \exp(0) - 1 \equiv 0\,.$$

Pour la condition initiale $x(0) = 1$, la solution non prolongeable sera déjà plus laborieuse à obtenir ; évidemment, une telle solution existe pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, grâce à la proposition 1.4.2.

Exemple 4

Soit l'équation

$$x'' = \sin tx + \sin tx'\,.$$

Démontrons que, pour toute condition initiale $x(0) = a_0$, $x'(0) = a_1$, cette équation possède une unique solution définie dans $\mathbb{R}$. En posant $x_1 = x$, $x_2 = x'$, l'équation équivaut à un système

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

avec

$$f_1(t, x_1, x_2) = x_2\,, \quad f_2(t, x_1, x_2) = \sin tx_1 + \sin tx_2\,.$$

Puisque

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = t\cos tx_1\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = t\cos tx_2\,,$$

on obtient

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,(t,x_1,x_2)\right| : |t| \leqslant T\,,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \leqslant T < \infty\,,$$

ce qui permet l'application du théorème global (prop. 1.2.7). Si $a_0 = a_1 = 0$, l'unique solution est $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 5

Soit l'équation

$$x' = \frac{1}{x}$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$. On vérifie facilement que l'unique solution non prolongeable est donnée par

$$u(t) = \sqrt{2t+1}\,, \quad t \in \left]-\frac{1}{2}\,, \infty\right[= I\,.$$

Ici $f(t,x) = x^{-1}$ (indépendante de t) et f possède les propriétés nécessaires pour l'application de la proposition 1.4.2 avec $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$; lorsque t tend vers $-1/2$ (l'extrémité gauche a de I), on observe que $u(t)$ tend vers $0 \in \operatorname{Fr}\mathbb{R}^*$, ce qui illustre les propos concernant le comportement de u aux extrémités de I.

La solution ici est particulièrement simple car $\lim u(t)$ existe lorsque $t \to a$, l'extrémité gauche de I ; dans le cas général, $u(t)$ peut ne pas avoir une limite lorsque $t \to a$, $a > -\infty$.

Exemple 6

Soit l'équation

$$x' = \frac{1}{x^2+t^2}$$

avec la condition initiale $x(1) = 1$. Démontrons que l'unique solution non prolongeable est définie partout dans $\mathbb{R}$.

Ici $f(t,x) = \left(x^2+t^2\right)^{-1}$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \Omega$; on a

$$f'_x(t,x) = \frac{-2x}{\left(t^2+x^2\right)^2}$$

et

$$\sup\left\{\left|f'_x(t,x)\right| : t_1 \leqslant t \leqslant t_2\,,\ x \in \mathbb{R}\right\} < \infty$$

si $0 < t_1 < t_2 < \infty$ ou si $-\infty < t_1 < t_2 < 0$; donc en considérant f dans $I \times \mathbb{R}$ avec $I = \left]0\,, \infty\right[$ ou $I = \left]-\infty\,, 0\right[$, on obtient (prop. 1.2.7) l'existence d'une unique solution de l'équation définie dans I vérifiant $x(t_0) = x_0$ pour

$t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la condition initiale est $x(0) = x_0 \neq 0$, alors l'équation possède aussi une unique solution non prolongeable définie dans un intervalle ouvert contenant 0 (car f est de classe C^1 dans Ω ; prop. 1.4.2). Pour démontrer notre affirmation, il suffit donc d'établir que l'unique solution $u :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant $u(1) = 1$ est telle que

$$\lim_{0<t\to 0} u(t) = c, \quad -\infty < c < 0 ;$$

en effet, dans ce cas, u se prolonge d'abord à un intervalle $[-\alpha, 0]$ (pour un $\alpha > 0$) en résolvant l'équation donnée sous la condition initiale $x(0) = c$; ensuite, u se prolonge à $]-\infty, -\alpha]$ en résolvant l'équation sous la condition initiale $x(-\alpha) = u(-\alpha)$.

Puisque $f(t, x) > 0$, toute solution de l'équation est strictement croissante, donc c existe. Si $0 < \varepsilon < 1$,

$$\frac{1}{3}\left\{1 - u^3(\varepsilon)\right\} = \int_\varepsilon^1 u^2(t)u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 \frac{u^2(t)}{u^2(t) + t^2}\,\mathrm{d}t < 1 - \varepsilon$$

d'où, en faisant $\varepsilon \to 0$, on a $c^3 \geqslant -2$; puisque $u(1) = 1$, on a $c < 1$, ce qui montre que $c \in \mathbb{R}$. Pour établir que $c < 0$, nous faisons un raisonnement par l'absurde ; si $c \geqslant 0$, alors $u(t) > 0$ pour $t > 0$ et u' serait strictement décroissante dans $]0, \infty[$ (à cause de l'équation $u'(t) = \left(u^2(t) + t^2\right)^{-1}$), ce qui entraînerait que u serait strictement concave dans $]0, \infty[$; donc

$$0 < u(t) \leqslant \frac{1}{2}(t + 1), \quad t > 0,$$

en utilisant le fait que le graphe de u est au-dessus de sa tangente au point $(1, 1)$. On conclurait que

$$u^2(t) + t^2 \leqslant \frac{1}{4}\left\{(t + 1)^2 + 4t^2\right\}, \quad t > 0$$

d'où, pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$1 - u(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{u^2(t) + t^2} \geqslant \int_\varepsilon^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$g(t) = \frac{4}{5t^2 + 2t + 1} = \frac{4/5}{(t + 1/5)^2 + (2/5)^2} ;$$

si $\varepsilon \to 0$, on obtiendrait

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - c.$$

D'autre part, un calcul direct donne

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{1/2}^3 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} > 1$$

car

$$\int_{1/2}^3 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \left(\int_{1/2}^1 + \int_1^2 + \int_2^3\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0,55\,.$$

Ainsi, on arriverait à la contradiction

$$1 < 1 - c$$

(en se rappelant que nous avions supposé $c \geqslant 0$) ; on conclut que $c < 0$ et notre affirmation est établie.

On démontre facilement que si

$$L_+ = \lim_{t\to\infty} u(t)\,, \quad L_- = \lim_{t\to-\infty} u(t)\,,$$

alors

$$-\infty < c + \frac{\pi}{2c} < L_- < L_+ < 1 + \frac{\pi}{4} < \infty$$

où $c = u(0)$. En effet,

$$(L_+ - 1) = \int_1^\infty u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{u^2(t)+t^2} < \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

et

$$(c - L_-) = \int_{-\infty}^0 u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{u^2(t)+t^2} < \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{c^2+t^2} = \frac{-\pi}{2c}$$

car $u(t) < u(0) = c < 0$ si $t < 0$.

Même dans cet exemple simple, un raisonnement non banal est nécessaire pour déterminer exactement le domaine de définition de la solution non prolongeable. Le fait que la solution non prolongeable existe sur $\mathbb{R}$ est une conséquence du choix de la condition initiale $x(1) = x_0$ avec $x_0 = 1$; on peut démontrer qu'il existe un x_0 (approximativement égal à $1,3561$) tel que l'unique solution x définie dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ vérifie $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$; celle-ci ne peut pas être prolongée car $x'(t) \to \infty$ lorsque $t \to 0$.

1.6 COMPLÉMENTS

1.6.1 Théorème de Peano

Les propositions principales de la section 1.2 (prop. 1.2.4, 1.2.5 et 1.2.6) ainsi que la proposition 1.4.2 restent valables sous la *seule hypothèse de la continuité* de la fonction f si l'on sacrifie l'unicité des solutions. Nous formulons ceci précisément comme suit (théorème de Peano) : *soit l'équation différentielle (1.34)*

$$x' = f(t, x)$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *est une fonction continue définie dans une partie ouverte non vide* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *; soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$.

(i) Si

$$A = [\, t_0 - a\,,\, t_0 + a\,] \times \overline{K}(x_0; b) \subset \Omega$$

où

$$\overline{K}(x_0; b) = \big\{x : |x - x_0| \leqslant b\big\}$$

et

$$M = \sup\big\{\big|f(t,x)\big| : (t,x) \in A\big\}\,, \quad \alpha = \min\Big(a\,,\, \frac{b}{M}\Big)\,,$$

alors (1.34) possède une solution $u : [\, t_0 - \alpha\,,\, t_0 + \alpha\,] \to \overline{K}(x_0; b)$ *avec* $u(t_0) = x_0$.

(ii) Il existe une solution non prolongeable de (1.34) vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) *; toute solution de (1.34) possède un prolongement en une solution non prolongeable.*

Indiquons brièvement une démonstration de la partie (i) de cet énoncé ; la partie (ii) est une conséquence de (i) en utilisant un processus de prolongement successif de la solution garantie par (i).

Puisque A est une partie compacte de Ω, on peut trouver une suite de fonctions polynomiales $\{f_n\}$ telle que

$$\sup_{(t,x)\in A} \big|f_n(t,x) - f(t,x)\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \qquad \sup_{(t,x)\in A} \big|f_n(t,x)\big| \leqslant M\,, \quad n \geqslant 1\,;$$

c'est une conséquence du théorème de Weierstrass (vol. 1, chap. 5). Puisque chaque f_n satisfait aux hypothèses de la proposition 1.2.5, on a

$$u_n : [\, t_0 - \alpha\,,\, t_0 + \alpha\,] \longrightarrow \overline{K}(x_0; b)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

avec

$$u_n'(t) = f_n\big(t, u_n(t)\big)\,, \quad t \in [\, t_0 - \alpha\,,\, t_0 + \alpha\,]$$
$$u_n(t_0) = x_0$$

ce qui équivaut à avoir

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n\big(s, u_n(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \quad t_0 - \alpha \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha\,,\ n \geqslant 1\,.$$

Si $t_1,\ t_2 \in [\,t_0 - \alpha\,,\ t_0 + \alpha\,]$, on a alors

$$\big|u_n(t_1) - u_n(t_2)\big| \leqslant M|t_1 - t_2|\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

De cette dernière inégalité on conclut (grâce à un théorème de Arzelà-Ascoli) qu'il existe une sous-suite $\{u_{n_j}\}$ et une fonction $u : [\,t_0 - \alpha\,,\ t_0 + \alpha\,] \to \overline{K}(x_0; b)$ telles que

$$\sup_{t \in [\,t_0 - \alpha\,,\, t_0 + \alpha\,]} \big|u_{n_j}(t) - u(t)\big| \xrightarrow{j \to \infty} 0\,.$$

Par conséquent, en laissant $n_j \to \infty$ dans l'équation intégrale ci-dessus satisfaite par u_{n_j}, on obtient

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \quad , \quad t \in [\,t_0 - \alpha\,,\ t_0 + \alpha\,]\,.$$

Ceci complète la démonstration de (i).

Puisque nous n'utilisons pas le théorème de Peano dans la suite, nous n'entrons pas dans une discussion plus détaillée ; on trouvera plus de détail (y inclus le théorème de Arzelà-Ascoli) dans les références données dans la suite (§ 1.7.2, voir aussi prop. 5.3.3).

1.6.2 Dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres

La solution u de l'équation (1.34) vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) est une fonction de t qui dépend aussi de t_0, x_0 ; pour cette raison, nous la notons ici par $u(t, t_0, x_0)$. Nous supposons que f *vérifie les conditions de la proposition 1.4.2* (f continue dans Ω qui est ouvert dans $\mathbb{R}^{N+1}$ et $f(t, x)$ localement lipschitzienne en x dans Ω) ; aussi, u est uniquement déterminée par (t_0, x_0) dans un intervalle maximal $I = I(t_0, x_0)$ (dépendant de (t_0, x_0)) ; u est une fonction des variables t, t_0, x_0, définie dans $A \subset \mathbb{R}^{N+2}$ où

$$A = I(t_0, x_0) \times \Omega\,, \quad u : A \to \mathbb{R}^N\,,$$

$$\big(t,\, u(t, t_0, x_0)\big) \in \Omega\,, \quad u'(t, t_0, x_0) = f\big(t,\, u(t, t_0, x_0)\big)\,, \quad t \in I(t_0, x_0)\,.$$

L'application

$$(t, t_0, x_0) \longmapsto u(t, t_0, x_0)\,, \quad (t, t_0, x_0) \in A$$

est continue. C'est la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales.

Si la fonction f de l'équation (1.34) dépend d'un paramètre λ (variant dans $\mathbb{R}^m$), alors la solution u dépend de λ aussi ; plus précisément, supposons que notre équation est

$$x' = f(t, x, \lambda) \tag{1.35}$$

où f est définie dans une partie ouverte V de $\mathbb{R}^{m+N+1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$; nous supposons que *f est continue dans V et localement lipschitzienne en (x, λ)*. Si $(t_0, x_0, \lambda) \in V$, alors (1.35) possède une unique solution u définie dans un intervalle maximal $I = I(t_0, x_0, \lambda)$ avec $u(t_0) = x_0$; considérons u comme une fonction de t, t_0, x_0, λ, et écrivons

$$u(t, t_0, x_0, \lambda)$$

pour $(t, t_0, x_0, \lambda) \in B \subset \mathbb{R}^{m+N+2}$ avec

$$t \in I(t_0, x_0, \lambda)\,, \quad (t_0, x_0, \lambda) \in V$$
$$\big(t,\ u(t, t_0, x_0, \lambda),\ \lambda\big) \in V\,, \quad u'(t, t_0, x_0, \lambda) = f\big(t,\ u(t, t_0, x_0, \lambda),\ \lambda\big)\,, \quad t \in I$$
$$u(t_0, t_0, x_0, \lambda) = x_0\,.$$

L'application

$$(t, t_0, x_0, \lambda) \longmapsto u(t, t_0, x_0, \lambda)\,, \quad (t, t_0, x, \lambda) \in B$$

est continue. C'est la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales et aux paramètres.

Cet énoncé est, en fait, une conséquence de celui qui précède au sujet de (1.34) ; il suffit de compléter l'équation (1.35) par la suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0\ ;$$

on a alors à résoudre

$$\big(x, \lambda\big)' = (f, 0)$$

sous une condition initiale

$$x(t_0) = x_0\,, \quad \lambda(t_0) = \lambda$$

ce qui fait de (1.35) un cas particulier de (1.34).

Nous démontrerons une partie importante de ces énoncés concernant la dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres. Notons que *si la fonction f dans (1.35) est de classe C^r, $r \geqslant 1$, dans V, alors la solution u est de classe C^r dans B*. La démonstration détaillée de cette affirmation est un peu longue et nous ne la donnerons pas ici.

Nous illustrons la dépendance continue des solutions en considérant d'abord les solutions de deux équations différentielles « voisines ». Supposons que

$$u(t_0) = x_0\,,\ v(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad u'(t) = f\big(t, u(t)\big)\,,\ v'(t) = g\big(t, v(t)\big)\,,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

avec $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continues, Ω ouvert dans $\mathbb{R}^{N+1}$, $f(t,x)$ étant lipschitzienne en x dans Ω ; supposons que

$$\sup_{(t,x)\in\Omega} \big|f(t,x) - g(t,x)\big| \leqslant \varepsilon\,.$$

Alors

$$\big|u(t) - v(t)\big| \leqslant \varepsilon(t_1 - t_0)\,\mathrm{e}^{k(t-t_0)}\,, \quad t \in [\,t_0\,,\,t_1\,]\,, \tag{1.36}$$

si k est la constante lipschitzienne associée à f. En effet, on sait que, pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

$$v(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g\big(s, v(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

d'où

$$\begin{aligned}
\big|u(t) - v(t)\big| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, u(s)\big) - g\big(s, v(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, u(s)\big) - f\big(s, v(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, v(s)\big) - g\big(s, v(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant k\int_{t_0}^{t} \big|u(s) - v(s)\big|\,\mathrm{d}s + \varepsilon(t_1 - t_0)\,.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall donne maintenant (1.36) directement. L'inégalité (1.36) fournit une estimation explicite pour la différence entre deux solutions u, v de deux équations différentielles que nous pouvons appeler « ε-voisines » ; si $\varepsilon \to 0$ cette différence tend vers 0.

Si $u(t_0) = x_0$, $v(t_0) = y_0$, le raisonnement précédent montre que, pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,

$$\big|u(t) - v(t)\big| \leqslant |x_0 - y_0| + \varepsilon(t_1 - t_0) + k\int_{t_0}^{t} \big|u(s) - v(s)\big|\,\mathrm{d}s$$

d'où l'inégalité de Gronwall donne

$$\big|u(t) - v(t)\big| \leqslant \big\{|x_0 - y_0| + \varepsilon(t_1 - t_0)\big\}\mathrm{e}^{k(t-t_0)}\,, \quad t \in [\,t_0\,,\,t_1\,]\,. \tag{1.37}$$

L'inégalité (1.37) illustre quantitativement un aspect de la dépendance continue des solutions par rapport aux valeurs initiales x_0, y_0 et les équations ε-voisines ;

lorsque $\varepsilon \to 0$ et $x_0 - y_0 \to 0$, on en déduit que $u(t) - v(t)$ tend vers 0 uniformément en $t \in [\, t_0\,,\, t_1\,]$:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ |x_0 - y_0| \to 0}} \sup_{t \in [\, t_0\,,\, t_1\,]} \left| u(t) - v(t) \right| = 0\,.$$

L'importance pratique de la dépendance continue de la solution u par rapport à t_0, x_0, λ est considérable ; elle affirme qu'un petit changement dans la condition initiale (t_0, x_0) et dans λ (ce qui donne une équation voisine) induit un petit changement dans la solution. Puisque les équations et les conditions initiales ne sont en pratique connues qu'approximativement, on réalise l'utilité de la dépendance continue des solutions.

1.6.3 Systèmes autonomes

Ici, il s'agit d'une équation différentielle

$$x' = f(x) \tag{1.38}$$

où la fonction f ne dépend pas de t ; nous supposons que $f : V \to \mathbb{R}^N$ est continue et localement lipschitzienne. Les théorèmes généraux (comme la proposition 1.4.2) sont alors applicables avec $\Omega = \mathbb{R} \times V$. Une propriété simple mais importante de l'équation (1.38) est la suivante : *si $u : I \to \mathbb{R}^N$ est une solution de (1.38), alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t + c)$ est aussi une solution définie dans l'intervalle translaté $I - c = \{t - c : t \in I\}$*. La démonstration de cette affirmation est immédiate.

Soit $x_0 \in V$ tel que $f(x_0) = 0$; on dit que x_0 est un point ***singulier*** (ou *critique* ou *stationnaire*) ou un point d'***équilibre*** de (1.38) ; *pour un tel point x_0, l'unique solution non prolongeable de (1.38) vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) est $u(t) \equiv x_0$, $t \in \mathbb{R}$, et toute autre solution $v : J \to \mathbb{R}^N$ telle que $v(t_1) = x_0$ est constante : $v(t) \equiv x_0$, $t \in J$*. C'est une conséquence immédiate de l'affirmation de l'unicité contenue dans la proposition 1.4.2 car $u(t_1) = v(t_1) = x_0$. Un point non singulier de V s'appelle un point ***régulier***.

Plus généralement, *soient $u : I \to \mathbb{R}^N$ une solution non prolongeable et $v : J \to \mathbb{R}^N$ une solution quelconque de (1.38) avec $u(t_0) = v(t_1)$ pour un $t_0 \in I$ et un $t_1 \in J$. Alors $J - (t_1 - t_0) \subset I$ et*

$$v(t + t_1 - t_0) = u(t)\,, \quad t \in J - (t_1 - t_0)\,.$$

En effet, posons $w(t) = v(t + t_1 - t_0)$, $t \in J - (t_1 - t_0)$; alors $w(t_0) = v(t_1) = u(t_0)$ et de la proposition 1.4.2, on conclut que u est un prolongement de la solution w de (1.38), ce qui établit notre affirmation.

Soit $u : I \to \mathbb{R}^N$ une solution non prolongeable de (1.38) qui est non constante ; si $u(t_0) = u(t_1)$ pour deux points distincts t_0, t_1 de I, alors $I = \mathbb{R}$ et il existe un nombre $\tau > 0$ tel que u est injective dans $[\, 0\,,\, \tau\,[$ et $u(t+\tau) = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

En effet, une conséquence immédiate de l'affirmation déjà démontrée est que

$$u(t + t_1 - t_0) = u(t)\,, \quad t \in I - (t_1 - t_0) \subset I\,;$$

la fonction $(t_1 - t_0)$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ en partant de u est une solution qui est un prolongement de u, donc $I = \mathbb{R}$. Puisque $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction périodique non constante, elle possède une unique période minimale $\tau > 0$ (avec $t_1 - t_0 = n\tau$ pour un $n \in \mathbb{Z}$) ; ceci démontre l'affirmation donnée.

On peut maintenant introduire une terminologie géométrique pour décrire les solutions de (1.38) de manière plus intuitive. On appelle la trajectoire (ou courbe) définie par une solution non prolongeable, non constante, une ***courbe caractéristique*** de (1.38) ; c'est donc l'ensemble

$$C = \big\{u(t) : t \in I\big\} \subset V$$

où $u : I \to V$ est une solution non prolongeable et non constante. Les affirmations analytiques précédentes sont contenues dans la description géométrique suivante : *par chaque point régulier de V passe exactement une courbe caractéristique ; celle-ci est ou bien une courbe simple* (tendant vers l'infini ou vers la frontière de V) *ou bien elle est une courbe de Jordan dans V*. Rappelons qu'une courbe de Jordan dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble défini par une application continue $u : [\,0\,,\,\tau\,] \to \mathbb{R}^N$ telle que $u(0) = u(\tau)$ et u est injective dans $[\,0\,,\,\tau\,[\,$; une courbe caractéristique qui est une courbe de Jordan s'appelle un ***cycle caractéristique*** de (1.38). Ainsi, un point $x_0 \in V$ est soit un point d'équilibre, soit un point sur un cycle caractéristique, soit un point sur une courbe caractéristique qui n'est pas un cycle. Un des objectifs de l'étude de (1.38) est d'examiner le comportement des courbes caractéristiques ; cette étude suppose généralement que les points singuliers soient isolés, c'est-à-dire si $x_0 \in V$ est tel que $f(x_0) = 0$ alors il existe une boule ouverte $B \subset V$ centrée en x_0 telle que $f(x) \neq 0$ si $x \in B \setminus \{x_0\}$. Sous cette hypothèse, l'analyse qualitative des solutions de (1.38) pour $N = 1$ (équation scalaire) est assez simple ; déjà pour $N = 2$ (système de deux équations) l'étude des courbes caractéristiques a donné lieu à la théorie dite de Poincaré–Bendixson. Une version simple d'un théorème important de cette théorie dit : soit $u : [\,0\,,\,\infty\,[\, \to V$ une solution non constante non périodique de (1.38) telle que, si $C_+ = \big\{u(t) : t \geqslant 0\big\}$, $\overline{C}_+$ est contenu dans V, borné et ne contient aucun point singulier ; alors $\overline{C}_+$ contient un cycle caractéristique. Ce théorème permet souvent d'établir l'existence des solutions périodiques de (1.38) ; il dit intuitivement que si une courbe caractéristique non cyclique C reste dans une partie compacte K de V avec $f(x) \neq 0$, $x \in K$, alors K contient un cycle caractéristique γ vers lequel « s'approche » la courbe C ; si $u : I \to V$ avec $I \supset [\,0\,,\,\infty\,[$ définit C, alors $u(t)$ tend vers le cycle γ lorsque $t \to \infty$ (fig. 1.2) ; l'approche vers γ peut se faire soit « intérieurement » soit « extérieurement ».

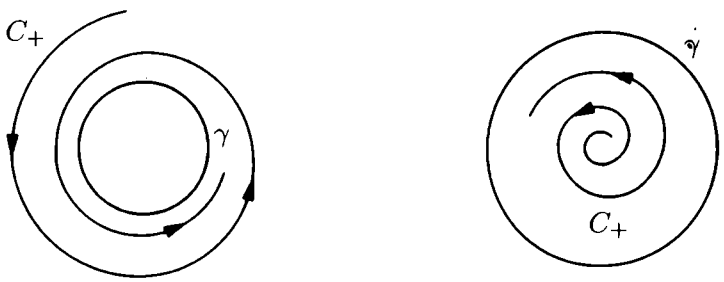


Fig. 1.2

Une interprétation physique de l'équation (1.38) vient du fait que $f(x)$, $x \in V$, peut être vu comme un *champ vectoriel* dans l'espace V des *phases* d'un système mécanique. Si le système est au point $x_0 \in V$ à $t = 0$, l'évolution de système est donnée par la solution $u : I \to V$ de (1.38) satisfaisant à la condition initiale $u(0) = x_0$; la trajectoire définie par u est donc soit une courbe caractéristique, périodique ou non, soit le point x_0 si x_0 est un point singulier, c'est-à-dire si $f(x_0) = 0$; dans ce dernier cas $u \equiv x_0$; c'est la raison pour laquelle x_0 s'appelle aussi point d'équilibre. Supposons, par simplicité, que les solutions u soient définies dans $I = \mathbb{R}$ pour tout $x_0 \in V$; écrivons $u(t\,;x)$ pour tout $u(t)$ lorsque la condition initiale est $u(0) = x$. Alors, $u : \mathbb{R} \times V \to V$ est une fonction continue (dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales) telle que

$$u(0\,;x) = x\,, \quad u\big(t\,;\,u(s\,;x)\big) = u(t+s\,;x) \tag{1.39}$$

pour $x \in V$, t, s dans $\mathbb{R}$. Une application continue $u : \mathbb{R} \times V \to V$ vérifiant (1.39) s'appelle un *système dynamique* dans V. Nous laissons la vérification simple de (1.39) au lecteur. D'autre part, si u dans (1.39) est dérivable en t, on a, pour $x \in V$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(t\,;x)\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0}\frac{u(h\,;x)-u(0\,;x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(h\,;x)-x}{h} = f(x)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,u(t\,;x) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h\,;x)-u(t\,;x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u\big(h\,;\,u(t\,;x)\big)-u(t\,;x)}{h} = f\big(u(t\,;x)\big)\,, \quad t\in\mathbb{R}\,;\end{aligned}$$

ainsi, $t \mapsto u(t\,;x)$ est la solution de (1.38) qui vérifie la condition initiale $u(0\,;x) = x$. On voit donc qu'il y a une correspondance biunivoque entre les systèmes dynamiques (1.39) dérivables en t et les solutions non prolongeables des équations (1.38) lorsque celles-ci sont définies sur tout $\mathbb{R}$.

1.7 REMARQUES

1.7.1 Remarques méthodologiques

Les propositions générales de ce chapitre forment le fondement de toute la théorie des équations différentielles ordinaires. Elles sont donc présentées dans de nombreux ouvrages ; les démonstrations existantes pour les théorèmes de base (prop. 1.2.4 et 1.2.7) sont essentiellement de deux types. Le premier type de démonstration utilise la *méthode des approximations successives* et correspond à la démonstration donnée ici ; nous l'avons appelé la *méthode d'itération de Picard*. Le deuxième type de démonstration utilise les *solutions approchées* et il est souvent appelé la *méthode de Euler-Cauchy* (-Lipschitz) ; cette méthode est essentielle pour comprendre les algorithmes numériques qui existent aujourd'hui pour la solution numérique des équations différentielles. Nous en parlerons brièvement dans la suite (§ 1.7.2).

La méthode de Picard dans sa forme générale est de la structure suivante : soit $T : X \to X$ une application d'un ensemble X dans lui-même ; on cherche à résoudre l'équation

$$Tx = x\ ;$$

un tel x s'appelle *point fixe* de T. Alors on prend un $x_0 \in X$ et on pose successivement

$$x_1 = Tx_0\,, \quad x_2 = Tx_1\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = Tx_{n-1}\,,$$

Si X est un ensemble muni d'une *topologie*, ce qui permet de discuter de la convergence d'une suite dans X et de la continuité des applications de X dans X, alors il arrive que, si T est une application continue appropriée et x_0 est bien choisi, la suite $\{x_n\}$ converge vers un élément $x \in X$; on en déduit que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_{n-1} = Tx\,.$$

Autrement dit, x est un point fixe de T. La démonstration de la proposition 1.2.4 donnée dans ce chapitre, est clairement de cette forme.

Si X est un *espace métrique complet* (une notion que nous expliquerons dans un chapitre ultérieur) muni d'une distance d et T est une *application contractante*, ce qui veut dire

$$d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y)\,, \quad x\,,\ y \in X$$

pour une constante k, $0 < k < 1$, *alors T possède un unique point fixe x* ; on obtient x en partant d'un point initial x_0 quelconque et en formant la suite $\{x_n\}$ comme ci-dessus, ce qui donne $x = \lim_n x_n$. Voir le chapitre 1 du volume 1 pour une démonstration.

La plupart des équations différentielles rencontrées en pratique ne possèdent pas de solutions explicites pour toutes les conditions initiales. La situation est analogue à celle du calcul intégral où l'on sait intégrer explicitement

(c'est-à-dire trouver les primitives) de peu de fonctions ; ce qui est important théoriquement c'est de savoir que ces primitives existent (si les fonctions sont continues) et de pouvoir calculer leurs valeurs numériquement. Dans notre livre, nous laissons de côté l'aspect numérique ; ce dernier est important et il est enseigné dans les cours d'analyse numérique. Dans la suite, nous nous occupons seulement des questions de l'existence et de l'unicité des solutions, parfois aussi de leurs structures générales.

1.7.2 Remarques bibliographiques

Parmi les livres qui font actuellement autorité dans le domaine des équations différentielles ordinaires, nous citons ceux de Coddington et Levinson [2] et de Hartman [9] ; dans ce domaine, toutes les questions traitées dans ce chapitre et ceux qui suivent sont présentées de manière presque définitive dans ces deux livres ; ils sont destinés aux lecteurs avancés. Les livres en français à mentionner spécialement sont ceux de Pontriaguine [18] et de Rouche et Mawhin [17] ; le livre de Pontriaguine est écrit d'une manière très détaillée et élémentaire, et il contient plusieurs exemples d'application techniques ; le livre de Rouche et Mawhin contient une discussion détaillée et rigoureuse de toutes les questions discutées ici. Le livre de Dieudonné [5] contient la méthode de Euler–Cauchy–Lipschitz ; c'est un livre (en français) élémentaire mais exigeant, contenant plusieurs sujets comme les équations différentielles dans le plan complexe que nous n'étudierons pas. Hurewicz [13] et Hirsch et Smale [12] discutent les systèmes autonomes de manière détaillée ; le petit livre de Hurewicz est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre d'exposé clair et élémentaire. Un excellent livre en allemand est celui de Walter [20]. Le livre de Kamke [15] contient beaucoup de solutions explicites des équations différentielles ordinaires très variées (et bien d'autres choses).

1.7.3 Remarques historiques

Dès l'introduction du calcul infinitésimal par Leibniz et Newton au XVII^{e} siècle, les équations différentielles font leur apparition dans tous les domaines de physique et de mathématiques. Pendant tout le XVIII^{e} siècle, on essaie de résoudre *explicitement* les nombreuses équations différentielles rencontrées, soit à l'aide des fonctions connues et leurs primitives, soit à l'aide des séries (convergentes, si possible !). Le premier à établir un théorème d'existence et d'unicité des équations générales est Cauchy ; grâce aux feuilles imprimées des treize *Leçons de seconde année pour l'Ecole royale polytechnique*, professées par Cauchy, datées (probablement) de 1824 et découvertes en 1977 (par C. Gilain, qui a publié en 1981 *Equations différentielles ordinaires*, cours inédit de A. L. Cauchy (Etudes vivantes, Johnson Reprint Corporation), contenant les leçons et une analyse historique de celles-ci) nous savons aujourd'hui que Cauchy avait démontré, au plus tard en 1820-21, un théorème essentiellement équivalent à la propositon 1.2.5 ; l'hypothèse de Cauchy sur $f(t,x)$ est que f est continue et continûment dérivable en x.

La méthode de Cauchy consiste dans l'utilisation du procédé d'approximation numérique suivant : pour calculer $x(t)$, x étant une solution de $x' = f(t,x)$ avec $x(t_0) = x_0$, on pose

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= (t_1 - t_0) f(t_0, x_0) \\ x_2 - x_1 &= (t_2 - t_1) f(t_1, x_1) \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$x_n - x_{n-1} = (t_n - t_{n-1}) f(t_{n-1}, x_{n-1})$$

avec $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ (ou $t_n = t < t_{n-1} < \ldots < t_1 < t_0$). On démontre ensuite que lorsque

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |t_j - t_{j-1}| \longrightarrow 0 \tag{1.41}$$

alors $x_n \to x(t)$ (sous les hypothèses mentionnées sur f et t) ; cette dernière démonstration est faite en détail d'abord pour f réelle et ensuite pour f à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Le procédé (1.40) semble être connu de beaucoup, bien avant Cauchy ; par exemple, Euler le présente explicitement dans son *Institutiones Calculi integralis* (Œuvres (1), 11, p. 425) ; il semble assez probable que le procédé d'approximation numérique (1.40) était connu de bien d'autres avant Euler. Ce qui est nouveau chez Cauchy c'est l'idée de baser une démonstration précise de l'existence de x en faisant un passage à la limite dans (1.40). On observe que, si f est indépendante de x, on obtient avec (1.40)

$$x_n = x_0 + \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(t_j - t_{j-1}),$$

et on s'aperçoit que sous la condition (1.41) et la continuité de f, la suite $\{x_n\}$ converge vers

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ce fait était bien connu de Cauchy car c'est lui qui avait introduit cette définition précise de l'intégrale auparavant (définition publiée en 1823 dans un autre de ses cours *Résumé de leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, un cours de première année). Puisque le procédé (1.40) correspond à la construction géométrique d'un polygone, ayant des sommets (t_j, x_j), qui est une approximation du graphe obtenu de la fonction x, on désigne celui-ci comme étant la méthode des *polygones d'Euler-Cauchy*. En 1876, Lipschitz a généralisé cette démonstration de Cauchy au cas où $f(t,x)$ vérifie la condition dite « de Lipschitz » en x (au lieu d'avoir f continûment dérivable en x comme chez Cauchy).

On observe que (1.40) consiste dans le remplacement de l'équation différentielle au départ par une équation aux différences finies ; c'est cette méthode qui est à la base de nombreuses approximations numériques des solutions des équations différentielles.

Le théorème de Peano date de 1890 ; la méthode des approximations successives apparaît dans toute sa généralité dans les travaux de Picard (1890-93) ; Picard fait, dans le chapitre XI de son *Traité d'Analyse* (tome II, 1893), une présentation détaillée aussi bien de sa méthode des approximations successives que de la méthode de Euler–Cauchy–Lipschitz. Il y ajoute la démonstration de l'existence d'une solution en série entière lorsque f est analytique en x (appelée par Cauchy et ses successeurs « la méthode du calcul des limites »), une méthode utilisée par beaucoup dès Newton ; celle-ci semble être la méthode favorite des mathématiciens des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles, sans que la plupart d'entre eux soient arrivés à des énoncés précis concernant la convergence des séries entières formelles obtenues comme solution. De nouveau, Cauchy apporte le premier (entre 1830 et 1840) la preuve de la convergence des séries entières concernées dans un intervalle approprié ; de nombreux auteurs ont ensuite amélioré et simplifié ces travaux de Cauchy et on trouvera une discussion historique détaillée dans l'article de Painlevé dans *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (édition française, tome II, vol. 3, 1910, édition Jacques Gabay 1992). Nous discuterons les solutions sous forme de séries dans un prochain chapitre.

L'inégalité de Gronwall est de 1918 ; la théorie dite de Poincaré–Bendixson date des années 1881-1901 ; Poincaré y a consacré au moins 200 pages de ses publications durant les années 1881-86 et l'article de Bendixson est de 1901 ; cette théorie et ses généralisations sont toujours d'actualité mais nous n'y reviendrons pas dans la suite.

Pour le divertissement des lecteurs, nous rapportons l'anecdote suivante du livre cité ci-dessus de C. Gilain : « Lors de la réunion du Conseil d'instruction du 24 juillet 1823, par exemple, Arago, visant probablement Cauchy, déclare que cinq leçons sur des considérations générales sur l'intégration « *cela peut être convenable à la Faculté des sciences, mais non à l'Ecole polytechnique, où les élèves sont pressés par le temps* » [...] (après une certaine résistance) Cauchy cède. Sur le procès-verbal de la séance du Conseil d'instruction du 24 novembre 1825, on lit : « *M. Cauchy annonce, que, pour se conformer au vœu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuses.* » *Nihil sub sole novum* !

1.8 EXERCICES

1 Résoudre les équations suivantes avec une attention particulière pour les questions d'existence et d'unicité des solutions ainsi que pour leur intervalle maximal de définition :

(i) $xy' - y = x$, $y(1) = 1$;
(ii) $y' = xy^3$, $y(0) = 1$;
(iii) $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$.

2 Démontrer que les solutions des équations suivantes existent et sont uniques dans les intervalles I indiqués :

(i) $x' = t^3 + t\exp(-x^4)$, $x(0) = 0$; $I = \mathbb{R}$;
(ii) $x' = 1 + x + x^2 \cos t^2$, $x(0) = 0$; $I = [\,-1/3\,,\,1/3\,]$;
(iii) $x' = t^2 + x^2$, $x(0) = 0$; $I = [\,-1/\sqrt{2}\,,\,1/\sqrt{2}\,]$;
(iv) $x' = \mathrm{e}^t + \ln(1 + x^2)$, $x(0) = 0$; $I = \mathbb{R}$.

3 Démontrer que les systèmes d'équations suivants possèdent une unique solution dans les intervalles I indiqués :

(i) $x' = \sin x + \sin y$, $y' = \sin x - \sin y$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$; $I = \mathbb{R}$;
(ii) $x' = tx + t^2 y$, $y' = x\exp(-x^2)$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$; $I = \mathbb{R}$;
(iii) $x' = x - y$, $y' = x^2 - 1$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$; $I = [\,-1/2\,,\,1/2\,]$;
(iv) $x' = 2x - y$, $y' = y^2 - 1$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$; $I = \mathbb{R}$.

Déterminer les solutions sous des conditions initiales suivantes :

(i) $x_0 = y_0 = 0$,
(ii) $x_0 = y_0 = 0$,
(iii) $x(0) = y(0) = 1$,
(iv) $x(0) = y(0) = 1$.

4 Démontrer que l'équation

$$x'' = \sin^2(tx) + tx'\,, \quad x(0) = a_0\,,\ x'(0) = a_1$$

possède une unique solution définie dans $\mathbb{R}$ pour tout choix de a_0, a_1 dans $\mathbb{R}$; déterminer cette solution pour un choix approprié de a_0, a_1.

5 Démontrer que l'unique solution de

$$x' = tx + t^{-1}y\,, \quad y' = t^{-1}x + ty + \sin tx$$

sous la condition initiale $x(1) = y(1) = 0$ est donnée par $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $t > 0$.

6 Démontrer que si u et v sont deux solutions de l'équation $x' = \sin tx$ telles que $u(t_0) = v(t_0)$ pour un $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $u(t) = v(t)$ pour tous les t pour lesquels u et v sont définies.

7 Démontrer que l'unique solution non prolongeable de l'équation

$$x' = \sqrt{x}\,, \quad x(0) = x_0 > 0\,,$$

est définie dans $\mathbb{R}$ et est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -2\sqrt{x_0} \\ \left(\dfrac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2 & \text{si } t > -2\sqrt{x_0}\,. \end{cases}$$

8 Démontrer que toutes les solutions non prolongeables de l'équation

$$x' = \sqrt{x}\,, \quad x(0) = 0\,,$$

sont données par

$$x_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant c \\ \left(\dfrac{t-c}{2}\right)^2 & \text{si } t > c \end{cases}$$

où $0 \leqslant c \leqslant \infty$ avec $x_\infty(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$.

9 Démontrer que l'unique solution non prolongeable de

$$x' = |x| \quad x(0) = x_0$$

est définie dans $\mathbb{R}$ et qu'elle est donnée par :

(i) $x \equiv 0$ si $x_0 = 0$;
(ii) $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^t$ si $x_0 > 0$;
(iii) $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-t}$ si $x_0 < 0$.

10 Démontrer que l'équation

$$x'' = \frac{x^n}{1+x^2}\,, \quad n = 1,\ 2 \text{ ou } 3$$

possède une unique solution définie dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = a_0$, $x'(t_0) = a_1$ où t_0, a_0, a_1 sont trois nombres réels quelconques.

11 (Généralisation de l'inégalité de Gronwall) Soient φ, ψ et γ trois fonctions réelles continues dans $[\,t_0\,,\,t_1\,]$ avec $\varphi \geqslant 0$; si

$$\psi(t) \leqslant \gamma(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1\,,$$

alors démontrer que

$$\psi(t) \leqslant \gamma(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\gamma(s) \exp\left(\int_s^t \varphi(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s\,, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

en complétant le raisonnement qui suit : poser

$$R(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

et vérifier que $R' - \varphi R = g \leqslant \varphi\gamma$; puisque $R(t_0) = 0$, on a

$$R(t) = \int_{t_0}^{t} g(s) \exp\left(\int_s^t \varphi(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s\,,$$

ce qui donne le résultat.

12 Démontrer que l'unique solution de (1.4) vérifiant $x(0) = 2a$ et définie dans $\mathbb{R}$ est $x(t) = a(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t})$, $t \in \mathbb{R}$; toute solution continue de (1.4) définie dans un intervalle contenant 0 est une restriction de la solution précédente pour un choix approprié de $a \in \mathbb{R}$.

13 Considérer les solutions u, v de (1.3) définies dans $\mathbb{R}$ et démontrer les affirmations suivantes :

(i) chaque solution $u \in C^{\infty}(\mathbb{R})$;
(ii) si $u(t) = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, alors $u = v$;
(iii) soit $\varphi \in C^{\infty}([0\,,\,1])$ avec $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n+1)}(1)$, $n \in \mathbb{N}$; posons

$$\varphi_0 = \varphi\,, \quad \varphi_{-1} = \varphi'\,, \quad \varphi_{-2} = \varphi''\,,$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad \varphi_2(t) = \int_0^t \varphi_1(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad \ldots\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,;$$

alors $\varphi_n' = \varphi_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$; si

$$\alpha(t) = \begin{cases} \varphi_n(t-n) & n \leqslant t \leqslant n+1,\ n = 0, -1, -2, \ldots \\ \varphi_1(t-1) + \varphi(1) & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

alors α vérifie (1.3) pour $t \leqslant 2$; α se prolonge uniquement en une solution u définie dans $\mathbb{R}$;
(iv) soit $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, avec $\lambda > 0$, $\lambda \mathrm{e}^{\lambda} = 1$; pour chaque $a \in \mathbb{R}$, $u(t) = a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution de (1.3).

(Noter que l'unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \mathrm{e}^{\lambda} = 1$ vérifie $0 < \lambda < 1$.)

14 Soit l'équation différentielle $x' = x + t$ avec $x(0) = c$; en utilisant la méthode de Picard avec $x_0 \equiv c$, vérifier que, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$x_n(t) = c(1+t) + (c+1)\sum_{k=2}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

ce qui donne

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = (c+1)\,\mathrm{e}^{t} - (1+t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

la solution de l'équation que l'on peut calculer directement en utilisant (1.12).

15 Vérifier que le système d'équations différentielles $x' = y$, $y' = -x$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ possède la solution $x(t) = \cos t$, $y(t) = -\sin t$ en utilisant la méthode du paragraphe 1.3.6. Obtenir la même solution en utilisant la méthode de Picard comme suit :

$$x_0(t) \equiv 1\,, \quad y_0(t) \equiv 0$$

$$\big(x_n(t), y_n(t)\big) = (1,0) + \int_0^t \big(y_{n-1}(s), -x_{n-1}(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

On a, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$x_{2n}(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n!}$$

$$y_{2n}(t) = -\left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$$

$$x_{2n+1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n!}$$

$$y_{2n+1}(t) = -\left(t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

16 Suivant le raisonnement indiqué dans le paragraphe 1.3.5, démontrer ce qui suit : soit φ une fonction continue dans une partie ouverte de Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$; supposons que, dans Ω, $\varphi(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ est localement lipschitzienne en $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Soit $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$; alors l'équation (1.30) possède une unique solution non prolongeable $u : I \to \mathbb{R}$, définie dans un intervalle ouvert I contenant t_0, telle que $u(t_0) = x_0$, $u'(t_0) = x_1, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

17 (Continuation de l'exercice 16) Supposons que $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$; énoncer et démontrer une proposition qui garantit l'existence d'une unique solution $u : I \to \mathbb{R}$ de (1.30) telle que $u(t_0) = x_0$, $u'(t_0) = x_1, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ pour chaque choix de $t_0 \in I$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, dans $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 2

Equations linéaires

2.1 SYSTÈMES LINÉAIRES GÉNÉRAUX DU PREMIER ORDRE

2.1.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre d'abord les systèmes d'équations différentielles ordinaires *linéaires* du premier ordre du type

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{2.1}$$

où

$$x = (x_1, \ldots, x_N)\,, \quad b(t) = \big(b_1(t), \ldots, b_N(t)\big)\,, \quad A(t) = \big[a_{ij}(t)\big]\,,$$

A étant une fonction matricielle de type (N, N), b une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, *définies* et *continues* dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. La proposition 1.3.2 nous dit que, sous les hypothèses indiquées ci-dessus, pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe une unique solution $u : I \to \mathbb{R}^N$ de (2.1) vérifiant $u(t_0) = x_0$; toute la théorie de ce chapitre est une conséquence de cette proposition que nous utiliserons dans la suite sans la mentionner explicitement chaque fois.

Rappelons que l'équation *homogène* associée à (2.1) est

$$x' = A(t)\,x\,. \tag{2.2}$$

2.1.2 Proposition

(Les hypothèses sur A et b sont comme indiquées dans le paragraphe 2.1.1). Soit E l'ensemble de solutions de l'équation homogène (2.2) qui sont définies dans I.

(i) E est un espace vectoriel réel de dimension N.

(ii) Si $u, v \in E$ et $u(t_0) = v(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, alors $u = v$. Les fonctions $u_1, \ldots, u_m$ dans E seront linéairement indépendantes si et seulement si les vecteurs $u_1(t_0), \ldots, u_m(t_0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^N$ pour un $t_0 \in I$.

(iii) Soit v une solution de (2.1) définie dans I ; alors toute solution $x : I \to \mathbb{R}^N$ de (2.1) est de la forme

$$x = u + v$$

où $u \in E$.

DÉMONSTRATION

(i) Il est évident que si u_1, u_2 sont dans E et c_1, c_2 sont réels, alors $c_1u_1+c_2u_2$ est dans E ; donc, E est un espace vectoriel réel. Soit $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ une base quelconque de $\mathbb{R}^N$; si $t_0 \in I$, posons u_j pour l'unique élément de E tel que

$$u_j(t_0) = \xi_j\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

Puisque les ξ_j sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^N$ les u_j le sont aussi dans E. Si $u \in E$, il existe $c_1, \ldots, c_N$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$u(t_0) = \sum_{j=1}^{N} c_j\xi_j = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j(t_0)\ ;$$

soit

$$\widetilde{u}(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j(t)\,, \quad t \in I\,.$$

Puisque $\widetilde{u}(t_0) = u(t_0)$ et $\widetilde{u} \in E$, l'affirmation concernant l'unicité des solutions de (2.2) entraîne que $\widetilde{u} = u$; donc chaque élément u de E est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_N$, ce qui montre que $\{u_1, \ldots, u_N\}$ est une base de E et que la dimension de E est N.

(ii) La démonstration de (ii) est contenue dans ce qui précède.

(iii) Si $x : I \to \mathbb{R}^N$ est une solution quelconque de (2.1), alors $u = x - v$ vérifie (2.2) c'est-à-dire $u \in E$; inversement, si $u \in E$, alors $x = u + v$ vérifie (2.11) car, pour $t \in I$,

$$x'(t) = u'(t) + v'(t) = A(t)u(t) + A(t)v(t) + b(t) = A(t)x(t) + b(t)\,. \qquad \blacklozenge$$

2.1.3 Remarques

Dans la suite nous appelons les fonctions appartenant à E les *solutions* de l'équation homogène (2.2) sans préciser nécessairement qu'elles sont définies dans I ; nous adoptons une convention analogue pour les solutions de (2.1). Ainsi, l'énoncé (iii) de la proposition 2.1.2 peut être formulé comme suit : la solution générale de (2.1) s'écrit comme la somme d'une solution particulière de (2.1) et d'une solution de (2.2).

On appelle ***système fondamental*** de solutions de (2.2), un système $u_1, \ldots, u_N$ de N solutions linéairement indépendantes de (2.2). Si $U(t)$ est la matrice de type (N, N) ayant les colonnes données par $u_1(t), \ldots, u_N(t)$, alors on dit que $U(t)$, $t \in I$, est une ***matrice fondamentale*** de (2.2).

Observons que, pour chaque $t \in I$, $U(t)$ est une matrice inversible et que $U'(t)$ existe.

Une solution $t \mapsto x(t)$ de (2.2) est dite *non triviale* si $x(t) \not\equiv 0$; de la proposition 2.1.2, on voit que x est non triviale si et seulement si $x(t_0) \neq 0$ pour un $t_0 \in I$.

2.1.4 Matrice résolvante

Soit $t \mapsto u(t, s, \xi)$ la solution de (2.2) qui vérifie la condition initiale (s, ξ) ; ainsi,

$$u(s, s, \xi) = \xi\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,\ s \in I\,. \tag{2.3}$$

Nous démontrons que, *pour tout t, s dans I,*

$$\xi \longmapsto u(t, s, \xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

est une application linéaire de sorte que

$$u(t, s, \xi) = R(t, s)\xi \tag{2.4}$$

où $R(t, s)$ est une matrice de type (N, N). En effet, si ξ_1, ξ_2 sont dans $\mathbb{R}^N$ et c_1, c_2 sont dans $\mathbb{R}$, la fonction v définie par

$$v(t) = c_1 u(t, s, \xi_1) + c_2 u(t, s, \xi_2)\,, \quad t \in I\,,$$

est une solution de (2.2) telle que

$$v(s) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

d'où on déduit que

$$v(t) = u(t,\ s,\ c_1\xi_1 + c_2\xi_2)\,,$$

ce qui établit la linéarité annoncée ainsi que (2.4).

La matrice $R(t, s)$, t, $s \in I$, s'appelle la ***matrice résolvante*** de l'équation (2.2) (ou (2.1)).

La matrice résolvante $R(t, s)$ vérifie les identités suivantes :

$$\begin{aligned} &(i) \quad R(s, s) = I_N\,, \quad s \in I\,, \\ &(ii) \quad R(t, s)R(s, r) = R(t, r)\,, \quad r,\ s,\ t \in I\,, \\ &(iii) \quad R(t, s)R(s, t) = I_N\,, \quad s,\ t \in I\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où I_N est la matrice identité de type (N, N).

DÉMONSTRATION

La relation (i) de (2.5) vient de (2.3) et (2.4) ; pour $\xi \in \mathbb{R}^N$, écrivons

$$v(t) = R(t, s)R(s, r)\xi\,, \quad w(t) = R(t, r)\xi\,, \quad t \in I\,;$$

alors v et w sont deux solutions de (2.2) telles que

$$v(s) = R(s, r)\xi = w(s)$$

d'où $v = w$ (prop. 2.1.1(ii)) ; donc

$$R(t,s)R(s,r)\xi = R(t,r)\xi$$

pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^N$, ce qui prouve (ii) de (2.5) ; la relation (iii) de (2.5) est une conséquence de (i) et (ii). ♦

Notons que (iii) de (2.5) entraîne que $R(t,s)$ est une matrice inversible avec

$$R(t,s) = \big\{R(s,t)\big\}^{-1}, \quad s, t \in I\,.$$

2.1.5 Dérivation des fonctions matricielles

Soient F, G deux fonctions matricielles de type (N,N) définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (§ 1.2.1).

Si $F'(t)$ et $G'(t)$ existent pour un $t \in I$, alors $\big(FG\big)'(t)$ existe et

$$\big(FG\big)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)\,. \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION

Si $F = [F_{ij}]$ et $G = [G_{ij}]$, alors $FG = [H_{ij}]$ où

$$H_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} F_{ik}(t)G_{kj}(t)\ ;$$

donc si les $F'_{ik}(t)$, $G'_{kj}(t)$ existent, alors les $H'_{ij}(t)$ existent et

$$H'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} F'_{ik}(t)G_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{N} F_{ik}(t)G'_{kj}(t)$$

ce qui donne (2.6). ♦

Notons que $F'(t)G(t) \neq G(t)F'(t)$ en général (de même $F(t)G'(t) \neq G'(t)F(t)$ en général).

(La formule (2.6) reste valable si F est une fonction matricielle de type (N,M) et G est une fonction matricielle de type (M,P) définies dans I et dérivables au point $t \in I$.)

Si, pour un $t \in I$, $F'(t)$ existe et $F(t)$ est inversible, alors $F^{-1\,\prime}(t)$ existe et

$$F^{-1\,\prime}(t) = -F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t)\,. \tag{2.7}$$

DÉMONSTRATION

Puisque $F'(t)$ existe, F est continue au point t d'où la continuité de $\det F$ au point t ; l'inversibilité de $F(t)$ entraîne que $\det F(t) \neq 0$ et donc la

continuité de $\det F$ au point t donne $\det F(s) \neq 0$ pour s dans un intervalle ouvert J contenant t. Ainsi, $G(s) = F^{-1}(s)$ existe pour $s \in J$ et

$$G(s)F(s) = I_N\,, \quad s \in J$$

où I_N est la matrice identité de type (N, N). En utilisant (2.6), on obtient l'existence de $G'(s) = F^{-1\prime}(s)$ pour tout $s \in J$ et

$$G'(s)F(s) + G(s)F'(s) = 0\,, \quad s \in J\,,$$

d'où, avec $s = t$, on a

$$G'(t)F(t) = -G(t)F'(t)$$

ce qui équivaut à (2.7).

2.1.6 Proposition

(Les hypothèses sur A, b de (2.1), (2.2) sont comme indiquées dans le paragraphe 2.1.1.)

Soient $R(t, s)$ la matrice résolvante et $U(t)$ une matrice fondamentale de (2.2) (§ 2.1.3). Alors

$$R(t, s) = U(t)U^{-1}(s)\,, \quad s,\, t \in I\,. \tag{2.8}$$

L'application matricielle $(s, t) \mapsto R(t, s)$ est continue dans $I \times I$; de plus, $\partial R(t, s)/\partial t$, $\partial R(t, s)/\partial s$ existent et sont continues dans $I \times I$ avec

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, s) = A(t)R(t, s) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} R(t, s) = -R(t, s)A(s)\,. \tag{2.10}$$

De plus

$$U'(t) = A(t)U(t)\,, \quad t \in I\,. \tag{2.11}$$

DÉMONSTRATION

Si $U(t)$ est formée des colonnes $u_1(t), \ldots, u_N(t)$ (où $u_1, \ldots, u_N$ est un système fondamental de solutions de (2.1)), alors, pour $s, t \in I$,

$$u_j(t) = R(t, s)\, u_j(s)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant N\,,$$

car $t \mapsto R(t, s)\, u_j(s)$ est une solution de (2.2) dont la valeur à $t = s$ est $u_j(s)$. On en déduit que

$$U(t) = R(t, s)U(s)$$

d'où résulte (2.8).

Puisque $t \mapsto U(t)$ est dérivable, on a la dérivabilité de $s \mapsto U^{-1}(s)$ et sa continuité ; de (2.8), on obtient alors la continuité de $(s, t) \mapsto R(t, s)$ et

l'existence des dérivées partielles $\partial R(t,s)/\partial t$, $\partial R(t,s)/\partial s$ dont la continuité découle des formules (2.9) et (2.10). La relation (2.11) est une conséquence de la définition même de $U(t)$; de (2.8) et (2.11), on a

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t,s) = U'(t)U^{-1}(s) = A(t)U(t)U^{-1}(s) = A(t)R(t,s)$$

ce qui est (2.9). Finalement (en utilisant (2.7)),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} R(t,s) &= \frac{\partial}{\partial s} R^{-1}(s,t) = -R^{-1}(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} R(s,t) \cdot R^{-1}(s,t) \\ &= -R(t,s) \cdot A(s)R(s,t) \cdot R^{-1}(s,t) = -R(t,s)A(s)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.9). ♦

REMARQUES. On peut interpréter (2.9) et (2.11) comme suit : *l'unique solution matricielle de (2.11) telle que $U(s) = I_N$ est donnée par $t \mapsto R(t,s)$*. En effet, on peut considérer (2.11) comme une équation différentielle linéaire dans l'espace vectoriel réel formé des matrices réelles de type (N,N) (cet espace étant de dimension N^2) ; donc sa solution est uniquement déterminée par la condition initiale $U(s) = I_N$; or $t \mapsto R(t,s)$ est cette solution grâce à (2.9).

Notons que *toute autre matrice fondamentale $V(t)$, $t \in I$, de (2.2) est donnée par*

$$V(t) = U(t)M\,, \quad t \in I\,,$$

où M est une matrice réelle (constante), inversible, de type (N,N).

En effet, chaque colonne de $V(t)$ est une combinaison linéaire des colonnes de $U(t)$ car si $v_1(t), \ldots, v_N(t)$ sont les colonnes de $V(t)$ et $M = [M_{ij}]$, alors on vérifie que

$$v_j(t) = \sum_{k=1}^{N} M_{kj} u_k(t)$$

cette dernière étant équivalente à

$$v_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} u_{ik} M_{kj}$$

où

$$v_j(t) = \begin{bmatrix} v_{1j}(t) \\ \vdots \\ v_{Nj}(t) \end{bmatrix}, \qquad u_k(t) = \begin{bmatrix} v_{1k}(t) \\ \vdots \\ v_{Nk}(t) \end{bmatrix}.$$

Puisque M est inversible, on conclut que $V(t)$ est aussi une matrice fondamentale.

La proposition 2.1.6 montre que la connaissance de la matrice résolvante $R(t,s)$ est équivalente à la connaissance d'une matrice fondamentale $U(t)$;

en effet, étant donnée $U(t)$, $t \in I$, (2.8) nous donne $R(t,s)$; inversement, si $R(t,s)$, $(s,t) \in I \times I$, est connue, alors $U(t) = R(t,s_0)$, $t \in I$, fournit une matrice fondamentale pour chaque choix de $s_0 \in I$.

2.1.7 Solution de l'équation non homogène

Supposons toujours que A, b dans (2.1) sont continues dans I ; soit $R(t,s)$, s, $t \in I$, la matrice résolvante de l'équation homogène associée (2.2). *L'unique solution de (2.1) vérifiant la condition initiale* $x(t_0) = x_0$ *est*

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,. \tag{2.12}$$

DÉMONSTRATION

Compte tenu de la proposition 2.1.2(iii) il suffit d'établir que si

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,,$$

alors $y(t_0) = 0$ et y est une solution de (2.1). Or

$$y'(t) = R(t,t)b(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} R(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s = b(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)R(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= b(t) + A(t)\left(\int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\,\mathrm{d}s\right) = b(t) + A(t)y(t)$$

où l'on a utilisé (2.9) et les formules générales suivantes :

$$M\left(\int_{t_0}^{t} F(s)\,\mathrm{d}s\right) = \int_{t_0}^{t} MF(s)\,\mathrm{d}s$$

si F est une fonction matricielle continue dans I et si M est une matrice de type (N,N) ;

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\mathrm{d}s = G(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} G(t,s)\,\mathrm{d}s$$

si $G(t,s)$, $(t,s) \in I \times I$, est une fonction matricielle continue de type (N,N) telle que $\partial G(t,s)/\partial t$ existe et continue pour $(t,s) \in I \times I$. Cette formule est bien connue des étudiants dès le cours de calcul différentiel et intégral de première année lorsque G est une fonction réelle ; le cas matriciel en est une conséquence immédiate.

REMARQUE. Il est instructif de déduire la formule pour $y(t)$ en utilisant la méthode dite « de la variation des constantes » (ou de Lagrange). Elle consiste à poser

$$y(t) = R(t,t_0)c(t)$$

et à choisir $t \mapsto c(t)$ telle que $c(t_0) = 0$ et telle que y vérifie (2.1) ; puisque, en utilisant (2.9),

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)c'(t) \\ &= A(t)R(t, t_0)c(t) + R(t, t_0)c'(t) = A(t)y(t) + R(t, t_0)c'(t)\,, \end{aligned}$$

on aura

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

si

$$R(t, t_0)c'(t) = b(t)$$

d'où, en utilisant (iii) de (2.5),

$$c'(t) = R(t_0, t)b(t)\ ;$$

ceci donne

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\,\mathrm{d}s$$

et, encore grâce à (2.5),

$$y(t) = R(t, t_0)c(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)R(t_0, s)b(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

2.2 SYSTÈMES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

2.2.1 Préliminaires

Dans cette section, nous considérons le cas particulier de (2.1) où $A(t) = A$, une matrice constante ; l'équation est donc

$$x' = Ax + b(t) \tag{2.13}$$

où $t \mapsto b(t) = \big(b_1(t), \ldots, b_N(t)\big)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ *définie* et *continue* dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est

$$x' = Ax \tag{2.14}$$

avec $A = [a_{ij}]$ une matrice constante de type (N, N).

2.2.2 Proposition

La matrice résolvante de (2.14) est donnée par $R(t,s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}$, $t,\ s \in \mathbb{R}$, *où*

$$\mathrm{e}^{(t-s)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} A^n .$$

La solution de (2.13) sous la condition initiale $x(t_0) = \xi$ *est*

$$x(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\xi + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} b(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,. \tag{2.15}$$

DÉMONSTRATION

La convergence de la série définissant $\mathrm{e}^{(t-s)A}$ sera établie au cours de cette démonstration. Pour un $\xi \in \mathbb{R}^N$, résolvons (2.14) sous la condition initiale $x(s) = \xi$ en utilisant la méthode de Picard (voir les démonstrations des propositions 1.2.4 et 1.2.7) : on pose $x_0(t) \equiv \xi$ et

$$x_n(t) = \xi + \int_s^t A x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

Alors, on a par récurrence

$$x_n(t) = \xi + (t-s)A\xi + \frac{(t-s)^2}{2!} A^2\xi + \cdots + \frac{(t-s)^n}{n!} A^n\xi\,;$$

de la théorie générale, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = R(t,s)\xi\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

car $t \mapsto R(t,s)\xi$ est l'unique solution de (2.14) vérifiant $x(s) = \xi$. Donc, pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$R(t,s)\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} A^n\xi = \mathrm{e}^{(t-s)A}\xi$$

ce qui prouve que $R(t,s) = \mathrm{e}^{(t-s)A}$.

La formule (2.15) se déduit maintenant de (2.12). ♦

REMARQUE. Nous écrivons quelquefois $\exp B$ au lieu de e^B, B étant une matrice carrée d'ordre N (c'est-à-dire de type (N,N)) :

$$\exp B = I_N + B + \frac{1}{2!} B^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$$

où I_N est la matrice unité de type (N,N). Il est clair que si A et B sont deux matrices permutables de type (N,N), alors A et $\exp B$ sont permutables ; en particulier A et $\exp A$ sont permutables. (On dit que A et B sont *permutables* ou que A et B *commutent* si $AB = BA$.)

2.2.3 Propriétés de $\exp(tA)$

Pour t_1, t_2 dans $\mathbb{R}$

$$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} e^{t_2 A}. \tag{2.16}$$

En effet, de (2.5) on a généralement

$$R(t,s)R(s,r) = R(t,r)$$

pour tout r, s, t dans $\mathbb{R}$; puisque ici, $R(t,s) = e^{(t-s)A}$, on obtient (2.16) en prenant r, s, t tels que $t_1 = t - s$, $t_2 = s - r$.

Pour $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A. \tag{2.17}$$

C'est une conséquence du fait que $x(t) = e^{tA}\xi$, $t \in \mathbb{R}$, est la solution de (2.14) telle que $x(0) = \xi$ (prop. 2.2.2) ; ainsi,

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(e^{tA}\xi) = Ax(t) = (A e^{tA})\xi$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, ce qui donne la première égalité de (2.17). Puisque A et e^{tA} sont permutables, on obtient la seconde égalité de (2.17).

Grâce aux remarques après la démonstration de la proposition 2.1.6, on conclut que $t \mapsto e^{tA}$ *est l'unique solution de l'équation matricielle*

$$M'(t) = AM(t), \quad M(0) = I.$$

Si A et B sont deux matrices permutables, de type (N,N), alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA}. \tag{2.18}$$

Evidemment, (2.18) est une généralisation de (2.16) ; pour le démontrer, posons, pour un $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$v(t) = e^{tB}\xi, \quad u(t) = e^{tA}v(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$v(0) = \xi, \quad v'(t) = Bv(t)$$

et $u(0) = v(0) = \xi$ avec

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left(\frac{d}{dt} e^{tA}\right) v(t) + e^{tA} v'(t) = A e^{tA} v(t) + e^{tA} B v(t) \\ &= Au(t) + B e^{tA} v(t) = Au(t) + Bu(t) = (A+B)u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.17) et le fait que B, e^{tA} soient permutables à cause de la permutabilité de A et B. Le calcul précédent montre que (prop. 2.2.2)

$$u(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}\xi$$

d'où

$$\mathrm{e}^{t(A+B)}\xi = u(t) = \mathrm{e}^{tA}v(t) = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB}\xi\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,,$$

ce qui prouve (2.18).

Avec $t = 1$ dans (2.17), on a

$$\mathrm{e}^{(A+B)} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{B}\,\mathrm{e}^{A}$$

si A et B sont permutables ; puisque $\mathrm{e}^{O} = I_N$ (O étant la matrice nulle de type (N, N)), on a

$$\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-A}\,\mathrm{e}^{A} = I_N$$

de sorte que e^{A} est inversible pour toute matrice A avec

$$\left(\mathrm{e}^{A}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}\,.$$

2.2.4 Discussion directe de $\exp(tA)$

Dans le paragraphe précédent, on a obtenu les propriété essentielles de $\exp(tA)$ en utilisant la théorie des équations différentielles. On peut démontrer ces résultats directement aussi ; nous esquissons brièvement le chemin à suivre.

Si $A = [a_{ij}]$, posons $\left(A\right)_{ij} = a_{ij}$ et

$$|A| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

où A est une matrice de type (N, N) considérée comme un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{N^2}$. On vérifie que

$$|AB| \leqslant N|A|\,|B|$$

si A et B sont deux matrices de type (N, N) ; on en déduit que

$$\left|A\right|^n \leqslant \left(N|A|\right)^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

d'où

$$\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{t^n}{n!}\left(A^n\right)_{ij}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{|t|^n}{n!}\,|A^n| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(N|A|t\right)^n}{n!} < \infty$$

en écrivant $\left(A^n\right)_{ij}$ pour l'élément à la position (i, j) de la matrice A^n. Donc la série définissant

$$\exp(tA) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}\,A^n$$

est absolument convergente pour $t \in \mathbb{R}$.

Soient A, B deux matrices permutables de type (N, N) et $\left(A^n\right)_{ij} = a_{ij}(n)$, $\left(B^n\right)_{ij} = b_{ij}(n)$, $n = 1, 2, \ldots$; alors

$$(A+B)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^m B^{n-m}$$

et

$$\left((A+B)^n\right)_{ij} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(m) b_{kj}(n-m)\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB}\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ik} \left(\mathrm{e}^{tB}\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{ik}(n) \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{kj}(n) \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_{ik}(m) b_{kj}(n-m) \right) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=1}^{N} \binom{n}{m} a_{ik}(m) b_{kj}(n-m) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left((A+B)^n\right)_{ij} = \left(\mathrm{e}^{t(A+B)}\right)_{ij}
\end{aligned}$$

ce qui démontre

$$\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t(A+B)}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

pour A et B permutables. Le point analytique essentiel dans cette démonstration est la formule de multiplication de deux séries absolument convergentes (vol. 2, chap. 2) dans la forme suivante :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{t^n}{n!}$$

où

$$\gamma_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \alpha_n \beta_{n-m}\,.$$

Toutes les formules du paragraphe 2.2.3 sont des conséquences immédiates de (2.18) que nous venons d'établir directement. Par exemple,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tA} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}}{h} = \mathrm{e}^{tA} \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{hA} - I_N}{h} = \mathrm{e}^{tA} A$$

car

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{hA} - I_N\right) = \frac{1}{h}\left\{hA + \frac{h^2A^2}{2!} + \cdots\right\} = A + h\left\{\frac{A^2}{2!} + \cdots\right\} \xrightarrow{h\to 0} 0\,.$$

Par ailleurs, le raisonnement montre que *les résultats du paragraphe 2.2.3 restent valables pour $t \in \mathbb{C}$ et pour les matrices complexes.*

2.3 CALCUL DE $\exp(tA)$

2.3.1 Introduction

Il faut dire immédiatement que le calcul explicite de $\exp(tA)$ pour une matrice carrée A d'ordre N grand (même $N = 3$ ou 4) est assez laborieux. Nous donnons néanmoins quelques indications concernant la structure de $\exp(tA)$ et quelques procédés pour la calculer. Il est commode de se placer dans le corps des nombres complexes même si A est une matrice réelle et que les solutions cherchées de $x' = Ax$ sont $t \mapsto \{\exp(tA)\}\xi \in \mathbb{R}^N$.

Si D est une matrice diagonale où

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\,,$$

alors

$$\mathrm{e}^{tD} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{t\lambda_N})$$

car

$$D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_N^n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Soit $A = MDM^{-1}$ où D est une matrice diagonale comme ci-dessus et M est une matrice inversible ; on dit que A est *diagonalisable* ; c'est le cas si A est une matrice réelle symétrique ($A = {}^tA$), ou réelle orthogonale ${}^tAA = I_N = A\,{}^tA$), ou complexe hermitienne ($a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, si $A = [a_{ij}]$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant N$) ou plus généralement si A est normale ($A^*A = AA^*$ ou $\left(A^*\right)_{ij} = \overline{a_{ji}}$). Rappelons que A est diagonalisable si et seulement si A possède N vecteurs propres linéairement indépendants (A étant de type (N, N)), c'est-à-dire s'il existe N vecteurs linéairement indépendants $\xi_1, \ldots, \xi_N$ (dans $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^N$) et N nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ (distincts ou non dans $\mathbb{C}$) tels que $A\xi_j = \lambda_j\xi_j$, $j = 1, \ldots, N$; dans ce cas si M est la matrice ayant les colonnes $\xi_1, \ldots, \xi_N$, alors

$$AM = MD\,, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$$

et les λ_j sont les valeurs propres de A. Si $A = MDM^{-1}$, alors, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$A^n = MD^nM^{-1}$$

et

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} MD^n M^{-1} = M e^{tD} M^{-1} .$$

Néanmoins, même si A est diagonalisable, la détermination de M et D peut être laborieuse.

Si l'on connaît N solutions linéairement indépendantes $u_1, \ldots, u_N$ de l'équation $x' = Ax$, alors on peut former la matrice $U(t)$ ayant les colonnes $u_1(t), \ldots, u_N(t)$; de (2.8), on a alors

$$e^{tA} = R(t,0) = U(t)U^{-1}(0) .$$

Notons que si $A\xi = \lambda\xi$, $\xi \in \mathbb{C}^N$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $u(t) = e^{\lambda t}\xi$, $t \in \mathbb{R}$, donne une solution de $x' = Ax$; en effet,

$$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}\xi , \quad Au(t) = e^{\lambda t} A\xi = e^{\lambda t}\lambda\xi = u'(t) .$$

Ainsi si l'on connaît N vecteurs propres $\xi_1, \ldots, \xi_N$ linéairement indépendants avec $A\xi_j = \lambda_j \xi_j$, $j = 1, \ldots, N$ (c'est exactement le cas lorsque A est diagonalisable), alors $U(t)$ est formée des N colonnes $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}\xi_1$, ..., $u_N(t) = e^{\lambda_N t}\xi_N$.

Notons que si $t \mapsto x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution non triviale de $x' = Ax$ où A est une matrice réelle mais $x(t) \in \mathbb{C}^N$, $t \in \mathbb{R}$, alors $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto v(t)$ sont deux solutions dans $\mathbb{R}^N$ de la même équation, linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ si

$$u(t) = \operatorname{Re} x(t) , \quad v(t) = \operatorname{Im} x(t)$$

et en supposant que u ou v n'est pas une solution triviale. Ici, nous avons utilisé la convention suivante : si $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N$, alors

$$\operatorname{Re}\xi = (\operatorname{Re}\xi_1, \ldots, \operatorname{Re}\xi_N) , \quad \operatorname{Im}\xi = (\operatorname{Im}\xi_1, \ldots, \operatorname{Im}\xi_N)$$

où $\operatorname{Re}(a + ib) = a$, $\operatorname{Im}(a + ib) = b$ si a et b sont réels. Nous laissons la démonstration facile de cette affirmation au lecteur.

Une étude détaillée de e^{tA} demanderait un exposé d'une partie importante de la théorie des applications linéaires $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ (ou $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$). Une présentation assez élémentaire et complète est donnée dans le livre de Hirsch et Smale [12].

Dans le paragraphe suivant, nous présentons une méthode générale commode pour le calcul de e^{tA} pour une matrice A quelconque.

2.3.2 Une méthode générale pour le calcul de $\exp(tA)$

Soit A une matrice (réelle ou complexe) de type (N, N) ; soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les valeurs propres (réelles ou complexes) de A énumérées en respectant leurs multiplicités. Donc le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ de A est donné par

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^N (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_N) .$$

Pour la suite, on aura besoin du théorème de Cayley-Hamilton qui dit que $p(A) = 0$; ce théorème est énoncé et démontré dans la plupart des livres d'algèbre linéaire.

Posons

$$P_0 = I \text{ (matrice identité de type } (N,N)), \quad P_1 = A - \lambda_1 I, \ \ldots$$

$$P_{N-1} = \prod_{j=1}^{N-1} (A - \lambda_j I) ;$$

soient $r_1, \ldots, r_N$ les fonctions (réelles ou complexes) définies (dans $\mathbb{R}$) par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} r_1' &= \lambda_1 r_1, & r_1(0) &= 1 \\ r_2' &= \lambda_2 r_2 + r_1, & r_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$r_N' = \lambda_N r_N + r_{N-1}, \quad r_{N-1}(0) = 0.$$

Alors, on a

$$\exp(tA) = r_1(t)P_0 + r_2(t)P_1 + \cdots + r_N(t)P_{N-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

DÉMONSTRATION

Posons

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N} r_j(t) P_{j-1} = \sum_{j=0}^{N-1} r_{j+1}(t) P_j ;$$

alors $M(0) = I$ et

$$\begin{aligned} M'(t) &= \sum_{j=1}^{N} r_j'(t) P_{j-1} = \sum_{j=2}^{N} \{\lambda_j r_j(t) + r_{j-1}(t)\} P_{j-1} + \lambda_1 r_1(t) P_0 \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \{\lambda_{j+1} r_{j+1}(t) + r_j(t)\} P_j \end{aligned}$$

en posant $r_0(t) = 0$. Un petit calcul donne

$$\begin{aligned} M'(t) - \lambda_N M(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} \{\lambda_{j+1} r_{j+1}(t) + r_j(t)\} P_j - \lambda_N \sum_{j=0}^{N-1} r_{j+1}(t) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_N) r_{j+1}(t) P_j + \sum_{j=0}^{N-1} r_j(t) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{N-2} \{(\lambda_{j+1} - \lambda_N) r_{j+1}(t) P_j + r_{j+1}(t) P_{j+1}\} . \end{aligned}$$

En posant $P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1} I)P_j$, $0 \leqslant j \leqslant N-2$, on obtient

$$\begin{aligned} M'(t) - \lambda_N M(t) &= \sum_{j=0}^{N-2} \{(\lambda_{j+1} - \lambda_N)I + A - \lambda_{j+1} I\} r_{j+1}(t) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{N-2} (A - \lambda_N I) r_{j+1}(t) P_j \\ &= (A - \lambda_N I)\big(M(t) - r_N(t) P_{N-1}\big) = (A - \lambda_N I) M(t) \end{aligned}$$

car $(A - \lambda_N I)P_{N-1} = p(A) = 0$. Ainsi,

$$M'(t) = AM(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

ce qui donne

$$M(t) = \mathrm{e}^{tA}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

grâce à (2.17) et à la remarque qui le suit. ♦

2.3.3 Remarque

La formule (2.19) pour le calcul de $\exp(tA)$ ne semble pas être bien connue ; elle apparaît dans l'article de E. J. Putzer (« Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients », *American Mathematical Monthly*, vol. 73 (1966), pp. 2-7). L'intérêt de cette formule réside dans le fait que la simple connaissance des valeurs propres de A et de leurs multiplicités algébriques détermine $\exp(tA)$ complètement et explicitement ; ainsi, le problème du calcul de $\exp(tA)$ devient celui de la solution de l'équation polynomiale $p(\lambda) = 0$ où p est le polynôme caractéristique de A. La plupart des autres méthodes de calcul exige une connaissance plus détaillée des natures exactes des valeurs propres λ_j de A (par exemple, la connaissance des espaces propres et espaces propres généralisés associés à λ_j, des notions que nous n'expliquerons pas ici car nous n'en aurons pas besoin dans la suite).

Il est utile de se rappeler que

$$r_1' = \lambda_1 r_1\,, \quad r_1(0) = 1$$

donne

$$r_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

et

$$r_2' = \lambda_2 r_2 + r_1\,, \quad r_2(0) = 0$$

donne

$$r_2(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_2 (t-s)} r_1(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Ainsi, la détermination des r_j dans (2.19) est assez immédiate. Il reste ensuite le calcul des matrices $P_1, \ldots, P_{N-1}$ exigeant $(N-2)$ multiplications matricielles pour pouvoir utiliser (2.19) numériquement.

Le livre de Hirsch et Smale [12] donne une présentation détaillée des autres méthodes de calcul de $\exp(tA)$; c'est un sujet traité dans la plupart des livres d'algèbre linéaire.

2.3.4 Cas où A est de type $(2,2)$

Nous calculons $\exp(tA)$ lorsque A est une matrice *réelle* de type $(2,2)$ en utilisant le procédé et les notations du paragraphe 2.3.2. Dans ce cas, le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ de A est nécessairement un des trois types de polynônes suivants :

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ réels}, \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{2.20}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2, \quad \lambda_0 \text{ réel} \tag{2.21}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta, \\ \alpha, \beta \text{ réels}, \ \beta \neq 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Dans le cas (2.20), on obtient

$$r_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad r_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

et

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} I + \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I). \tag{2.23}$$

Dans le cas (2.20), A est diagonalisable : il existe une matrice inversible réelle S telle que

$$S^{-1} A S = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que si $A = D$ dans (2.23), alors on a

$$\mathrm{e}^{tD} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

et la formule (2.23) équivaut à

$$\mathrm{e}^{tA} = S \, \mathrm{e}^{tD} S^{-1}.$$

Noter que l'on peut utiliser (2.23) sans connaître S.

Dans le cas (2.21), on a deux possibilités : ou bien A est diagonalisable et il existe une matrice inversible réelle S telle que

$$S^{-1}AS = D_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

ou bien A est *semblable* à la matrice

$$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire

$$S^{-1}AS = D_1$$

pour une matrice inversible réelle S appropriée. Néanmoins dans les deux cas, les calculs pour la formule (2.19) sont similaires et on obtient

$$r_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}, \quad r_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

avec

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t} I + t\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t}(A - \lambda_0 I). \tag{2.24}$$

Si $A = D_0$ dans (2.24), on obtient

$$\mathrm{e}^{tD_0} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}$$

et si $A = D_1$ dans (2.24) on a

$$\mathrm{e}^{tD_1} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_0 t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$\mathrm{e}^{tA} = S\,\mathrm{e}^{tD_0}S^{-1} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{tA} = S\,\mathrm{e}^{tD_1}S^{-1}.$$

De nouveau, on observe que la formule (2.24) ne nécessite pas la connaissance ni de S ni du cas dans lequel on se trouve ($A = D_0$ ou $A = D_1$).

Finalement dans le cas (2.22), on peut démontrer que A est semblable à la matrice

$$R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible réelle S telle que

$$S^{-1}AS = R.$$

Indépendamment de cette dernière observation, on obtient dans le cas (2.22)

$$r_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$$

$$r_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{\beta} \sin\beta t$$

et

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\alpha t}\left\{e^{i\beta t}I + \frac{\sin\beta t}{\beta}\left(A - (\alpha + i\beta)I\right)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\left\{\frac{\sin\beta t}{\beta}A + \left(\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)I\right\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Si $A = R$ dans (2.25), on obtient

$$e^{tR} = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}$$

avec

$$e^{tA} = S\,e^{tR}S^{-1}.$$

La formule (2.25) permet de calculer e^{tA} sans déterminer S ; noter aussi que le résultat final de (2.25) est une matrice réelle, même si les calculs ont été fait dans $\mathbb{C}$.

2.4 ÉQUATIONS LINÉAIRES D'ORDRE SUPÉRIEUR

2.4.1 Introduction

Dans cette section nous considérons les équations du type $Lx = f$ où

$$Lx = a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x\,. \tag{2.26}$$

Ici $a_0, \ldots, a_n$, f sont des fonctions réelles *continues* définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; *nous supposons, de plus, que* $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$.

Une grande partie de la théorie générale concernant les solutions de $Lx = f$ peut être déduite directement de la théorie des systèmes linéaires du premier ordre (sect. 2.1, 2.2) ; il suffit d'écrire $Lx = f$ sous la forme $y' = \widetilde{A}(t)y + \widetilde{b}(t)$ comme dans le paragraphe 1.3.3 avec

$$y = (y_1, \ldots, y_n) = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

$$\widetilde{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\widetilde{b}(t) = \left(0, 0, \ldots, 0, \frac{f(t)}{a_n(t)}\right).$$

Néanmoins, nous préférons démontrer la proposition suivante directement à l'aide de la proposition 1.3.4.

2.4.2 Proposition

(Les notations et les hypothèses sont comme indiquées dans le paragraphe 2.4.1.) Soit E l'ensemble de solutions de l'équation $Lx = 0$ définies dans I.

(i) E est un espace vectoriel réel de dimension n.

(ii) Si $u, v \in E$ et

$$u^{(j)}(t_0) = v^{(j)}(t_0), \quad j = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

pour un $t_0 \in I$, alors $u = v$. Les fonctions $u_1, \ldots, u_m$ dans E sont linéairement indépendantes si et seulement si les vecteurs

$$\left(u_j(t_0), u_j'(t_0), \ldots, u_j^{(n-1)}(t_0)\right) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

sont linéairement indépendants pour un choix de $t_0 \in I$.

(iii) Si v est une solution de $Lx = f$ définie dans I, alors toute solution $x : I \to \mathbb{R}$ de $Lx = f$ est de la forme $x = u + v$ avec $u \in E$.

DÉMONSTRATION

L'observation principale est que si $u \in E$ et $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 0$, ..., $u^{(n-1)}(t_0) = 0$, alors $u(t) = 0$ pour $t \in I$; ceci résulte de la proposition 1.3.4 car celle-ci entraîne que l'unique solution de $Lx = 0$ (définie dans I) vérifiant $x^{(j)}(t_0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, est $x \equiv 0$.

Si $u_1, \ldots, u_m$ dans E sont linéairement dépendantes, alors les vecteurs

$$\xi_j = \left(u_j(t_0), \ldots, u_j^{(n-1)}(t_0)\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

sont également dépendants car si $\sum_{j=1}^m c_j u_j(t) \equiv 0$ pour un choix des $c_j \in \mathbb{R}$ alors $\sum_{j=1}^m c_j \xi_j = 0$. Inversement, si $\sum_{j=1}^m c_j \xi_j = 0$ pour un choix des $c_j \in \mathbb{R}$ alors $u = \sum_{j=1}^m c_j u_j$ est dans E avec

$$u^{(k)}(t_0) = \sum_{j=1}^m c_j u_j^{(k)}(t_0) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

car

$$\sum_{j=1}^m c_j \xi_j = \left(\sum_{j=1}^m c_j u_j(t_0), \sum_{j=1}^m c_j u_j'(t_0), \ldots, \sum_{j=1}^m c_j u_j^{(n-1)}(t_0) \right)$$
$$= (0, 0, \ldots, 0) ;$$

on conclut que $u \equiv 0$ si $\sum_{j=1}^m c_j \xi_j = 0$. Ainsi, $u_1, \ldots u_m$ sont linéairement dépendantes si $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sont linéairement dépendants. Ceci établit (ii).

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$, n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$; soit $u_j \in E$ (c'est-à-dire $Lu_j = 0$, $u_j : I \to \mathbb{R}$) telle que

$$\xi_j = \big(u_j(t_0), \ldots, u_j^{(n-1)}(t_0)\big)$$

avec $j = 1, \ldots, n$; l'existence des u_j est garantie par la proposition 1.3.4. De ce qui précède, $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendantes ; de plus si $u \in E$, alors u est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$. Pour établir ce dernier point, on choisit $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j = \big(u(t_0), \ldots, u^{(n-1)}(t_0)\big)$$

ce qui est possible car $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$; alors $v = \sum_{j=1}^n c_j u_j$ est dans E avec

$$v^{(k)}(t_0) = u^{(k)}(t_0)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

d'où $v = u = \sum_{j=1}^n c_j u_j$. Ceci établit (i).

La preuve de (iii) découle de la relation

$$Lx = Lu + Lv = 0 + f = f\,. \qquad \blacklozenge$$

2.4.3 Corollaire

Soient $u_1, \ldots, u_n$, n fonctions de E ; posons

$$W(u_1, \ldots, u_n)(t) = \det\big[u_j^{(i)}(t)\big]\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,,\ j = 1, \ldots, n\,.$$

Si $W(u_1, \ldots, u_n)(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in I$, alors

$$W(u_1, \ldots, u_n)(t) = 0\,, \quad t \in I\,,$$

et $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement dépendantes. Si $W(u_1, \ldots, u_n)(t_0) \neq 0$ pour un $t_0 \in I$, alors

$$W(u_1, \ldots, u_n)(t) \neq 0\,, \quad t \in I$$

et $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendantes.

DÉMONSTRATION

Posons

$$\xi_j(t) = \big(u_j(t), \ldots, u_j^{(n-1)}(t)\big)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,,\ t \in I\,,$$

et écrivons $W(t)$ pour $W(u_1, \ldots, u_n)(t)$. Par l'algèbre linéaire on sait que $W(t_0) = 0$ si et seulement si $\xi_1(t_0), \ldots, \xi_n(t_0)$ sont linéairement dépendants ; de la propositon 2.4.2 on conclut que $W(t_0) = 0$ si et seulement si $u_1, \ldots, u_n$

sont linéairement dépendantes, ce qui équivaut à l'existence de $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^n c_j u_j(t) = 0$, $t \in I$, ce qui entraîne que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j^{(k)}(t) = 0\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1\,,\ t \in I\,,$$

c'est-à-dire $\sum_{j=1}^n c_j \xi_j(t) = 0$, $t \in I$; on en tire $W(t) = 0$, $t \in I$. Si $W(t_0) \neq 0$, alors les vecteurs $\xi_1(t_0), \ldots, \xi_n(t_0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$; de la proposition 2.4.2, on conclut que $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendantes de sorte que $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $t \in I$; on en tire que $W(t) \neq 0$, $t \in I$. ♦

2.4.4 Remarques

Les solutions de $Lx = 0$ *définies dans* I s'appellent les *solutions* de l'*équation homogène* associée à $Lx = f$; une telle solution $t \mapsto x(t)$ est dite *non triviale* si $x(t) \not\equiv 0$; de la proposition 2.4.2, on constate qu'une solution x de l'équation homogène $Lx = 0$ est non triviale si et seulement si

$$\big(x(t_0),\, x'(t_0),\, \ldots,\, x^{(n-1)}(t_0)\big) \neq (0,\, 0,\, \ldots,\, 0)$$

pour une valeur de $t_0 \in I$.

La partie (iii) de la proposition 2.4.2 est souvent formulée comme suit : la solution générale de $Lx = f$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière v et d'une solution u de l'équation homogène associée.

Pour résoudre $Lx = f$ sous la condition initiale

$$x(t_0) = x_0\,,\ x'(t_0) = x_1\,,\ \ldots\,,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}\,, \tag{2.28}$$

on peut procéder comme suit : on détermine les solutions $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation homogène associée telles que

$$\big(u_j(t_0),\, u_j'(t_0),\, \ldots,\, u_j^{(n-1)}(t_0)\big) = e_j \in \mathbb{R}^n\,, \quad 1, \ldots, n\,,$$

où $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, etc. ; on détermine ensuite une solution particulière v $(Lv = f)$ telle que

$$v(t_0) = v'(t_0) = \cdots = v^{(n-1)}(t_0) = 0\,;$$

alors

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j(t) + v(t)\,, \quad t \in I\,, \tag{2.29}$$

donne la solution de $Lx = f$ vérifiant (2.28).

Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n solutions quelconques linéairement indépendantes de l'équation homogène $Lx = 0$, alors on sait que

$$\xi_j = \big(u_j(t_0),\, u_j'(t_0),\, \ldots,\, u_j^{(n-1)}(t_0)\big)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,,$$

forment une base pour $\mathbb{R}^n$; donc, étant donné $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, on peut déterminer $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \xi$$

ce qui revient à la résolution du système de n équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{n} c_k u_j^{(k)}(t_0) = x_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Puisque $U = \left[u_j^{(i)}(t_0)\right]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une matrice inversible, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ est déterminé par

$$c = U^{-1}\xi\,.$$

Si v est la solution particulière indiquée ci-dessus, alors

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(t) + v(t)\,, \quad t \in I\,,$$

donne la solution de $Lx = f$ vérifiant (2.28). Lorsque $U = I_n$, on a $c_j = x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, et on retrouve (2.29).

Un système de n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ donné par n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $Lx = 0$ se dit ***système fondamental*** de solutions (pour $Lx = 0$).

2.4.5 Wronskiens

Soient n fonctions réelles $u_1, \ldots, u_n$ définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n-fois dérivables. On peut alors former le déterminant

$$W(u_1, \ldots, u_n)(t) = \det\left[u_j^{(i)}(t)\right]\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1\,,\ j = 1, \ldots, n\,;$$

il s'appelle le ***wronskien*** de $u_1, \ldots, u_n$ (du nom du mathématicien polonais Hoëné Wronski, 1778-1853). On peut formuler le corollaire 2.4.3 comme suit : *si $u_1, \ldots, u_n$ sont n solutions de l'équation homogène $Lx = 0$, alors le wronskien W de $u_1, \ldots, u_n$ est ou bien identiquement nul ou bien il ne s'annule jamais ; $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendantes si et seulement si W est toujours non nul.*

Pour n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ quelconques (définies et n-fois dérivables dans I), il est évident à partir des propriétés élémentaires des déterminants que si $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement dépendantes, alors le wronskien W de $u_1, \ldots, u_n$ est identiquement nul ; mais en général, W peut s'annuler pour certaines valeurs de t sans que $W \equiv 0$; ou encore, on peut avoir $u_1, \ldots, u_n$ linéairement indépendantes tout en ayant $W \equiv 0$ (cf. Ex. 43, 44, sect. 2.8).

Supposons que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soient n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $Lx = 0$ où Lx est donné par (2.26) ; soit W le wronskien de $u_1, \ldots, u_n$. Alors

$$W(t) = W(t_0) \exp\left\{ - \int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} \, \mathrm{d}s \right\}, \quad t \in I, \tag{2.30}$$

où t_0 est un point quelconque de I.

DÉMONSTRATION

Nous utilisons la formule élémentaire suivante pour la dérivation d'un déterminant dépendant d'un paramètre $t \in I$: si

$$D(t) = \det\big[\alpha_{ij}(t)\big] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & & \alpha_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

alors

$$D'(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & & \alpha_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{i1}(t) & & \alpha'_{in}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Cette formule s'obtient immédiatement de la définition de $D(t)$:

$$D(t) = \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \alpha_{1\sigma(1)}(t) \cdots \alpha_{1\sigma(n)}(t)$$

où σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} = 1$ si σ est paire et $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} = -1$ si σ est impaire ; alors

$$\begin{aligned} D'(t) = \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \big\{ & \alpha'_{1\sigma(1)}(t) \alpha_{2\sigma(2)}(t) \cdots \alpha_{n\sigma(n)}(t) + \cdots \\ & + \alpha_{1\sigma(1)}(t) \alpha_{2\sigma(2)}(t) \cdots \alpha'_{n\sigma(n)}(t) \big\} \end{aligned}$$

ce qui donne la formule (2.31) pour $D'(t)$, en supposant, bien entendu, que les α_{ij} sont dérivables.

Un petit calcul montre que

$$W'(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & & u_n(t) \\ u'_1(t) & & u'_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(t) & & u_n^{(n-2)}(t) \\ u_1^{(n)}(t) & & u_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}; \tag{2.32}$$

puisque $Lu_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, on a, pour $t \in I$ et $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$u_j^{(n)}(t) = -\frac{1}{a_n(t)} \left\{ a_{n-1}(t) u_j^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t) u_j(t) \right\} ;$$

en substituant cette expression pour $u_j^{(n)}(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, dans (2.32), on obtient après une petite simplification algébrique que

$$W'(t) = -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} W(t) , \quad t \in I .$$

En résolvant cette équation, on obtient (2.30) directement. ♦

REMARQUE. L'intérêt pratique de (2.30) est que l'on peut calculer $W(t)$ explicitement (à une constante multiplicative près) sans connaître aucune des solutions $u_1, \ldots, u_n$; il suffit d'avoir une primitive de a_{n-1}/a_n dans I pour pouvoir utiliser (2.30). Noter que si $v_1, \ldots, v_n$ est un autre système fondamental de solutions de $Lx = 0$, alors il résulte de (2.30) que

$$W(v_1, \ldots, v_n)(t) = cW(t) , \quad t \in I ,$$

où c est une constante réelle non nulle ; mais cette relation peut être démontrée directement sans l'aide de (2.30).

2.4.6 Equations à coefficients constants

Lorsque les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans (2.26) sont des constantes, on peut déterminer un système fondamental de solutions pour $Lx = 0$ explicitement. Pour cette détermination, on introduit le polynôme

$$P_L(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

où $a_n \neq 0$; on l'appelle ***polynôme caractéristique*** de l'équation $Lx = 0$. Les racines de l'équation polynomiale

$$P_L(\lambda) = 0$$

déterminent les solutions de $Lx = 0$ comme suit.

(i) Soit λ une racine réelle de multiplicité m ; alors les m fonctions de $t \in \mathbb{R}$ données par

$$e^{\lambda t} , \ t e^{\lambda t} , \ \ldots , \ t^{m-1} e^{\lambda t}$$

sont des solutions de $Lx = 0$.

(ii) Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ une racine complexe ($\beta \neq 0$) de multiplicité m ; alors les $2m$ fonctions (réelles) de $t \in \mathbb{R}$ définies par

$$e^{\alpha t} \cos \beta t , \ t e^{\alpha t} \cos \beta t , \ \ldots , \ t^{m-1} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t , \ t e^{\alpha t} \sin \beta t , \ \ldots , \ t^{m-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

sont des solutions de $Lx = 0$.

Puisque les coefficients du polynôme caractéristique sont des nombres réels, les racines complexes du polynôme apparaissent avec leurs conjuguées complexes ; plus précisément si $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, est une racine de multiplicité m, alors $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ est également une racine de multiplicité m. Ainsi, les racines de P_L peuvent être rangées comme suit :

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \overline{\lambda}_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda}_{r+s}$$

où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines réelles, $\lambda_{r+1}, \overline{\lambda}_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda}_{r+s}$ les racines complexes ; si m_j est la multiplicité de λ_j, alors

$$(m_1 + \cdots + m_r) + 2(m_{r+1} + \cdots + m_{r+s}) = n$$

où r et s sont des entiers $\geqslant 0$.

(iii) En associant les solutions à chaque racine réelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ comme dans (i) et en faisant de même avec chaque racine complexe $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_{r+s}$ comme dans (ii), on obtient un système fondamental de solutions pour $Lx = 0$.

DÉMONSTRATION

Rappelons que $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité m de P_L si et seulement si

$$P_L^{(k)}(\lambda_0) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} P_L(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = 0\,, \quad k = 0, \ldots, m-1\,.$$

En appliquant l'opérateur L sur $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ et $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda t}$, on obtient

$$L(\mathrm{e}^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \mathrm{e}^{\lambda t} = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j \mathrm{e}^{\lambda t} = P_L(\lambda)\, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{2.33}$$

et

$$\begin{aligned} L(t^k \mathrm{e}^{\lambda t}) &= L\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} L(\mathrm{e}^{\lambda t}) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} \left\{P_L(\lambda)\, \mathrm{e}^{\lambda t}\right\} \\ &= \left\{P_L^{(k)}(\lambda) + k P_L^{(k-1)}(\lambda) t + \binom{k}{2} P_L^{(k-2)}(\lambda) t^2 + \cdots + P_L(\lambda) t^k\right\} \mathrm{e}^{\lambda t} \end{aligned} \tag{2.34}$$

où l'on a utilisé la formule de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} \left\{u(\lambda) v(\lambda)\right\} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\lambda^j} u(\lambda) \frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}\lambda^{k-j}} v(\lambda)\,.$$

De (2.33) et (2.34), on constate que, pour $k = 0, \ldots, m-1$, $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ est une solution (complexe) de $Lx = 0$ si λ_0 est une racine (complexe) de multiplicité m de $P_L(\lambda)$; si $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, alors

$$\mathrm{Re}(t^k \mathrm{e}^{\lambda_0 t}) = t^k \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t\,, \quad \mathrm{Im}(t^k \mathrm{e}^{\lambda_0 t}) = t^k \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t\ ;$$

puisque chaque solution complexe $t \mapsto x(t)$ de $Lx = 0$ donne deux solutions réelles définies par $\operatorname{Re} x(t)$, $\operatorname{Im} x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, on a démontré (i) et (ii).

Pour la démonstration de (iii), nous établissons d'abord un lemme algébrique : *soient* $\mu_1, \ldots, \mu_N$, N *nombres complexes distincts et* $p_1(t), \ldots, p_N(t)$, N *fonctions polynomiales ; si*

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(t)\, \mathrm{e}^{\mu_j t} = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

alors les polynômes p_j *sont nuls.*

En effet, pour $N = 1$, le lemme est évident ; supposons le lemme établi pour une valeur de N et démontrons-le pour $N + 1$. Soit donc

$$\sum_{j=1}^{N+1} p_j(t)\, \mathrm{e}^{\mu_j t} = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

avec $\mu_1, \ldots, \mu_{N+1}$ distincts (dans $\mathbb{C}$) et $p_1, \ldots, p_{N+1}$ polynômes ; en simplifiant par $\mathrm{e}^{\mu_{N+1} t}$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(t)\, \mathrm{e}^{(\mu_j - \mu_{N+1})t} + p_{N+1}(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

En dérivant le terme à gauche m-fois où $m - 1$ est le degré du polynôme p_{N+1}, on aura

$$\sum_{j=1}^{N} q_j(t)\, \mathrm{e}^{\nu_j t} = 0\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

où $\nu_j = \mu_j - \mu_{N+1} \neq 0$ et

$$q_j(t)\, \mathrm{e}^{\nu_j t} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left\{ p_j(t)\, \mathrm{e}^{\nu_j t} \right\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

Notons que, si $\nu \neq 0$ et p est un polynôme,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ p(t)\, \mathrm{e}^{\nu t} \right\} = \left\{ p'(t) + \nu p(t) \right\} \mathrm{e}^{\nu t} = q(t)\, \mathrm{e}^{\nu t}$$

avec q un polynôme du même degré que p ; de plus, $q = 0$ si et seulement si $p = 0$. On en déduit que, si $\nu \neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \left\{ p(t)\, \mathrm{e}^{\nu t} \right\} = Q(t)\, \mathrm{e}^{\nu t}$$

où Q et p sont des polynômes du même degré avec $Q = 0$ si et seulement si $p = 0$.

On conclut que les q_j dans (2.35) sont des polynômes ; par l'hypothèse d'induction les q_j sont nuls d'où la nullité des p_j. Le lemme est démontré.

Supposons que $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = r+1, \ldots, r+s$; soient a_{jk}, b_{jk} et c_{jk} des nombres réels tels que

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} a_{jk} t^k e^{\lambda_j t} + \sum_{j=r+1}^{r+s} \sum_{k=0}^{m_j-1} \{b_{jk} \cos \beta_j t + c_{jk} \sin \beta_j t\} t^k e^{\alpha_j t} = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En regroupant les termes, on peut écrire la dernière équation comme suit :

$$\sum_{j=1}^{r} p_j(t) \, \mathrm{e}^{\lambda_j t} + \sum_{j=r+1}^{r+s} \{p_j(t) \, \mathrm{e}^{\lambda_j t} + \overline{p}_j(t) \, \mathrm{e}^{\overline{\lambda}_j t}\} = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

où

$$p_j(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m_j-1} a_{jk} t^k, & 1 \leqslant j \leqslant r \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{1}{2} (b_{jk} - i c_{jk}) t^k, & r+1 \leqslant j \leqslant r+s. \end{cases}$$

Grâce au lemme algébrique précédent, on conclut que les p_j sont nuls, ce qui entraîne que les a_{jk}, b_{jk} et c_{jk} sont nuls. Ceci démontre (iii). ♦

REMARQUE. Une version complexe des énoncés (i), (ii) et (iii) ci-dessus peut être présentée comme suit : supposons que $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ soient des nombres complexes et que les racines du polynôme caractéristique $P_L(\lambda)$ (L étant donné par (2.26)) soient les nombres (réels ou complexes) distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$ ($m_1 + \cdots + m_p = n$). Alors *un système fondamental de solutions pour $Lx = 0$ est formé par les fonctions complexes (définies pour $t \in \mathbb{R}$) données par les expressions suivantes :*

$$\mathrm{e}^{\lambda_j t}, \, t \, \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \ldots, t^{m_j - 1} \, \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

La démonstration de cette affirmation est contenue dans ce qui précède.

2.5 ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

2.5.1 Introduction

Les équations $Lx = f$ où l'opérateur L de (2.26) est du second ordre (c'est-à-dire $n = 2$) sont d'une grande importance dans les applications. En même temps, leur théorie est très riche du point de vue mathématique. Dans cette section, nous étudierons ces équations linéaires du second ordre d'une manière préliminaire.

Nous résumons d'abord les propositions acquises dans la section précédente en les spécialisant au cas $n = 2$. Pour le faire, nous écrivons l'opérateur L sous la forme suivante :

$$Lx = x'' + a(t)x' + b(t)x\,. \tag{2.36}$$

Nous supposons que a, b et f sont des *fonctions continues réelles définies dans un intervalle I de* $\mathbb{R}$. Les solutions de $Lx = f$ seront toujours définies dans I.

(i) Soient u_1, u_2 deux solutions de l'équation homogène $Lx = 0$; alors le wronskien $W = W(u_1, u_2)$ est donné par

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right\}\,, \quad t \in I\,,$$

où $t_0 \in I$; $\{u_1, u_2\}$ est un système fondamental si et seulement si $W(t) \neq 0$, $t \in I$. Si

$$u_1(t_0) = u_2(t_0)\,, \quad u_1'(t_0) = u_2'(t_0)\,,$$

alors $u_1(t) = u_2(t)$, $t \in I$.

C'est une conséquence de (2.30) restreinte au cas $n = 2$.

(ii) Supposons que a, b soient des constantes réelles ; si le polynôme caractéristique $P_L(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, alors

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,, \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,, \qquad t \in I\,,$$

donnent un système fondamental pour $Lx = 0$; si $P_L(\lambda)$ possède une racine réelle double λ_0, alors

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \quad u_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,, \qquad t \in I\,,$$

forment un système fondamental pour $Lx = 0$; si $P_L(\lambda)$ possède une racine complexe $\alpha + i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$), alors

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,, \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,, \qquad t \in I\,,$$

forment un système fondamental pour $Lx = 0$.

C'est un cas particulier des résultats du paragraphe 2.4.6.

2.5.2 Solution de l'équation inhomogène

La solution $\widetilde{x}$ de l'équation $Lx = f$, L étant donné par (2.36), vérifiant la condition initiale $\widetilde{x}(t_0) = 0$, $\widetilde{x}'(t_0) = 0$, est donnée par

$$\widetilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,, \tag{2.37}$$

où

$$K(t,s) = \frac{1}{W(s)}\left\{u_1(s)u_2(t) - u_1(t)u_2(s)\right\}, \quad s,\ t \in I,$$

$$W(s) = W(u_1,u_2)(s) \quad \textit{(wronskien de } u_1,\ u_2\textit{)}$$

et $\{u_1,u_2\}$ *est un système fondamental de l'équation homogène* $Lu = 0$.

DÉMONSTRATION

Nous passons au système linéaire du premier ordre associé à $Lx = f$: on pose

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y_1 = x,\ y_2 = x'$$

$$\widetilde{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Si $y' = \widetilde{A}(t)y + \widetilde{b}(t)$ avec $y(t_0) = (0,0)$, alors $y_1 = \widetilde{x}$ est la solution de $Lx = f$ désirée. Posons

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{bmatrix};$$

alors $U(t)$ est une matrice fondamentale (§ 2.1.3) de l'équation $y' = \widetilde{A}(t)y$ et $R(t,s) = U(t)U^{-1}(s)$ est sa matrice résolvante (prop. 2.1.6). D'après (2.12), la solution de $y' = \widetilde{A}(t)y + \widetilde{b}(t)$ avec $y(t_0) = (0,0)$ est donnée par

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} U(t)U^{-1}(s)\widetilde{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Puisque

$$U^{-1}(s) = \frac{1}{W(s)}\begin{bmatrix} u_2'(s) & -u_2(s) \\ -u_1'(s) & u_1(s) \end{bmatrix}$$

un petit calcul montre que la première composante de $U(t)U^{-1}(s)\widetilde{b}(s)$ est $K(t,s)f(s)$, ce qui donne (2.37). ♦

La solution générale de l'équation $Lx = f$ est alors donnée par

$$x(t) = u(t) + \widetilde{x}(t), \quad t \in I,$$

où $Lu = 0$. Plus précisément, pour obtenir la solution de $Lx = f$ telle que $x(t_0) = \alpha_0$, $x'(t_0) = \alpha_1$, on détermine $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ tels que $u = c_1u_1 + c_2u_2$ vérifie $u(t_0) = \alpha_0$, $u'(t_0) = \alpha_1$, ce qui revient à la résolution du système d'équations linéaires

$$c_1u_1(t_0) + c_2u_2(t_0) = \alpha_0$$

$$c_1u_1'(t_0) + c_2u_2'(t_0) = \alpha_1.$$

Ce dernier système possède une unique solution (c_1,c_2) pour tout choix de (α_0,α_1) car la matrice du système est inversible, étant donné que son déterminant est précisément $W(t_0) \neq 0$ (car $\{u_1,u_2\}$ est un système fondamental).

REMARQUES. On peut obtenir (2.37) par un raisonnement direct : on pose $\widetilde{x}(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$ et on détermine $c_1(t)$, $c_2(t)$ en suivant la méthode (dite de Lagrange ou de variations de constantes) esquissée dans l'exercice 17 (sect. 2.8). On trouvera deux cas particuliers de (2.37) dans l'exercice 18 (sect. 2.8).

Une formule similaire à (2.37) peut être donnée pour l'équation $Lx = f$ où L est d'ordre n quelconque comme dans (2.26) ; le principe de sa déduction est le même que celui utilisé pour obtenir (2.37) ci-dessus, sauf que les calculs sont un peu plus longs. Voir Coddington et Levinson [2, p. 87], ainsi que les exercices 15, 16 (sect. 2.8).

2.5.3 Détermination d'un système fondamental

Il faut souligner d'emblée qu'il n'y a aucun procédé général qui permette toujours (ou même, souvent) de déterminer une solution non triviale de l'équation homogène $Lx = 0$ (L étant donné par (2.36)). Si les coefficients a et b sont des constantes, alors on a vu comment on peut déterminer *deux* solutions non triviales linéairement indépendantes. Il y a un autre cas simple qu'il faut mentionner et qui se réduit à celui des coefficients constants après une transformation de la variable indépendante t ; il s'agit de l'*équation eulérienne*

$$a_2 t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = 0 \tag{2.38}$$

où a_0, a_1, a_2 sont des constantes réelles ($a_2 \neq 0$) ; l'équation (2.38) correspond à $Lx = 0$ où L est donné par (2.36) avec

$$a(t) = \frac{a_1}{a_2}\, t^{-1}\,, \quad b(t) = \frac{a_0}{a_2}\, t^{-2}\,.$$

Selon notre théorie, une telle équation doit être considérée dans un intervalle $I = \,]\,0\,,\,\infty\,[$ ou $I = \,]\,-\infty\,,\,0\,[$ où a, b sont continues ; supposons, pour fixer les idées, que $I = \,]\,0\,,\,\infty\,[$. Alors on peut poser $t = \mathrm{e}^s$, $s \in \mathbb{R}$; la fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ devient $s \mapsto y(s)$ où

$$y(s) = x(\mathrm{e}^s)$$
$$y'(s) = x'(\mathrm{e}^s)\,\mathrm{e}^s\,, \quad y''(s) = x''(\mathrm{e}^s)\,\mathrm{e}^{2s} + x'(\mathrm{e}^s)\,\mathrm{e}^s\,.$$

La fonction x vérifie (2.38) pour $t \in \,]\,0\,,\,\infty\,[$ si et seulement si

$$\mathrm{e}^{2s} x''(\mathrm{e}^s) + \frac{a_1}{a_2}\,\mathrm{e}^s x'(\mathrm{e}^s) + \frac{a_0}{a_2}\, x(\mathrm{e}^s) = 0\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

ce qui équivaut à avoir

$$y''(s) + \left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right) y'(s) + \frac{a_0}{a_2}\, y(s) = 0\,, \quad s \in \mathbb{R}\,. \tag{2.39}$$

La dernière équation est une équation à coefficients constants dont les solutions peuvent être déterminées explicitement ; on obtient maintenant les solutions de (2.38) en observant que $x(t) = y(\ln t)$, $t > 0$.

Pour $t < 0$, on observe que si $t \mapsto x(t)$ est une solution de (2.38) pour $t > 0$, alors $\widetilde{x}(t) = x(-t)$, $t < 0$, est une solution de (2.38) pour $t < 0$.

Les racines du polynôme caractéristique de l'équation (2.39) sont données par l'équation quadratique

$$\lambda^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\lambda + \frac{a_0}{a_2} = 0\,. \tag{2.40}$$

On obtient alors deux solutions linéairement indépendantes y_1, y_2 de (2.39) (définies pour $s \in \mathbb{R}$) comme suit :

(i) $y_1(s) = \mathrm{e}^{\lambda_1 s}$, $y_2(s) = \mathrm{e}^{\lambda_2 s}$, si λ_1 et λ_2 sont deux racines réelles distinctes de (2.40) ;

(ii) $y_1(s) = \mathrm{e}^{\lambda_0 s}$, $y_2(s) = s\,\mathrm{e}^{\lambda_0 s}$, si λ_0 est une racine réelle double de (2.40) ;

(iii) $y_1(s) = \mathrm{e}^{\alpha s}\cos\beta s$, $y_2(s) = \mathrm{e}^{\alpha s}\sin\beta s$, si $\alpha \pm i\beta$ sont deux racines complexes de (2.40).

Ainsi, on obtient deux solutions linéairement indépendantes x_1, x_2 de (2.38) (définies pour $t > 0$) en posant

$$x_j(t) = y_j(\ln t)\,, \quad t > 0\,,\ j = 1, 2\,.$$

Ceci donne :

- $x_1(t) = t^{\lambda_1}$, $x_2(t) = t^{\lambda_2}$ dans le cas (i) ;
- $x_1(t) = t^{\lambda_0}$, $x_2(t) = (\ln t)t^{\lambda_0}$ dans le cas (ii) ;
- $x_1(t) = t^{\alpha}\cos(\beta \ln t)$, $x_2(t) = t^{\alpha}\sin(\beta \ln t)$ dans le cas (iii).

En pratique on obtient ces solutions de (2.38) en essayant directement une solution de la forme $x(t) = t^{\lambda}$ dans (2.38) ; on constate que $t \mapsto t^{\lambda}$ est une solution de (2.38) si et seulement si

$$a_2\lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_0 = 0$$

ce qui est exactement l'équation (2.40).

Nous remarquons en passant que la même analyse est applicable à l'équation eulérienne d'ordre n :

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0\,.$$

En posant $t = \mathrm{e}^s$, $x(t) = y(\ln t)$, $t > 0$, on constate que $y(s)$ vérifie une équation linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Si une solution non triviale u de l'équation $Lx = 0$ est connue (L étant donné par (2.36)), on peut trouver une seconde solution linéairement indépendante de u par le calcul suivant. On pose $v = uF$; pour que $Lv = 0$, il est nécessaire et suffisant que

$$uF'' + (2u' + au)F' = 0\,. \tag{2.41}$$

En effet, un petit calcul montre que

$$Lv = uF'' + (2u' + au)F' + (Lu)F$$

ce qui donne (2.41), compte tenu que $Lu = 0$. On peut maintenant obtenir F en résolvant (2.41) ; on obtient successivement

$$F'(t) = \frac{\mathrm{e}^{-A(t)}}{u^2(t)}, \quad F(t) = \int \frac{\mathrm{e}^{-A(t)}}{u^2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2.42}$$

où A est une primitive de a dans l'intervalle I et l'intégrale dans (2.42) représente une primitive de la fonction $u^{-2}\,\mathrm{e}^{-A}$ dans un sous-intervalle de I où u ne s'annule jamais.

Il faut remarquer que *les zéros (s'ils existent) d'une solution non triviale u de $Lx = 0$ (L donné par (2.36)) sont des zéros isolés*. En effet, si $u(t_0) = 0$, alors $u'(t_0) \neq 0$ car autrement $u \equiv 0$; ainsi, il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que $u(t) \neq 0$ si $t \in I \cap J$, $t \neq t_0$, car sinon on aurait une suite $\{t_1, t_2, \ldots\}$ telle que $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$ avec $t_n \neq t_0$, $u(t_n) = 0$, $n \geqslant 1$, ce qui aurait comme conséquence contradictoire

$$0 \neq u'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0} = 0\,.$$

Ainsi $v = uF$ où F est définie par (2.42) est une seconde solution linéairement indépendante de u (définie dans des sous-intervalles de I où u ne s'annule pas) ; rappelons que v est complètement déterminé par la connaissance de $v(t_0)$, $v'(t_0)$ en un point t_0 quelconque de I ; il suffit donc de connaître $v = uF$ dans un sous-intervalle quelconque de I contenant un point t_0 tel que $u(t_0) \neq 0$.

La forme de F dans (2.42) peut être déduite directement du fait que

$$uv' - vu' = W\,, \quad W = \mathrm{e}^{-A}\,,$$

W étant le wronskien de u, v ; en résolvant pour v, on obtient à nouveau

$$v(t) = u(t) \int \frac{W(t)}{u^2(t)}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.43}$$

Le raisonnement qui précède établit que (2.43) définit bien une solution de $Lx = 0$ dans les sous-intervalles de I où u ne s'annule pas.

La discussion qui précède montre que la détermination d'un système fondamental de $Lx = 0$ (L donné par (2.36)) est en principe complète dès que l'on a *une solution* non triviale u. Or il faut se rendre compte que même pour certaines équations linéaires du second ordre très simples les seules solutions non triviales (dont l'existence est garantie par la proposition 2.4.2) connues sont des fonctions (dites *spéciales*) qui ne peuvent pas être obtenues par des « quadratures » des fonctions élémentaires ; dans ce contexte, « quadrature » signifie la détermination d'une primitive. Ainsi, l'*équation d'Airy*

$$x'' - tx = 0 \tag{2.44}$$

possède deux solutions linéairement indépendantes définies dans $\mathbb{R}$ (comme prévues par la proposition 2.4.2) qui sont des *fonctions spéciales*. On peut néanmoins exprimer ces solutions explicitement sous forme de séries entières $\sum_n c_n t^n$. Nous nous tournons maintenant vers la théorie des solutions des équations du type (2.44) en utilisant les séries entières et leur généralisation.

2.6 SOLUTIONS À L'AIDE DES SÉRIES ENTIÈRES

2.6.1 Introduction

Soit l'équation

$$x' = x + t\,. \tag{2.45}$$

On peut essayer de résoudre cette équation en posant

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

dans (2.45) et en déterminant les coefficients c_n de manière appropriée. On obtient alors

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots = t + (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots)$$

d'où en comparant les coefficients de t^0, t^1, t^2, ... des deux côtés, on a

$$c_1 = c_0\,, \quad 2c_2 = (c_1 + 1) = (c_0 + 1)\,,$$
$$3c_3 = c_2, \ldots, nc_n = c_{n-1} \quad (n \geqslant 3)\,;$$

on en déduit

$$c_1 = c_0\,, \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \cdots = \frac{c_0 + 1}{n!} \quad (n \geqslant 2)$$

d'où on tire

$$x(t) = c_0 + c_0 t + (c_0 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = c_0\, \mathrm{e}^t + (\mathrm{e}^t - 1 - t)\,.$$

On obtient le même résultat en utilisant la méthode générale (§ 1.1.3, (1.12)) pour la résolution des équations du premier ordre :

$$x(t) = c_0\, \mathrm{e}^t + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)} s \, \mathrm{d}s\,.$$

On constatera dans cette section que la méthode qui a réussi pour (2.45) est applicable aux équations assez générales. En considérant les solutions de la forme

$$x(t) = t^\alpha \sum_{n \geqslant 0} c_n t^n\,,$$

on étendra l'applicabilité de cette méthode à une classe d'équations linéaires du second ordre très importante. Bien entendu la méthode est aussi applicable en utilisant les séries

$$x(t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n (t-t_0)^n \quad \text{ou} \quad x(t) = (t-t_0)^\alpha \sum_{n\geqslant 0} c_n (t-t_0)^n$$

où t_0 n'est pas nécessairement zéro.

Pour la lecture de cette section une connaissance des séries entières et leur relation aux fonctions holomorphes est nécessaire ; on peut consulter le volume 2 (Chatterji, 1997) à ce sujet.

Nous donnons d'abord les énoncés des deux propositions principales au sujet des solutions en séries entières qui nous seront utiles ; leur démonstration sera discutée dans la suite. Plusieurs exemples importants sont présentés pour mettre en évidence la portée de ces deux propositions.

2.6.2 Proposition (*solutions en séries entières d'une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients analytiques*)

Soit l'équation

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{2.46}$$

où

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n, \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n, \qquad |t-t_0| < R \ (0 < R \leqslant \infty)$$

avec a_n, b_n réels, $n \in \mathbb{N}$. Alors toute solution réelle de (2.46) définie dans $]\,t_0 - R,\, t_0 + R\,[$ (dans $\mathbb{R}$ si $R = \infty$) s'écrit comme

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n, \quad |t-t_0| < R$$

avec $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE. En particulier, l'unique solution (réelle) de (2.46) vérifiant $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ (x_0, x_1 réels) est obtenue en posant $c_0 = x_0$, $c_1 = x_1$. Un système fondamental de solutions pour (2.46) est obtenu en prenant les solutions x_1, x_2 avec $x_1(t_0) = 1$, $x_1'(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$, $x_2'(t_0) = 1$.

L'analogue de la proposition 2.6.2 reste vrai dans le domaine complexe ; si a, b sont des fonctions holomorphes dans le disque $B(t_0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-t_0| < R\}$ (avec $t_0 \in \mathbb{C}$; on prend $B(t_0; R) = \mathbb{C}$ si $R = \infty$), alors, pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ (x_0, x_1 complexes), l'unique solution de (2.46) vérifiant cette condition initiale est holomorphe dans $B(t_0; R)$ et donc de la forme $x(t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n (t-t_0)^n$, $t \in B(t_0; R)$, avec $c_0 = x_0$, $c_1 = x_1$.

2.6.3 Exemple (*équation d'Airy*)

L'équation (2.44) illustre bien une application typique de la proposition 2.6.2 ; dans cette équation

$$a(t) = 0\,, \quad b(t) = -t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

de sorte que la proposition 2.6.2 s'applique avec $t_0 = 0$, $R = \infty$. On introduit

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

dans (2.44), ce qui donne

$$\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n\geqslant 0}^{\infty} c_n t^{n+1} = 0\,; \tag{2.47}$$

noter que la proposition 2.6.2 garantit la convergence de la série entière pour la solution x (en l'occurence pour tout $t \in \mathbb{R}$) et que la théorie des séries entières permet la dérivation de ces séries terme à terme autant de fois que l'on veut (pour tout $t \in \mathbb{R}$ dans cet exemple). En annulant les coefficients des différentes puissances de t dans (2.47), on obtient

$$c_2 = 0\,, \quad (n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1} = 0\,, \qquad n \geqslant 1\,, \tag{2.48}$$

ce qui se voit en réécrivant (2.47) sous la forme

$$(1\cdot 2)c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1}\}t^n = 0\,.$$

De (2.48), on a

$$c_m = \frac{1}{m(m-1)}\, c_{m-3}\,, \quad m \geqslant 3\,.$$

Si $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, on en tire

$$c_2 = c_5 = c_8 = \cdots = 0\,, \quad c_1 = c_4 = c_7 = \cdots = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\,, \quad c_6 = \frac{1}{5\cdot 6}\, c_3 = \frac{1}{(5\cdot 6)(2\cdot 3)}\,, \ \cdots$$

$$c_{3k} = \frac{1}{3k(3k-1)}\, c_{3(k-1)} = \cdots = \frac{1}{3k(3k-1)\cdots(5\cdot 6)(2\cdot 3)}$$

$$= \frac{4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k!)}\,, \quad k \geqslant 1$$

ce qui donne la solution

$$u_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!}\, t^{3k}\,.$$

De même, si $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, on a

$$c_2 = c_5 = c_8 = \cdots = 0\,, \quad c_0 = c_3 = c_6 = \cdots = 0$$

$$c_{3k+1} = \frac{1}{(3k+1)3k \cdots (6 \cdot 7)(3 \cdot 4)} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!}\,, \quad k \geqslant 1\,,$$

ce qui donne la solution

$$u_2(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!}\, t^{3k+1}\,.$$

On vérifie directement sans peine que les séries entières définissant u_1, u_2 sont convergentes pour $t \in \mathbb{R}$; mais cette vérification est inutile car la proposition 2.6.2 garantit que le rayon de convergence de ces séries est ∞.

2.6.4 Equations à singularité isolée

On dit que t_0 est un point de ***régularité*** de l'équation (2.46) si, pour tout $R > 0$, les coefficients a, b sont des fonctions holomorphes de la variable $t \in B(t_0; R)$; en se restreignant aux t réels, ceci veut dire que a, b s'écrivent en forme de séries entières pour $t \in \,]\, t_0 - R\,,\, t_0 + R\,[$ comme dans la proposition 2.6.2. Si t_0 n'est pas un point de régularité (ou point régulier) de (2.46), nous dirons que t_0 est un point ***singulier*** de (2.46) ; ceci veut dire qu'au moins une des deux fonctions a, b n'est pas représentable en forme d'une série entière dans un intervalle ouvert contenant t_0. On dit que le point singulier t_0 est un point de ***singularité faible*** s'il existe un $R \in \,]\, 0\,,\, \infty]$ tel que

$$a(t) = \frac{1}{t - t_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n\,, \quad b(t) = \frac{1}{(t - t_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n \qquad (2.49)$$

pour $0 < |t - t_0| < R$; les coefficients a_n, b_n sont réels si a et b sont réelles ; mais dans la théorie générale, a_n et b_n peuvent être complexes. Pour que t_0 soit un point singulier lorsque a, b sont données par (2.49), il est nécessaire et suffisant qu'au moins un des nombres a_0, b_0, b_1 soit non nul ; ceci équivaut à dire (en termes de la théorie des fonctions complexes) que t_0 est un pôle simple ou un point de régularité (holomorphie) pour a et que t_0 est un pôle d'ordre au plus deux ou un point de régularité pour b lorsque a et b sont définies dans le disque ouvert $B(t_0; R)$, en excluant le cas où a, b sont toutes les deux holomorphes dans $B(t_0; R)$.

L'importance pratique des équations (2.46) ayant une singularité faible en un point t_0 provient du fait que ces équations apparaissent dans de nombreuses applications. Du point de vue théorique, ces équations se distinguent des autres comme nous le constaterons dans la suite. Voici quelques exemples importants des équations à singularité faible :

- équation de Bessel de paramètre ν

$$x'' + \frac{1}{t}\,x' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) x = 0\,; \tag{2.50}$$

- équation de Legendre de paramètre n

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}\,x' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}\,x = 0\,; \tag{2.51}$$

- équation hypergéométrique de paramètre α, β, γ

$$x'' + \frac{\{\gamma - (\alpha+\beta+1)t\}}{t(1-t)}\,x' - \frac{\alpha\beta}{t(1-1)}\,x = 0\,. \tag{2.52}$$

Le point $t_0 = 0$ est un point de singularité faible pour (2.50), les autres points $t_0 \neq 0$ étant réguliers pour cette équation. Pour (2.51), $t_0 = \pm 1$ sont les seuls points de singularité faible, les autres points t_0 étant réguliers. De même pour (2.52), $t_0 = 0$ ou 1 sont les seuls points de singularité faible, les autres t_0 étant les points de régularité. Les équations (2.50), (2.51), (2.52) sont généralement écrites sous leurs formes équivalentes suivantes :

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0 \tag{2.50'}$$

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0 \tag{2.51'}$$

$$t(1-t)x'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)t\}x' - \alpha\beta\gamma = 0\,. \tag{2.52'}$$

Un point de singularité t_0 de l'équation (2.46) qui n'est pas un point de singularité faible sera dit point de ***singularité forte***. En général, on utilise cette terminologie seulement dans les cas où les fonctions a, b sont holomorphes dans $B'(t_0; R) = B(t_0; R) \setminus \{t_0\}$ pour un $R > 0$; tous les exemples que nous étudierons seront de ce type. Nous énoncerons dans la suite une proposition générale valable pour l'équation (2.46) à coefficients holomorphes dans $B'(t_0; R)$ pour un $R > 0$ ayant t_0 comme point de singularité forte.

La terminologie « singularité faible », « singularité forte », « point régulier » est assez répandue sans être universelle. Ce que nous avons appelé « singularité faible » est appelée « singularité régulière » dans les écrits en anglais (*regular singularity*). Il existe aussi d'autres classifications des points réguliers et non réguliers.

Nous donnons maintenant la proposition principale concernant les solutions d'une équation (2.46) ayant une singularité faible. Pour énoncer cette proposition convenablement, il faut nous placer dans le cadre des nombres complexes, même si l'équation de départ est entièrement réelle ; nous verrons ceci plus précisément dans un exemple simple. Rappelons que chaque solution complexe x d'une équation réelle (2.46) (où t, $a(t)$, $b(t)$ sont réels) donne deux solutions réelles définies par $t \mapsto \operatorname{Re} x(t)$, $t \mapsto \operatorname{Im} x(t)$.

Dans la proposition qui suit, on suppose que t, $a(t)$, $b(t)$ etc. sont dans $\mathbb{C}$; on pose $B(t_0; R) = \{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| < R\}$ ou $\mathbb{C}$ selon que $0 < R < \infty$ ou $R = \infty$ et $B'(t_0; R) = B(t_0; R) \setminus \{t_0\}$. Les expressions

$$(t - t_0)^{\lambda}, \quad \log(t - t_0)$$

représentent certaines déterminations appropriées de ces quantités comme cela est expliqué dans les remarques qui suivent la proposition. Rappelons qu'une fonction f holomorphe dans $B(t_0; R)$ s'écrit (de façon unique) comme une série entière :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n, \quad t \in B(t_0; R)$$

où $c_n = f^{(n)}(t_0)/(n!)$; par contre, une fonction holomorphe dans $B'(t_0; R)$ s'écrit (de façon unique) comme une série de Laurent :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (t - t_0)^n, \quad t \in B'(t_0; R).$$

On trouvera les formules pour les c_n dans ce cas dans les textes d'analyse complexe par exemple dans le volume 2 (Chatterji, 1997). Si $z \in \mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$), on écrit

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

où $\arg z = \theta \in \,]-\pi, \pi]$ avec $z = |z| \, e^{i\theta}$; par contre, $\log z$ sera utilisé pour une éventuelle autre détermination du logarithme de z de sorte que $\log z = \ln z + 2\pi i n(z)$ avec $n(z) \in \mathbb{Z}$. La détermination principale de a^{λ} où $a \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, est donnée par $\exp(\lambda \ln a)$; les autres déterminations de a^{λ} s'obtiennent à partir de

$$\exp(\lambda \log a) = \exp\{\lambda(\ln a + 2\pi i n(a))\}.$$

2.6.5 Proposition (*solutions d'une équation linéaire du second ordre ayant une singularité faible*)

Soit l'équation (2.46) ayant t_0 pour point de singularité faible et où a, b sont données par (2.49) dans $B(t_0, R)$ pour un $R \in \,]0, \infty]$. Posons

$$D(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + a_0 \lambda + b_0$$

où a_0, b_0 sont des coefficients qui apparaissent dans (2.49) ; soient λ_1, λ_2, les deux racines complexes (non nécessairement distinctes) de l'équation quadratique $D(\lambda) = 0$; nous supposons que $\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \geqslant 0$.

(i) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$, alors (2.46) possède un système fondamental de solutions $\{u_1, u_2\}$ du type suivant : pour $t \in B'(t_0; R)$,

$$u_1(t) = (t - t_0)^{\lambda_1} f_1(t), \quad u_2(t) = (t - t_0)^{\lambda_2} f_2(t) \tag{2.53}$$

où f_1, f_2 sont holomorphes dans $B(t_0; R)$ avec $f_1(t_0) = f_2(t_0) = 1$.

(ii) Si $\lambda_1 = \lambda_2 + s$, $s \in \mathbb{N}$, alors (2.46) possède un système fondamental de solutions $\{u_1, u_2\}$ du type suivant : pour $t \in B'(t_0; R)$, $u_1(t)$ est comme dans (2.53) ; il existe r, $0 < r \leqslant R$, tel que, pour $t \in B'(t_0; r)$,

$$u_2(t) = u_1(t) \left\{ c \log(t - t_0) + (t - t_0)^{-s} f_2(t) \right\} \tag{2.54}$$

où f_2 est holomorphe dans $B(t_0; r)$ et c est une constante complexe ; si $s = 0$, $c \neq 0$; si $s > 0$, c peut être nulle ou non.

REMARQUE. L'équation $D(\lambda) = 0$ s'appelle l'***équation déterminante*** pour (2.46), l'équation différentielle en question. Soulignons que (2.46) possède toujours une solution de la forme u_1 de (2.53) où λ_1 est une racine de $D(\lambda) = 0$. Si l'on veut avoir des solutions u_1, u_2 définies dans $]t_0 - R, t_0 + R[$ (sauf éventuellement en t_0), on doit choisir la détermination de $(t - t_0)^{\lambda}$ fixée par $\exp(\lambda \log(t - t_0))$ où $\log z$ est une détermination du logarithme holomorphe dans $\mathbb{C}$ muni d'une coupure $L_{\theta_0} = \{r\, e^{i\theta_0} : r \geqslant 0\}$ avec $\theta_0 \neq 0$, $-\pi < \theta_0 < \pi$ (par exemple $\theta_0 = \pi/2$) ; une remarque similaire s'applique pour la détermination de $\log(t - t_0)$ dans (2.54). Si l'objectif est d'avoir une solution définie dans $]t_0, t_0 + R[$ où $t_0 \geqslant 0$, il suffit de poser $\log(t - t_0) = \ln(t - t_0)$, logarithme réel du nombre $t - t_0 > 0$. Si les fonctions a, b de l'équation (2.46) sont réelles et les racines λ_1, λ_2 de $D(\lambda) = 0$ sont également réelles, alors les fonctions f_1, f_2 (et la constante c) de la proposition 2.6.5 seront réelles ; dans ce cas, on obtient les solutions réelles définies dans $]t_0, t_0 + R[$, $t_0 \geqslant 0$, en interprétant $\log(t - t_0)$ comme $\ln(t - t_0)$.

L'exemple de l'équation eulérienne

$$t^2 x'' + t x' + x = 0$$

(ayant une singularité faible au point $t_0 = 0$) montre bien la nécessité du passage vers les fonctions complexes, même si l'équation elle-même est réelle. En effet, d'après le procédé expliqué au paragraphe 2.5.3, les racines d'équation

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = \lambda^2 + 1 = 0$$

sont $\lambda = \pm i$; on obtient donc les solutions complexes $u_1(t) = t^i$, $u_2(t) = t^{-i}$; ceci correspond exactement au procédé donné dans la proposition 2.6.5. Pour

avoir un système fondamental de solutions réelles définies dans $]\,0\,,\,\infty\,[$, il faut considérer $\operatorname{Re} t^i$, $\operatorname{Im} t^i$, ce qui donne

$$t \mapsto \cos(\ln t)\,, \quad t \mapsto \sin(\ln t)\,;$$

pour obtenir un tel système défini dans $]\,-\infty\,,\,0\,[$, on prend

$$t \mapsto \cos\bigl(\ln(-t)\bigr)\,, \quad t \mapsto \sin\bigl(\ln(-t)\bigr)\,.$$

2.6.6 Remarques sur les équations holomorphes

Pour bien faire comprendre les propositions 2.6.2 et 2.6.5, nous expliquons quelques propositions élémentaires concernant les équations différentielles ordinaires holomorphes. Pour cette discussion, une fonction complexe g des n variables $z_1, \ldots, z_n$ s'appelle holomorphe dans une partie ouverte Ω de $\mathbb{C}^n$ si g est continue dans Ω et si $\mathrm{D}_j g$ existe partout dans Ω, $j = 1, \ldots, n$; en fait, la condition de continuité de g est superflue et on sait que l'existence seule des $\mathrm{D}_j g$ dans Ω garantit que g s'écrit comme une série entière dans un voisinage ouvert de chaque point $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ (théorème de Hartogs) :

$$g(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^*} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \bigl(z_1 - a_1\bigr)^{\alpha_1} \cdots \bigl(z_n - a_n\bigr)^{\alpha_n}\,.$$

Considérons maintenant un système d'équations différentielles ordinaires holomorphes

$$x' = f(t, x)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$, chaque f_j étant une fonction holomorphe dans une partie ouverte Ω de $\mathbb{C}^{N+1}$. Alors, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution holomorphe $t \mapsto u(t)$, $t \in B(t_0; r)$, telle que $u(t_0) = x_0$ avec $\bigl(t, u(t)\bigr) \in \Omega$, $u'(t) = f\bigl(t, u(t)\bigr)$, pour $t \in B(t_0; r)$. Une démonstration de cette affirmation peut être donnée en suivant mot à mot la démonstration de la proposition analogue (prop. 1.2.5) dans le cas réel. En effet, on considère l'équation intégrale équivalente à $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\bigl(s, x(s)\bigr)\,\mathrm{d}s$$

où l'intégrale est prise sur le segment $[\,t_0\,,\,t\,]$ dans le plan complexe ; la méthode de Picard est applicable exactement comme au chapitre 1, démontrant l'existence de la solution u.

Si $f : I \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ est holomorphe, $I = B(t_0; R)$, alors

$$\sup_{t \in J,\, x \in \mathbb{C}^N} \bigl|\mathrm{D}_j f_i(t, x)\bigr| < \infty$$

si $J = \overline{B}(t_0; r)$, $0 < r < R$; on conclut (exactement comme pour la proposition 1.2.7) qu'il existe une unique solution holomorphe $t \mapsto u(t)$, $t \in B(t_0; R)$, vérifiant la condition $u(t_0) = x_0$.

On en déduit (exactement comme pour la proposition 1.3.2) que l'équation $x' = A(t)x + b(t)$ possède une unique solution holomorphe $t \mapsto u(t)$, $t \in B(t_0; R)$, vérifiant $u(t_0) = x_0$, si $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ sont holomorphes dans $B(t_0; R)$. La version holomorphe de la proposition 1.3.4 concernant les solutions de l'équation (1.28) ayant les coefficients holomorphes dans $B(t_0; R)$ est une conséquence immédiate. La proposition 2.6.2 est le cas particulier de cette dernière affirmation lorsque l'équation est du second ordre et homogène.

Jusqu'ici notre discussion concernait les solutions holomorphes dans un disque ; par prolongement analytique, on peut déduire (grâce au théorème de monodromie) l'existence des solutions dans des domaines simplement connexes D où les coefficients $a_0, \ldots, a_n, g$ de (1.28) sont holomorphes. En particulier si les coefficients a et b de (2.46) sont holomorphes dans $B'(t_0; R)$ (qui est un domaine non simplement connexe), on peut conclure l'existence d'une solution unique holomorphe de (2.46), vérifiant $x(t_1) = c_0$, $x'(t_1) = c_1$, $t_1 \neq t_0$ définie dans $D = B'(t_0; R) \setminus L$, L étant la coupure donnée par une demi-droite (quelconque) d'origine t_0. Ainsi, on obtient un système fondamental de solutions de (2.46), $\{u_1, u_2\}$ holomorphes dans D, lorsque a, b sont holomorphes dans $B'(t_0; R)$. Le prolongement analytique de u_1, u_2 à travers L est possible donnant lieu à un système fondamental de solutions de (2.46) (toujours noté $\{u_1, u_2\}$), solutions dites « multiformes » dans le langage classique de l'analyse complexe ; plus précisément, on démontre que $\{u_1, u_2\}$ est de la forme

$$u_1(t) = (t - t_0)^{\lambda_1} f_1(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = (t - t_0)^{\lambda_2} f_2(t)$$

ou

$$u_2(t) = u_1(t)\{\log(t - t_0) + f_2(t)\}$$

avec f_1, f_2 holomorphes dans $B'(t_0; R)$ (ou f_2 holomorphe dans $B'(t_0, r)$, $r \leqslant R$) et où $(t - t_0)^{\lambda}$, $\log(t - t_0)$ représentent des déterminations appropriées de ces expressions. La précision apportée par la proposition 2.6.5 à ce qui précède est double dans le cas où a et b sont non seulement holomorphes dans $B'(t_0; R)$ mais en outre t_0 est un pôle de a d'ordre 1 au plus et un pôle de b d'ordre 2 au plus : les fonctions f_1, f_2 sont holomorphes dans $B(t_0; R)$ (au lieu de $B'(t_0; R)$) et λ_1, λ_2 sont calculés explicitement par la résolution de l'équation déterminante $D(\lambda) = 0$. Ceci a comme conséquence que u_1 est de la forme

$$u_1(t) = (t - t_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n ,$$

une expression que nous pouvons introduire pour x dans l'équation différentielle (2.46) et déterminer de proche en proche les coefficients c_n. On verra dans les exemples l'efficacité de ce procédé ; on se rendra compte aussi dans les exemples où t_0 n'est pas un point de singularité faible (mais a, b sont holomorphes dans $B'(t_0; R)$) que ce genre de procédé est généralement voué à l'échec car alors,

la fonction f_1 aura un développement en série de Laurent (au lieu de série de Taylor) de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$$

et la détermination successive des c_n n'est plus alors toujours possible.

Pour suivre la brève discussion précédente, il faut connaître la notion de prolongement analytique et la théorie concernant cette notion. Les théorèmes de Hartogs et de monodromie mentionnés ci-dessus peuvent être trouvés dans plusieurs ouvrages de l'analyse complexe (cf. vol. 2).

Nous n'utiliserons pas les développements esquissés ici concernant les équations différentielles complexes. Mais nous considérons la proposition 2.6.2 comme démontrée grâce à la discussion donnée ; par ailleurs, nous donnerons une démonstration indépendante et détaillée de la proposition 2.6.5 qui contiendra une preuve supplémentaire pour la proposition 2.6.2.

La théorie des équations différentielles complexes est vaste ; même la partie de la théorie qui concerne les équations linéaires est d'une grande richesse ; plusieurs problèmes fondamentaux relatifs aux équations linéaires avec singularités isolées restent non résolus. Coddington et Levinson [2], dans les chapitres 3 et 4 de leur livre, donnent une description détaillée de la théorie des équations différentielles linéaires dans le plan complexe.

Avant de donner une démonstration de la proposition 2.6.5, nous traitons quelques exemples pour expliquer sa portée et ses limites.

2.6.7 Equation de Bessel

Il s'agit de l'équation (2.50) que nous écrivons sous la forme

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

où ν est un paramètre. En analyse complexe, on étudie cette équation lorsque t et ν sont dans $\mathbb{C}$; puisque l'équation ne contient que ν^2, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$. Ici, nous considérons seulement le cas où t *ainsi que* ν *sont réels et* $\nu \geqslant 0$, $t > 0$; sauf mention du contraire, t et ν dans ce paragraphe seront toujours assujettis à ces conditions. Alors, $t^\lambda = \exp(\lambda \ln t)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\ln t$ est le logarithme réel de $t > 0$. Notre objectif est de déterminer les solutions réelles $t \mapsto x(t)$, $t \in]0, \infty[$, de l'équation de Bessel ; ces solutions nous seront utiles dans la suite. Dans les remarques de la fin de ce paragraphe, nous donnons quelques informations concernant les solutions de l'équation de Bessel lorsque t et ν sont complexes.

La proposition 2.6.5 garantit l'existence d'une solution de l'équation de Bessel de la forme

$$x(t) = t^{\lambda} \sum_{n \geqslant 0} c_n t^n = \sum_{n \geqslant 0} c_n t^{\lambda+n} \qquad (2.55)$$

où la série entière associée est convergente pour tout $t \in \mathbb{C}$ (car, pour l'équation de Bessel, la quantité R qui apparaît dans la proposition 2.6.5 peut être prise égale à ∞). En introduisant cette forme de $x(t)$ dans l'équation de Bessel de paramètre ν et en observant que

$$x'(t) = \sum_{n \geqslant 0} (\lambda + n) c_n t^{\lambda+n-1}$$

$$x''(t) = \sum_{n \geqslant 0} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n t^{\lambda+n-2},$$

on obtient la relation

$$\sum_{n \geqslant 0} \left\{ (\lambda + n)(\lambda + n - 1) + (\lambda + n) - \nu^2 \right\} c_n t^{\lambda+n} + \sum_{n \geqslant 0} c_n t^{\lambda+n+2} = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{n \geqslant 0} \left\{ (\lambda + n)^2 - \nu^2 \right\} c_n t^{\lambda+n} + \sum_{n \geqslant 2} c_{n-2} t^{\lambda+n} = 0$$

d'où

$$(\lambda^2 - \nu^2) c_0 t^{\lambda} + \left\{ (\lambda + 1)^2 - \nu^2 \right\} c_1 t^{\lambda+1} + \sum_{n \geqslant 2} \left\{ \left((\lambda + n)^2 - \nu^2 \right) c_n + c_{n-2} \right\} t^{\lambda+n} = 0 . \qquad (2.56)$$

En égalant à zéro le coefficient de $t^{\lambda+n}$ dans (2.56) pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient

$$(\lambda^2 - \nu^2)\, c_0 = 0 \qquad (2.57)$$

$$\left\{ (\lambda + 1)^2 - \nu^2 \right\} c_1 = 0 \qquad (2.58)$$

$$\left\{ (\lambda + n)^2 - \nu^2 \right\} c_n + c_{n-2} = 0 , \quad n \geqslant 2 . \qquad (2.59)$$

Si $c_0 \neq 0$, on obtient $\lambda = \pm\nu$ de (2.57) ; notons que $\lambda^2 - \nu^2 = 0$ est l'équation déterminante prévue par la proposition 2.6.5. Si $\lambda = \nu$, (2.58) entraîne que $c_1 = 0$ car $(\nu + 1)^2 - \nu^2 \neq 0$ si $\nu \geqslant 0$; en tout cas, $c_1 = 0$ est solution de (2.58) pour toute valeur de λ, y compris $\lambda = -\nu$ avec $\nu = 1/2$ lorsque $(-\nu + 1)^2 - \nu^2 = 0$. De (2.59), on a

$$c_n = \frac{-c_{n-2}}{(\lambda - \nu + n)(\lambda + \nu + n)} , \quad n \geqslant 2 ,$$

ce qui donne, avec $c_0 = 1$, $c_1 = 0$,

$$c_{2k-1} = 0\,, \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{P_k(\lambda)}\,, \quad k \geqslant 1\,, \tag{2.60}$$

avec

$$P_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \nu + 2j)(\lambda + \nu + 2j)\,.$$

On a

$$P_k(\nu) = 2^{2k} k!\,(\nu+1)\cdots(\nu+k)$$

$$P_k(-\nu) = 2^{2k} k!\,(-\nu+1)\cdots(-\nu+k)\,;$$

notons que $P_k(-\nu) \neq 0$, $k \geqslant 1$, si $\nu \notin \mathbb{N}^*$ et $P_k(\nu) > 0$, $k \geqslant 1$, pour $\nu \geqslant 0$.

En introduisant $\lambda = \nu$ et les valeurs des c_n correspondantes obtenues de (2.60) dans l'expression de $x(t)$ dans (2.55), on obtient

$$u_1(t) = t^\nu \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} k!\,(\nu+1)\cdots(\nu+k)} \right\}. \tag{2.61}$$

De même, avec $\lambda = -\nu$, $\nu \notin \mathbb{N}$, on obtient

$$u_2(t) = t^{-\nu} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} k!\,(-\nu+1)\cdots(-\nu+k)} \right\}. \tag{2.62}$$

Les séries entières dans (2.61) et (2.62) convergent pour tout $t \in \mathbb{C}$, comme on peut le vérifier directement. Ainsi, u_1, u_2 *sont deux solutions de l'équation de Bessel (2.50) de paramètre* ν, u_1 *étant une solution (réelle pour* $t > 0$*) pour tout* $\nu \geqslant 0$ *et* u_2 *étant une solution (réelle pour* $t > 0$*) pour tout* $\nu > 0$, ν *non entier*. De plus, *si* $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$, u_1 *et* u_2 *sont linéairement indépendantes*. En effet, de (2.61) et (2.62) on déduit immédiatement que

$$\lim_{0<t\to 0} u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu > 0 \\ 1 & \text{si } \nu = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{0<t\to 0} u_2(t) = \infty$$

u_2 étant défini seulement pour $\nu \notin \mathbb{N}$, $\nu > 0$; ceci exclut une dépendance linéaire entre u_1 et u_2. On conclut que *si* $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$, $\{u_1, u_2\}$ *forme un système fondamental de solutions de l'équation de Bessel de paramètre* ν.

Nous introduisons maintenant J_ν, la ***fonction de Bessel d'indice*** ν (***de première espèce***) ; on a $J_\nu = Au_1$ où $A = A_\nu$ est une constante définie par

$$A_\nu = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

où ν peut être un nombre complexe quelconque. Rappelons d'abord que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x\,, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0$$

avec

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)\,, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$$

d'où

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ (où } 0! = 1)$$

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\cdots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)\,;$$

la fonction gamma, $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha)$, est une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$; de plus, $\Gamma(\alpha)$ est réel si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ avec

$$\lim_{\alpha \to -n} \left|\Gamma(\alpha)\right| = \infty\,, \quad n = 0, -1, \ldots$$

De plus, $1/\Gamma$ est une fonction entière qui s'annule aux points $0, -1, \ldots$

Pour toutes ces propriétés de $\Gamma(\alpha)$, on peut consulter le volume 2 (Chatterji, 1997) ; celles-ci sont assez faciles à établir lorsque α est réel. On a donc l'expression explicite pour $J_\nu(t) = A_\nu u_1(t)$:

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \tag{2.63}$$

définie pour $\nu \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}^*$. Notons que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to -n} J_\nu(t) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (t/2)^{2m+n}}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)} \quad \text{(en posant } k-n=m\text{)} \\
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (t/2)^{2m+n}}{m!\,(m+n)!} = (-1)^n J_n(t)
\end{aligned}$$

compte tenu du fait que $\left|\Gamma(\alpha)\right| \to \infty$ lorsque $\alpha \to -N$, $N = 0, 1, \ldots$ On interprète donc (2.63) pour $\nu = -n$ comme étant $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Le choix particulier de la constante $A = A_\nu$ pour la définition de J_ν et motivé essentiellement par le désir d'avoir des formules harmonieuses reliant les différentes J_ν ; ainsi, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u^n J_n(t) = \exp\left\{\frac{t}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\}\,, \quad t \in \mathbb{C}\,,\ u \in \mathbb{C}^*\,,$$

formule qui est souvent utilisée pour définir les $J_n(t)$ (vol. 2).

En prenant $A = A_{-\nu}$, on obtient $J_{-\nu} = Au_2$; plus explicitement,

$$A_{-\nu} u_2(t) = J_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k-\nu}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\,. \tag{2.64}$$

De ce qui est dit pour $\{u_1, u_2\}$, on obtient les propriétés suivantes :

- *J_ν est solution réelle, définie dans $]0, \infty[$, de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$;*
- *$J_{-\nu}$ est une solution réelle, définie dans $]0, \infty[$, de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$;*
- *$\{J_\nu, J_{-\nu}\}$ sont linéairements indépendantes si $\nu \geqslant 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$.*

Il reste à trouver une solution de l'équation de Bessel de paramètre $n \in \mathbb{N}$ linéairement indépendante de J_n. On peut procéder en utilisant la méthode générale donnée dans le paragraphe 2.5.3 qui fournit une solution de la forme $J_n F$ où F est une fonction appropriée. Mais habituellement on utilise les ***fonctions de Bessel d'indice ν de seconde espèce*** Y_ν définies comme suit : on pose

$$Y_\nu(t) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left\{ \cos \nu\pi J_\nu(t) - J_{-\nu}(t) \right\} \tag{2.65}$$

si $\nu \notin \mathbb{N}$ et

$$Y_n(t) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(t) \tag{2.66}$$

si $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\nu \to n} \cos \nu\pi J_\nu(t) = (-1)^n J_n(t) = J_{-n}(t) = \lim_{\nu \to n} J_{-\nu}(t),$$

la limite dans (2.66) peut être calculée par la règle de L'Hôpital, ce qui donne, après un petit calcul,

$$Y_n(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \right\}_{\nu = n} \tag{2.67}$$

où l'existence de $\partial J_\nu(t)/\partial\nu$, $\partial J_{-\nu}(t)/\partial\nu$ pour toutes les valeurs de ν se déduit de (2.63). Nous n'en donnons pas une démonstration ici. Une autre formule pour $Y_n(t)$ s'obtient à partir de

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ J_{n+h}(t) - (-1)^n J_{-n-h}(t) \right\} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(t) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(t) \right\}_{\nu = n} \\ &= \pi Y_n(t), \end{aligned}$$

ce que nous laissons en exercice. Un calcul direct mais un peu long, partant de (2.67) et des formules pour $\Gamma'(\alpha)$, donne

$$\pi Y_n(t) = 2 \left\{ \gamma + \ln\left(\frac{t}{2}\right) \right\} J_n(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m (t/2)^{2m+n}}{m!\,(n+m)!} (h_m + h_{n+m}) \right\} - \delta_n(t) \tag{2.68}$$

où

$$\delta_0(t) = 0\,, \quad \delta_n(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n} \quad \text{si } n = 1, 2, \ldots,$$

$$h_0 = 0\,, \qquad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\,, \quad m \geqslant 1$$

et où γ est la constante d'Euler ($\gamma = \lim_{m\to\infty}(h_m - \ln m)$).

Puisque chaque Y_ν, $\nu \notin \mathbb{N}$, défini dans (2.65) est une solution de l'équation de Bessel de paramètre ν (étant une combinaison linéaire des solutions J_ν, $J_{-\nu}$), on peut conclure que $Y_n = \lim_{\nu\to n} Y_\nu$ est une solution de l'équation de Bessel de paramètre $n \in \mathbb{N}$. Indiquons brièvement une justification pour cette dernière affirmation. On observe d'abord que $J_{\pm\nu}(t)$ est une expression holomorphe dans les deux variables ν et t ; donc, on a

$$\frac{\partial}{\partial\nu} J'_{\pm\nu}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\nu} J_{\pm\nu}(t)\right)$$

et une formule analogue pour $\partial J''_{\pm\nu}(t)/\partial\nu$. Puisque

$$t^2 J''_{\pm\nu}(t) + tJ'_{\pm\nu}(t) + (t^2 - \nu^2)J_{\pm\nu}(t) = 0\,,$$

on obtient (en appliquant $\partial/\partial\nu$ aux deux membres de cette dernière équation)

$$t^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial\nu} J_{\pm\nu}(t) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\nu} J_{\pm\nu}(t) + (t^2 - \nu^2)\frac{\partial}{\partial\nu} J_{\pm\nu}(t) - 2\nu J_{\pm\nu}(t) = 0\,.$$

En écrivant

$$\pi x_\nu = \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu - (-1)^n \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}\,,$$

on obtient

$$t^2 x''_\nu + tx'_\nu + (t^2 - \nu^2)x_\nu - 2\nu\left\{J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}\right\} = 0\,;$$

puisque

$$\lim_{\nu\to n}\left\{J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}\right\} = 0\,, \quad \lim_{\nu\to n} x_\nu = Y_n$$

$$\lim_{\nu\to n} x'_\nu = Y'_n\,, \quad \lim_{\nu\to n} x''_\nu = Y''_n$$

à cause de (2.67) et de l'holomorphie de l'expression $\left\{J_\nu(t) - (-1)^n J_{-\nu}(t)\right\}$ dans les variable (ν, t), on obtient

$$t^2 Y''_n + tY'_n + (t^2 - n^2)Y_n = 0\,,$$

ce qui veut dire que Y_n est une solution de l'équation de Bessel de paramètre $n \in \mathbb{N}$. Notons que $Y_n(t)$ est réel si $t > 0$ et que, d'après (2.68), $Y_n(t) \to -\infty$ lorsque $0 < t \to 0$ (car $\ln t \to -\infty$ si $0 < t \to 0$), ce qui entraîne que Y_n est linéairement indépendante de J_n. Donc *un système fondamental de solutions pour l'équation de Bessel de paramètre $n \in \mathbb{N}$ est donné par* $\{J_n, Y_n\}$.

Observons que *toute solution de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$ qui est bornée dans un intervalle $]\,0\,,\varepsilon\,[$ est un multiple de J_ν*. En effet, une solution générale réelle u de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$ est de la forme $AJ_\nu + BJ_{-\nu}$ si $\nu \geqslant 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$, ou $AJ_n + BY_n$ si $n \in \mathbb{N}$ (A, B constantes réelles) et $|u(t)| \to \infty$ si $0 < t \to 0$ si $B \neq 0$ (car $|J_\nu(t)|$ reste borné lorsque $t \to 0$).

REMARQUES. Les définitions données pour $J_\nu(t)$, $Y_\nu(t)$ dans (2.63), (2.65) et (2.66) donnent des fonctions holomorphes dans les deux variables (ν, t) avec $\nu \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}\setminus L$, L étant une coupure du plan complexe telle que les expressions $\log t$, $t^\nu = \exp(\nu \log t)$ soient holomorphes ; dans la terminologie classique, on dit que $J_\nu(t)$, $Y_\nu(t)$ sont des fonctions holomorphes « multiformes ».

Si l'on veut des solutions réelles définies dans $]-\infty\,,\,0[$ à l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$, il suffit de prendre les fonctions définies par $J_{\pm\nu}(-t)$, $Y_{\pm\nu}(-t)$, avec $t > 0$.

Notons que $J_\nu(t)$ et $Y_\nu(t)$ donnent des solutions complexes à l'équation de Bessel de paramètre complexe ν.

2.6.8 Remarques sur les fonctions de Bessel

A cause du fait que l'équation de Bessel intervient dans les théories les plus diverses, les fonctions de Bessel occupent une place importante en analyse. Certains auteurs classiques appellent ces fonctions « les fonctions cylindriques » (*Zylinder Funktionen*) car elles apparaissent dans la solution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques. L'ouvrage le plus détaillé sur les fonctions de Bessel est celui de G. N. Watson (*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1944, 2^e éd., 804 pp.). Les trois volumes de A. Erdélyi *et al.* (*Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, 1953) constituent la référence moderne principale pour tout ce qui concerne les fonctions dites *spéciales* ; l'expression (2.68) pour $Y_n(t)$ est tirées de cette référence. Watson fait un historique circonstancié des origines des fonctions de Bessel ; on y découvre que les cas particuliers de ces fonctions figurent déjà dans les écrits du XVIII^e siècle (surtout chez D. Bernoulli et L. Euler) et qu'on les retrouve souvent sous différentes formes dans la suite. Bessel les rencontre dans ses travaux astronomiques durant les années 1816-1824 et dans un mémoire, en 1824, il les examine en détail. L'appellation « fonction de Bessel » semble être due à Jacobi (1836) ; par la suite, elle est régulièrement utilisée dans les publications importantes sur le sujet telles, par exemple, celles de C. Neumann et de Lommel dans les années 1867-68. Si la définition de la fonction de Bessel J_ν (dite de première espèce) donnée par (2.63) est aujourd'hui universellement acceptée, les conventions concernant les fonctions

de Bessel de seconde espèce restent assez variables. Certains auteurs appellent une quelconque solution de l'équation de Bessel de paramètre ν une fonction de Bessel de seconde espèce, pourvu qu'elle soit linéairement indépendante de $J_{\pm\nu}$; mais la terminologie, même sur ce point, est loin d'être uniforme car on parle ici des fonctions de Bessel de troisième espèce (appelées également, fonctions de Hankel). Le choix de Y_ν comme la seconde solution linéairement indépendante de J_ν de l'équation de Bessel de paramètre ν semble être le plus avantageux, surtout lorsque ν est un entier $\geqslant 0$; il semble que, dans beaucoup d'applications, c'est ce choix qui est préféré. Pour ν non entier, Y_ν est une combinaison linéaire (apparemment arbitraire) de J_ν et $J_{-\nu}$ donnée dans (2.65) et, théoriquement, une combinaison linéaire quelconque aurait pu servir ; mais, l'existence de Y_n comme $\lim_{\nu\to n} Y_\nu$ est un avantage décisif. De plus, les comportements asymptotiques lorsque $t \to \infty$ des fonctions J_ν et Y_ν sont assez complémentaires dans le sens suivant (cf. § 2.7.9) :

$$J_\nu(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{R_\nu(t)}{t^{3/2}}$$

$$Y_\nu(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{S_\nu(t)}{t^{3/2}}$$

où

$$\sup_{t\geqslant 1} |R_\nu(t)| < \infty\,, \quad \sup_{t\geqslant 1} |S_\nu(t)| < \infty\,.$$

Les résultats bien plus précis sont donnés dans le chapitre VII du livre de Watson qui souligne à plusieurs reprises les ressemblances entre le couple $\{J_\nu, Y_\nu\}$ et celui formé de cosinus et sinus. Exactement comme

$$\mathrm{e}^{\pm i\nu t} = \cos\nu t \pm i \sin\nu t$$

on définit les fonctions de Hankel (où les fonctions de Bessel de troisième espèce) par

$$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t)\,, \quad H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t)\,;$$

évidemment, $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$ forme aussi un système fondamental de solutions (complexes) de l'équation de Bessel d'ordre ν.

L'analogie entre les J_ν et les fonctions trigonométriques est visible dans toute la théorie. Par exemple, à un niveau élémentaire, on vérifie directement que

$$J_{1/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \sin t\,, \quad J_{-1/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos t$$

et on peut démontrer que (cf. Watson, pp. 53-55), pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$J_{n+1/2}(t) = t^{-1/2}\left\{P_n\left(\frac{1}{t}\right)\sin t + Q_n\left(\frac{1}{t}\right)\cos t\right\}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes (cf. Ex. 48, sect. 2.8). En effet, selon une analyse de Liouville, les seules valeurs du paramètre ν pour lesquels J_ν peut être exprimé comme une combinaison finie des fonctions « élémentaires » sont exactement de la forme $\nu = n + 1/2$, $n \in \mathbb{Z}$ (Watson, p. 120). Notons que lorsque t est grand l'équation de Bessel

$$x'' + \frac{1}{t}\,x' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0$$

peut être considéré comme proche de l'équation

$$x'' + x = 0$$

qui possède comme système fondamental de solutions les fonctions $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \sin t$. Ce raisonnement est à utiliser avec précaution (cf. Ex. 46, sect. 2.8) ; néanmoins, la proposition du paragraphe 2.7.9 justifie l'affirmation avancée ici. Les fonctions $J_{n+1/2}$, $Y_{n+1/2}$, $n \in \mathbb{Z}$, s'appellent souvent les *fonctions de Bessel sphériques*.

Certains auteurs écrivent N_ν au lieu de notre Y_ν et appellent ces fonctions les fonctions de Neumann ; cette appellation ne semble pas avoir beaucoup de justification historique. Même si C. Neumann avait écrit une monographie de base (en 1867) sur la théorie des fonctions de Bessel, dans laquelle il avait introduit d'autres fonctions utiles, l'origine de Y_ν semble être due aux travaux de Hankel, Weber et Schläfli ; par ailleurs, Hankel lui-même utilisait la notation Y_ν pour notre πY_ν.

Les valeurs numériques de $J_\nu(t)$, $Y_\nu(t)$ pour diverses spécifications de ν et de t sont disponibles soit dans les tables (anciennement) soit avec des logiciels appropriés.

2.6.9 Démonstration de la proposition 2.6.5

On prend $t_0 = 0$ pour simplifier l'écriture ; l'équation différentielle s'écrit

$$t^2x''(t) + ta(t) \cdot tx'(t) + t^2b(t)\,x(t) = 0 \tag{2.69}$$

où

$$ta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$$
$$t^2b(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots$$

pour $|t| < R$. On introduit dans (2.69)

$$x(t) = t^\lambda(c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots) = \sum_{n\geqslant 0} c_nt^{\lambda+n}$$

avec

$$tx'(t) = \sum_{n\geqslant 0}(\lambda + n)c_nt^{\lambda+n}\,, \qquad t^2x''(t) = \sum_{n\geqslant 0}(\lambda + n)(\lambda + n - 1)c_nt^{\lambda+n}$$

ce qui donne

$$t^{\lambda}\left\{\sum_{n\geqslant 0}(\lambda+n)(\lambda+n-1)c_n t^n+\sum_{n\geqslant 0}a_n t^n\cdot\sum_{n\geqslant 0}(\lambda+n)c_n t^n\right.$$
$$\left.+\sum_{n\geqslant 0}b_n t^n\cdot\sum_{n\geqslant 0}c_n t^n\right\}=0\,.$$

En égalisant le coefficient de $t^{\lambda+n}$ à zéro pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient

$$c_0\{\lambda(\lambda-1)+\lambda a_0+b_0\}=0$$

$$c_n\{(\lambda+n)(\lambda+n-1)+(\lambda+n)a_0+b_0\}+\sum_{j=0}^{n-1}c_j\{(\lambda+j)a_{n-j}+b_{n-j}\}=0\,,\quad n\geqslant 1\,.$$

En posant

$$D(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+\lambda a_0+b_0$$
$$F_{n-1}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}c_j\{(\lambda+j)a_{n-j}+b_{n-j}\}\,,$$

on a

$$c_0\,D(\lambda)=0$$
$$c_n\,D(\lambda+n)=-F_{n-1}(\lambda)\,,\quad n\geqslant 1\,. \tag{2.70}$$

Soient λ_1, λ_2 les solutions de l'équation déterminante $D(\lambda) = 0$ avec $\mathrm{Re}(\lambda_1-\lambda_2)\geqslant 0$; avec $\lambda=\lambda_1$, $c_0 = 1$, on obtient de (2.70) successivement $c_1, c_2, \ldots$ où c_n est déterminé par

$$c_n=\frac{-F_{n-1}(\lambda_1)}{D(\lambda_1+n)}\,,\quad n\geqslant 1\,;$$

on observe que $F_{n-1}(\lambda_1)$ contient c_j, a_j, b_j seulement pour $j\leqslant n-1$ et que $D(\lambda_1+n)\neq 0$, $n\geqslant 1$. Puisque

$$D(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,,$$

on a $D(\lambda_1+n)=n(n+\lambda_1-\lambda_2)$; si $\lambda_1-\lambda_2=\delta$, on obtient

$$\big|D(\lambda_1+n)\big|\geqslant n\big|n-|\delta|\big|\,.$$

Nous démontrons maintenant que si $\lambda=\lambda_1$, $c_0 = 1$ et c_n est déterminé par (2.70), $n\geqslant 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0}|c_n t^n|<\infty$ pour $|t|<R$. En effet de (2.70), on a, pour $n\geqslant 1$,

$$n\big|n-|\delta|\big|\,|c_n|\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}|c_j|\,\big|(\lambda_1+j)a_{n-j}+b_{n-j}\big|\,. \tag{2.71}$$

On fixe $r \in]0, R[$ et on choisit $M = M(r) > 0$ tel que

$$|a_n| \leqslant Mr^{-n}, \quad |b_n| \leqslant Mr^{-n}, \qquad n \geqslant 0 ;$$

il suffit de prendre $M = \max(M_1, M_2)$ où

$$M_1 = \sup_{|t|\leqslant r} \sum_{n\geqslant 0} |a_n t^n|, \quad M_2 = \sup_{|t|\leqslant r} \sum_{n\geqslant 0} |b_n t^n| .$$

De (2.71), on obtient, pour $n \geqslant 1$,

$$n|n - |\delta|| \, |c_n| \leqslant M \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|c_j|}{r^{n-j}} \left(|\lambda_1| + j + 1\right). \tag{2.72}$$

Soient $\gamma_n = |c_n|$ si $0 \leqslant n \leqslant |\delta|$ et pour $n > |\delta|$

$$n\big(n - |\delta|\big)\gamma_n = M \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma_j}{r^{n-j}} \left(|\lambda_1| + j + 1\right). \tag{2.73}$$

En comparant (2.73) avec (2.72), on obtient, par récurrence,

$$0 \leqslant |c_n| \leqslant \gamma_n, \quad n \geqslant 0 .$$

En écrivant (2.73) avec $(n+1)$ remplaçant $n > |\delta|$, on obtient

$$\begin{aligned} r(n+1)\big(n+1-|\delta|\big)\gamma_{n+1} &= M \sum_{j=0}^{n} \frac{\gamma_j}{r^{n-j}} \big(|\lambda_1| + j + 1\big) \\ &= n\big(n - |\delta|\big)\gamma_n + M\gamma_n \big(|\lambda_1| + n + 1\big) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{n\big(n - |\delta|\big) + M\big(|\lambda_1| + n + 1\big)}{r(n+1)\big(n+1-|\delta|\big)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{r}$$

ce qui prouve que

$$\sum_{n\geqslant 0} |\gamma_n t^n| < \infty, \quad |t| < r .$$

Puisque $|c_n| \leqslant \gamma_n$, on en déduit la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} |c_n t^n|$ pour $|t| < r$; r étant un nombre quelconque entre zéro et R, on a la convergence de $\sum_n |c_n t^n|$ pour $|t| < R$.

Le même raisonnement donne la convergence de $\sum_n |c_n t^n|$, $|t| < R$, lorsque les c_n sont calculés avec $\lambda = \lambda_2$, pourvu que $D(\lambda_2 + n) \neq 0$, $n \geqslant 0$. Ainsi, la proposition 2.6.5 est démontrée lorsque $\lambda_1 - \lambda_2$ n'est pas un entier.

Supposons que $\lambda_1 - \lambda_2 = s \in \mathbb{N}$; écrivons u_1 pour la solution obtenue ci-dessus avec $\lambda = \lambda_1$, $c_0 = 1$, c'est-à-dire

$$u_1(t) = t^{\lambda_1}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} c_n t^n\right), \quad t \in B'(0\,;R)\,.$$

Pour fixer les idées et pour éviter une discussion concernant la détermination de t^{λ_1} lorsque $t \in \mathbb{C}$, nous considérons d'abord $t > 0$ où $t^{\lambda_1} = \exp(\lambda_1 \ln t)$. Soit $0 < r < R$ tel que $u_1(t) \neq 0$ pour $0 < t < r$. Du procédé donné dans le paragraphe 2.5.3, on sait qu'une seconde solution u_2, linéairement indépendante de u_1, est obtenue en posant, pour $0 < t < r$,

$$u_2(t) = u_1(t)F(t)\,, \quad F(t) = \int u_1^{-2}(t)\exp\bigl(-A(t)\bigr)\,\mathrm{d}t$$

où A est une primitive de a et F est une primitive de $u_1^{-2}\,\mathrm{e}^{-A}$ dans $]\,0\,,\,r\,[$ (cf. (2.42)). Puisque

$$a(t) = \frac{1}{t}\,(a_0 + a_1 t + \cdots)\,,$$

on peut prendre

$$A(t) = a_0 \ln t + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2} + \cdots$$

Donc

$$u_1^{-2}\,\mathrm{e}^{-A(t)} = \frac{t^{-a_0}\exp -(a_1 t + a_2 t^2/2 + \cdots)}{t^{2\lambda_1}\bigl(1 + \sum_{n\geqslant 1} c_n t^n\bigr)^2}\,, \quad 0 < t < r\,,$$

car $\exp(-a_0 \ln t) = t^{-a_0}$; notons que $\lambda_2 = \lambda_1 - s$ et $1 - a_0 = \lambda_1 + \lambda_2$ car λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation déterminante

$$\lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0 = 0\,;$$

donc $a_0 = 1 + s - 2\lambda_1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_1^{-2}(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} &= \frac{\exp -(a_1 t + a_2 t^2/2 + \cdots)}{t^{s+1}\bigl(1 + \sum_{n\geqslant 1} c_n t^n\bigr)^2} = t^{-s-1} g(t) \\ &= t^{-s-1}(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots) \end{aligned} \tag{2.74}$$

car, g étant une fonction holomorphe de t pour $|t| < r$ avec $g(0) = 1$, on peut écrire $g(t) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n t^n$, $t \in B(0\,;r)$.

Si $s = 0$, on obtient de (2.74) une primitive F de $u_1^{-2}\,\mathrm{e}^{-A}$ dans $]\,0\,,\,r\,[$ sous la forme

$$F(t) = \ln t + \left(\alpha_1 t + \alpha_2 \frac{t^2}{2} + \alpha_3 \frac{t^3}{3} + \cdots\right) = \ln t + f_2(t)$$

où f_2 est holomorphe dans $B(0\,;r)$.

De même, si $s > 0$, on a de (2.74)

$$\begin{aligned} F(t) &= \alpha_s \ln t + \frac{t^{-s}}{-s} + \alpha_1 \frac{t^{1-s}}{1-s} + \cdots + \alpha_{s-1} \frac{t^{-1}}{-1} + \alpha_{s+1} \frac{t}{1} + \cdots \\ &= \alpha_s \ln t + t^{-s}\left(\frac{1}{-s} + \frac{\alpha_1}{1-s}\, t + \cdots + \frac{\alpha_{s-1}}{-1}\, t^{s-1} + \frac{\alpha_{s+1}}{1}\, t^{s+1} + \cdots\right) \\ &= \alpha_s \ln t + t^{-s} f_2(t) \end{aligned}$$

où f_2 est holomorphe dans $B(0\,;r)$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.6.5. ♦

REMARQUES. On voit que si $s = 0$, alors $c = 1$ est un choix possible dans (2.54) ; par contre, si $s > 1$, c dans (2.54) doit être un multiple non nul de α_s où $\alpha_s = g^{(s)}(0)/s!$, g étant donné par la série entière $1 + \alpha_1 t + \cdots$ de (2.74) ; donc, dans ce cas, $c = 0$ si $\alpha_s = 0$ et $c \neq 0$ si $\alpha_s \neq 0$.

Notons que si a, b sont des fonctions réelles et si les racines λ_1, λ_2 de l'équation déterminante sont réelles, alors les c_n obtenus de (2.70) sont réels et on obtient un système fondamental de solutions réelles u_1, u_2 définies dans $]\,0\,,\,r\,[$ (avec $r = R$ éventuellement). Leurs prolongements analytiques dans $B'(0\,;r)$ (muni d'une coupure pour tenir compte de $\ln t$) sont immédiats.

Soulignons la logique sous-jacente au procédé décrit dans la proposition 2.6.5. Une solution formelle

$$x(t) = (t - t_0)^{\lambda} \sum_{n \geqslant 0} c_n (t - t_0)^n$$

introduite dans l'équation différentielle donnée fournit au moins une valeur $\lambda = \lambda_1$ et les constantes c_n (uniquement déterminées par λ_1) ; avec ces valeurs de λ_1 et des c_n, on démontre que la série entière associée à $x(t)$ converge au moins pour $|t| < R$ (R étant fixé par la donnée des coefficients a, b). Alors, la solution formelle donne une vraie solution u_1 ; souvent, le procédé donne deux vraies solutions u_1, u_2 linéairement indépendantes (si $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$). On verra dans les exercices que ce procédé ne donne pas de résultat probant si t_0 est une singularité forte (c'est-à-dire non faible).

On observe que dans le cas de l'équation de Bessel de paramètre $\nu = n + 1/2$, $n \in \mathbb{N}$, les deux solutions $\lambda_1 = \nu$ et $\lambda_2 = -\nu$ de l'équation déterminante $\lambda^2 - \nu^2 = 0$ sont telles que $\lambda_1 - \lambda_2 = 2n + 1 \in \mathbb{N}^*$, mais néanmoins l'équation possède deux solutions linéairement indépendantes $J_{\pm\nu}$ de la forme (2.53) ; dans cet exemple, la constante c de (2.54) est nulle.

2.7 ÉTUDE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

2.7.1 Introduction

Un certain nombre de propriétés qualitatives des solutions d'une équation différentielle peuvent être déduites directement de la structure même de l'équation, sans qu'il soit nécessaire de la résoudre analytiquement. Un exemple simple de cette affirmation est fourni par l'équation $x' = f(t,x)$, x réel, $f(t,x) \geqslant 0$; alors on sait que toute solution de cette équation est une fonction croissante sans que l'on sache calculer une quelconque de ses solutions. Dans cette section, nous étudierons quelques propriétés qualitatives des solutions des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre :

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{2.75}$$

où a, b *sont deux fonctions réelles continues définies dans un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. Nous étudierons surtout les zéros des solutions non triviales de (2.75) et le comportement oscillatoire de leurs solutions. Les résultats obtenus seront utiles même lorsque l'on connaît les solutions explicitement. Ainsi, même si J_ν est une solution explicite de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$, il n'est pas a priori évident que $J_\nu(t) = 0$ pour un $t > 0$; on démontrera en fait que $J_\nu(t) = 0$ possède une infinité dénombrable de solutions $t_n(\nu) > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, avec $t_n(\nu) \to \infty$ $(n \to \infty)$. Ce résultat nous sera utile dans la suite.

2.7.2 Transformation des équations

Soit A une primitive de a dans I ($A' = a$ dans I) ; si $p = \mathrm{e}^A$, on a

$$\left(px'\right)' = px'' + pax' \ ;$$

donc, x est une solution de (2.75) si et seulement si x est une solution de l'équation

$$\left(px'\right)' + qx = 0 \tag{2.76}$$

où $p = \mathrm{e}^A$, $q = p\,b$. Notons que p et q sont des fonctions réelles continues définies dans I avec $p(t) > 0$, $t \in I$ (p étant de classe C^1). On dit que (2.76) est la forme ***autoadjointe*** de l'équation (2.75) ; une justification de cette terminologie apparaîtra plus tard.

On peut transformer (2.76) en une équation où $p = 1$. Soit

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\alpha}{p(\alpha)}\,, \quad t \in I\,,$$

où t_0 est un point quelconque de I, et $p(t) > 0$, $t \in I$, $p \in C^1(I)$; θ est une fonction strictement croissante avec

$$\theta'(t) = \frac{1}{p(t)}\,, \quad t \in I\,.$$

Si $J = \theta(I)$ posons $\tau = \theta^{-1} : J \to I$; J est aussi un intervalle. Pour $s \in J$, écrivons $y(s) = x\big(\tau(s)\big)$ où x est une solution de (2.76) définie dans I ; alors

$$\begin{aligned} y'(s) = x'\big(\tau(s)\big)\,\tau'(s) &= x'\big(\tau(s)\big)\,p\big(\tau(s)\big)\,, \quad s \in J \\ &= (px')\big(\tau(s)\big) \end{aligned}$$

car $\tau\big(\theta(t)\big) = t$, $t \in I$, donne

$$\tau'\big(\theta(t)\big) = \frac{1}{\theta'(t)} = p(t)\,, \quad t \in I\,,$$

d'où $\tau'(s) = p\big(\tau(s)\big)$, $s \in J$. De plus, x étant une solution de (2.76), on a

$$y''(s) = \big(px'\big)'\big(\tau(s)\big)\,\tau'(s) = -(qx)\big(\tau(s)\big)\,p\big(\tau(s)\big)\,, \quad s \in J\,,$$

ce qui s'écrit comme

$$y''(s) + Q(s)y(s) = 0\,, \quad s \in J \tag{2.77}$$

avec $Q(s) = p\big(\tau(s)\big)\,q\big(\tau(s)\big)$, $s \in J$. On vérifie d'autre part que si $y : J \to \mathbb{R}$ est une solution de (2.77), alors $x(t) = y\big(\theta(t)\big)$, $t \in I$, donne $x : I \to \mathbb{R}$ qui est une solution de (2.76). On dit que (2.77) est la forme ***normale*** d'une équation différentielle linéaire du second ordre ; ce procédé du passage de x à y s'appelle une *transformation de la variable indépendante.*

On peut transformer (2.75) directement en une forme normale (2.77) par une *transformation de la variable dépendante* en posant

$$y = x\,\mathrm{e}^{A/2} \quad \text{ou} \quad x = y\,\mathrm{e}^{-A/2}$$

où A est une primitive de a dans I. Un petit calcul donne (*en supposant que a est dérivable*)

$$x'' + ax' + bx = y''\,\mathrm{e}^{-A/2} + \left(b - \frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2}\right)x$$

ce qui entraîne que x est une solution de (2.75) si et seulement si y est une solution de

$$y'' + qy = 0 \tag{2.78}$$

où $q = b - a^2/4 - a'/2$ est continue dans I si $a \in C^1(I)$.

Remarquons qu'une solution x de (2.75) s'annule en un point t si et seulement si la solution y de (2.78) s'annule en ce même point t. Une remarque analogue est applicable aux solutions y de (2.77). Pour l'étude des zéros des solutions de (2.75), il nous suffit donc de considérer l'équation dans sa forme normale (2.78), quitte à faire éventuellement l'hypothèse que a est de classe C^1 (une hypothèse vérifiée dans toutes les équations intéressantes). En pratique, il est aussi utile de considérer l'équation dans sa forme autoadjointe générale (2.76).

2.7.3 Zéros des solutions

Rappelons d'abord qu'une solution non triviale quelconque de (2.75) possède seulement des zéros *simples* et *isolés* ; autrement dit, si $x : I \to \mathbb{R}$ vérifie (2.75) et $x(t_0) = 0$, $x \not\equiv 0$, alors $x'(t_0) \neq 0$ (t_0 est un zéro simple de x) et $x(t) \neq 0$ si $t \in I \cap J$ où J est un intervalle ouvert contenant $t_0 \in I$ (voir la remarque après (2.41), § 2.5.3). Alors x possède un nombre fini de zéros dans chaque sous-intervalle compact de I ; on dit que $t_1 < t_2$ sont des ***zéros successifs*** de x si $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = 0$ mais $x(t) \neq 0$, $t \in \,]\, t_1 \,,\, t_2 \,[$. Remarquons que pour une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ dont les zéros sont toujours isolés, si $x(t_1) = 0$ et si t_1 n'est pas le seul zéro de x, alors il existe un $t_2 \in I$ tel que t_1, t_2 sont des zéros successifs de x ($t_1 < t_2$ ou $t_2 < t_1$).

Dans la suite, sauf mention contraire, par solution d'une des équations (2.75), (2.76), (2,77), (2,78), on entend une solution définie dans tout l'intervalle I en question.

(i) ***Séparation des zéros***

Soient u_1, u_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2.75). Alors les zéros de u_1 sont distincts de ceux de u_2 ; de plus, entre deux zéros successifs de u_1, il existe exactement un zéro de u_2 et vice versa.

DÉMONSTRATION

Soit W le wronskien de u_1, u_2 ; on a

$$W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t) \neq 0\,, \quad t \in I\,.$$

Ceci exclut la possibilité d'avoir $u_1(t_0) = u_2(t_0) = 0$ car alors $W(t_0) = 0$; donc les zéros de u_1 sont distincts de ceux de u_2. Supposons que $t_1 < t_2$ sont deux zéros successifs de u_1 ; on peut supposer que $u_1(t) > 0$, $t \in \,]\, t_1 \,,\, t_2 \,[$ (sinon on prendrait $-u_1$) ; alors $u_1'(t_1) > 0$, $u_1'(t_2) < 0$ (car $u_1'(t_1) \neq 0$, $u_1'(t_2) \neq 0$, u_1 étant une solution non triviale). Puisque $W(t)$ ne change pas de signe pour $t \in I$ et

$$W(t_1) = -u_2(t_1)u_1'(t_1)\,, \quad W(t_2) = -u_2(t_2)u_1'(t_2)\,,$$

on conclut que $u_2(t_1)$, $u_2(t_2)$ sont de signes opposés car

$$0 < W(t_1)W(t_2) = c\,u_2(t_1)u_2(t_2)\,, \quad c = u_1'(t_1)u_1'(t_2) < 0\,.$$

Donc, il existe $t_0 \in]\,t_1\,,\,t_2\,[$ tel que $u_2(t_0) = 0$; s'il y avait un autre zéro t_0' de u_2 dans $]\,t_1\,,\,t_2\,[$, on aurait un zéro de u_1 entre t_0 et t_0' (selon le raisonnement déjà utilisé), ce qui est exclu par le fait que $u_1(t) \neq 0$, $t \in]\,t_1\,,\,t_2\,[$. ♦

A titre d'exemple simple, on peut considérer les deux solutions linéairement indépendantes, $u_1(t) = \cos t$, $u_2(t) = \sin t$, de l'équation $x'' + x = 0$. Les zéros de u_2, $\{n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}$, sont intercalés entre les zéros de u_1, $\{(n+1/2)\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}$, comme prévu dans la proposition sur la séparation des zéros.

Pour les propositions suivantes, il est commode de considérer les équations dans leurs formes normales (2.78) ou autoadjointes (2.76).

(ii) ***Théorème de comparaison***

Supposons que dans l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $p > 0$,

$$(pu_1')' + q_1u_1 = 0\,, \quad (pu_2')' + q_2u_2 = 0$$

où p, q_1, q_2, u_1, u_2 sont des fonctions réelles définies dans I avec p de classe C^1, q_1, q_2 continues, $q_1 \leqslant q_2$, u_1, u_2 de classe C^2 et non identiquement nulles dans I. Si $t_1 < t_2$ sont deux zéros successifs de u_1, alors ou bien $u_2(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in]\,t_1\,,\,t_2\,[$ ou bien il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour $t \in [\,t_1\,,\,t_2\,]$, $u_2(t) = c\,u_1(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$.

DÉMONSTRATION

Un petit calcul montre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,p(u_1'u_2 - u_1u_2') = (pu_1')'u_2 - (pu_2')'u_1 = (q_2 - q_1)u_1u_2\,.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $u_1(t) > 0$ pour $t_1 < t < t_2$ (sinon on prendrait $-u_1$) ; si $u_2(t) \neq 0$ pour $t_1 < t < t_2$, on peut également supposer que $u_2(t) > 0$ pour $t_1 < t < t_2$; alors

$$u_1u_2(q_2 - q_1) \geqslant 0 \quad \text{dans } [\,t_1\,,\,t_2\,]$$

et

$$0 \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\{p(u_1'u_2 - u_1u_2')\}\,\mathrm{d}t = p(t_2)u_1'(t_2)u_2(t_2) - p(t_1)u_1'(t_1)u_2(t_1)$$

en tenant compte de $u_1(t_1) = 0$, $u_1(t_2) = 0$. Puisque $u_1'(t_1) > 0$, $u_1'(t_2) < 0$ (voir la démonstration de *(i)*), on conclut que $u_2(t_1) = 0$, $u_2(t_2) = 0$ et

$$\int_{t_1}^{t_2} u_1u_2(q_2 - q_1)\,\mathrm{d}t = 0$$

ce qui entraîne que $q_1(t) = q_2(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Si $q(t)$ est la valeur commune de $q_1(t)$, $q_2(t)$, $t \in [\,t_1\,,\,t_2\,]$, alors u_1, u_2 sont deux solutions de l'équation

$$(px')' + qx = 0$$

définies dans $[t_1, t_2]$, avec $u_1(t_1) = u_2(t_1) = 0$; en utilisant le théorème d'unicité des solutions, on conclut que u_2 est multiple non nul de u_1 dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. ♦

REMARQUES. On peut retenir l'esprit du théorème de comparaison en l'interprétant intuitivement comme suit : le nombre de zéros des solutions d'une équation $(px')' + qx = 0$ augmente lorsque q augmente. A titre d'exemple simple, considérons les équations suivantes ($p \equiv 1$, $q \equiv 0$ ou 1 ou 4) :

$$x'' = 0, \quad x'' + x = 0, \quad x'' + 4x = 0.$$

Les solutions non triviales de $x'' = 0$ ($t \mapsto At + B$) possèdent au plus un zéro ; celles de $x'' + x = 0$ ($t \mapsto A\sin(t - \theta)$) forment une progression arithmétique $\{n\pi + \theta\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (de raison π) et celles de $x'' + 4x = 0$ ($t \mapsto A\sin 2(t - \theta)$) forment une progression arithmétique $\{n\pi/2 + \theta\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (de raison $\pi/2$). (Ici, θ, A et B sont des nombres réels arbitraires avec $A \neq 0$ ou $(A, B) \neq (0, 0)$.)

Malgré sa simplicité, le théorème de comparaison nous fournit des informations considérables comme cela est illustré par l'énoncé suivant.

(iii) ***Unicité des zéros***
Une solution non triviale de l'équation $x'' + qx = 0$, $q(t) \leqslant 0$, $t \in I$ ($q : I \to \mathbb{R}$ étant continue), ne peut pas avoir plus qu'un zéro.

DÉMONSTRATION

On utilise le théorème de comparaison avec $p = 1$, $q_1 = q$, $q_2 = 0$, u_1 une solution non triviale de $x'' + qx = 0$ et $u_2 \equiv 1$ (une solution non triviale de $x'' = 0$). Si u_1 avait plus qu'un zéro, on pourrait considérer deux zéros successifs $t_1 < t_2$ de u_1 et on aurait ou bien un zéro de u_2 entre t_1 et t_2, ce qui est impossible car $u_2(t) \neq 0$, $t \in I$, ou bien $u_2(t) = c\,u_1(t)$, $c \in \mathbb{R}^*$, $t \in [t_1, t_2]$, ce qui est impossible aussi car cela entraînerait $u_2(t_1) = u_2(t_2) = 0$. ♦

REMARQUES. On peut aussi démontrer *(iii)* directement par un raisonnement élémentaire ; il suffit d'établir que les conditions $u'' + qu = 0$ ($q \leqslant 0$), $u(t_1) = 0$, $u(t_2) = 0$, $u(t) > 0$, $t \in]t_1, t_2[$ sont incompatibles ; en effet, ces conditions entraînent que $u'(t_1) > 0$, $u'(t_2) < 0$ et $u''(t) = -q(t)u(t) \geqslant 0$ si $t \in [t_1, t_2]$, c'est-à-dire $t \mapsto u'(t)$ est croissante dans $[t_1, t_2]$, ce qui contredit $u'(t_1) > 0$, $u'(t_2) < 0$.

A titre d'exemple, considérons l'équation d'Airy $x'' - tx = 0$; ici $q(t) = -t \leqslant 0$ si $t \geqslant 0$ et on conclut de *(iii)* qu'aucune solution non triviale ne peut s'annuler plus d'une fois dans $\mathbb{R}_+$; par contre, on verra dans la suite qu'une solution non triviale de l'équation d'Airy possède une infinité de zéros dans $\mathbb{R}_-$.

Les propositions de ce paragraphe ne nous permettent pas de démontrer l'existence des zéros d'une solution non triviale donnée, sans qu'il soit nécessaire de la comparer avec une autre solution ayant quelques zéros. Le paragraphe suivant présente une méthode pour affirmer directement l'existence des zéros des solutions de certaines équations.

2.7.4 Méthode de Prüfer

Nous établissons d'abord un lemme général.

LEMME. *Soit* $t \mapsto \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$, $t \in I$, *une fonction à valeurs dans* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *de classe* C^r, $r \geqslant 1$, *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Posons* $\rho(t) = \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}$ *et choisissons un* $\theta_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha(t_0) = \rho(t_0)\cos\theta_0$, $\beta(t_0) = \rho(t_0)\sin\theta_0$ *où* t_0 *est un point de* I. *Alors il existe une unique fonction* $\theta : I \to \mathbb{R}$ *de classe* C^r *telle que* $\theta(t_0) = \theta_0$ *et*

$$\alpha(t) = \rho(t)\cos\theta(t)\,, \quad \beta(t) = \rho(t)\sin\theta(t)\,, \qquad t \in I\,.$$

DÉMONSTRATION

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\rho(t) \equiv 1$ (sinon on considère $(\alpha/\rho,\ \beta/\rho)$. Posons $f = \alpha + i\beta$; alors $f : I \to \mathbb{C}^*$ est de classe C^r avec $\big|f(t)\big| = 1$, $t \in I$; définissons

$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} f'(s)\overline{f}(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,,$$

et vérifions que $f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$, $t \in I$. En effet, soit

$$g(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta(t)}\,, \quad t \in I\,;$$

alors $g(t_0) = f(t_0)\,\mathrm{e}^{-i\theta_0} = 1$ et

$$g'(t) = f'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta(t)} - f(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta(t)}f'(t)\overline{f}(t) = 0\,, \quad t \in I$$

car $f(t)\overline{f}(t) \equiv 1$. Donc $g(t) \equiv 1$ et $f(t) = \mathrm{e}^{i\theta(t)}$, $t \in I$; il est évident que θ est de classe C^r si α, β donc f sont de classe C^r.

Pour démontrer l'unicité de la fonction θ, on procède comme suit : si $f = \mathrm{e}^{i\theta} = e^{i\varphi}$ avec $\varphi(t_0) = \theta_0$, alors $\exp i(\theta - \varphi) = 1$ d'où

$$\theta(t) - \varphi(t) = 2\pi n(t)\,, \quad t \in I\,,$$

où $n(t) \in \mathbb{Z}$, $t \in I$. Puisque θ et φ sont continues, $t \mapsto n(t)$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ce qui entraîne que $n(t) = n_0$ est une constante ; or $n_0 = 0$ car $\theta(t_0) - \varphi(t_0) = 0$. ♦

REMARQUE. Le lemme est un cas particulier d'une proposition générale concernant la détermination continue d'un logarithme (vol. 2, chap. 5) ; il reste valable lorsque α et β sont seulement continues, θ étant alors une fonction continue.

Considérons maintenant une solution non triviale u de l'équation

$$\big(px'\big)' + qx = 0$$

où p, $q : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, $p > 0$ est de classe C^1 et q est continue. Alors,

$$t \longmapsto \big(p(t)u'(t)\,,\, u(t)\big)\,, \quad t \in I$$

est de classe C^1 et n'est jamais égale à $(0,0)$ car si pour un t_0, $u'(t_0) = 0$, $u(t_0) = 0$, alors $u \equiv 0$ d'après l'unicité des solutions. Le lemme permet d'écrire

$$p(t)u'(t) = \rho(t)\cos\theta(t)\,, \quad u(t) = \rho(t)\sin\theta(t)\,,\ t \in I\,, \tag{2.79}$$

avec $\rho : I \to \,]\,0\,,\,\infty\,[\,$, $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1, θ étant uniquement déterminée en fixant sa valeur en un point t_0 et $\rho = \big(u^2 + \big(pu'\big)^2\big)^{1/2}$.

Démontrons que

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{p}\cos^2\theta + q\sin^2\theta \\ \rho' &= \left(\frac{1}{p} - q\right)\rho\sin\theta\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{2.80}$$

En effet, de (2.79) on a

$$\big(pu'\big)' = \rho'\cos\theta - \theta'\rho\sin\theta\,, \quad u' = \rho'\sin\theta + \theta'\rho\cos\theta$$

d'où on obtient, en utilisant $\big(\rho u'\big)' = -qu$ et (2.79), les équations

$$\begin{aligned} \rho'\cos\theta - \theta'\rho\sin\theta &= -q\rho\sin\theta \\ \rho'\sin\theta + \theta'\rho\cos\theta &= \frac{\rho}{p}\cos\theta\,. \end{aligned}$$

En résolvant ces deux équations pour obtenir θ' et ρ', on arrive à (2.80).

D'autre part, on vérifie avec un petit calcul que *si* $\rho : I \to \,]\,0\,,\,\infty\,[\,$, $\theta : I \to \mathbb{R}$ *sont les solutions de (2.80), alors* u *définie par (2.79) est une solution non triviale de l'équation* $\big(px\big)' + qx = 0$.

En utilisant la proposition 1.2.7 (théorème global) on démontre aisément que la condition $\theta(t_0) = \theta_0$ $(t_0 \in I)$ détermine une unique solution $\theta : I \to \mathbb{R}$ de (2.80), ce qui donne ensuite

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{p(s)} - q(s)\right)\sin\theta(s)\cos\theta(s)\,\mathrm{d}s\right\}\,, \quad t \in I\,,$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$. Ainsi, la donnée de θ_0 et ρ_0 détermine une unique solution non triviale $u = \rho\sin\theta$ de l'équation $\big(px'\big)' + qx = 0$; le passage de ρ_0 à $c\rho_0$ $(c > 0)$ multiplie la solution u par c. La solution u possède un zéro si et seulement si $\theta(t) = n(t)\pi$, $n(t) \in \mathbb{Z}$, pour un $t \in I$. En particulier, si I contient $[\,t_0\,,\,\infty\,[$ ou $\,]\,-\infty\,,\,t_0\,]$, alors $\lim_{|t|\to\infty}\theta(t) = \infty$ *est une condition suffisante pour que* u *possède une infinité de zéros dans* I.

2.7.5 Proposition (*théorème d'oscillation*)

Toute solution non triviale u de l'équation

$$(px')' + qx = 0$$

où p, $q : I \to \mathbb{R}$, I invervalle dans $\mathbb{R}$, $p > 0$ de classe C^1 et q continue avec $I \supset [\, t_0\,, \infty\,[$ et

$$q(t) \geqslant 0\,,\ t \geqslant t_0\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} q(t)\,\mathrm{d}t = \infty\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)} = \infty\,,$$

possède une infinité de zéros dans $[\, t_0\,, \infty\,[$.

DÉMONSTRATION

Nous utilisons les notations du paragraphe 2.7.4. Il suffit d'établir que $\theta(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. De (2.80) on constate que $\theta'(t) \geqslant 0$ si $t \geqslant t_0$, c'est-à-dire θ est monotone croissante dans $[\, t_0\,, \infty\,[$. Si $\theta(t) \not\to \infty$ $(t \to \infty)$, on aurait $\theta(t) \to c \in \mathbb{R}$ lorsque $t \to \infty$; si $c \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, il existerait $t_1 > t_0$ tel que

$$\sin^2 \theta(t) > \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 c > 0\,, \quad t \geqslant t_1\,,$$

car $\sin\theta(t) \to \sin c$ $(t \to \infty)$; de (2.80), on a

$$\theta(t) = \theta(t_1) + \int_{t_1}^{t} \theta'(s)\,\mathrm{d}s \geqslant \theta(t_1) + \alpha \int_{t_1}^{t} q(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

ce qui contredit $\theta(t) \to c$ $(t \to \infty)$; si $c = n\pi$ pour un entier n, alors $\cos^2 \theta(t) \to \cos^2 c > 0$ lorsque $t \to \infty$ et on aurait $t_1 > t_0$ tel que

$$\cos^2 \theta(t) > \frac{1}{2} \cos^2 c = \frac{1}{2}\,, \quad t \geqslant t_1\,,$$

d'où, en utilisant (2.80) comme précédemment, on aurait

$$\theta(t) \geqslant \theta(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

ce qui contredit encore $\theta(t) \to c$ $(t \to \infty)$. Ainsi, $\theta(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ entraînant $u(t) = 0$ pour une infinité de $t > t_0$ (§ 2.7.4). ♦

REMARQUE. Si $I \supset\,]-\infty\,, t_0\,]$ et si on suppose que

$$q(t) \geqslant 0\,,\ t \leqslant t_0\,, \quad \int_{-\infty}^{t_0} q(t)\,\mathrm{d}t = \infty\,, \quad \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{p(t)}\,\mathrm{d}t = \infty\,,$$

alors toute solution non triviale u de $(px')' + qx = 0$ possède une infinité de zéros dans $]-\infty\,, t_0\,]$. La démonstration est similaire à celle qui précède ; ici, on établit que $\theta(t) \to -\infty$ lorsque $t \to -\infty$.

Une conséquence immédiate de cette remarque est que toute solution non triviale de l'équation d'Airy, $x'' - tx = 0$, possède une infinité de zéros dans $]-\infty, 0]$ (et au plus un zéro dans $[0, \infty[$, § 2.7.3) ; mais on peut déduire ce résultat (même dans une forme plus précise, cf. Ex. 51, sect. 2.8) directement du théorème de comparaison en procédant comme dans le paragraphe 2.7.7.

2.7.6 Amplitudes des oscillations

Supposons que u est une solution non triviale de (2.76) avec p, q des fonctions de classe C^1 dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $p > 0$, $q > 0$ (ou $q < 0$) et pq *monotone dans* I. *Supposons que* $\xi_1 < \xi_2$ *sont deux extremums relatifs de* u *dans* I ; alors

$$|u(\xi_1)| \begin{cases} \geqslant |u(\xi_2)| & \text{si } (pq)' \geqslant 0 \\ \leqslant |u(\xi_2)| & \text{si } (pq)' \leqslant 0 \end{cases}$$

(avec inégalités strictes entre $|u(\xi_1)|$ et $|u(\xi_2)|$ si $(pq)'$ est toujours non nul). On dit que l'*amplitude* de u *diminue* (*augmente*) si pq est *croissante* (*décroissante*).

Pour la démonstration, posons

$$v = u^2 + \frac{1}{pq}(pu')^2 ;$$

un petit calcul montre que

$$v' = -(pq)'\Big(\frac{u'}{q}\Big)^2 .$$

Donc v est décroissante si $(pq)' \geqslant 0$ d'où $v(\xi_1) \geqslant v(\xi_2)$; puisque $u'(\xi_1) = 0$, $u'(\xi_2) = 0$, on en conclut que $u^2(\xi_1) \geqslant u^2(\xi_2)$, ce qui donne $|u(\xi_1)| \geqslant |u(\xi_2)|$ si $(pq)' \geqslant 0$; le cas $(pq)' \leqslant 0$ est traité de manière analogue. Notons que si $(pq)' > 0$ (< 0), alors v est strictement décroissante (croissante) car les zéros de u' sont isolés (à cause de la non-trivialité de u) d'où on déduit les inégalités strictes entre $|u(\xi_1)|$ et $|u(\xi_2)|$.

REMARQUE. En écrivant l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$ sous la forme autoadjointe

$$(tx')' + \Big(t - \frac{\nu^2}{t}\Big)x = 0 ,$$

on a $p(t) = t$, $q(t) = t - \nu^2/t$, $t > 0$. Du théorème d'oscillation (prop. 2.7.5) avec $t_0 > \nu$ (de sorte que $p > 0$, $q > 0$, dans $[t_0, \infty[$), on déduit que *toute solution non triviale* u *de l'équation de Bessel possède une infinité de zéros dans* $]0, \infty[$. Puisque, pour $t > \nu$,

$$p(t) > 0 , \; q(t) > 0 , \quad p(t)q(t) = t^2 - \nu^2 \text{ avec } (pq)'(t) = 2t > 0 ,$$

on conclut que *les amplitudes des solutions non triviales u de l'équation de Bessel diminuent strictement lorsque $t \to \infty$*. On démontrera dans la suite que $u(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$; ainsi, on peut dire que $t \mapsto u(t)$, $t > 0$, représente *une oscillation amortie (du type sinusoïdal) tendant vers zéro*.

Dans le paragrphe suivant, nous établissons la répartition des zéros de u de manière plus précise en utilisant le théorème de comparaison.

2.7.7 Zéros des fonctions de Bessel

Nous considérons les solutions non triviales de l'équation de Bessel

$$x'' + \frac{1}{t}\,x' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0$$

pour $\nu \geqslant 0$, $t > 0$. *Chaque solution non triviale possède une infinité dénombrable de zéros dans* $]\,0\,,\,\infty\,[$; *si* $\tau_0 < \tau_1 < \ldots$ *est une énumération de ces zéros, alors, pour* $n \geqslant 0$,

$$\{\tau_{n+1} - \tau_n\} \begin{cases} < \pi & si\ 0 \leqslant \nu < 1/2 \\ > \pi & si\ \nu > 1/2 \end{cases}$$

et $\lim_{n\to\infty}\{\tau_{n+1} - \tau_n\} = \pi$ *pour tout* $\nu \geqslant 0$; *pour* $\nu = 1/2$, $\tau_{n+1} - \tau_n = \pi$, $n \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION

En posant $y(t) = t^{1/2}x(t)$ comme proposé par la méthode générale pour transformer (2.75) en (2.78) (§ 2.7.2), on trouve que y vérifie l'équation

$$y'' + Q_\nu(t)y = 0 \tag{2.81}$$

avec $Q_\nu(t) = 1 - t^{-2}(\nu^2 - 1/4)$, si x vérifie l'équation de Bessel de paramètre ν. Notons que les zéros de x et de y dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ sont les mêmes. Il suffit donc de considérer les zéros des solutions non triviales u de (2.81) ; toute la discussion est basée sur les utilisations simples du théorème de comparaison (§ 2.7.3).

Soit $0 \leqslant \nu < 1/2$; alors $1 < Q_\nu(t)$, $t > 0$. On compare les solutions non triviales $t \mapsto \sin(t - \theta) = v(t)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ de $y'' + y = 0$ avec $u \not\equiv 0$ qui vérifie (2.81) ; puisque v possède une infinité de zéros dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ donnés par $n\pi + \theta$, $n \in \mathbb{N}$ (en supposant que $\theta \geqslant 0$), on conclut que u possède une infinité de zéros $\tau_0 < \tau_1 < \ldots$ dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ car il existe au moins un zéro de u entre $]\,n\pi+\theta\,,\,(n+1)\pi+\theta\,[$, $n \geqslant 0$. En prenant $\theta = \tau_n$, on conclut que dans $]\,\theta\,,\,\theta+\pi\,[$ il y a au moins un zéro de u, ce qui entraîne que

$$\{\tau_{n+1} - \tau_n\} < \pi\,, \quad 0 \leqslant \nu < \frac{1}{2}\,.$$

Soit $\nu > 1/2$; alors $Q_\nu(t) < 1$, $t > 0$. Admettons un instant que les zéros de u dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ forment une suite infinie $\tau_0 < \tau_1 < \ldots$ (ce que nous avons déjà démontré auparavant et ce que nous établirons de nouveau directement).

Le théorème de comparaison donne que dans l'intervalle ouvert $]\tau_n, \tau_{n+1}[$, il y a au moins un zéro de v où $v(t) = \sin(t-\theta)$, $\theta = \tau_n$, ce qui entraîne que

$$\pi < \{\tau_{n+1} - \tau_n\} \quad \text{si } \nu > \frac{1}{2}.$$

Puisque

$$\lim_{t\to\infty} Q_\nu(t) = 1, \quad \nu \geqslant 0,$$

étant donné c, $0 < c < 1$, $\nu > 1/2$, on peut déterminer $t_0 > 0$ tel que

$$c < Q_\nu(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Une solution non triviale de $y'' + cy = 0$ est donnée par $v(t) = \sin\big(\sqrt{c}(t-\theta)\big)$ pour chaque choix de $\theta \in \mathbb{R}$; les zéros successifs de v dans $]0, \infty[$ sont $\theta + n\pi/\sqrt{c}$, $n \geqslant 0$, si $\theta > 0$. Puisqu'il y a un zéro de u au moins dans chaque intervalle ouvert

$$\left]\theta + \frac{n\pi}{\sqrt{c}}, \theta + \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{c}}\right[, \quad n \geqslant \frac{t_0\sqrt{c}}{\pi},$$

on conclut que u possède aussi une infinité de zéros dans $]0, \infty[$ pour $\nu > 1/2$. En prenant $\theta = \tau_n$ (pour un $n \geqslant n_0(c)$) on constate que dans l'intervalle ouvert $]\theta, \theta + \pi/\sqrt{c}[$, u possède au moins un zéro d'où

$$\pi < \tau_{n+1} - \tau_n < \frac{\pi}{\sqrt{c}}, \quad n \geqslant n_0(c) ;$$

puisque c est arbitraire dans $]0, 1[$, on conclut (en laissant $c \to 1$) que

$$\lim_{n\to\infty} \{\tau_{n+1} - \tau_n\} = \pi \quad \text{si } \nu > \frac{1}{2}.$$

Pour $0 \leqslant \nu < 1/2$, on refait le dernier raisonnement avec $c > 1$ et un $t_0 > 0$ tel que

$$Q_\nu(t) < c, \quad t \geqslant t_0 ;$$

on aura

$$\frac{\pi}{\sqrt{c}} < \tau_{n+1} - \tau_n < \pi, \quad n \geqslant n_0(c)$$

d'où $\lim_{n\to\infty}\{\tau_{n+1} - \tau_n\} = \pi$ si $0 \leqslant \nu < 1/2$.

Si $\nu = 1/2$, (2.81) devient $y'' + y = 0$ dont toutes les solutions non triviales sont de la forme

$$u(t) = A\sin(t-\theta)$$

avec $A \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$; les zéros de u étant $\{n\pi + \theta\}_{n\in\mathbb{Z}}$, on a $\tau_{n+1} - \tau_n = \pi$, $n \geqslant 0$. ♦

Pour établir que toute solution de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$ tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ nous utilisons la proposition générale suivante.

2.7.8 Proposition

Toute solution de l'équation

$$x'' + \{\alpha^2 - f(t)\}x = 0\,, \quad t \geqslant t_0 \tag{2.82}$$

avec $\alpha > 0$, $f : [t_0\,, \infty[\to \mathbb{R}$, f *continue,* $\int_{t_0}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, *est bornée dans* $[t_0\,, \infty[$; *si* u *est une solution non triviale de (2.82), alors il existe* $A \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\lim_{t\to\infty} \{u(t) - A\sin(\alpha(t-\theta))\} = 0\,.$$

DÉMONSTRATION

Nous démontrons d'abord que toute solution non triviale u de (2.82) vérifie la condition

$$\sup_{t\geqslant t_0} |u(t)| < \infty\,.$$

En effet, étant donné u, nous établissons en premier que, pour $t \geqslant t_0$,

$$u(t) = v(t) + \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t} \sin\alpha(t-s)f(s)u(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.83}$$

où $v'' + \alpha^2 v = 0$, $v(t_0) = u(t_0)$, $v'(t_0) = u'(t_0)$. A cette fin, posons $y(t)$ pour le membre de droite dans (2.83) ; un calcul simple montre que

$$y''(t) + \alpha^2 y(t) = f(t)u(t) = u''(t) + \alpha^2 u(t)\,, \quad t \geqslant t_0\,,$$

avec $y(t_0) = v(t_0) = u(t_0)$, $y'(t_0) = v'(t_0) = u'(t_0)$, d'où l'on conclut que $y(t) = u(t)$, $t \geqslant t_0$, ce qui établit (2.83). En posant $M = \sup_{t\geqslant t_0}|v(t)|$ (notons que $M < \infty$ car $v(t)$ est de la forme $A\sin(\alpha(t-\theta))$), on obtient de (2.83) l'inégalité suivante :

$$|u(t)| \leqslant M + \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t} |f(s)|\,|u(s)|\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geqslant t_0\,.$$

On en déduit, grâce à l'inégalité de Gronwall (§ 1.2.8), que

$$|u(t)| \leqslant M\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t} |f(s)|\,\mathrm{d}s\right\}\,, \quad t \geqslant t_0\,, \tag{2.84}$$

d'où

$$\sup_{t\geqslant t_0}|u(t)| \leqslant M\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{\infty} |f(s)|\,\mathrm{d}s\right\} < \infty\,. \tag{2.85}$$

Si u est une solution non triviale de (2.82), on peut maintenant former la fonction w comme suit :

$$w(t) = u(t) + \frac{1}{\alpha}\int_{t}^{\infty} \sin\alpha(s-t)f(s)u(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geqslant t_0\,. \tag{2.86}$$

Puisque u est bornée et f est intégrable, w est bien définie par (2.86). Un calcul simple montre que

$$w''(t) + \alpha^2 w(t) = 0\,, \quad t \geqslant t_0\,,$$

ce qui prouve que

$$w(t) = A\sin\bigl(\alpha(t-\theta)\bigr)$$

pour un choix approprié de A, θ dans $\mathbb{R}$. On tire donc de (2.86) que, pour ce choix de A et θ,

$$\bigl|u(t) - A\sin\bigl(\alpha(t-\theta)\bigr)\bigr| \leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\bigl|u(t)\bigr|\,\frac{1}{\alpha}\int_t^\infty \bigl|f(s)\bigr|\,\mathrm{d}s \xrightarrow{t\to\infty} 0 \tag{2.87}$$

à cause de l'intégrabilité de $|f|$ sur $[\,t_0\,,\,\infty\,[$. ♦

REMARQUE. La proposition 2.7.8 est évidemment en défaut pour une équation du type

$$x'' + \bigl\{f(t) - \alpha^2\bigr\}x = 0\,;$$

si $f \equiv 0$, les solutions sont de la forme

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + c_2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$

et $\bigl|x(t)\bigr| \to \infty$ $(t \to \infty)$ si $c_2 \neq 0$. On peut démontrer que si $\alpha > 0$ et $\int_{t_0}^\infty \bigl|f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t < \infty$ (f étant continue), alors $x'' + \bigl\{f(t) - \alpha^2\bigr\}x = 0$ possède un système fondamental de solutions u_1, u_2 tel que $u_1(t) \sim \mathrm{e}^{-\alpha t}$ et $u_2(t) \sim \mathrm{e}^{\alpha t}$ lorsque $t \to \infty$ (où $a(t) \sim b(t)$ lorsque $t \to \infty$ équivaut à avoir $\lim_{t\to\infty} a(t)/b(t) = 1$).

2.7.9 Comportement asymptotique des fonctions de Bessel

Soit $t \mapsto x(t)$, $t > 0$, une solution réelle, non triviale, de l'équation de Bessel de paramètre $\nu \geqslant 0$; alors

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{t}}\,\sin(t-\theta) + \frac{R(t)}{t^{3/2}}\,, \quad t > 0 \tag{2.88}$$

où A, θ sont des constantes réelles et $R : \,]\,0\,,\,\infty\,[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\sup_{t\geqslant 1}\bigl|R(t)\bigr| < \infty$.

DÉMONSTRATION

On sait que $y(t) = t^{1/2}x(t)$ vérifie (2.81) ; en utilisant la proposition 2.7.8 avec $\alpha = 1$,

$$f(t) = t^{-2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\,,$$

on a, pour A, θ appropriés,

$$y(t) = A\sin(t-\theta) + S(t)\,, \quad t > 0\,,$$

où, d'après (2.87),

$$|S(t)| \leqslant C\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \frac{C}{t}\,, \quad t \geqslant t_0 > 0\,,$$

C étant une constante et $t_0 > 0$ arbitraire. En écrivant $S(t) = (1/t)R(t)$, $t > 0$, on a

$$y(t) = A\sin(t-\theta) + \frac{R(t)}{t}\,, \quad t > 0\,,$$

avec $\sup_{t\geqslant 1}|R(t)| < \infty$; (2.88) en est une conséquence immédiate. ♦

REMARQUE. Plus explicitement, (2.88) est valable pour toute combinaison linéaire

$$x(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t) \quad \text{ou} \quad c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)\ ;$$

naturellement les constantes A, θ (et la fonction R) dépendront du choix de la combinaison linéaire. On peut démontrer que, pour $x(t) = J_\nu(t)$,

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \theta = \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

et, pour $x(t) = Y_\nu(t)$,

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \theta = \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\,.$$

2.8 EXERCICES

1 Soient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier les formules suivantes :

$$A^2 = 0\,, \quad B^2 = 0\,, \quad AB \neq BA\,, \quad \mathrm{e}^{tA} = I_2 + tA\,, \quad \mathrm{e}^{tB} = I_2 + tB$$

$$\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2+1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{tB}\,\mathrm{e}^{tA}$$

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t \\ \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t \end{bmatrix} \neq \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} \text{ ou } \mathrm{e}^{tB}\,\mathrm{e}^{tA}\,.$$

Pour le calcul de $\mathrm{e}^{t(A+B)}$, résoudre le système d'équations $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$ sous la condition initiale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ pour avoir la première colonne et sous la condition initiale $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ pour avoir la seconde colonne.

2 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vérifier

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

en utilisant chacune des trois méthodes suivantes.

(i) Les valeurs propres de A sont $1 \pm i$; un vecteur propre complexe pour la valeur propre $(1+i)$ est $\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1+i \end{smallmatrix}\right]$; calculer

$$\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{(1+i)t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1+i \end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{(1+i)t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1+i \end{bmatrix}\right\}$$

pour obtenir les deux colonnes d'une matrice fondamentale

$$U(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} -2\cos t & -2\sin t \\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

pour l'équation $x' = Ax$. Alors $\mathrm{e}^{tA} = U(t)U^{-1}(0)$.

(ii) Résoudre les équations $x_1' = -2x_2$, $x_2' = x_1 + 2x_2$, directement sous les conditions initiales respectives $\big(x_1(0), x_2(0)\big) = (1,0)$, $\big(x_1(0), x_2(0)\big) = (0,1)$ pour obtenir les deux colonnes de e^{tA}.

(iii) Par la méthode de Putzer (§ 2.3.2).

3 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{bmatrix};$$

on a $A^2 = I_2$ d'où

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\, t + 11\,\mathrm{sh}\, t & -4\,\mathrm{sh}\, t \\ 30\,\mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t - 11\,\mathrm{sh}\, t \end{bmatrix}.$$

Obtenir le même résultat par la méthode de Putzer.

4 Soit l'équation

$$x' = A(t)x, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 2/t & -1/t^2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad t > 0\,;$$

établir que

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix}$$

est une matrice fondamentale en résolvant $t^2x_2'' - 2tx_2' + 2x_2 = 0$ qui se déduit de $x' = A(t)x$, $x = (x_1, x_2)$. Calculer la matrice résolvante $R(t,s)$ et résoudre $x' = A(t)x + b(t)$, $b(t) = (t, t^2)$, $x(1) = (0,0)$.

5 Soit l'équation $x' = A(t)x$,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a(t) & b(t) \end{bmatrix}, \qquad t > 0,$$

où a, b sont des fonctions continues ; calculer la matrice résolvante $R(t, s)$, $t > 0$, $s > 0$, en résolvant l'équation explicitement sous les conditions initiales $x(s) = (1, 0)$ et $x(s) = (0, 1)$.

6 Soit $t \mapsto A(t)$ une fonction matricielle continue (matrices réelles de type (N, N)) avec t dans un intervalle réel I ; supposons que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ pour s, $t \in I$. Démontrer que

$$R(t, s) = \exp\left(\int_s^t A(u)\,du\right)$$

est la matrice résolvante pour l'équation $x' = A(t)x$ en établissant directement que $\partial R/\partial t(t, s) = R(t, s)A(t) = A(t)R(t, s)$ et en se rappelant que $t \mapsto R(t, s)\xi$ est l'unique solution de $x' = A(t)x$ avec $x(s) = \xi$.

7 (Continuation de l'exercice 6) Pour $A(t) = \alpha(t)A + \beta(t)B$ avec $\alpha \in C(I)$, $\beta \in C(I)$, $AB = BA$, calculer $R(t, s)$ explicitement.

8 (Continuation de l'exercice 6) Démontrer que la formule pour $R(t, s)$ est en défaut si la famille $\{A(t)\}$ n'est pas formée de matrices permutables. (Il suffit de considérer un cas particulier de $A(t)$ dans l'exercice 5.)

9 Soit $\{U(t)\}_{t \in I}$ une matrice fondamentale de l'équation $x' = A(t)x$ où $t \mapsto A(t)$ est une fonction matricielle continue ($t \in I$, I intervalle réel, $A(t)$ matrice réelle de type (N, N)). Posons $W(t) = \det U(t)$; en utilisant la formule pour la dérivation d'un déterminant (§ 2.4.5), établir que

$$W'(t) = \{\operatorname{tr} A(t)\}W(t), \quad t \in I,$$

d'où

$$W(t) = W(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(u)\,du\right\}.$$

En déduire que si $R(t, s)$ est la matrice résolvante, alors

$$\det R(t, s) = \exp\left\{\int_s^t \operatorname{tr} A(u)\,du\right\}.$$

(Observer que si $U(t) = [u_{ij}(t)]$, alors $u'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(t)u_{kj}(t)$.)

10 Déduire de l'exercice 9 que, pour une matrice A de type (N, N),

$$\det\{\exp(tA)\} = \exp(t \operatorname{tr} A), \quad t \in \mathbb{R},$$

en observant que pour l'équation $x' = Ax$, $U(t) = \exp(tA)$ donne une matrice fondamentale. En particulier, $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$, une formule que l'on déduit immédiatement si A est diagonalisable (§ 2.3.1).

11 Déduire (2.30) en utilisant la formule pour $W(t)$ de l'exercice 9, en observant que $\operatorname{tr} \widetilde{A}(t) = -a_{n-1}(t)/a_n(t)$ où $\widetilde{A}(t)$ est donné par (2.27).

12 Soit A une matrice réelle de type $(2, 2)$. De la discussion donnée dans le paragraphe 2.3.4, démontrer l'affirmation suivante sur les solutions de l'équation $x' = Ax$: toute solution $t \mapsto x(t)$ possède la propriété $\lim_{t\to\infty} x(t) = (0, 0)$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, λ étant une valeur propre quelconque de A.

13 Généraliser l'exercice 12 au cas d'une matrice réelle A de type (N, N) en utilisant (2.19) et les remarques sur les $r_j(t)$ contenues dans le paragraphe 2.3.3. On démontre ainsi que toute solution de l'équation $x' = Ax$ possède la propriété $\lim_{t\to\infty} x(t) = (0, \ldots, 0)$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ pour chacune des valeurs propres λ de A.

14 Vérifier que l'équation $x^{(n)} = f(t)$, $f \in C(I)$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soumise à la condition initiale $x(t_0) = 0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = 0$, possède l'unique solution

$$v(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)\, ds, \quad t \in I.$$

En déduire que la solution générale de $x^{(n)} = f(t)$ est donnée par $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + v(t)$ où les a_j sont des constantes réelles. L'unique solution de $x^{(n)} = f(t)$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = c_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$ est donnée par

$$u(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(t - t_0) + \cdots + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}(t - t_0)^{n-1} + v(t), \quad t \in I.$$

15 Soit $Lx = x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)}$ où $a_j \in C(I)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, I un intervalle réel. Soit $v(t, s)$, $(t, s) \in I \times I$, tel que $t \mapsto v(t, s)$ est la solution de l'équation homogène $Lx = 0$ qui vérifie la condition initiale $x(s) = 0, \ldots, x^{(n-2)}(s) = 0, x^{(n-1)}(s) = 1$. Démontrer que si $f \in C(I)$, alors

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} v(t, s) f(s)\, ds, \quad t \in I,$$

donne la solution de $Lx = f$ qui vérifie $u(t_0) = \cdots = u^{(n-1)}(t_0) = 0$; on peut faire cette démonstration :

(i) par une vérification directe, ou
(ii) en utilisant (2.12) sur l'équation $y' = \widetilde{A}(t) + \widetilde{b}(t)$ ($\widetilde{A}$, $\widetilde{b}$ étant comme dans le paragraphe 2.4.1).

Noter que $\widetilde{b}(t) = f(t)e_n$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ et

$$R(t, s)e_n = \big(v(t, s), v'(t, s), \ldots, v^{(n-1)}(t, s)\big)$$

où $R(t, s)$ est la matrice résolvante, $v'(t, s) = \partial v(t, s)/\partial t$, etc. Déduire la formule (2.37) en observant que

$$K(t, s) = c_1(s)u_1(t) + c_2(s)u_2(t) = v(t, s)$$

pour un choix de $c_1(s)$, $c_2(s)$ tel que $v(s, s) = 0$, $v'(s, s) = 1$.

16 (Continuation de l'exercice 15) Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des constantes réelles ; si $t \mapsto w(t)$ est la solution de $Lx = 0$ telle que $w(0) = 0, \ldots, w^{(n-2)}(0) = 0$, $w^{(n-1)}(0) = 1$, alors $v(t, s) = w(t - s)$ et

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} w(t - s)f(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,,$$

donne la solution de $Lx = f$ qui vérifie $u(t_0) = \cdots = u^{(n-1)}(t_0) = 0$ (où $f \in C(I)$). Noter qu'ici $R(t, s) = \exp(t - s)\widetilde{A}$.

17 Soit $Lx = x'' + a(t)x' + b(t)x$, a, $b \in C(I)$, I intervalle de $\mathbb{R}$; soit u_1, u_2 un système fondamental de l'équation homogène $Lx = 0$. Soit $\widetilde{x}(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$ où $c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0$, $c_1'u_1' + c_2'u_2' = f$ ($f \in C(I)$) ; vérifier que $L\widetilde{x} = f$ et $c_1' = -fu_2/W$, $c_2' = fu_1/W$ où W est le wronskien de u_1, u_2. En prenant

$$c_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-f(s)u_2(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s\,, \quad c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)u_1(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s$$

on retrouve (2.37). (Souvent on prend pour c_1, c_2 deux primitives quelconques des fonctions concernées pour avoir une solution particulière de $Lx = f$ sous la forme $c_1u_1 + c_2u_2$.)

18 Considérer les équations :

(i) $x'' - \alpha^2 x = f(t)$,
(ii) $x'' + \alpha^2 x = f(t)$

où $\alpha > 0$, $f \in C(I)$, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Sous la condition initiale $x(t_0) = 0$, $x'(t_0) = 0$, l'unique solution de (i) est donnée par

$$v_1(t) = \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{sh}\,\alpha(t - s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,,$$

et l'unique solution de (ii) est donnée par

$$v_2(t) = \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t} f(s)\sin\alpha(t-s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I\,.$$

La solution générale de (i) est $x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + c_2\,\mathrm{e}^{\alpha t} + v_1(t)$ et celle de (ii) est $x(t) = c_1\cos\alpha t + c_2\sin\alpha t + v_2(t)$. (On peut utiliser (2.37) ou l'exercice 15).

19 Soit l'équation $(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$ (équation de Legendre avec paramètre $n = 1$). On vérifie que $u(t) = t$ est une solution ; en utilisant (2.42) on obtient une seconde solution non triviale v, linéairement indépendante de u, donnée par

$$v(t) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2}\,t\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)\,, & -1 < t < 1 \\[2ex] -1 + \dfrac{1}{2}\,t\ln\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)\,, & t > 1 \text{ ou } t < -1. \end{cases}$$

20 Soit l'équation $t^2x'' + tx' - x = t^2\,\mathrm{e}^t$, $t > 0$. L'équation homogène associée est eulérienne et elle possède les solutions non triviales linéairement indépendantes $u_1(t) = t$, $u_2(t) = t^{-1}$. En utilisant la méthode proposée par l'exercice 17, on obtient une solution particulière $c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t) = (1 - 1/t)\,\mathrm{e}^t$ avec

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t\,, \quad c_2(t) = \mathrm{e}^t\left(-\frac{t^2}{2} + t - 1\right).$$

On a alors la solution générale $x(t) = a_1(t) + a_2/t + (1-1/t)\,\mathrm{e}^t$, a_1, a_2 constantes réelles.

21 Soit $Lx = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)x^{(j)}$, les a_j étant des fonctions réelles et continues dans un intervalle I de $\mathbb{R}$; vérifier les affirmation suivantes :

(i) si $Lu_i = f_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, alors $Lu = f$ où $u = (u_1 + \cdots + u_m)$, $f = f_1 + \cdots + f_m$;

(ii) si $t \mapsto \xi(t)$ est une solution complexe de $Lx = f$, alors $u(t) = \mathrm{Re}\,\xi(t)$, $v(t) = \mathrm{Im}\,\xi(t)$, donnent des solutions réelles de $Lx = \mathrm{Re}\,f$ et de $Lx = \mathrm{Im}\,f$, respectivement.

22 Soit $Lx = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{(j)}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$; posons $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j$. Démontrer les affirmations suivantes :

(i) si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $P(\lambda) \neq 0$, alors pour tout polynôme p de degré $N \geqslant 0$, il existe un unique polynône q de degré N tel que $L\big(\mathrm{e}^{\lambda t}q(t)\big) = \mathrm{e}^{\lambda t}p(t)$;

(ii) si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité m de l'équation $P(z) = 0$, alors pour tout polynôme p de degré $N \geqslant 0$, il existe un unique polynôme q de degré N tel que $L\big(\mathrm{e}^{\lambda t}t^m q(t)\big) = \mathrm{e}^{\lambda t}p(t)$.

(En utilisant (2.33) et (2.34) on obtient l'égalité

$$L\left(\sum_{k=0}^{N} b_k t^k \, \mathrm{e}^{\lambda t}\right) = \left\{\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{k=j}^{N} C_j^{(k)} b_k\right) t^j\right\} \mathrm{e}^{\lambda t}$$

avec $C_k^{(k)} = P(\lambda) \neq 0$ dans le cas (i) ; le système d'équations linéaires

$$\sum_{k=j}^{N} C_j^{(k)} b_k = a_j\,, \quad j = 0, \ldots, N\,,$$

possède une unique solution $(b_0, \ldots, b_N)$ pour tout $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ car la matrice du système est une matrice triangulaire supérieure ayant les éléments diagonaux $C_k^{(k)} = P(\lambda) \neq 0$; donc, si $p(t) = \sum_{j=0}^{N} a_j t^j$, le polynôme $q(t) = \sum_{j=0}^{N} b_j t^j$ est uniquement déterminé par le système d'équations proposé. On démontre (ii) de même manière, en tenant compte du fait qu'ici $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$, $P(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$.)

REMARQUE. Les exercices 21 et 22 fournissent une méthode efficace pour le calcul explicite d'une solution particulière de l'équation $Lx = f$ lorsque $f = \sum_{j=1}^{N} f_j$ et chaque $f_j(t)$ est de la forme $p_j(t)\,\mathrm{e}^{\alpha_j t}$, p_j un polynôme. En écrivant $\sin\theta = (\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})/2i$, $\cos\theta = (\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})/2$, cette méthode permet de traiter les cas où f contient aussi des termes du type $p(t)\cos\alpha t$ ou $p(t)\sin\alpha t$.

23 Déterminer les solutions générales (réelles) pour les équations suivantes :

(i) $x'' + 4x = \mathrm{e}^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
(ii) $x'' + 4x = \sin\alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pm 2$;
(iii) $x'' + 4x = \sin 2t$;
(iv) $x'' - 5x' + 6x = \mathrm{e}^{\alpha t}(t+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 2, 3$;
(v) $x'' - 5x' + 6x = \mathrm{e}^{2t} t$;
(vi) $x^{(4)} - x = \mathrm{e}^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
(vii) $x^{(4)} + x = \cos\alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Si $Lx = x'' + 4x$, $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, noter que $L(\mathrm{e}^{\alpha t}) = \mathrm{e}^{\alpha t} P(\alpha)$ si $\alpha \neq \pm 2i$ et $L(\mathrm{e}^{\pm 2it}) = 0$, $L(t\,\mathrm{e}^{\pm 2it}) = P'(\pm 2i)\,\mathrm{e}^{\pm 2it}$, d'après (2.33) et (2.34) ; ces remarques permettent la résolution rapide de (i), (ii) et (iii). On suit le même procédé pour les autres équations.)

24 Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$ pour chacune des équations suivantes ($\alpha > 0$, $f \in C(\mathbb{R})$) :

(i) $x^{(4)} + \alpha^2 x = f(t)$;
(ii) $x^{(4)} - \alpha^2 x = f(t)$.

(Utiliser l'exercice 16.)

25 Un polynôme $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, est dit ***stable*** si toutes ses racines sont dans le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.

(i) Soit $Lx = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{(n-j)}$; démontrer que toute solution u de $Lx = 0$ vérifie $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ si et seulement si son polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est stable.

(ii) Soit $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, $a, b \in \mathbb{R}$; démontrer que $P(\lambda)$ est stable si et seulement si $a > 0$, $b > 0$.

(iii) Si $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 > 0$, est stable, on déduit de (ii) que tous les a_j sont > 0.

(Il suffit de décomposer $P(\lambda)$ en facteurs de la forme $(\lambda + c)$ et $(\lambda^2 + a\lambda + b)$ avec a, b, c réels.)

REMARQUE. Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de $P(\lambda)$ dans (iii) (avec $a_0 > 0$, $a_1, \ldots, a_n$ réels) est que les mineurs principaux $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, de la matrice M suivante, soient > 0 :

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

où la colonne numéro k de M a l'élément a_k sur la diagonale principale et est de la forme $(\ldots, a_{k+2}, a_{k+1}, a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots)$ avec $a_{k+j} = 0$ si $k + j < 0$ ou si $k + j > n$. Ainsi, pour $n = 3$,

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1\,, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3\,, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2\,;$$

donc, le polynôme $P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_3$, $a_0 > 0$, a_1, a_2, a_3 réels est stable si et seulement si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, ce qui équivaut aux conditions suivantes $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, $a_3 > 0$ (ce qui entraîne $a_2 > 0$ car $a_0 > 0$ par hypothèse). Une démonstration du critère de stabilité d'un polynôme réel (appelé le critère de Routh-Hurwitz) est donnée dans le volume 2 de F. R. Gantmacher (*The theory of matrices*, Chelsea, 1960).

26 Soit l'équation

$$x'' + ax' + bx = A\cos(\alpha t + \theta_0) \tag{2.89}$$

où a, b, A, α et θ_0 sont des nombres réels. Vérifier les affirmations suivantes :

(i) Si $(b - \alpha^2\,,\, a\alpha) \neq (0,0)$, alors $v_1(t) = B\cos(\alpha t + \theta_0 + \theta)$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution de (2.89) avec $B = A/R$, R, θ étant tels que $R\cos\theta = b - \alpha^2$, $R\sin\theta = -a\alpha$.

(ii) Si $a = 0$, $b = \alpha^2 > 0$, alors $v_2(t) = Bt\cos(\alpha t + \theta_0 - \pi/2) = Bt\sin(\alpha t + \theta_0)$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution de (2.89) avec $B = A/2\alpha$.

(iii) Si $\alpha = 0$, $b = 0$, une solution de (2.89) est donnée par $t \mapsto \big((A/a)\cos\theta_0\big)t$ si $a \neq 0$, par $t \mapsto \big((A/2)\cos\theta_0\big)t^2$ si $a = 0$.

27 (Continuation de l'exercice 26) Supposons que $a > 0$, $b > 0$ et écrivons

$$v(t) = v_1(t) = B(\alpha)\cos\big(\alpha t + \theta_0 + \theta(\alpha)\big)$$

avec $B(\alpha) = A/R(\alpha)$, $R(\alpha) = \big\{\big(b-\alpha^2\big)^2 + a^2\alpha^2\big\}^{1/2}$, $-\pi < \theta(\alpha) \leqslant \pi$. Démontrer les affirmations suivantes.

(i) Si u est un solution réelle quelconque de (2.89), alors $\lim_{t\to\infty}\big\{u(t) - v(t)\big\} = 0$. (Utiliser l'exercice 25(ii).)

(ii) On a

$$\inf_{\alpha} R(\alpha) = R(\alpha_0) = \begin{cases} a\left(b - \dfrac{a^2}{4}\right)^{1/2} & \text{si } b - \dfrac{a^2}{2} > 0 \text{ avec } |\alpha_0| = \left(b - \dfrac{a^2}{2}\right)^{1/2} \\ b & \text{si } b - \dfrac{a^2}{2} \leqslant 0 \text{ avec } \alpha_0 = 0. \end{cases}$$

(iii) $\sup_\alpha \big|B(\alpha)\big| = \big|B(\alpha_0)\big| = |A|/R(\alpha_0)$ où α_0 est défini dans (ii).

(iv) Lorsque $a \to 0$, on a $|\alpha_0| \sim \sqrt{b}$, $\big|B(\alpha_0)\big| \sim |A|/a\sqrt{b}$, $\big|\theta(\alpha_0)\big| \sim \pi/2$.

28 (Continuation de l'exercice 26) Supposons que $a = 0$, $b > 0$. Démontrer les affirmations suivantes.

(i) Si $\alpha = 0$, toute solution réelle u de (2.89) est de la forme

$$u(t) = c_1\cos b^{1/2}t + c_2\sin b^{1/2}t + \frac{A\cos\theta_0}{b}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

avec c_1, c_2 réels.

(ii) Si $\alpha \neq 0$, $b \neq \alpha^2$, toute solution réelle u de (2.89) est de la forme

$$u(t) = c_1\cos b^{1/2}t + c_2\sin b^{1/2}t + \frac{A}{b-\alpha^2}\cos(\alpha t + \theta_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

avec c_1, c_2 réels.

(iii) Si $b = \alpha^2 > 0$, toute solution réelle u de (2.89) est de la forme

$$u(t) = c_1 \cos b^{1/2}t + c_2 \sin b^{1/2}t + \frac{At}{2\alpha} \sin(\alpha t + \theta_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec c_1, c_2 réels.

(iv) Les solutions réelles u sont bornées dans les cas (i) et (ii) et non bornées dans le cas (iii).

REMARQUES. L'équation (2.89) fournit un outil mathématique important pour l'analyse de plusieurs phénomènes physiques. Supposons que $x(t)$ représente la position d'un point matériel de masse $m > 0$ attaché à une paroi fixe par un ressort ayant un coefficient d'élasticité $k > 0$; si $F(t)$ est la force externe exercée sur le point matériel au temps t et si $\mu > 0$ est le coefficient de frottement, alors le mouvement du point matériel est décrit par l'équation newtonienne

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t) + F(t)$$

ce qui s'écrit comme

$$x'' + ax' + bx = \frac{1}{m} F(t)$$

avec $a = \mu/m$, $b = k/m$. Si la force externe $F(t) = F_0 \cos(\alpha t + \theta_0)$, on dit que F_0 est son *amplitude*, α sa *fréquence*, θ_0 sa *phase* initiale ; on peut toujours prendre $F_0 \geqslant 0$ quitte à changer θ_0 à $\theta_0 + \pi$; on a ainsi l'équation (2.89) pour décrire la position $x(t)$ d'un point matériel de masse $m > 0$ soumis à une force externe d'amplitude Am de fréquence α et phase initiale θ_0 avec $a = \mu/m > 0$ mesurant le coefficient de frottement (ou résistance au mouvement) et $b = k/m > 0$ donnant le coefficient de rappel (ou restitution) à la position de l'équilibre. Les résultats des exercices 27 et 28 peuvent être alors interprétés comme ci-après.

- En présence du frottement ($a > 0$) le mouvement du point matériel se stabilise ($t \to \infty$) à un mouvement oscillatoire d'amplitude $B(\alpha)$, ayant la même fréquence α que celle de la force externe imposée mais une phase différente $\theta_0 + \theta(\alpha)$. Lorsque a est petit et la fréquence de la force externe α est presque égale à $\sqrt{b}$, l'amplitude $B(\alpha)$ devient grande en valeur absolue même lorsque l'amplitude A de la force externe est petite ; ce fait est appelé le phénomène de ***résonance***. Noter que lorsque $a = 0$, l'équation $x'' + bx = 0$ a comme solution générale $x(t) = C\cos(b^{1/2}t + \varphi)$ (C, φ nombres réels) ; on dit que $b^{1/2}$ est la fréquence *naturelle* du système. Ainsi, le phénomène de résonance est décrit dans les termes suivants : *si la fréquence de la force extérieure est proche de la fréquence naturelle du système, alors l'amplitude d'oscillation du système devient grand* (la force de frottement étant supposé relativement petite, c'est la condition $a^2 < 2b$).
- En absence de frottement ($a = 0$), le phénomène de résonance s'amplifie ; dans ce cas, si la fréquence naturelle $b^{1/2}$ du système est égale à la fréquence de la force extérieure α, alors l'amplitude d'oscillation du système devient arbitrairement grande.

Les considérations précédentes sont à la base des précautions prises dans diverses constructions mécaniques ou de génie civil ; on essaie d'éviter autant que possible un rapprochement de la fréquence naturelle du système ($\sqrt{b}$) à la fréquence α de la force extérieure (par exemple, force sismique ou autre).

L'équation (2.89) apparaît dans d'autres contextes. Supposons que $x(t)$ est le courant à temps t dans un circuit électrique composé de quatre dipôles, une induction L, une résistance R, une capacité C et une source de tension $U(t)$; alors, des lois de Kirchhoff, on déduit que x vérifie l'équation

$$Lx' + Rx + \frac{1}{C}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = U(t)$$

ce qui équivaut à

$$x'' + \frac{R}{L}\,x' + \frac{1}{LC}\,x = \frac{1}{L}\,U'(t)\ ;$$

dans la notation de (2.89), on aura

$$a = R/L\,,\quad b = 1/LC\,,\quad U'(t) = LA\cos(\alpha t + \theta_0)$$

Une interprétation des exercices 27 et 28 dans ce contexte donne des résultats de la théorie des circuits électriques.

29 Soit l'équation différentielle (d'Hermite)

$$x'' - 2tx' + \lambda x = 0\,.$$

Vérifier que

$$u_1(t) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} a_{2k}t^{2k}\,,\quad u_2(t) = t + \sum_{k\geqslant 1} a_{2k+1}t^{2k+1}\,,\quad t\in\mathbb{R}$$

donnent deux solutions linéairement indépendantes avec

$$a_{2k} = \frac{1}{2k!}\,\{4(k-1)-\lambda\}\{4(k-2)-\lambda\}\cdots(4-\lambda)(-\lambda)$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}\,\{2(2k-1)-\lambda\}\{2(2k-3)-\lambda\}\cdots(6-\lambda)(2-\lambda)\,.$$

En conclure qu'il existe une solution polynomiale si et seulement si $\lambda = 2n$, $n\in\mathbb{N}$; si $\lambda = 2n$, $n\in\mathbb{N}$, n pair, alors u_1 est un polynôme (pair) et si $\lambda = 2n$, $n\in\mathbb{N}$, n impair, alors u_2 est un polynôme (impair). Vérifier que si $y(t) = x(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ (§ 2.7.2), alors y vérifie l'équation $y'' + (\lambda + 1 - t^2)y = 0$.

(On pose

$$H_n(t) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cdot 2^{n/2} \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) \cdot u_1(t) & \text{si } n \text{ pair et } n \geqslant 2 \\ (-1)^{(n-1)/2} \cdot 2^{(n+2)/2} \cdot 3 \cdot 5 \cdots n \cdot u_2(t) & \text{si } n \text{ impair ;} \end{cases}$$

les polynômes ainsi définis s'appellent *polynômes d'Hermite*. On a

$$H_0(t) = 1,\ H_1(t) = 2t,\ H_2(t) = -2 + 4t^2,\ H_3(t) = -12t + 8t^3,\ \ldots\ ;$$

H_n est un polynôme de degré n, pair si n est pair et impair si n est impair, normalisé de telle façon que le coefficient de t^n dans H_n soit égal à 2^n. Voir le volume 2 ou le chapitre 4 pour d'autres propriétés des H_n.)

30 Soit l'équation différentielle (de Legendre)

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0$$

où n est un paramètre réel. Vérifier que, pour $|t| < 1$,

$$u_1(t) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} a_{2k} t^{2k}, \quad u_2(t) = t + \sum_{k \geqslant 1} a_{2k+1} t^{2k+1}$$

avec $a_2 = -\lambda/2$, $\lambda = n(n+1)$,

$$a_{2k} = -\frac{\lambda}{2k}\left(1 - \frac{\lambda}{2 \cdot 3}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{4 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{(2k-2)(2k-1)}\right), \quad k \geqslant 2$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\left(1 - \frac{\lambda}{1 \cdot 2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{3 \cdot 4}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{(2k-1)2k}\right), \quad k \geqslant 1$$

donnent deux solutions linéairement indépendantes. En conclure qu'il existe une solution polynomiale si et seulement si $\lambda = N(N+1)$ pour N un entier $\geqslant 0$ (ce qui équivaut à avoir $n = N$ ou $-(N+1)$). Si n est un entier pair $\geqslant 0$, alors u_1 est un polynôme (pair) et si n est un entier impair $\geqslant 1$, alors u_2 est un polynôme (impair). (Le n-ième polynôme de Legendre $P_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, est obtenu en normalisant u_1 (si n est pair) ou u_2 (si n est impair) de telle façon que le coefficient de t^n est égal à $\binom{2n}{n} 2^{-n}$. On a

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = \frac{1}{2}(-1 + 3t^2),\ P_3(t) = \frac{1}{2}(-3t + 5t^3),\ \ldots$$

(voir le volume 2 ou le chapitre 4 pour d'autres propriétés des P_n).

31 Soit l'équation différentielle (hypergéométrique)

$$t(1-t)x'' + \big[\gamma - (\alpha+\beta+1)t\big]x' - \alpha\beta x = 0 \tag{2.90}$$

où α, β et γ sont des nombres complexes. Vérifier les affirmations suivantes (prop. 2.6.5) :

(i) l'équation déterminante $\lambda(\lambda-1)+\gamma\lambda = 0$ possède les solutions $\lambda = 0,\ 1-\gamma$;

(ii) pour $\lambda = 0$, $\gamma \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, on a la solution u_1, définie pour $|t| < 1$, par

$$u_1(t) = F(\alpha,\beta;\gamma;t)$$
$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}t + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}t^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n}t^n$$

où $(z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) si $x(t) = t^{(1-\gamma)}y(t)$, y vérifie une autre équation hypergéométrique :

$$t(1-t)y'' + \big[(2-\gamma) - (\alpha+\beta-2\gamma+3)t\big]y' - (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)y = 0\ ;$$

(iv) conclure de (ii) que si $(2-\gamma) \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$, alors

$$u_2(t) = t^{1-\gamma}F(\alpha',\beta';\gamma';t)\,, \quad |t| < 1$$

avec $\alpha' = \alpha-\gamma+1$, $\beta' = \beta-\gamma+1$, $\gamma' = 2-\gamma$, est une solution de l'équation (2.90) (définie pour $|t| < 1$) ;

(v) si $\gamma \notin \mathbb{Z}$, alors $\{u_1, u_2\}$ sont deux solutions linéairement indépendantes (définies pour $|t| < 1$) de l'équation (hypergéométrique) (2.90) ; si $\gamma \notin -\mathbb{N}$, u_1 est une solution non triviale et si $\gamma \in -\mathbb{N}$, u_2 est une solution non triviale ; si $\gamma = 1$, $u_1 = u_2$.

$(F(\alpha,\beta;\gamma;t)$ définit la *fonction hypergéométrique* de paramètres α, β, γ, avec $\gamma \notin -\mathbb{N}$; on peut démontrer que $t \mapsto F(\alpha,\beta;\gamma;t)$ possède un prolongement analytique dans $\mathbb{C}\setminus[1,\infty[$. La littérature classique sur les fonctions hypergéométriques est vaste ; la plupart des fonctions analytiques importantes s'obtiennent à partir de celles-ci, soit directement par un choix approprié des valeurs des paramètres α, β, γ, soit par un passage à la limite. Ainsi, on vérifie facilement les formules suivantes :

$$(1+z)^{\nu} = F(-\nu,\beta;\beta;-z)\,, \quad \nu \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\,,\ \beta \notin -\mathbb{N}$$
$$\ln(1+z) = zF(1,1;2;-z)\,, \quad |z| < 1$$
$$\mathrm{e}^z = \lim_{|\beta|\to\infty} F(1,\beta;1;z/\beta)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Noter que si α ou β est un entier $\leqslant 0$, alors $F(\alpha,\beta;\gamma;t)$ est un polynôme ; pour une introduction détaillée à l'étude des fonctions hypergéométriques consulter Whittaker et Watson [21].)

32 (Continuation de l'exercice 31) Démontrer que $y(t) = x(1-t)$ vérifie l'équation

$$t(1-t)y'' + \big[(\alpha+\beta+1-\gamma) - (\alpha+\beta+1)t\big]y' - \alpha\beta y = 0$$

si x vérifie (2.90). Conclure que

$$t \longmapsto F(\alpha,\beta;\, \alpha+\beta+1-\gamma;\, 1-t)$$

$$t \longmapsto (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\, \gamma+1-\alpha-\beta;\, 1-t)$$

donnent deux solutions linéairement indépendantes de (2.90), définies pour $|t-1|<1$, pourvu que $(\alpha+\beta+1-\gamma) \notin \mathbb{Z}$. Vérifier directement que l'équation déterminante au point de singularité faible $t=1$ de l'équation (2.90) est

$$\lambda(\lambda-1) + (\alpha+\beta+1-\gamma)\lambda = 0\,,$$

ayant des racines $\lambda = 0$ et $\lambda = \gamma-\alpha-\beta$. (Cet exercice fournit les solutions du type $(t-1)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-1)^n$ pour l'équation (2.90).)

33 (Continuation de l'exercice 31) Démontrer que si x vérifie l'équation (2.90), alors $y(t) = x(1/t)$ vérifie l'équation

$$t^2(1-t)y'' + t\big[(1-\alpha-\beta) - (2-\gamma)t\big]y' + \alpha\beta y = 0\,. \tag{2.91}$$

On observe que l'équation (2.91) possède une singularité faible à $t=0$ et que son équation déterminante (pour $t=0$) est $\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ dont les racines sont $\lambda=\alpha$, $\lambda=\beta$ (on dit que $t=\infty$ est une singularité faible pour l'équation (2.90)). Si $y(t) = t^{\alpha}z(t)$, alors démontrer que z vérifie l'équation hypergéométrique de paramètres $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \alpha-\gamma+1$, $\gamma' = \alpha-\beta+1$; de même, si $y(t) = t^{\beta}w(t)$, alors w vérifie l'équation hypergéométrique de paramètres $\alpha' = \beta$, $\beta' = \beta-\gamma+1$, $\gamma' = \beta-\alpha+1$. (Cet exercice fournit des solutions pour (2.90) définies pour $|t|>1$; elles sont

$$t \mapsto t^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1\,;\,\alpha-\beta+1\,;\,1/t)\,,\quad t \mapsto t^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1\,;\,\beta-\alpha+1\,;\,1/t)$$

pourvu que $(\alpha-\beta) \notin \mathbb{Z}$; on dit qu'elles sont les solutions de (2.90) dans un voisinage de $t=\infty$.)

34 Ecrire une solution non triviale pour chacune des équations différentielles suivantes (en utilisant des fonctions hypergéométriques) :

(i) $t(1-t)x'' + (1-t)x' + x = 0$;
(ii) $t(1-t)x'' + (1-t)x' - x = 0$;
(iii) $t(1-t)x'' + 2(1-t)x' - \frac{1}{4}x = 0$;
(iv) $t(1-t)x'' + ax' + 2x = 0$.

35 Vérifier que, pour $|t| < 1$ et $c \notin -\mathbb{N}$,

$$\lim_{b\to\infty} F(a,b\,;c\,;t/b) = 1 + \frac{a}{c}\,t + \frac{(a)_2}{2!\,(c)_2}\,t^2 + \cdots + \frac{(a)_n}{n!\,(c)_n}\,t^n + \cdots$$

On pose ${}_1F_1(a\,;c\,;t)$ pour le membre de droite ; puisque $F(a,b\,;c\,;t/b) = x(t)$ vérifie

$$t(b-t)x'' + \big[bc - (a+b+1)t\big]x' - abx = 0\,,$$

ou (en divisant par b)

$$t\left(1 - \frac{t}{b}\right)x'' + \left[c - \left(\frac{a+b+1}{b}\right)t\right]x' - ax = 0\,,$$

il est raisonnable de conclure que $y(t) = {}_1F_1(a\,;c\,;t)$ vérifie l'équation

$$ty'' + (c-t)y' - at = 0\,.$$

Démontrer cette affirmation par une vérification directe.

36 (Continuation de l'exercice 35) Soit l'équation différentielle (de Laguerre)

$$tx'' + [1-t]x' + \lambda x = 0$$

où λ est un paramètre réel ou complexe. De l'exercice 35, conclure qu'une solution de cette équation est donnée par

$$u(t) = {}_1F_1(-\lambda\,;1\,;t)\,.$$

Vérifier que si $\lambda = n \in \mathbb{N}$, alors u est le polynôme de degré n donné par

$$u(t) = 1 - \binom{n}{1}t + \frac{1}{2!}\binom{n}{2}t^2 + \cdots + (-1)^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{t^k}{k!}\,.$$

(Le n-ième polynôme de Laguerre L_n est défini par $L_n(t) = (-1)^n n!\,u(t)$; on vérifie sans peine, en utilisant la formule de Leibniz, que

$$L_n(t) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{D}^n(t^n\,\mathrm{e}^{-t})\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

avec $\mathrm{D}^n = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^n$ (chap. 4). Les fonctions ${}_1F_1(a\,;c\,;t)$ s'appellent les fonctions *hypergéométriques confluentes* ; dans cette notation, on écrit $F(\alpha,\beta\,;\gamma\,;t)$ comme ${}_2F_1(\alpha,\beta\,;\gamma\,;t)$.)

37 Démontrer que si y vérifie l'équation $y'' - y = 0$, alors $x(t) = y(1/t)$ vérifie l'équation

$$t^4 x'' + 2t^3 x' - x = 0$$

qui a une singularité forte au point $t = 0$. Puisque y est une combinaison linéaire de $t \mapsto \mathrm{e}^t$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, la solution générale de l'équation pour x est une combinaison linéaire de $t \mapsto \mathrm{e}^{1/t}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-1/t}$. Conclure qu'ici il n'y a aucune solution de la forme $x(t) = t^\lambda \sum_{n \geqslant 0} c_n t^n$. (Ceci montre que la proposition 2.6.5 est, en général, en défaut aux points de singularité forte.)

38 Soit u une solution de l'équation de Bessel de paramètre ν :

$$u'' + \frac{1}{t}\,u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)u = 0\,.$$

Démontrer que $v(t) = t^\alpha u(\beta t^\gamma)$ vérifie l'équation

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{t}\,v' + \left[(\beta\gamma)^2 t^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{t^2}\right]v = 0\,.$$

39 Démontrer que si u est une solution de l'équation de Bessel de paramètre $1/3$, alors $v(t) = \sqrt{t}\,u\big((2/3)t^{3/2}\big)$ vérifie l'équation $v'' + tv = 0$ et $w(t) = v(-t)$ vérifie l'équation d'Airy $w'' - tw = 0$.

40 Démontrer que les solutions de l'équation $x'' + t^p x = 0$ peuvent être exprimées en termes des fonctions de Bessel d'indice $\pm(p+2)^{-1}$ si $p \neq -2$. Le cas $p = -2$ donne une équation eulérienne qui peut être résolue explicitement (§ 2.5.3).

41 Une équation non linéaire du premier ordre de la forme

$$x' = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 \tag{2.92}$$

s'appelle une *équation de Riccati*. L'objectif de cet exercice est de démontrer la relation entre ces équations et les équations linéaires du second ordre, $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, en établissant les affirmations suivantes.

(i) Si x vérifie (2.92), alors $u = a_2 x$ satisfait à l'équation $u' = u^2 + pu + q$ où $p = a_1 + a_2'/a_2$, $q = a_0 a_2$ (en supposant que a_2 est de classe C^1 et que a_2 ne s'annule jamais).

(ii) Si x vérifie (2.92) et $u = a_2 x$, $v' = -uv$, alors $v'' + pv' + qv = 0$ ou p, q sont définis dans (i) et a_2 vérifie l'hypothèse indiquée ci-dessus.

(iii) Si $v'' + pv' + qv = 0$, alors $u = -v'/v$ (en supposant que v ne s'annule jamais) vérifie $u' = u^2 + pu + q$.

Conclure que x vérifie (2.92) si et seulement si $v = \exp(-\int a_2 x)$ vérifie $v'' + pv' + qv = 0$, où $\int a_2 x$ est une primitive de $a_2 x$, et les hypothèses sur a_2, v sont vérifiées.

42 Supposons que ξ est une solution particulière de (2.92).

(i) Démontrer que $x = \xi + u$ est une solution de (2.92) si et seulement si

$$u' = [2a_2\xi + a_1]u + a_2u^2 .$$

(ii) En posant $u = 1/v$, vérifier que v satisfait à une équation linéaire du premier ordre.

(On voit que la connaissance d'une solution particulière ξ de (2.92) permet d'obtenir sa solution générale ; cette remarque combinée avec l'exercice 41 peut être utile pour la résolution générale de l'équation $y'' + py + qy = 0$.)

43 Soient $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$; vérifier que $W(u_1, u_2)(t) = 2t$. On constate que u_1, u_2 sont linéairement indépendantes et que $W(u_1, u_2)$ s'annule au point $t = 0$ sans être identiquement nul. Est-il possible que u_1, u_2 soient des solutions d'une équation linéaire du second ordre $x'' + px' + qx = 0$ (p, q continues) ?

44 Soient $u_1(t) = t^3$, $u_2(t) = \varepsilon(t)t^3$, $t \in \mathbb{R}$, où $\varepsilon(t) = 1$ si $t \geqslant 0$ et $\varepsilon(t) = -1$ si $t < 0$; vérifier que u_1, u_2 sont de classes C^1 et linéairement indépendantes mais que $W(u_1, u_2) \equiv 0$.

45 Vérifier, en utilisant l'exercice 38, que la solution générale de l'équation différentielle

$$t^2x'' + atx' + (bt^m + c) = 0 , \quad m \neq 0 ,$$

est donnée par

$$x(t) = t^{(1-a)/2}Z_\nu\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\,t^{m/2}\right) \quad \text{où} \quad \nu = \frac{1}{m}\left\{(1-a)^2 - 4c\right\}^{1/2}$$

et où Z_ν représente la solution générale de l'équation de Bessel de paramètre ν.

46 Soit l'équation

$$x'' + \frac{a}{t}x' + x = 0 , \quad a \in \mathbb{R} , \; t > 0 .$$

Démontrer que, si $a < 1$, toute solution non triviale est non bornée lorsque $t \to \infty$ et que, si $a \geqslant 1$, toute solution non triviale tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. (Utiliser Ex. 45 et § 2.7.9.)

47 (Continuation de l'exercice 46) Démontrer par un calcul direct que, si $a = 2$, $\{t^{-1}\sin t\,,\; t^{-1}\cos t\}$ forme un système fondamental de solutions de l'équation et si $a = -2$, alors $\{\sin t - t\cos t\,,\; \cos t + t\sin t\}$ forme un système fondamental de solutions.

48 En utilisant la définition (2.63) de $J_\nu(t)$ démontrer la formule de récurrence

$$J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t} J_\nu(t) .$$

Vérifier directement de (2.63) que

$$J_{1/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \sin t , \quad J_{-1/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos t .$$

En déduire que

$$J_{3/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2} t^{-3/2}(\sin t - t \cos t)$$

$$J_{-3/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2} t^{-3/2}(\cos t + t \sin t) .$$

Démontrer les affirmations de l'exercice 47 au vue de ces formules et de l'exercice 45.

49 Résoudre l'équation (eulérienne) $x''+\alpha t^{-2}x = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) explicitement ; conclure que, si $\alpha \leqslant 1/4$, toute solution réelle non triviale possède au plus un zéro dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ alors que, si $\alpha > 1/4$, chacune des solutions réelles possède une infinité de zéros dans $]\,0\,,\,\infty\,[$. (Ici on a une équation du type $x''+q(t)x = 0$ avec $q(t) > 0$ (si $\alpha > 0$) et $\int_1^\infty q(t)\,dt < \infty$; le comportement oscillatoire des solutions lorsque $t \to \infty$ n'est pas aussi prévisible ici que dans le cas où $\int_1^\infty q(t)\,dt = \infty$, cas présenté dans la proposition 2.7.5.)

50 Soit l'équation $x'' + q(t)x = 0$, q réelle continue pour $t > 0$. Démontrer que toute solution (réelle) non triviale possède une infinité de zéros dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ si $\liminf_{t\to\infty} t^2 q(t) > 1/4$ et au plus un nombre fini de zéros dans $]\,0\,,\,\infty\,[$ si $\liminf_{t\to\infty} t^2 q(t) < 1/4$. (Utiliser l'exercice 49 et le théorème de comparaison (§ 2.7.3).)

51 Soit l'équation $x'' + q(t)x = 0$, q réelle continue pour $t > 0$. Démontrer que si $0 < m < q(t) < M$ pour $a \leqslant t \leqslant b$ et $t_1 < t_2$ sont deux zéros consécutifs dans $[\,a\,,\,b\,]$ d'une solution réelle non triviale, alors $\pi M^{-1/2} < t_2 - t_1 < \pi m^{-1/2}$; en conclure que, si $\lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$, alors toute solution réelle non triviale possède une infinité de zéros $0 < \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ avec $(\tau_{n+1} - \tau_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

52 Soit l'équation $4tx'' + 2x' + x = 0$. En utilisant l'exercice 45, démontrer que $\{\sin\sqrt{t}\,,\,\cos\sqrt{t}\}$ donne un système fondamental de solutions. Déduire ce résultat en résolvant l'équation par la théorie proposée par la proposition 2.6.5.

53 Déterminer un système fondamental de solutions pour chacune des équations suivantes ($t > 0$) :

(i) $t^2x'' - t(t+2)x' + (t+2)x = 0$;

(ii) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x = 0$;

(Transformer en une équation du type (2.78).)

(iii) $t^2x'' - 2tx' + (t^2+2)x = 0$;

(cf. Ex. 45.)

(iv) $t^2x'' + (t^2-1)x' - x = 0$;

($x(t) = \mathrm{e}^{-t}$ est une solution.)

(v) $tx'' + 2x' + atx = 0$, $a \in \mathbb{R}$;

(Transformer en un équation du type (2.78).)

(vi) $t^2x'' + ax = 0$, $a \in \mathbb{R}$;

(vii) $x'' - tx' - ax = 0$, $a \in \mathbb{R}$ (équation de Weber).

(Solutions en séries entières.)

2.9 QUELQUES COMPLÉMENTS

2.9.1 Remarques générales

A cause de ses nombreuses applications la théorie des équations différentielles ordinaires est devenue vaste. Grosso modo, cette théorie se divise en deux parties : une qui concerne les équations *linéaires* et l'autre les équations *non linéaires*. Bien entendu, la théorie des équations non linéaires est beaucoup plus complexe et diversifiée que celle concernant les équations linéaires. Souvent, les équations linéaires sont utilisées comme des approximations valables pour les « vraies » équations non linéaires qui modélisent les problèmes physiques étudiés. Ainsi, l'équation « exacte » du pendule simple (dit *pendule mathématique*) est

$$x'' + k^2 \sin x = 0$$

où $x(t)$ représente l'angle fait avec la direction verticale au temps t par une tige rigide (de masse négligeable) de longueur L ayant un point matériel de masse m attachée à son extrémité libre, $k^2 = g/L$, g étant la constante de pesanteur ; pour établir cette équation, on néglige les forces de frottement et on suppose que le mouvement est dû entièrement à la force de pesanteur ; noter que la masse m n'intervient pas dans cette équation. Il est possible de déterminer exactement la solution générale de l'équation du pendule mathématique en utilisant certaines fonctions spéciales appelées *fonctions elliptiques*. En supposant que $x(t)$ est petit (la tige s'écarte faiblement de sa position d'équilibre verticale),

on peut remplacer $\sin x$ de l'équation par x et obtenir l'équation linéaire (dite de l'*oscillateur harmonique*)

$$x'' + k^2 x = 0$$

dont la solution générale est immédiate : $x(t) = A\sin(kt + \theta_0)$ (avec A, θ_0 deux constantes réelles déterminées par les conditions initiales $x(t_0)$, $x'(t_0)$). La période (positive, minimale) de cette solution générale est $2\pi/k = 2\pi(L/g)^{1/2}$ et elle est indépendante des conditions initiales (sauf pour $A = 0$ qui correspond à la condition initiale $x(t_0) = 0$, $x'(t_0) = 0$). En fait, cette période de l'équation approchée (de l'oscillation harmonique) n'est pas égale à la période τ d'une solution de l'équation du départ (du pendule mathématique) ; on peut démontrer que les solutions de l'équation du pendule mathématique sont périodiques (si les conditions initiales ne sont pas trop violentes) de périodes

$$\tau = \left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \nu^2 \sin^2\theta)^{-1/2}\, \mathrm{d}\theta$$

où ν est déterminé par les conditions initiales (voir E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, 1937, p. 73). Néanmoins, l'équation linéaire d'oscillateur harmonique (et ses variations, cf. Ex. 26 et sa suite, sect. 2.8) nous rend des services immenses.

Jusqu'à ce point, nous avons étudié l'existence des solutions des équations différentielles ordinaires sous les *conditions initiales* ; il est important de les étudier sous d'autres conditions appelées *conditions aux limites*. Soit

$$x'' = f(t, x, x') \ ;$$

les conditions initiales imposent des conditions du type $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ sur une solution éventuelle de cette équation ; les conditions aux limites exigent que les solutions recherchées satisfassent des conditions portant sur deux instants de temps $t_1 < t_2$ différents. Un exemple simple est la condition (dite de Dirichlet) que $x(t_1) = x_1$ et $x(t_2) = x_2$, x étant une solution définie dans $]\,t_1\,,\,t_2\,[$ et continue dans $[\,t_1\,,\,t_2\,]$. Nous étudierons ce type de problème (lorsque $f(t, x, x')$ est linéaire en x et x') dans la partie du livre consacrée aux équations aux dérivées partielles (sous la rubrique *problème de Sturm-Liouville*).

Dans cette section, nous énumérons brièvement quelques chapitres importants de la théorie des équations différentielles ordinaires parmi ceux que nous n'avons pas traités ici. Nous donnons ensuite quelques indications bibliographiques et historiques.

Un aspect très important de la théorie que n'aborderons pas est celui qui concerne le calcul numérique des solutions ; du point de vue des applications pratiques, les algorithmes numériques (et les logiciels qui les utilisent) sont éventuellement essentiels, surtout à cause du fait que même les petits ordinateurs d'aujourd'hui sont capables de déterminer les solutions des équations différentielles ordinaires très efficacement en se servant de plusieurs programmes déjà

existants. Heureusement, les cours d'analyse numérique, professés par les spécialistes en la matière, sont enseignés parallèlement à peu près partout ; bien entendu, une bonne compréhension de la théorie de l'existence et de l'unicité des solutions est essentielle pour utiliser à bon escient les procédés pratiques proposés par l'analyse numérique pour leur calcul.

2.9.2 Stabilité

Considérons, à titre d'exemple, un système (différentiel) autonone $x' = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$ étant une fonction vectorielle de classe C^1 définie dans une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^N$. On dit que $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \Omega$ est un point d'*équilibre* du système si $f(a) = 0$; si a est un point d'équilibre, alors $u(t) \equiv a$ est évidemment une solution de $x' = f(x)$. Le point d'équilibre a est dit *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir un $\delta > 0$ tel que, si $|b - a| < \delta$, $b \in \Omega$, l'unique solution v de $x' = f(x)$, vérifiant $v(0) = b$, est définie pour tout $t \geqslant 0$ avec $|v(t) - a| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$; un point d'équilibre stable est dit *asymptotiquement stable* si δ peut être choisi tel que l'on ait, de plus, $|v(t) - a| \to 0$ lorsque $t \to 0$.

L'idée intuitive qui guide ces deux définitions doit être claire ; si l'état initial b du système physique concerné est suffisamment proche d'un état d'équilibre stable a, alors le système reste proche de a (dans le cas de stabilité) et, en plus, approche a lorsque $t \to \infty$ (dans le cas de stabilité asymptotique). Il est évident que l'on peut généraliser les notions de stabilité et de stabilité asymptotique aux solutions quelconques $u : [0, \infty[\to \Omega$ de l'équation $x' = f(x)$ au lieu des solutions constantes $u(t) \equiv a$ données par des points d'équilibre a ; on peut alors parler de la stabilité des solutions périodiques, par exemple.

La discussion précédente se généralise aussi de manière évidente aux solutions des équations non autonomes $x' = f(t, x)$ et aux équations d'ordre quelconque. Au vu de cette discussion, on découvre la justification de la terminologie « polynôme stable » introduite dans l'exercice 25 (sect. 2.8) ; la solution triviale $u \equiv 0$ de l'équation $Lx = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si le polynôme P définissant L est stable. De même, l'exercice 13 (sect. 2.8) peut être formulé comme suit : zéro est un point d'équilibre asymptotiquement stable de l'équation $x' = Ax$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour chaque valeur propre λ de A.

La notion intuitive de la stabilité d'un système physique peut être interprétée de manières très diverses. Une des interprétations donne lieu à la définition d'un système *structurellement stable*. Sans entrer dans une définition exacte, esquissons l'idée intuitive : un système décrit par l'équation autonome $x' = f(x)$ est dit structurellement stable si les solutions de celle-ci sont topologiquement équivalentes aux solutions des équations voisines $x' = g(x)$; autrement dit, si $f - g$ est petit dans un certain sens, les trajectoires décrites par une solution de $x' = f(x)$ sont semblables à celles de $x' = g(x)$, la correspondance étant établie par un homéomorphisme du domaine de définition Ω des fonctions f, g.

La stabilité des systèmes dynamiques (décrits par les équations différentielles ordinaires ou autrement) est un sujet important en soi. On trouvera des introductions à ce sujet dans les ouvrages de Hirsch et Smale [12] et de Pontriaguine [18].

2.9.3 Equations et solutions périodiques

Nous introduisons le sujet par un exemple important. Soit l'équation $x'' + q(t)x = 0$ où q est une fonction réelle continue ayant une période $\tau > 0$ ($q(t+\tau) = q(t)$, $t \in \mathbb{R}$). Une question naturelle importante est de savoir si cette équation possède des solutions non triviales périodiques (d'une période τ' où $\tau' > 0$ n'est pas nécessairement égal à τ). Les exemples simples $x'' = 0$ ($q \equiv 0$) et $x'' + ax = 0$ ($q \equiv a > 0$) montrent que la nature de la réponse peut être compliquée ; en effet, $x'' = 0$ ne possède aucune solution non triviale périodique et $x'' + ax = 0$ ne peut avoir une solution de période 2π que si a est de la forme $a = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $\{u_1, u_2\}$ forme un système fondamental de solutions réelles de $x'' + qx = 0$; alors une solution réelle u quelconque s'écrit comme

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

avec c_1, c_2 dans $\mathbb{R}$. Puisque $t \mapsto u_1(t+\tau)$, $t \mapsto u_2(t+\tau)$, sont également des solutions de $x'' + qx = 0$ (car q est τ-périodique), on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} u_1(t+\tau) \\ u_2(t+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

où $A = [a_{ij}]$ est une matrice réelle inversible de type $(2,2)$ appropriée. Alors,

$$u(t+\tau) = [c_1, c_2] \begin{bmatrix} u_1(t+\tau) \\ u_2(t+\tau) \end{bmatrix} = [c_1, c_2]\, A \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} ;$$

pour avoir $u(t+\tau) = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, il est donc nécessairement suffisant que

$$[c_1, c_2] = [c_1, c_2]\, A\,,$$

c'est-à-dire que 1 soit une valeur propre de la matrice A et ${}^t[c_1, c_2]$ est un vecteur propre de la matrice transposée ${}^tA$. On conclut qu'il existe une solution non triviale (réelle) τ-périodique si et seulement si $\det(A - I_2) = 0$. On démontre, de même, que l'existence d'une solution non triviale u telle que $u(t+\tau) = -u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (u est alors de période 2τ), équivaut à avoir $\det(A + I_2) = 0$. Plus généralement, supposons que λ est une valeur propre (réelle ou complexe) de la matrice A (solution de l'équation quadratique en z, $\det(A - zI_2) = 0$) ; soient c_1, c_2 tels que

$$\lambda[c_1, c_2] = [c_1, c_2]\, A\,.$$

Alors $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ est une solution complexe telle que

$$u(t+\tau) = \lambda u(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

car

$$u(t+\tau) = [c_1, c_2] \begin{bmatrix} u_1(t+\tau) \\ u_2(t+\tau) \end{bmatrix} = [c_1, c_2]\, A \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \lambda\, [c_1, c_2] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \lambda u(t)\,.$$

Si $\mu \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathrm{e}^{\tau\mu} = \lambda$ (rappelons que $\lambda \neq 0$ car $\det A \neq 0$), écrivons $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\, u(t)$; alors φ est une fonction complexe τ-périodique car

$$\varphi(t+\tau) = \mathrm{e}^{-\mu(t+\tau)} u(t+\tau) = \mathrm{e}^{-\mu t}\, \mathrm{e}^{-\mu\tau}\, \lambda u(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} u(t) = \varphi(t)\,.$$

On conclut que *l'équation possède toujours une solution u de la forme $u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\varphi(t)$ où φ est τ-périodique.* Cette analyse est basée sur l'utilisation d'un système fondamental de solutions $\{u_1, u_2\}$ particulier, et de la matrice A qui en découle lorsqu'on passe de $\big(u_1(t)\,,\, u_2(t)\big)$ à $\big(u_1(t+\tau)\,,\, u_2(t+\tau)\big)$. On démontre facilement que si l'on part d'un autre système fondamental de solutions $\{v_1, v_2\}$, la matrice correspondante B sera similaire à A ($B = MAM^{-1}$) et B aura les mêmes valeurs propres que A ; ainsi, l'analyse précédente est intrinsèque à l'équation $x'' + qx = 0$ et ne dépend pas du choix du système fondamental de solutions.

Cette analyse peut être étendue sans peine à l'étude des solutions périodiques d'un système d'équations différentielles linéaires $x' = A(t)x$ où $t \mapsto A(t)$ est une fonction matricielle continue telle que $A(t+\tau) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Le théorème de Floquet concernant ce type de système précise : *si $U(t)$ est une matrice fondamentale quelconque de $x' = A(t)x$, il existe une matrice constante C et une fonction matricielle τ-périodique de classe C^1, $t \mapsto M(t)$, telle que*

$$U(t) = M(t)\, \mathrm{e}^{tC}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

En effet, puisque $t \mapsto U(t+\tau)$ est aussi une matrice fondamentale, on a nécessairement

$$U(t+\tau) = U(t)A\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

pour une matrice inversible A appropriée. Il suffit d'écrire $A = \mathrm{e}^{\tau C}$ (ce qui est toujours possible car A est inversible, selon un théorème d'algèbre linéaire ; on peut écrire $C = (1/\tau) \log A$) et poser $M(t) = U(t)\, \mathrm{e}^{-tC}$ pour obtenir le résultat voulu.

Revenons à l'équation $x'' + q(t)x = 0$. Le fait qu'on soit certain d'avoir une solution particulière u de la forme $u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\varphi(t)$ où φ est τ-périodique rend possible une démarche similaire à la solution des équations en série : on pose

$$u(t) = \mathrm{e}^{\mu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\, \mathrm{e}^{(2\pi/\tau)nit}$$

et on substitue la série de u à la place de x dans $x'' + q(t)x$; on détermine les coefficients b_n de telle sorte que l'équation soit vérifiée. Une justification de ce procédé est fournie par la théorie des séries de Fourier.

Parmi les équations périodiques spéciales qui ont été longuement étudiées par la méthode esquissée ci-dessus, il y a l'équation de Mathieu et l'équation de Hill ; dans l'équation de Mathieu,

$$q(t) = a + b\cos 2t$$

et dans l'équation de Hill, q est une fonction paire de période π telle que

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2nt\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\,,$$

c'est-à-dire q est suffisamment régulière pour être développée en série de Fourier absolument et uniformément convergente. La littérature sur ces deux équations est vaste ; on trouvera les références dans Whittaker et Watson [21] et Hille [10] où ces équations sont analysées en détail.

2.9.4 Intégrales premières

Soit $x' = f(x)$ un système d'équations différentielles autonome où $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (Ω ouvert dans $\mathbb{R}^N$) est de classe C^1, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$. Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est appelée une *intégrale première* (définie globalement) du système si pour toute solution u de $x' = f(x)$, la quantité $\varphi\big(u(t)\big)$ est constante. Il est facile à voir qu'une fonction $\varphi \in C^1(\Omega)$ est une intégrale première si et seulement si

$$\nabla\varphi(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{D}_i\varphi(x) f_i(x) = 0\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{2.93}$$

En effet si φ vérifie (2.93) et $u'(t) = f\big(u(t)\big)$, alors, d'après la formule pour la dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varphi\big(u(t)\big) = \nabla\varphi\big(u(t)\big) \cdot u'(t) = \nabla\varphi\big(u(t)\big) \cdot f\big(u(t)\big) = 0$$

ce qui veut dire que $\varphi\big(u(t)\big)$ est une constante. D'autre part, si φ est une intégrale première et x est un point quelconque de Ω, $t \mapsto \varphi\big(u(t,x)\big)$ est constante si $t \mapsto u(t,x)$ est une solution telle que $u(0,x) = x$; donc

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\varphi\big(u(t,x)\big)\bigg|_{t=0} = \nabla\varphi(x) \cdot f(x)\,.$$

L'existence d'une intégrale première φ correspond à une *loi de conservation* : la quantité $\varphi(x)$ est conservée lorsque x parcourt la trajectoire décrite par une solution. Les équations différentielles de mécanique possèdent souvent quelques intégrales premières correspondant à la conservation d'énergie, de quantité de mouvement ou de moment cinétique. Illustrons ces propos par l'exemple du

pendule mathématique (§ 2.9.1) ; l'équation concernée s'écrit sous la forme $X' = f(X)$ où

$$X = (x_1, x_2)\,, \quad f(x_1, x_2) = (x_2\,,\, -k^2 \sin x_1)\,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;$$

si $\varphi(x_1, x_2) = (1/2)x_2^2 - k^2 \cos x_1$, on vérifie facilement que φ est une intégrale première. Du point de vue de la mécanique, φ représente l'énergie du système formé par le pendule ; rappelons que $x_1 = x$, $x_2 = x'$ d'où vient l'interprétation de φ comme somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Analytiquement, on obtient φ en transformant $x'' + k^2 \sin x = 0$ d'une manière habituelle : on a

$$x'x'' = -x'k^2 \sin x$$

d'où, en intégrant entre t_0 et t,

$$\frac{1}{2}\,x'^2(t) - \frac{1}{2}\,x'^2(t_0) = k^2\{\cos x(t) - \cos x(t_0)\}\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\,x'^2(t) - k^2 \cos x(t) = \text{constante} = \frac{1}{2}\,x'^2(t_0) - k^2 \cos x(t_0)\,.$$

L'existence de cette intégrale première permet une résolution explicite de l'équation du pendule mathématique (cf. Whittaker cité au paragraphe 2.9.1). En général, la connaissance d'une intégrale première φ pour une équation $x' = f(x)$, x étant dans $\mathbb{R}^N$, nous informe que l'évolution du système dynamique associé a lieu dans une hypersurface $\varphi(x) = c$; déjà ce simple fait peut apporter un éclairage considérable.

Malheureusement, les intégrales premières n'existent pas toujours globalement, c'est-à-dire que l'on n'a pas toujours une intégrale première $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω étant l'ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ où l'équation $x' = f(x)$ est définie) ; néanmoins si $f(a) \neq 0$, il existe un système de $(N-1)$ intégrales premières, fonctionnellement indépendantes, définies dans un voisinage ouvert V de a, $V \subset \Omega$. Cette dernière affirmation est une conséquence assez directe du théorème local d'existence et d'unicité des solutions de $x' = f(x)$.

L'obstruction à l'existence d'une intégrale première globalement définie est due, mathématiquement, à la nature topologique de Ω et, physiquement, au manque de conservation de certaines quantités comme l'énergie. Une étude de cette question (dans un cadre général où l'espace des phases du système mécanique n'est plus une partie ouverte de Ω de $\mathbb{R}^N$ mais une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^N$; vol. 1) mène à plusieurs domaines des mathématiques modernes. On peut consulter à ce sujet un exposé introductif (de haut niveau) de V. Arnold (*Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Edition Mir, Moscou, 1976).

La discussion précédente sur les intégrales premières se généralise aisément au cas des équations non autonomes $x' = f(t, x)$; ce sont les fonctions réelles φ des variables $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, de classe C^1, telles que $t \mapsto \varphi\big(t, u(t)\big)$ est constante pour toute solution $t \mapsto u(t)$ de l'équation $x' = f(t, x)$.

2.9.5 Théorie de perturbation

Nous commençons par un exemple. Soit

$$x'' = -k^2 x + \varepsilon h(t, x, x') \tag{2.94}$$

où $k > 0$, ε, x sont réels. C'est la forme dite « perturbée » de l'équation d'oscillateur harmonique (§ 2.9.1) ; on suppose que ε est petit et que h est une fonction réelle suffisamment régulière (par exemple, de classe C^2). Physiquement, εh représente les effets dus au frottement et d'autres facteurs qui sont petits, sans être totalement négligeables. Etudions la solution de (2.94) sous la condition initiale $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$; si $u(t, \varepsilon)$ donne cette solution, alors on aura

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

où $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ représente un terme (dépendant de t) d'ordre ε^2 (essentiellement, le reste d'ordre 2 dans le développement de Taylor de $\varepsilon \mapsto u(t, \varepsilon)$). Cette écriture de $u(t, \varepsilon)$ est justifiée par la théorie de la dépendance lisse des solutions par rapport aux paramètres (§ 1.6.2). Puisque $u(t, 0) = u_0(t)$ définit la solution de (2.94) pour $\varepsilon = 0$, on a

$$u_0(t) = A \sin(kt + \theta_0)$$

où $A \geqslant 0$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont déterminés de telle manière que $u_0(0) = x_0$, $u_0'(0) = x_1$, c'est-à-dire

$$A \sin \theta_0 = x_0 \,, \quad Ak \cos \theta_0 = x_1 \,.$$

Substituons l'expression de $u(t, \varepsilon)$ à la place de x dans (2.94) et étudions spécialement les coefficients associés à ε ; on aura

$$u_0''(t) + \varepsilon u_1''(t) = -k^2 u_0(t) + \varepsilon \left\{ -k^2 u_1(t) + h\big(t,\, u_0(t),\, u_0'(t)\big) \right\} + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

car $\varepsilon h\big(t,\, u(t, \varepsilon),\, u'(t, \varepsilon)\big) = \varepsilon h\big(t,\, u_0(t),\, u_0'(t)\big) +$terme d'ordre ε^2. Puisque $u_0'' = -k^2 u_0$, $u_0(0) = x_0$, $u_0'(0) = x_1$, on obtient

$$u_1''(t) = -k^2 u_1(t) + h\big(t,\, u_0(t),\, u_0'(t)\big)$$

avec $u_1(0) = 0$, $u_1'(0) = 0$; posons $\varphi(t) = h\big(t,\, u_0(t),\, u_0'(t)\big)$. D'après l'exercice 18 (sect. 2.8), on obtient

$$u_1(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \varphi(s) \sin k(t - s)\, \mathrm{d}s$$

d'où on a l'*approximation du premier ordre* (qui retient seulement la première puissance de ε) pour $u(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) \sim u_0(t) + \varepsilon u_1(t)$$

où u_0, u_1 sont les fonctions données par les formules précédentes.

On s'aperçoit que la méthode proposée est applicable assez généralement. Les calculs deviennent plus longs si l'on veut obtenir les approximations d'ordre supérieur (qui retiennent les puissances supérieures de ε). Les problèmes théoriques concernant la validité des approximations obtenues constituent la théorie de perturbation.

On trouvera une introduction élémentaire à cette théorie dans C. C. Lin et L. A. Segel (*Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, Macmillan, London, 1974). Nous laissons les exemples suivants à titre d'exercices ; ils illustrent la méthode présentée ci-dessus.

- Soit l'équation
$$x'' = -g + \varepsilon h(t, x, x')$$
avec $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$, h de classe C^2. Solution :
$$u(t, \varepsilon) \sim \left(x_0 - \frac{1}{2} g t^2\right) + \varepsilon \int_0^t (t - s)\varphi(s)\, \mathrm{d}s$$
où
$$\varphi(t) = h\big(t,\, u_0(t),\, u_0'(t)\big)\,, \quad u_0(t) = x_0 - \frac{1}{2} g t^2\,.$$
- Soit l'équation $x' = f(x)$, $x(0) = \varepsilon$; on suppose que $f(0) = 0$, f de classe C^2. Solution : $u(t, \varepsilon) \sim \varepsilon\, \mathrm{e}^{\alpha t}$ où $\alpha = f'(0)$.
- Soit l'équation $x' = 2t + \varepsilon x^2$, $x(0) = \varepsilon - 1$. Solution :
$$u(t, \varepsilon) \sim (t^2 - 1) + \varepsilon\left(1 + t - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{5} t^5\right)\,.$$

2.9.6 Remarques historiques

Un raccourci de l'histoire du développement de la théorie des équations différentielles peut être présenté comme suit :

(i) XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle, introduction des équations différentielles à la suite du développement du calcul infinitésimal ;

(ii) XVIII$^{\mathrm{e}}$ siècle, résolution, plus ou moins explicitement, d'un grand nombre d'équations différentielles émanant surtout des sciences naturelles comme l'astronomie et la physique ;

(iii) XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, début des études qualitatives des solutions, de leur existence et de leur unicité ;

(iv) XX$^{\mathrm{e}}$ siècle, introduction des méthodes topologiques (et d'analyse fonctionnelle) pour des études qualitatives approfondies des solutions ; développement massif des méthodes de solutions numériques, aidées par les ordinateurs.

Du point de vue de cette esquisse historique, les développements présentés dans les deux chapitres de ce livre consacrés aux équations différentielles ordinaires reflètent approximativement la partie de la théorie achevée autour de la fin du XIX^{e} siècle, sauf que nous avons profité de nombreuses simplifications introduites par les différents auteurs de notre siècle. En particulier, l'organisation moderne de l'algèbre linéaire permet une présentation succincte de la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre (sect. 2.1, 2.2, 2.3). Cette théorie, généralisée aux espaces de dimension infinie, forme un moyen puissant pour l'étude des équations différentielles aux dérivées partielles comme nous le verrons dans la troisième partie de cet ouvrage. Du point de vue moderne, la théorie des équations linéaires (scalaires) d'ordre supérieur (sect. 2.4, 2.5, 2.6) est un corollaire de la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Ce point de vue n'est pas évident dans les travaux du XVIII^{e} siècle, même si l'équivalence entre les systèmes d'équations du premier ordre et les systèmes d'équations d'ordre supérieur était peut-être connu, surtout à cause de l'interprétation mécanique de cette équivalence en termes d'un passage de l'espace des configurations à l'espace des phases. On a dit, à juste titre, que « le XVIII^{e} siècle est par excellence le siècle de la mécanique et de l'astronomie » et les travaux de d'Alembert, d'Euler et de Lagrange témoignent de l'utilisation des systèmes d'équations différentielles pour l'étude de nombreux problèmes dans ces deux domaines. Le second tome de l'ouvrage en deux volumes d'Euler (*Institutiones Calculi Integralis*, Opera Omnia I, tomes 11, 12, 13, publié entre 1768 et 1770), est consacrée aux équations différentielles ordinaires, du premier ordre et d'ordre supérieur, mais ils ne contiennent pas une discussion des solutions des systèmes d'équations différentielles. D'Alembert avait considéré les systèmes d'équations différentielles linéaires, mais les traités du XVIII^{e} siècle n'en parlent pas, sans doute à cause du fait que les solutions explicites dans ce domaines sont impossibles à décrire sans une utilisation systématique du calcul matriciel, inexistant à l'époque (mais voir Lagrange, *Œuvre* », vol. 1, pp. 516, 521, etc.).

Dans le domaine des équations scalaires, le traité d'Euler semble présenter une vue d'ensemble complète de tout ce qui était connu autour des années 1770, une grande partie étant due à Euler lui-même. Son *Institutiones Calculi Integralis* contient un grand nombre de procédés de résolution qui sont enseignés régulièrement encore aujourd'hui : équations aux variables séparées, équations linéaires de toutes sortes, en particulier celles à coefficients constants, solutions en séries du type $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^{\lambda+n}$ où Euler se sert de l'équation déterminante pour obtenir la valeur λ nécessaire (exactement comme dans la proposition 2.6.5) ; les équations hypergéométriques, de Bessel et de Riccati y sont résolues aussi. Ce qui manque chez Euler, c'est la discussion de la convergence des séries obtenues comme solutions ; aussi, Euler ne semble pas distinguer entre les solutions réelles et les solutions complexes, sa discussion étant souvent de nature algébrique.

C'est Gauss qui initie la discussion de la convergence de la série hypergéométrique (Ex. 31, sect. 2.8) dans un article, de 1813, devenu désormais

célèbre ; Gauss ne fait aucune référence, dans cet article, à l'équation différentielle associée, mais on sait aujourd'hui à travers la publication (après sa mort en 1855) de certains de ses écrits inédits (dans les œuvres de Gauss, 12 volumes, 1863-1933) qu'il en était parfaitement conscient. Ce qui est évident dès le début du XIX^{e} siècle (§ 1.7.3), c'est que les mathématiciens s'intéressent, de plus en plus, aux questions de l'existence et de l'unicité des solutions et plus généralement à leurs propriétés qualitatives. L'étude des solutions en séries en est un exemple ; toute une pléiade de mathématiciens comme Jacobi, Kummer, Riemann, Fuchs, Frobenius, Thomae, etc. ont enrichi cette théorie au cours des années 1830-1870 et leurs travaux furent continués par Klein, Poincaré, Birkhoff et par bien d'autres jusqu'à nos jours. En effet, les équations différentielles à coefficients méromorphes présentent encore des problèmes difficiles et intéressants. Dans une direction différente, les travaux de Sturm et de Liouville (datant des années 1830-1840) ont montré la nécessité des études qualitatives des solutions des équations différentielles ; le théorème de comparaison de Sturm (§ 2.7.3), malgré sa grande simplicité, reste un outil précieux. De même, l'analyse élémentaire de Floquet des solutions des équations périodiques (datant de 1883) est une aide considérable dans l'étude des équations périodiques particulières importantes de Mathieu et de Hill (§ 2.9.3).

2.9.7 Remarques bibliographiques

En plus des ouvrages conseillés au paragraphe 1.7.2, nous recommandons les deux volumes de Hille ([10], [11]) pour l'ensemble des questions sur les équations différentielles ordinaires traités ici. Le volume de Whittaker et Watson [21] est un grand classique (1re édition 1902), toujours très utile pour l'étude des fonctions spéciales : hypergéométriques, de Bessel, de Legendre, de Hermite, de Mathieu, etc. ; il est bien documenté sur les contributions des auteurs anciens.

Les relations entre les équations différentielles et la mécanique ont été à peine abordées dans notre volume ; elles constituent une partie essentielle des cours de mécanique rationnelle que les étudiants en physique sont toujours astreints à suivre. En plus du livre de Whittaker (mentionné dans § 2.9.1) qui est riche en références historiques précises (et qui reste encore un livre de référence incontournable pour la théorie mathématique précise de la mécanique rationnelle), il faut mentionner l'ouvrage (en cinq tomes) de P. Appell *Traité de mécanique rationnelle* (publié entre 1893 et 1925 avec différentes éditions ultérieures) qui est un classique du sujet. La mécanique rationnelle moderne est un mélange de presque toutes les branches importantes des mathématiques actuelles ; à titre d'exemple (en français) citons le livre de C. Godbillon (*Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969) écrit pour les mathématiciens avancés dans la grande tradition géométrique établie par Lagrange, Liouville et, plus près de nous, par Elie Cartan.

Une histoire détaillée du développement de la théorie des équations différentielles n'est pas encore faite. En attendant une telle histoire, on peut lire avec intérêt et profit l'étude volumineuse de J. Lützen (*Joseph Liouville 1809-1882 :*

Master of Pure and Applied Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1990) ; ce volume reflète bien une partie des mathématiques du XIX^{e} siècle qui nous intéresse ici ; il présente clairement les travaux de Sturm et de Liouville, soulignant aussi les liens d'amitié qui liait ces deux mathématiciens de nationalités différentes (Sturm étant genevois, Liouville français).

CHAPITRE 3

Espaces de Hilbert

Dans ce chapitre, nous définissons les espaces de Hilbert et nous établissons quelques propositions fondamentales concernant ces espaces qui nous seront d'une utilité constante dans la suite. Elles permettent, en particulier, la présentation moderne de la théorie des séries de Fourier et d'autres développements orthogonaux. En fait, les espaces hilbertiens sont devenus indispensables pour un grand nombre de théories mathématiques et physiques ; même les quelques propriétés simples de ces espaces que nous développons ici ont une gamme d'applications étendue comme nous le verrons dans la suite. En même temps, la géométrie de ces espaces est très proche de la géométrie euclidienne habituelle ; même si les espaces hilbertiens qui nous seront utiles seront généralement de dimension infinie, il y a un grand nombre de leurs propriétés qui sont parfaitement compréhensibles en faisant les dessins élémentaires dans le plan. Dans notre exposé, nous nous efforcerons de mettre en évidence ces analogies avec la géométrie euclidienne.

Les espaces vectoriels dans ce chapitre sont pris sur le corps $\mathbb{C}$. En général, il n'y a que peu de changements à faire pour passer aux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; il suffit de remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ dans les endroits appropriés. S'il y a une différence importante, nous la signalerons.

Sauf mention contraire, un espace vectoriel aura toujours une dimension $\geqslant 1$; autrement dit, on aura toujours des vecteurs non nuls dans nos espaces vectoriels.

3.1 NOTIONS FONDAMENTALES

3.1.1 Préliminaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $F : E \times E \to \mathbb{C}$ s'appelle une ***forme hermitienne*** sur E si elle vérifie les conditions suivantes : pour tout choix de f, g, f_1, f_2 dans E,

$$F(f_1 + f_2\,,\, g) = F(f_1, g) + F(f_2, g) \tag{3.1}$$

$$F(\lambda f, g) = \lambda F(f, g) \tag{3.2}$$

$$F(f, g) = \overline{F(g, f)}\,. \tag{3.3}$$

Les conditions (3.1) et (3.2) disent que, pour chaque choix de $g \in E$, l'application $f \mapsto F(f, g)$ est une ***forme linéaire*** sur E. La condition (3.3) en présence

de (3.1) et (3.2) entraîne que $F(f,f) \in \mathbb{R}$ pour tout $f \in E$ et que, pour chaque choix de $f \in E$, l'application $g \mapsto F(f,g)$ est une ***forme semi-linéaire*** sur E, ce qui signifie que, pour tout choix de g, g_1, g_2 dans E,

$$F(f\,,\, g_1+g_2) = F(f,g_1)+F(f,g_2)$$
$$F(f,\lambda g) = \overline{\lambda}F(f,g)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Si $F : E \times E \to \mathbb{C}$ est telle que $f \mapsto F(f,g)$ est linéaire (pour tout $g \in E$) et $g \mapsto F(f,g)$ est semi-linéaire (pour tout $f \in E$), alors F s'appelle une ***forme sesqui-linéaire*** (du latin *sesqui*, un demi en plus). Donc une forme hermitienne est une forme sesqui-linéaire vérifiant la condition (dite de la ***symétrie hermitienne***) (3.3) ; cette condition sur une forme hermitienne F entraîne que $F(f,f)$ est réel pour tout $f \in E$. On démontrera dans la suite (voir après (3.5)) qu'*une forme sesqui-linéaire F telle que $F(f,f) \in \mathbb{R}$, $f \in E$, est toujours une forme hermitienne* (c'est-à-dire vérifie, en plus, (3.3)).

Une forme hermitienne F est dite ***positive*** si $F(f,f) \geqslant 0$, $f \in E$; nous dirons que F est ***strictement positive*** si $F(f,f) > 0$ si $f \neq 0$. Il est évident que

$$F(0,g) = 0 = F(f,0)\,, \quad f,\, g \in E$$

pour toute forme hermitienne F sur E. Une forme hermitienne strictement positive F sur E s'appelle aussi un ***produit scalaire*** dans E.

Toute forme sesqui-linéaire F sur E vérifie l'identité suivante : pour $f_1, \ldots, f_m$, $g_1, \ldots, g_n$ dans E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$, m, n entiers $\geqslant 2$,

$$F\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j\,,\, \sum_{k=1}^{n}\mu_k g_k\right) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \lambda_j\overline{\mu}_k F(f_j,g_k)\,. \tag{3.4}$$

On déduit (3.4) par récurrence sur m, n en utilisant la linéarité de $f \mapsto F(f,g)$ et la semi-linéarité de $g \mapsto F(f,g)$.

Etant donné une forme sesqui-linéaire F sur E, l'application $f \mapsto F(f,f) = Q(f)$, $f \in E$, s'appelle la ***forme quadratique*** associée à F ; un calcul simple établit la formule (dite de ***polarisation***) suivante : pour f, $g \in E$,

$$4F(f,g) = \sum_{k=0}^{3} i^k Q(f+i^k g) = \{Q(f+g)-Q(f-g)\}+i\{Q(f+ig)-Q(f-ig)\}\,. \tag{3.5}$$

Cette formule est une conséquence de la linéarité de $f \mapsto F(f,g)$ et de la semi-linéarité de $g \mapsto F(f,g)$, ne nécessitant pas (3.3). Une conséquence immédiate de (3.5) est la suivante : *si deux formes sesqui-linéaires F_1, F_2 sur E donnent la même forme quadratique associée, alors $F_1 = F_2$* ; autrement dit si $F_1(f,f) = F_2(f,f)$, $f \in E$, alors $F_1(f,g) = F_2(f,g)$, f, $g \in E$.

Il s'ensuit qu'*une forme sesqui-linéaire F sur E vérifie (3.3) si et seulement si $F(f,f) = Q(f) \in \mathbb{R}$ pour tout $f \in E$*. En effet, si F vérifie (3.3), alors $F(f,f) = \overline{F}(f,f)$ d'où $F(f,f)$ est réel ; d'autre part, en posant

$$F_1(f,g) = F(f,g)\,, \quad F_2(f,g) = \overline{F(g,f)}\,, \qquad f,\, g \in E\,,$$

on obtient deux formes sesqui-linéaires sur E qui sont telles que $F_1(f,f) = F_2(f,f)$, $f \in E$, si $F(f,f) \in \mathbb{R}$ pour tout $f \in E$ d'où l'on conclut que $F_1 = F_2$, c'est-à-dire que (3.3) est vérifiée.

REMARQUE. Dans le cas des espaces vectoriels réels E, on remplace les formes hermitiennes par les formes *bilinéaires*, réelles et *symétriques* ($F : E \times E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto F(f,g)$ et $g \mapsto F(f,g)$ linéaire (sur $\mathbb{R}$) et $F(f,g) = F(g,f)$) ; la formule de polarisation (3.5) devient alors

$$4F(f,g) = Q(f+g) - Q(f-g)\,, \quad f,\, g \in E$$

avec $Q(h) = F(h,h)$.

3.1.2 Proposition

Soit F une forme hermitienne positive sur l'espace vectoriel E ; posons $Q(f) = F(f,f)$, $f \in E$.

(i) ***Inégalité de Cauchy–Schwarz***
Pour tout f, g dans E,

$$\left|F(f,g)\right|^2 \leqslant Q(f)Q(g)\,.$$

(ii) ***Inégalité du triangle***
Si $p(f) = \sqrt{Q(f)}$, $f \in E$, alors, pour tout f, g dans E,

$$p(f+g) \leqslant p(f) + p(g)\,.$$

REMARQUE. Rappelons que la positivité de la forme hermitienne F signifie que $Q(f) \geqslant 0$, $f \in E$; évidemment $Q(0) = 0$, mais on peut avoir $Q(f) = 0$ pour certains $f \neq 0$. D'après (i), si $Q(f) = 0$, alors $F(f,g) = 0$ pour tout $g \in E$; d'après (ii), $\{f : Q(f) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

DÉMONSTRATION

(i) Un petit calcul donne que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$0 \leqslant Q(f+\lambda g) = Q(f) + \overline{\lambda}F(f,g) + \lambda F(g,f) + \left|\lambda\right|^2 Q(g)\,; \tag{3.6}$$

si $Q(g) \neq 0$, prenons $\lambda = -F(f,g)/Q(g)$ dans (3.6) ; on aura

$$0 \leqslant Q(f) - \frac{\left|F(f,g)\right|^2}{Q(g)}\,.$$

ce qui donne l'inégalité signalée si $Q(g) \neq 0$. Si $Q(g) = 0$ mais $Q(f) \neq 0$, le même raisonnement est applicable en interchangeant f et g. Finalement si $Q(f) = Q(g) = 0$, on prend $\lambda = -F(f,g)$ dans (3.6) pour obtenir

$$-2\big|F(f,g)\big|^2 \geqslant 0$$

ce qui donne $F(f,g) = 0$.

(ii) On a

$$\begin{aligned} Q(f+g) &= Q(f) + F(f,g) + F(g,f) + Q(g) \\ &= Q(f) + 2\,\mathrm{Re}\,F(f,g) + Q(g) \\ &\leqslant Q(f) + 2\sqrt{Q(f)Q(g)} + Q(g) = \big\{\sqrt{Q(f)} + \sqrt{Q(g)}\big\}^2 \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (i). ♦

3.1.3 Forme hermitienne strictement positive

Lorsque la forme hermitienne F dans la proposition 3.1.2 est *strictement positive*, on peut préciser les cas d'égalités dans les inégalités indiquées.

- *Pour f, g dans E,*

$$\big|F(f,g)\big|^2 = Q(f)Q(g)$$

si et seulement si $f = 0$, ou $g = 0$, ou $f = \lambda_0 g$ pour un $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

En effet, si on a l'égalité proposée et $Q(g) \neq 0$, alors on voit de la démonstration de la proposition 3.1.2 que

$$Q(f + \lambda g) = 0$$

pour $\lambda = -F(f,g)/Q(g)$; puisque F est strictement positive, $Q(f+\lambda g) = 0$ entraîne que $f + \lambda g = 0$, ce qui prouve notre affirmation.

- *Pour f, g dans E,*

$$p(f+g) = p(f) + p(g)$$

si et seulement si $f = 0$, ou $g = 0$, ou $f = \lambda_0 g$, pour un $\lambda_0 > 0$.

En effet, de la démonstration de la proposition 3.1.2, on constate que si $Q(f) \neq 0$, $Q(g) \neq 0$ (ce qui équivaut à $f \neq 0$, $g \neq 0$), alors il y a égalité indiquée si et seulement si $F(f,g)$ est réel et positif et s'il y a égalité $F(f,g) = \sqrt{Q(f)Q(g)}$; cela équivaut à avoir, au vu de la discussion du cas d'égalité précédent, que $f = \lambda_0 g$, pour un $\lambda_0 > 0$.

3.1.4 Espaces préhilbertiens

Un espace vectoriel complexe E muni d'une forme hermitienne strictement positive F s'appelle un ***espace préhilbertien***. Nous écrivons

$$F(f,g) = \langle f,g\rangle\,, \quad F(f,f) = Q(f) = \|f\|^2\,,$$

avec $\|f\| \geqslant 0$; on dit que $\langle f,g\rangle$ est le *produit scalaire* des éléments f, g de E et $\|f\|$ est la ***norme*** de $f \in E$. Notons que $f \mapsto \|f\|$ vérifie bien les propriétés usuelles d'une norme dans un espace vectoriel complexe : pour tout choix de f, g dans E, on a

- (inégalité du triangle) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$;
- (homogénéité) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (positivité stricte) $\|f\| > 0$ sauf si $f = 0$, $\|0\| = 0$.

Deux éléments f, g de E sont dits ***orthogonaux*** (on écrit $f \perp g$) si $\langle f,g\rangle = 0$. Une famille d'éléments $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ dans E s'appelle une ***famille orthogonale*** si $f_\alpha \perp f_\beta$ dès que $\alpha \neq \beta$; c'est une ***famille orthonormale*** si, de plus, $\|f_\alpha\| = 1$, $\alpha \in I$.

Les identités algébriques suivantes sont constamment utilisées ; elles sont des cas particuliers de (3.4). Pour $f_1, \ldots, f_n$, g dans E, on a

- $$\|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2 + 2 \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \mathrm{Re}\langle f_j, f_k\rangle\,; \tag{3.7}$$

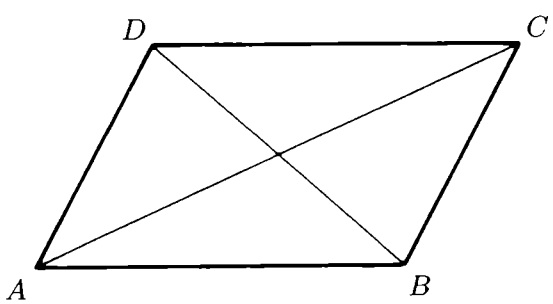
- (formule de Pythagore)

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2 \tag{3.8}$$

si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une famille orthogonale ;

- (identité du parallélogramme)

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\Big(\|f\|^2 + \|g\|^2\Big)\,. \tag{3.9}$$



$AB = CD = \|f\|$
$BC = AD = \|g\|$
$AC = \|f+g\|$
$BD = \|g-f\| = \|f-g\|$

Fig. 3.1

REMARQUE. Certains auteurs, surtout les physiciens, utilisent une convention différente concernant le produit scalaire $\langle f, g\rangle$; selon eux, $f \mapsto \langle f, g\rangle$ est semi-linéaire (alors qu'elle est linéaire pour nous) et $g \mapsto \langle f, g\rangle$ est linéaire (alors qu'elle est semi-linéaire pour nous) ; la condition $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ reste inchangée. Bien entendu, cette différence d'écriture n'est pas essentielle.

Dans la suite, sauf mention contraire, le produit scalaire et la norme associée dans un espace préhilbertien E seront toujours notés par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ respectivement ; lorsqu'il est nécessaire de considérer plusieurs produits scalaires (c'est-à-dire formes hermitiennes) dans un même espace E, on utilisera des notations appropriées pour les distinguer.

3.1.5 Topologie des espaces préhilbertiens

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ et d'une norme qui en dérive :

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}, \quad f \in E.$$

Cette norme permet d'introduire les notions topologiques dans E exactement comme nous l'avons fait (vol. 1) dans $\mathbb{R}^N$ en utilisant la norme euclidienne. Si $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, le sous-ensemble de E défini par

$$B(f; \varepsilon) = \{g \in E : \|g - f\| < \varepsilon\}$$

s'appelle la ***boule ouverte*** de centre f et de rayon ε. Une partie A de E est dite ***ouverte*** si pour tout $f \in A$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(f; \varepsilon) \subset A$. Une partie A de E est dite ***fermée*** si A^c est ouvert.

On peut maintenant introduire toutes les notions topologiques exactement comme nous l'avons fait pour $\mathbb{R}^N$ (vol. 1, sect. 1.3). Nous ne le ferons pas ici pour éviter les répétitions fastidieuses, quitte à les rappeler lorsque nous en aurons besoin. Néanmoins, il est important de préciser la notion de la limite d'une suite dans E et celle des fonctions continues dans E.

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E ; on dit que $f \in E$ est la limite de la suite $\{f_n\}$ (on écrit, $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} f_n = f$) si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

La limite f, si elle existe, est bien unique car si $\|f_n - g\| \to 0$ $(n \to \infty)$, alors l'inégalité

$$\|f - g\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\|$$

(provenant de l'inégalité du triangle) montre que $\|f - g\| = 0$, c'est-à-dire $f = g$. Notons qu'*une suite convergente est une suite de Cauchy*. En effet si $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$, on a

$$\|f_m - f_n\| \leqslant \|f_m - f\| + \|f - f_n\| \longrightarrow 0$$

lorsque m, $n \to \infty$. Par contre, on verra dans les exemples qui suivent qu'*une suite de Cauchy dans un espace préhilbertien n'est pas nécessairement convergente.*

On dit qu'un espace préhilbertien E est ***hilbertien*** si toute suite de Cauchy dans E est convergente vers un élément de E. Cette définition est souvent formulée comme suit : *un espace hilbertien est un espace préhilbertien complet.*

En généralisant cette notion, nous dirons qu'une partie A d'un espace préhilbertien E est ***complète*** si toute suite de Cauchy dans A possède une limite dans A. *Si A est une partie complète de l'espace préhilbertien E, alors A est fermée. Une partie d'un espace hilbertien est complète si et seulement si elle est fermée.*

DÉMONSTRATION

On démontre d'abord (exactement comme pour $\mathbb{R}^N$) qu'une partie A de E est fermée si et seulement si toute suite $\{f_n\}$ dans A qui converge possède sa limite f dans A (vol. 1, prop. 1.4.2). Les affirmations faites en découlent aussitôt. ♦

Soit $A \subset E$, espace préhilbertien. On définit $\overline{A}$, l'***adhérence*** de A, comme l'ensemble formé des $f \in E$ tels que f ***adhère*** à A, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$B(f;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset .$$

Il est évident que $A \subset \overline{A}$; on démontre que $\overline{A}$ est fermé et que $f \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe $\{f_n\}$ dans A avec $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $A \subset E$; si $F : A \to \mathbb{C}$, on définit la continuité de F en un point $a \in A$ exactement comme dans le cas des fonctions définies dans $\mathbb{R}^N$. On utilise souvent le critère de continuité suivant : *F est continue en a si et seulement si $F(f_n) \to F(a)$ lorsque $n \to \infty$ pour toute suite $\{f_n\}$ dans A telle que $f_n \to a$ lorsque $n \to \infty$.*

Les fonctions suivantes sont continues partout dans l'espace préhilbertien E : $f \mapsto \langle f, g\rangle$ (g fixe), $g \mapsto \langle f, g\rangle$ (f fixe), $f \mapsto \|f\|$. Ceci est une conséquence immédiate d'une affirmation plus générale : *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle = \langle f, g\rangle$$

dès que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} g_n = g$.

En effet, on a

$$\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle = \langle f_n - f\ ,\ g_n\rangle + \langle f\ ,\ g_n - g\rangle$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle\right| \leqslant \|f_n - f\|\,\|g_n\| + \|f\|\,\|g_n - g\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

car $\sup_n \|g_n\| < \infty$, étant donné que $f_n \to f$, $g_n \to g$ ($n \to \infty$) (Ex. 8, § 3.2.6).

On aura besoin aussi de la notion de continuité d'une fonction $F : A \to H$. A étant une partie d'un espace préhilbertien E et H un autre espace préhilbertien (éventuellement égal à E). Si $a \in A$, on dit que F est continue en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\|F(f) - F(a)\| < \varepsilon$ dès que $\|f - a\| < \delta$, c'est-à-dire

$$F\big(B(a;\delta)\big) \subset B\big(F(a);\varepsilon\big)\,.$$

Notons que nous avons utilisé le même symbole $\|\cdot\|$ pour les normes dans les deux espaces (peut-être différents) E et H ; ceci ne doit pas causer de confusion. Si une notation plus explicite était nécessaire, nous aurions écrit $\|\cdot\|_H$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ pour la norme et le produit scalaire dans H.

La continuité d'une fonction linéaire $u : E \to H$ est particulièrement simple à discuter.

3.1.6 Proposition

Soient E, H deux espaces préhilbertiens et $u : E \to H$ une application linéaire. Alors u est continue partout si et seulement si u est continue en un point $a \in E$; de plus, u est continue si et seulement si u vérifie la condition suivante :

$$\sup\big\{\|u(f)\| : \|f\| \leqslant 1\big\} = M < \infty\,.$$

DÉMONSTRATION

Supposons que u est continue en $a \in E$; si $b \in E$ et $\{b_n\}$ est une suite dans E telle que $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, alors $\{b_n - b + a\}$ est une suite qui converge vers a ; donc

$$u(b_n - b + a) = u(b_n) - u(b) + u(a) \xrightarrow{n\to\infty} u(a)$$

ce qui entraîne que $u(b_n) - u(b) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On conclut que u est continue en b ; b étant quelconque dans E, u est continue dans E.

La définition de M entraîne que

$$\|u(f)\| \leqslant M\|f\|\,, \quad f \in E\,, \tag{3.10}$$

car si $f \neq 0$, alors $g = f/\|f\|$ est tel que $\|g\| = 1$ et

$$u(g) = \frac{1}{\|f\|}\,u(f)\,, \quad \|u(g)\| = \frac{1}{\|f\|}\,\|u(f)\| \leqslant M\,,$$

ce qui donne (3.10). De (3.10), on conclut que si $M < \infty$, alors u est continue en zéro car si $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$, on a de (3.10)

$$\|u(f_n)\| \leqslant M\|f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

D'autre part, si u est continue en zéro, il existe $\delta > 0$ tel que $\|u(g)\| < 1$ dès que $\|g\| < \delta$; mais si $\|f\| \leqslant 1$, alors $g = (\delta/2)f$ est tel que $\|g\| \leqslant \delta/2 < \delta$ d'où $\|u(g)\| < 1$, ce qui donne

$$\|u(f)\| = \left\|\frac{2}{\delta}\,u(g)\right\| < \frac{2}{\delta}$$

dès que $\|f\| \leqslant 1$; on conclut que $M \leqslant 2/\delta < \infty$. ♦

REMARQUES. Au sujet des applications linéaires $u : E \to H$ (E, H espaces préhilbertiens), on utilise souvent la terminologie suivante : les applications linéaires s'appellent les ***opérateurs linéaires*** ; si u vérifie la condition donnée dans la proposition 3.1.6, on dit que u est un opérateur linéaire ***borné*** et on écrit $M = \|u\|$. Donc un opérateur linéaire est continue si et seulement s'il est borné. Lorsque $H = \mathbb{C}$, on dit plutôt que u est une ***forme linéaire*** (ou ***fonctionnelle linéaire***) dans E ; ainsi, une forme linéaire est continue si et seulement si elle est bornée ; dans ce cas, on écrit

$$\|u\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |u(f)| < \infty\,.$$

Notons que le terme « borné » ne signifie pas que les valeurs de $u(f)$ sont bornées en norme (ce qui serait impossible si $u \neq 0$, car $u(\lambda f) = \lambda u(f)$ et $\|u(\lambda f)\| \to \infty$ si $|\lambda| \to \infty$, dès que $u(f) \neq 0$). L'utilisation du mot « borné » dans le sens donné ici est traditionnelle et universellement utilisée.

3.1.7 Complétion des espaces préhilbertiens

Soit E un espace préhilbertien (muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ et une norme $\| \cdot \|$ qui en dérive). *Il existe un espace hilbertien $H \supset E$ tel que la restriction du produit scalaire de H à E donne le produit scalaire de E ; de plus, l'adhérence $\overline{E}$ de E dans H est égale à H.* On dit que H est la ***complétion*** de E ; nous écrivons $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$ pour f, $g \in H$. Ainsi, le fait que $\overline{E} = H$ veut dire que, si $f \in H$, il existe une suite $\{f_n\}$ dans E telle que $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Nous ne démontrerons pas en détail l'existence d'une complétion de E ; on peut en donner une démonstration semblable à la construction des nombres réels comme classes d'équivalence des suites de Cauchy formées de nombres rationnels. On peut aussi démontrer que « les complétions sont uniques à un isomorphisme près », une notion que nous ne préciserons pas ici.

3.2 EXEMPLES

3.2.1 Espace $\mathbb{C}^N$

On a

$$\mathbb{C}^N = \{x = (x_1, \ldots, x_N) : x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{C}\} ;$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ dans $\mathbb{C}^N$, posons $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_N + y_N)$, $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_N)$ et

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j \overline{y}_j .$$

On vérifie aisément que $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définit une forme hermitienne strictement positive dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$. Muni de ce produit scalaire (dit ***canonique***), $\mathbb{C}^N$ est un espace hilbertien de dimension finie N ; les éléments $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_N = (0, 0, \ldots, 1)$ forment une base (dite ***canonique***). On verra dans les exercices qu'il y a une infinité de manière d'introduire d'autres produits scalaires dans $\mathbb{C}^N$.

Notons que $\mathbb{C}$ est un espace hilbertien de dimension 1 lorsque l'on munit $\mathbb{C}$ de son produit scalaire canonique

$$(x, y) \longmapsto x\overline{y} .$$

3.2.2 Espace ℓ^2

On a

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{n \geqslant 0} |x_n|^2 < \infty \right\} .$$

Si $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$x + y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \lambda x = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}} .$$

Notons que si $x \in \ell^2$ et $y \in \ell^2$, alors $x + y \in \ell^2$ car

$$\sum_{n \geqslant 0} |x_n + y_n|^2 \leqslant 2 \sum_{n \geqslant 0} \left\{ |x_n|^2 + |y_n|^2 \right\} < \infty$$

à cause de l'inégalité élémentaire suivante : si a, $b \in \mathbb{C}$

$$|a + b|^2 \leqslant 2 \left(|a|^2 + |b|^2 \right) .$$

En effet,

$$|a+b|^2 \leqslant (|a|+|b|)^2 \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\,|b|$$
$$\leqslant \left(|a|^2+|b|^2\right) + \left(|a|^2+|b|^2\right) = 2\left(|a|^2+|b|^2\right).$$

Il est clair que $x \in \ell^2$ entraîne que $\lambda x \in \ell^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc ℓ^2 est un espace vectoriel. Pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans ℓ^2, nous posons

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geqslant 0} x_n \overline{y}_n \ ;$$

puisque

$$\sum_n |x_n \overline{y}_n| = \sum_n |x_n|\,|y_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_n \left\{|x_n|^2 + |y_n|^2\right\} < \infty\,,$$

$\langle x, y\rangle$ est bien défini pour x, y dans ℓ^2. On vérifie sans peine que $\langle x, y\rangle$ donne un produit scalaire (dit ***canonique***) dans ℓ^2. Ainsi, ℓ^2 muni de son produit scalaire canonique est un espace préhilbertien ; la dimension de ℓ^2 (en tant qu'espace vectoriel) est infinie car la suite infinie de vecteurs (***canoniques***)

$$e_0 = (1, 0, \ldots),\ e_1 = (0, 1, 0, \ldots),\ \ldots$$

est évidemment une famille de vecteurs linéairement indépendants ; rappelons que ceci veut dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont dans $\mathbb{C}$. En effet, la relation

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j = (\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n,\ 0,\ \ldots) = (0, 0, \ldots)$$

montre que les λ_j doivent être nuls.

Démontrons que ℓ^2 *est un espace hilbertien*. En effet, soit $x(n) \in \ell^2$, $n \in \mathbb{N}$, avec $x(n) = \big(x_j(n)\big)_{j\in\mathbb{N}}$, une suite dans ℓ^2 telle que $\|x(n) - x(m)\| \to 0$ lorsque $m,\ n \to \infty$. Alors, pour $j \in \mathbb{N}$, $\{x_j(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres complexes ; donc

$$\lim_{n\to\infty} x_j(n) = x_j$$

existe pour $j \in \mathbb{N}$. Posons $x = \big(x_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ et vérifions que $x \in \ell^2$ et que $\|x(n) - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Pour ce faire, on observe d'abord que $\|x(n) - x(m)\| \to 0$ $(m,\ n \to \infty)$ entraîne que

$$M = \sup_{n\geqslant 0} \|x(n)\| < \infty$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{N}|x_j|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{N}|x_j(n)|^2 \leqslant \sup_{n\geqslant 0}\|x(n)\|^2 \leqslant M^2$$

donne

$$\|x\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}|x_j|^2 \leqslant M^2 < \infty\,.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x(m) - x(n)\| \leqslant \varepsilon$ si $m,\ n > n_0$; alors, pour $N \in \mathbb{N}$ et $n > n_0$,

$$\sum_{j=0}^{N}|x_j(n) - x_j|^2 = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{N}|x_j(n) - x_j(m)|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

car

$$\sum_{j=0}^{N}|x_j(n) - x_j(m)|^2 \leqslant \|x(n) - x(m)\|^2 < \varepsilon^2\,,\quad m\,,\ n > n_0\,.$$

En faisant tendre N vers ∞, on en conclut que

$$\|x(n) - x\| \leqslant \varepsilon\,,\quad n \geqslant n_0\,,$$

ce qui montre que $x(n) \to x$ lorsque $n \to \infty$.

L'espace ℓ^2 est donc un exemple d'un espace hilbertien de dimension infinie. On verra que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$ mais cette formule évidente a besoin de quelques précisions.

3.2.3 Espace $C([a\,,b])$

Soient $-\infty < a < b < \infty$, $C([a\,,b])$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues $f : [a\,,b] \to \mathbb{C}$ et muni des opérations d'addition et de multiplication par les éléments de $\mathbb{C}$, dites *ponctuelles* ; ainsi, on écrit $f + g$ pour la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ et λf pour $x \mapsto \lambda f(x)$. Dans l'espace vectoriel $C([a\,,b])$, on définit

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

On vérifie aussitôt que cette formule définit une forme hermitienne positive dans $C([a\,,b])$; elle est aussi strictement positive (donc elle donne un produit scalaire) car $\langle f, f\rangle = 0$ veut dire que

$$\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

d'où la continuité et la positivité de $x \mapsto |f(x)|^2$ font que $f(x) \equiv 0$; nous commenterons ce point plus généralement dans les exemples suivants. Nous appellerons ce produit scalaire, le ***produit scalaire*** L^2 de $C([a\,,b])$.

L'espace vectoriel $C([a, b])$ muni du produit scalaire L^2 est un *espace préhilbertien non hilbertien*. En effet, soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $C([a, b])$ définie comme suit : soit $a < c < b$; pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n < (b - c)$, soit f_n une fonction continue quelconque telle que $f_n(x) = 1$ pour $a \leqslant x \leqslant c$, $f_n(x) = 0$ pour $c + 1/n \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors $\|f_m - f_n\| \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$; en effet si $n > m$ avec $1/n < 1/m < (b - c)$, alors $|f_m(x) - f_n(x)| \neq 0$ seulement si $c < x < c + 1/m$ et $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \in [a, b]$ d'où

$$\|f_m - f_n\|^2 = \int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^2 \, dx \leqslant \int_c^{c+1/m} dx = \frac{1}{m} \longrightarrow 0$$

lorsque m (et par conséquent n) $\to \infty$. Notons que $f_n(x) \to \varphi(x)$ lorsque $n \to \infty$, pour $x \in [a, b]$, où $\varphi(x) = 1$ si $a \leqslant x \leqslant c$ et $\varphi(x) = 0$ si $c < x \leqslant b$; $\varphi \notin C([a, b])$ car φ est discontinue au point $x = c$ mais

$$\int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)|^2 \, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

De plus, il n'existe aucune fonction $f \in C([a, b])$ telle que $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ car alors on aurait

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 \, dx = 0 ,$$

entraînant que $f(x) = 1$ pour $a \leqslant x \leqslant c$ et $f(x) = 0$ pour $c < x \leqslant b$, ce qui serait incompatible avec la continuité de f.

Il est important d'observer que la complétion de $C([a, b])$ muni du produit scalaire indiqué est l'espace que l'on appelle $\mathrm{L}^2([a, b])$ formé des fonctions complexes définies dans $[a, b]$ de ***carré intégrable***. Nous préciserons cette description dans la suite.

3.2.4 Espace L^2

C'est l'exemple le plus important pour nous d'un espace hilbertien. Nous le présentons dans le cadre d'un espace mesuré (X, Σ, μ) quelconque (vol. 1, chap. 5) où X est un ensemble non vide muni d'une tribu Σ de ses parties :

$$\emptyset \in \Sigma , \quad A \in \Sigma \Longrightarrow A^c \in \Sigma , \quad A_n \in \Sigma , \; n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \Sigma ,$$

et $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ est une mesure positive ($\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ si $\{A_n\}$ est une suite des parties de X dans Σ telle que $A_m \cap A_n = \emptyset$, $m \neq n$).

Le cas le plus important d'un espace mesuré pour nous sera le suivant : X est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$ (par exemple X ouvert ou fermé dans $\mathbb{R}^N$) et $\mu(A)$ est la mesure de Lebesgue de $A \subset X$, A étant un ensemble borélien.

On considère $\mathcal{L}^2(X, \Sigma, \mu)$ (ou, plus brièvement, $\mathcal{L}^2(X)$) l'ensemble formé de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ de carré intégrable par rapport à μ, ce qui veut dire précisément que f est Σ-mesurable et que

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty .$$

On démontre aisément que si f, $g \in \mathcal{L}^2(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + g$ et λf sont dans $\mathcal{L}^2(X)$ de sorte que $\mathcal{L}^2(X)$ est un espace vectoriel complexe. Pour f, $g \in \mathcal{L}^2(X)$, on écrit

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \, \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) .$$

Puisque

$$|f(x) \, \overline{g(x)}| \leqslant \frac{1}{2} \Big\{ |f(x)|^2 + |g(x)|^2 \Big\} , \quad x \in X ,$$

$\langle f, g \rangle$ est bien défini pour f, $g \in \mathcal{L}^2(X)$. On vérifie sans peine que l'expression $\langle f, g \rangle$ définit une forme hermitienne positive dans $\mathcal{L}^2(X)$; en général, cette forme hermitienne n'est pas strictement positive car $\|f\| = 0$ entraîne seulement que $f(x) = 0$, μ p.p. et non $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$. Posons

$$\mathcal{N} = \big\{ f \in \mathcal{L}^2(X) : f(x) = 0 , \ \mu \text{ p.p.} \big\} = \big\{ f \in \mathcal{L}^2(X) : \langle f, f \rangle = 0 \big\} .$$

Il est clair que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^2(X)$; on pose

$$L^2(X, \Sigma, \mu) = L^2(X) = \mathcal{L}^2(X)/\mathcal{N} .$$

Un élément de $L^2(X)$ est une *classe d'équivalence* du type $\mathring{f} = f + \mathcal{N}$, f étant une fonction de $\mathcal{L}^2(X)$; si $\mathring{f}$, $\mathring{g}$ sont deux éléments de $L^2(X)$, on pose

$$\langle \mathring{f}, \mathring{g} \rangle = \langle f, g \rangle ;$$

notons que si $\mathring{f} = \mathring{\varphi}$ et $\mathring{g} = \mathring{\psi}$, alors

$$\langle \mathring{f}, \mathring{g} \rangle = \langle \mathring{\varphi}, \mathring{\psi} \rangle$$

car $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle f, g \rangle$ étant donné que $\varphi = f$, μ p.p., $\psi = g$, μ p.p. Il est évident que $\langle \mathring{f}, \mathring{g} \rangle$ définit une forme hermitienne strictement positive dans l'espace vectoriel $L^2(X)$.

La distinction entre $\mathcal{L}^2(X)$ et $L^2(X)$ étant un peu fastidieuse à faire, souvent on dit simplement que l'on a une fonction f dans $L^2(X)$ au lieu de dire qu'il s'agit de la classe d'équivalence des fonctions qui sont égales à f, μ p.p. Aussi, on dira que $\langle f, g \rangle$ est le produit scalaire ***canonique*** de f, g dans $L^2(X)$ et que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ est la norme de $f \in L^2(X)$; autrement dit, on identifie tacitement deux fonctions de $L^2(X)$ qui sont μ p.p. égales. Cette convention est assez universelle et elle ne cause pas de difficultés.

L'espace $L^2(X)$, muni de son produit scalaire canonique, est un espace hilbertien.

La démonstration de cette affirmation exige des connaissances techniques de la théorie d'intégration. Le lecteur non familier de cette théorie peut omettre la lecture de la démonstration qui suit

DÉMONSTRATION

Soit $f_n \in L^2(X)$, $n \in \mathbb{N}$, telles que

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\| = 0 ;$$

il faut établir l'existence de $f \in L^2(X)$ telle que $\|f_n - f\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour ce faire, nous démontrons d'abord qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_j}\}$, $n_0 < n_1 < \ldots$, et $f \in L^2(X)$, telles que $\|f_{n_j} - f\| \to 0$ lorsque $j \to \infty$; alors, il sera facile de démontrer que $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Choisissons $n_0 < n_1 < \ldots$ tels que, pour $j = 0, 1, \ldots$,

$$\|f_m - f_n\| < 4^{-j}, \quad m, n \geqslant n_j ;$$

alors, $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\| < 4^{-j}$, $j \geqslant 0$ et

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\| < \infty .$$

Soit

$$A_j = \left\{x \in X : |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| > 2^{-j}\right\}, \quad j \geqslant 0 ;$$

on a

$$\mu(A_j) \leqslant 4^j \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|^2 < 4^{-j}, \quad j \geqslant 0 ,$$

en utilisant l'inégalité élémentaire de Chebyshev

$$\mu\{x : |g(x)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \|g\|_2^2$$

valable pour $\varepsilon > 0$ et $g \in L^2(X)$ et provenant de

$$\|g\|_2^2 = \int_X |g(x)|^2 \, d\mu(x) \geqslant \int_{\{x:|g(x)|>\varepsilon\}} |g(x)|^2 \, d\mu(x) \geqslant \varepsilon^2 \mu\{x : |g(x)| > \varepsilon\}$$

Posons

$$A = \bigcap_{k\geqslant 0} \bigcup_{j\geqslant k} A_j ;$$

alors $\mu(A) = 0$ car, pour $k \geqslant 0$,

$$\mu(A) \leqslant \mu\left(\bigcup_{j\geqslant k} A_j\right) \leqslant \sum_{j\geqslant k} \mu(A_j) < \sum_{j\geqslant k} 4^{-j} \xrightarrow{k\to\infty} 0 .$$

Démontrons que si $x \in A^c$, alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| < \infty \, ;$$

en effet, si $x \in A^c$, il existe $k = k(x)$ tel que $x \in A_j^c$, $j \geqslant k$, de sorte que

$$\left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| \leqslant 2^{-j} \, , \quad j \geqslant k(x) \, ,$$

ce qui prouve la convergence de $\sum_{j \geqslant 0} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right|$ pour $x \in A^c$. On en conclut que

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} f_{n_j}(x)$$

existe si $x \in A^c$; en effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f_{n_\alpha}(x) + \left\{ f_{n_{\alpha+1}}(x) - f_{n_\alpha}(x) \right\} + \left\{ f_{n_{\alpha+2}}(x) - f_{n_{\alpha+1}}(x) \right\} + \cdots$$

Posons $f(x) = 0$ si $x \in A$; d'après le lemme de Fatou,

$$\int_X \left| f(x) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_X \left| f_n(x) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) < \infty$$

de sorte que $f \in L^2(X)$. On a vu que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - f_{n_\alpha}(x) = \sum_{j=\alpha}^{\infty} g_j(x) = \lim_{\beta \to \infty} \sum_{j=\alpha}^{\beta} g_j(x) \, , \quad x \in A^c$$

où $g_j(x) = f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)$. Du lemme de Fatou, on obtient

$$\int_X \left| f(x) - f_{n_\alpha}(x) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \lim_{\beta \to \infty} \int_X \left| \sum_{j=\alpha}^{\beta} g_j(x) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x)$$

ce qui donne

$$\left\| f - f_{n_\alpha} \right\| \leqslant \lim_{\beta \to \infty} \left\| \sum_{j=\alpha}^{\beta} g_j \right\| \, ;$$

puisque

$$\left\| \sum_{j=\alpha}^{\beta} g_j \right\| \leqslant \sum_{j=\alpha}^{\beta} \left\| g_j \right\| < \sum_{j \geqslant \alpha} 4^{-j} \, ,$$

on a

$$\left\| f - f_{n_\alpha} \right\| \leqslant \sum_{j \geqslant \alpha} 4^{-j} \xrightarrow{\alpha \to \infty} 0 \, .$$

Ceci entraîne que $\|f - f_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ car si $\varepsilon > 0$, on a d'abord un $n(\varepsilon)$ tel que

$$\|f_m - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m,\ n \geqslant n(\varepsilon)$$

et un α_0 tel que $n_\alpha \geqslant n(\varepsilon)$ si $\alpha \geqslant \alpha_0$ et

$$\|f - f_{n_\alpha}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha \geqslant \alpha_0 ;$$

alors, pour $n \geqslant n(\varepsilon)$,

$$\|f - f_n\| \leqslant \|f - f_{n_\alpha}\| + \|f_{n_\alpha} - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

en choisissant $\alpha \geqslant \alpha_0$, ce qui donne $n_\alpha \geqslant n(\varepsilon)$. ♦

REMARQUES. Les espaces $\mathbb{C}^N$, ℓ^2 et $L^2([a, b])$, introduits dans les exemples précédents, sont des cas particuliers de $L^2(X)$; si $X = \{1, 2, \ldots, N\}$ (ou $X = \mathbb{N}$) est muni de la mesure de comptage μ, alors $L^2(X)$ devient $\mathbb{C}^N$ (ou ℓ^2). L'exemple $L^2([a, b])$ se généralise utilement en prenant $X \subset \mathbb{R}^N$, X borélien, muni de la mesure de Lebesgue $(\mu = \lambda_N)$; le cas où X est ouvert ou fermé sera particulièrement important pour nous. En utilisant les méthodes de la section 5.11 du volume 1, on peut démontrer que si $f \in L^2(X)$, X borélien dans $\mathbb{R}^N$, il existe une suite $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\| = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_X |f(x) - \varphi_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2} = 0 .$$

Autrement dit, soit

$$C_0^\infty(X) = \left\{ f|_X : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \right\} ;$$

alors $C_0^\infty(X)$, muni du produit scalaire canonique de $L^2(X)$, est un espace préhilbertien dont la complétion est $L^2(X)$, X étant une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$. Notons que si $\lambda_N(X) = 0$, alors $L^2(X)$ se réduit à un espace vectoriel de dimension nulle contenant seulement $f = 0$ p.p. Si $\lambda_N(X) > 0$, on peut démontrer que $L^2(X)$ est un espace vectoriel de dimension infinie. Plus généralement, si (X, Σ, μ) est un espace mesuré quelconque contenant une suite $A_n \in \Sigma$, $0 < \mu(A_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, avec $A_m \cap A_n = \emptyset$ si $m \neq n$, alors $L^2(X, \Sigma, \mu)$ est un espace vectoriel de dimension infinie ; il suffit de considérer $f_n = 1_{A_n}$, $n \geqslant 1$, pour avoir un nombre dénombrable d'éléments linéairement indépendants dans $L^2(X, \Sigma, \mu)$.

3.2.5 Espaces de Sobolev

Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ telle que

$$\int_\Omega |\mathrm{D}^\alpha f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$$

pour $|\alpha| \leqslant m$, nous dirons que $f \in E^m(\Omega)$; ici, m est un entier $\geqslant 0$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$ et

$$\mathrm{D}^\alpha f(x) = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{D}_N^{\alpha_N} f(x)\,.$$

Si $f, g \in E^m(\Omega)$, posons

$$\langle f, g\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega \mathrm{D}^\alpha f(x)\, \overline{\mathrm{D}^\alpha g(x)}\, \mathrm{d}x\,, \quad \|f\|_m^2 = \langle f, f\rangle_m\,.$$

On vérifie sans peine que $\langle f, g\rangle_m$ définit un produit scalaire dans $E^m(\Omega)$; notons que pour $m = 0$, $\langle f, g\rangle_0$ donne le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega)$ restreint à $E^0(\Omega)$ où

$$E^0(\Omega) = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^2\, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Observons que

$$C_0^\infty(\Omega) \subset E^m(\Omega)\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

où $C_0^\infty(\Omega)$ est formé des fonctions $f \in C^\infty(\Omega)$ ayant un support compact (c'est-à-dire, il existe une partie compacte $K \subset \Omega$, K dépendant de f, telle que $f(x) = 0$ si $x \in \Omega \setminus K$). La complétion de $E^m(\Omega)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ se note $H^m(\Omega)$ et la complétion de $C_0^\infty(\Omega)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ est notée $H_0^m(\Omega)$. Les espaces $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ sont des exemples d'espaces de Sobolev ; ils jouent un rôle important dans la théorie moderne des équations aux dérivées partielles. Notons que

$$H^0(\Omega) = H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)\,,$$

mais en général $H_0^m(\Omega) \subsetneq H^m(\Omega)$ (encore faut-il clarifier le sens de l'inclusion !).

3.2.6 Exercices

1 Soit $F : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$; posons $a_{ij} = F(e_i, e_j)$ où $\{e_1, \ldots, e_N\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^N$; alors $A = [a_{ij}]$ est une matrice complexe de type (N, N). Démontrer les affirmations suivantes.

(i) F est une forme sesqui-linéaire si et seulement si

$$F(x, y) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} a_{ij} x_i \overline{y_j} = \langle Ax, y\rangle = y^* Ax \tag{3.11}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ sont des éléments de $\mathbb{C}^N$ considérés comme des matrices colonnes de type $(1, N)$, $y^* = \left[\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_N\right]$, la matrice ligne conjuguée de type $(1, N)$ associée à y et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{C}^N$.

(ii) F est une forme hermitienne si et seulement si F est donnée par (3.11) avec $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (en particulier, $a_{ii} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant N$) ; cette condition s'écrit comme $A = A^*$ où A^* est la matrice transposée conjuguée associée à A ($A^* = \overline{{}^tA}$).

(iii) F est une forme hermitienne positive (strictement positive) si et seulement si F est donnée par (3.11) avec une matrice $A = A^*$ telle que $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, $x \in \mathbb{C}^N$ ($\langle Ax, x\rangle > 0$, $0 \neq x \in \mathbb{C}^N$).

REMARQUE. Si $A = A^*$, on dit que A est une matrice *hermitienne* ou *auto-adjointe* ; si $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, $x \in \mathbb{C}^N$ et $A = A^*$, on dit que A est une matrice de type *positif* ; si $\langle Ax, x\rangle > 0$, $0 \neq x \in \mathbb{C}^N$ et $A = A^*$, on dit que A est une matrice de type *strictement positif*. De l'algèbre linéaire, on sait que toute matrice hermitienne A est semblable à une matrice diagonale réelle $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ où les λ_j sont les valeurs propres de A ; plus précisément, $A = U^*DU$ où U est une matrice *unitaire* ($U^*U = UU^* = I =$ matrice identité de type (N, N)) ; A est de type positif (strictement positif) si les $\lambda_j \geqslant 0$ (les $\lambda_j > 0$). Ainsi, le produit scalaire le plus général dans $\mathbb{C}^N$ est donné par $\langle Ax, y\rangle$, x, $y \in \mathbb{C}^N$, où A est une matrice (hermitienne) (N, N) de type strictement positif.

2 (Continuation de l'exercice 1) Démontrer que

$$\left|\langle Ax, y\rangle\right|^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle\,, \quad x,\ y \in \mathbb{C}^N\,,$$

si A est une matrice (N, N) de type positif ; si A est de type strictement positif, on aura égalité si et seulement si $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = \lambda_0 y$ pour $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

3 Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ un ensemble fini de n vecteurs (éléments) d'un espace préhilbertien E. Démontrer que les f_j sont linéairement indépendants si et seulement si la matrice $G = \left[\langle f_i, f_j\rangle\right]$, de type (n, n), est inversible. (Utiliser les implications

$$\sum_i c_i f_i = 0 \Longrightarrow \sum_i c_i\langle f_i, f_j\rangle = 0\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$\Longrightarrow \left\langle \sum_i c_i f_i\,,\, f_j \right\rangle = 0\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$\Longrightarrow \left\| \sum_i c_i f_i \right\|^2 = 0\,.)$$

REMARQUE. La matrice G s'appelle la ***matrice de Gram*** de $f_1, \ldots, f_n$.

4 Soient $E_1, \ldots, E_n$, n espaces préhilbertiens ; posons $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ pour l'espace vectoriel formé des éléments $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_j \in E_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Pour $f, g \in E$, posons

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, g_j \rangle$$

où $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$. Démontrer que $\langle f, g \rangle$, $f, g \in E$, définit un produit scalaire dans E.

REMARQUE. E, muni de ce produit scalaire, s'appelle la ***somme directe*** des espaces préhilbertiens $E_1, \ldots, E_n$; on écrit aussi $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

5 Un espace vectoriel réel E, muni d'une forme bilinéaire, réelle, symétrique et strictement positive $F : E \times E \to \mathbb{R}$, s'appelle un espace préhilbertien réel. Posons $E_{\mathbb{C}}$ pour l'espace vectoriel $E \times E$ muni des opérations suivantes : pour $(f, g) \in E \times E$, $(u, v) \in E \times E$, $a + ib \in \mathbb{C}$, a, b réels,

$$\begin{aligned} (f, g) + (u, v) &= (f + u\,,\, g + v) \\ (a + ib)(f, g) &= (af - bg\,,\, ag + bf) \\ \big\langle (f, g)\,,\, (u, v) \big\rangle &= F(f, u) + F(g, v) + iF(g, u) - iF(f, v)\,. \end{aligned}$$

Démontrer :

(i) $E_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel complexe ;
(ii) muni de $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, $E_{\mathbb{C}}$ est un espace préhilbertien ;
(iii) on a

$$\big\|(f, g)\big\|^2 = F(f, f) + F(g, g)\,.$$

REMARQUE. $E_{\mathbb{C}}$ s'appelle l'espace préhilbertien *complexifié* de E.

6 (Continuation de l'exercice 5) Soit $E = \mathbb{R}^N$ muni de son produit scalaire canonique réel : $F(x, y) = \sum_j x_j y_j$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ dans $\mathbb{R}^N$; Vérifier que $E_{\mathbb{C}}$ peut être identifié à $\mathbb{C}^N$ dans le sens suivant : posons $T(x, y) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_N + iy_N)$; alors $T : E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^N$ est un isomorphisme des espaces vectoriels complexes tel que

$$\big\langle (x, y)\,,\, (u, v) \big\rangle = \big\langle T(x, y)\,,\, T(u, v) \big\rangle\,, \quad (x, y)\,,\, (u, v) \in E_{\mathbb{C}}\,.$$

7 (Continuation de l'exercice 5) L'espace préhilbertien réel E est dit hilbertien si E muni de la norme induite par son produit scalaire réel F est complet (si $F(f_n - f_m\,,\, f_n - f_m) \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$, alors il existe $f \in E$ tel que $F(f_n - f\,,\, f_n - f) \to 0$). Démontrer que si E est un espace hilbertien réel, alors $E_{\mathbb{C}}$ est un espace hilbertien.

8 Soit E un espace préhilbertien ; si $a : E \to E$ et $b : E \to E$ sont deux fonctions continues, démontrer que

$$F(f,g) = \langle a(f), b(g) \rangle , \quad f,\ g \in E$$

définit une fonction continue $F : E \oplus E \to \mathbb{C}$ (cf. Ex. 4). (Démontrer que si $(f_n, g_n) \in E \oplus E$, $n = 1, 2, \ldots$, alors $(f_n, g_n) \to (f, g) \in E \oplus E$ $(n \to \infty)$ si et seulement si $f_n \to f$, $g_n \to g$ lorsque $n \to \infty$.)

9 Démontrer que toute application linéaire $F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ est continue.

10 Soit $p = \{p_n\}_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres > 0 ; nous notons ℓ^2_p l'espace vectoriel des suites complexes $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ telles que $\sum_n |x_n|^2 p_n < \infty$; pour $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell^2_p$, posons

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \overline{y}_n p_n \, .$$

Démontrer que ℓ^2_p muni de $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ est un espace hilbertien.

11 (Continuation de l'exercice 10) Pour $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^2$, posons $Tx = (c_n x_n)_{n \geqslant 0}$ où les c_n sont des nombres complexes. Démontrer que $T : \ell^2 \to \ell^2_p$ est une application linéaire continue si $M = \sup_n |c_n|^2 p_n < \infty$ et qu'alors $\|T\|^2 = M$.

12 Considérons $C([0,1])$ muni de son produit scalaire L^2 indiqué dans le paragraphe 3.2.3. Pour n entier $\geqslant 1$, soit $f_n \in C([0,1])$ défini par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } a_n \leqslant x \leqslant 1 \\ a_n^\alpha & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a_n \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < a_n < 1$, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Démontrer que $\sup_n \|f_n\| < \infty$ si et seulement si $\alpha > -1/2$, et qu'alors

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n\|^2 = \int_0^1 x^{2\alpha} \, \mathrm{d}x \, .$$

Démontrer aussi que si $\alpha > -1/2$, $\|f_n - f_m\| \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$ mais que si $-1/2 < \alpha < 0$, il n'existe aucune fonction $f \in C([0,1])$ telle que $\|f_n - f\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

13 Soit $C^1([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que $f'(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$ et $f' \in C([0,1])$; on munit $C([0,1])$ du produit scalaire L^2 (§ 3.2.3) ; puisque $C^1([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$, ce produit scalaire fait de $C^1([0,1])$ un espace préhilbertien. Posons $Tf = f'$, $f \in C^1([0,1])$. Démontrer que l'opérateur linéaire $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ est discontinu en vérifiant que si $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, alors $\|f_n\| \to 0$ mais $\|Tf_n\| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

14 (Continuation de l'exercice 13) Pour $f, g \in C^1([0,1])$ posons

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx + \int_0^1 f'(x)\,\overline{g'(x)}\,dx.$$

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ définit un produit scalaire dans $C^1([0,1])$ et que $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $Tf = f'$, est continu si $C^1([0,1])$ est muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $C([0,1])$ est muni de son produit scalaire L^2 (§ 3.2.3).

15 Soit $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$. Vérifier ce qui suit où les notations sont comme dans le paragraphe 3.2.5 avec $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$:

(i) $f \in E^0(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > -1/2$;
(ii) $f \in E^1(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$;
(iii) $f \in E^m(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > m - 1/2$.

16 Soit $f(x) = \|x\|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \|x\| < 1$, $x \in \mathbb{R}^N$; avec $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < \|x\| < 1\}$ démontrer que $f \in E^1(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1 - N/2$.

3.3 ESPACES SÉPARABLES

3.3.1 Définitions

Soit E un espace préhilbertien. On dit qu'une partie A de E est ***dense*** dans E si $\overline{A} = E$; autrement dit, A est dense dans E si pour tout $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $\|f - a\| < \varepsilon$. Plus généralement, si $A \subset B \subset E$, on dit que A est dense dans B si $\overline{A} \supset B$, ce qui équivaut à dire que si $f \in B$, $\varepsilon > 0$, alors il existe $a \in A$ tel que $\|f - a\| < \varepsilon$. L'espace préhilbertien E est dit ***séparable*** s'il existe une partie dénombrable A dense dans E.

Une partie A de E est dite ***totale*** si les combinaisons linéaires finies des éléments de A forment un sous-espace vectoriel dense dans E, autrement dit si

$$S = \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i : a_i \in A,\ c_i \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

(qui est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de A) est dense dans A.

3.3.2 Proposition

Si l'espace préhilbertien E possède une partie totale au plus dénombrable, alors E est séparable ; en particulier, si E est de dimension finie, E est séparable. Réciproquement, si l'espace préhilbertien E est séparable, alors E possède une partie totale A au plus dénombrable ; on peut choisir A tel que les vecteurs de A soient linéairement indépendants.

DÉMONSTRATION

Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ une partie totale finie ou dénombrable dans E ; posons S_0 pour l'ensemble des vecteurs $f \in E$ de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i\,, \quad r_i \in \mathbb{C}\,,\ r_i \text{ rationnels},\ 1 \leqslant i \leqslant n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,,$$

où $z \in \mathbb{C}$ est dit rationnel si $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ sont rationnels. Puisque A est total, pour tout $f \in A$, $\varepsilon > 0$, il existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}\ ;$$

soient $r_1, \ldots, r_n$ rationnels dans $\mathbb{C}$ tels que $|c_i - r_i| < \varepsilon'$, $1 \leqslant i \leqslant n$, où

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|}\,.$$

Alors

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\| + \sum_{i=1}^{n} |r_i - c_i|\,\|a_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon' \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| < \varepsilon$$

ce qui montre que S_0 est dense dans E. La cardinalité de S_0 étant au plus celle de $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$, où $\mathbb{Q}$ représente les nombres rationnels réels, on conclut que S_0 est une partie dénombrable dense dans E.

Lorsque $\dim E = N \geqslant 1$, on peut choisir une partie totale finie A de cardinalité N (formée d'une base de l'espace vectoriel E).

Supposons que l'espace préhilbertien E soit séparable ; alors il existe une partie dénombrable $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ dense dans E. On va choisir un sous-ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset D$ tel que les vecteurs de A forment un système linéairement indépendant et que A est total dans E. Pour ce faire, soit n_1 le premier indice tel que $d_{n_1} \neq 0$ et posons $a_1 = d_{n_1}$; soit ensuite $n_2 > n_1$ tel que d_{n_2} est linéairement indépendant des d_n, $n < n_2$, et posons $a_2 = d_{n_2}$; par récurrence, on obtient $a_k = d_{n_k}$ tel que d_{n_k} est linéairement indépendant des d_n, $n < n_k$. Si pour un $k = 1, 2, \ldots$ tous les vecteurs d_n, $n > n_k$, sont linéairement dépendants des $a_j = d_{n_j}$, $j \leqslant k$, alors A sera un ensemble fini formé des $a_1, \ldots, a_k$, sinon A sera un ensemble dénombrable formé de $a_1, a_2, \ldots$ Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$; il existe d_n tel que $\|d_n - f\| < \varepsilon$; d'après la construction des a_j, d_n est une combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_k$ pour un certain k, ce qui montre que A est total dans E. Noter que, par définition des a_j, chaque a_k est linéairement indépendant des a_j, $j < k$, de sorte que A est un système de vecteurs linéairement indépendants. ♦

3.3.3 Exemples d'espaces séparables

On a vu dans la proposition 3.3.2 que *tout espace préhilbertien de dimension finie est séparable* ; en particulier, $\mathbb{C}^N$ est séparable.

L'espace ℓ^2 est séparable. En effet, l'ensemble dénombrable $\{e_0, e_1, \ldots\}$ formé des vecteurs canoniques $e_0 = (1, 0, \ldots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots)$, ... est total dans ℓ^2 car si $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^2$ et $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que

$$\sum_{n>N} |x_n|^2 < \varepsilon^2$$

d'où

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n>N} |x_n|^2 < \varepsilon^2$$

établissant l'existence d'une combinaison linéaire finie y des e_0, e_1, ... telle que $\|x - y\| < \varepsilon$.

Nous démontrerons dans la suite que tout espace préhilbertien séparable est « isomorphe » à un sous-espace vectoriel de ℓ^2. Dans ce contexte, il est utile de savoir, a priori, que *si E est un espace préhilbertien séparable, alors tout sous-espace vectoriel F de E est aussi séparable*, en considérant F comme un espace préhilbertien dont le produit scalaire est obtenu par la restriction du produit scalaire dans E. Nous démontrons, plus généralement, ce qui suit : *soient A, B deux parties non vides d'un espace préhilbertien E avec $B \subset A$; si A possède une partie dénombrable dense dans A, alors B possède aussi une partie au plus dénombrable dense dans B.*

DÉMONSTRATION

Soit $\{a_1, a_2, \ldots\}$ une partie dénombrable dense dans A ; si $B(a_n; 1/m) \cap B$ est non vide (n, $m \in \mathbb{N}^*$), nous pouvons choisir un élément $b_{n,m} \in B$ qui aura alors la propriété d'avoir $\|a_n - b_{n,m}\| < 1/m$; l'ensemble de tels $b_{n,m}$ est une partie non vide, au plus dénombrable, de B. Si $b \in B \subset A$ et $\varepsilon > 0$, il existe d'abord un a_n et un $m \geqslant 1$ tel que $\|a_n - b\| < 1/m < \varepsilon/2$ et ensuite $b_{n,m}$ tel que $\|a_n - b_{n,m}\| < 1/m$ d'où

$$\|b - b_{n,m}\| \leqslant \|b - a_n\| + \|a_n - b_{n,m}\| < \frac{2}{m} < \varepsilon \ ;$$

ceci prouve que les $b_{n,m}$ forment une partie au plus dénombrable dense dans B. ♦

Soit $T : E \to F$ une application linéaire, continue et surjective, entre les espaces préhilbertiens E et F ; si E est séparable, alors F l'est aussi.

DÉMONSTRATION

Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ une partie dénombrable dense dans E ; posons $B = T(A) \subset F$ et vérifions que $\overline{B} = F$. Soient $b \in F$, $\varepsilon > 0$; puisque T est une surjection, il existe $a \in E$ tel que $Ta = b$; il existe alors un $a_n \in A$ tel que $\|a_n - a\| < \varepsilon'$ avec $\varepsilon' < \varepsilon/\|T\|$. Si $b_n = Ta_n$, alors $b_n \in B$ et

$$\|b_n - b\| = \|T(a_n - a)\| \leqslant \|T\| \, \|a_n - a\| < \varepsilon' \|T\| < \varepsilon$$

ce qui montre que B est dense dans F. Puisque B est évidemment au plus dénombrable, F est séparable. ♦

REMARQUE. Notons que si B est une partie finie de F, alors $\overline{B} = B$ de sorte que $\overline{B} = F$ entraîne automatiquement que B est une partie infinie. Rappelons que selon nos conventions tout espace vectoriel est tacitement de dimension $\geqslant 1$ (sauf mention expresse du contraire).

L'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$ est séparable. Plus généralement, l'espace $L^2(X, \Sigma, \mu)$ (§ 3.2.4) est séparable si la tribu Σ contient un famille dénombrable $\mathcal{A}$ d'ensembles ayant les propriétés suivantes :

(i) si $A \in \mathcal{A}$, alors $0 < \mu(A) < \infty$;

(ii) si $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, et si $\varepsilon > 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ ou $A = \emptyset$ tel que

$$\mu(A \triangle B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) < \varepsilon \, .$$

La démonstration de ces deux affirmations exige quelques connaissances techniques en théorie de l'intégration (vol. 1, chap. 5). Ainsi, si $\mathcal{A}$ est la famille des parties de $\mathbb{R}^N$ formées des réunions finies des cubes fermés ayant les sommets de coordonnées rationnelles, alors on peut démontrer que $\mathcal{A}$ vérifie les conditions indiquées par rapport à $\mu = \lambda_N$, la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$, et Σ, la suite borélienne dans $\mathbb{R}^N$ (cf. vol.1, sect. 5.5).

DÉMONTRATIONS DE LA SÉPARABILITÉ DE $L^2(X, \Sigma, \mu)$

Les conditions (i) et (ii) sur $\mathcal{A}$ entraînent que si $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, et si $\varepsilon > 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ (ou $A = \emptyset$) tel que

$$\|1_B - 1_A\| = \{\mu(A \triangle B)\}^{1/2} < \varepsilon \, , \quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \, .$$

Soit $f \geqslant 0$ dans $L^2(X, \Sigma, \mu)$; on sait qu'il existe une suite de fonctions simples, mesurables, g_n, $0 \leqslant g_n \leqslant f$, telle que $g_n(x) \to f(x)$, $x \in X$, lorsque $n \to \infty$; on en conclut (du théorème de convergence monotone) que

$$\|f - g_n\|^2 = \int \{f(x) - g_n(x)\}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \, .$$

Ainsi, si $\varepsilon > 0$, il existe $g = \sum_{j=1}^{n} b_j \, 1_{B_j}$, $b_j \geqslant 0$, $\mu(B_j) < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$, tel que

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $A_j \in \mathcal{A}$ tels que

$$\|1_{A_j} - 1_{B_j}\| < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2(b_1 + \cdots + b_n)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n ;$$

alors, si $h = \sum_{j=1}^{n} b_j \, 1_{A_j}$, on aura

$$\|f - h\| \leqslant \|f - g\| + \|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n} b_j \|1_{A_j} - 1_{B_j}\| < \varepsilon .$$

Puisque chaque $f \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ est une combinaison linéaire de quatre fonctions $\geqslant 0$ de $L^2(X, \Sigma, \mu)$, on conclut que pour tout $f \in L^2(X, \Sigma, \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $h = \sum_{j=1}^{n} a_j \, 1_{A_j}$ avec $a_j \in \mathbb{C}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, tel que

$$\|f - h\| < \varepsilon .$$

Autrement dit, $\{1_A, A \in \mathcal{A}\}$ est une partie dénombrable totale dans $L^2(X, \Sigma, \mu)$, donc $L^2(X, \Sigma, \mu)$ est séparable. ♦

Remarques

On conclut de la séparabilité de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que $L^2(X)$ *est séparable* où X est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$. En effet, si $Tf = f \, 1_X$, on vérifie que $T : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(X)$ est une application linéaire, surjective, continue car $\|Tf\| \leqslant \|f\|$ et toute fonction $g \in L^2(X)$ s'écrit comme $f \, 1_X$ en posant $f(x) = g(x)$, $x \in X$ et $f(x) = 0$ si $x \in X^c$. Si $C_2(X)$ représente la classe des fonctions continues $f : X \to \mathbb{C}$ qui sont au carré intégrable, on conclut que $C_2(X)$ *est un espace préhilbertien séparable* (considéré comme un sous-espace vectoriel de $L^2(X)$). De même, $E^0(\Omega)$ (§ 3.2.5) *est un espace préhilbertien séparable* car c'est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$. Plus généralement, $E^m(\Omega)$ (§ 3.2.5) *est un espace préhilbertien séparable* (Ex. 4, § 3.3.4).

La plupart des espaces préhilbertiens qui interviennent dans les équations aux dérivées partielles sont séparables ; *nous ne considérons que les espaces préhilbertiens séparables dans la suite*. Néanmoins, il est facile de donner des exemples d'espaces préhilbertiens non séparables (Ex. 5, § 3.3.4).

Notons que *si $E \subset H$, E un sous-espace vectoriel dense dans l'espace préhilbertien H, alors H est séparable si et seulement si E est séparable*. Nous laissons la démonstation simple de cette affirmation au lecteur.

3.3.4 Exercices

1 Soit $p = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres > 0 ; si ℓ_p^2 est l'espace hilbertien défini dans l'exercice 10 (§ 3.2.6), démontrer que ℓ_p^2 est séparable.

2 Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, l'espace préhilbertien obtenu comme la somme directe des espaces préhilbertiens $E_1, \ldots, E_n$ (Ex. 4, § 3.2.6). Démontrer que E est séparable si et seulement si chaque E_j est séparable.

3 Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre les espaces préhilbertiens E et F telle que $\|Tf\| = \|f\|$, $f \in F$. Démontrer que si F est séparable, alors E est séparable.

4 Pour $f \in E^m(\Omega)$ (§ 3.2.5), posons

$$Tf = \left(\mathrm{D}^\alpha f\right)_{|\alpha|\leqslant m}$$

et considérons T comme une application linéaire entre $E^m(\Omega)$ et $E^0(\Omega)\oplus\overset{n}{\cdots}\oplus E^0(\Omega)$, la somme directe de n espaces $E^0(\Omega)$, n étant la cardinalité des α tels que $|\alpha| \leqslant m$. Vérifier que

$$\|Tf\|^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\mathrm{D}^\alpha f\|^2 = \|f\|_m^2 ;$$

conclure à l'aide des exercices 2 et 3 que $E^m(\Omega)$ est séparable.

5 Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2 < \infty$ (dans le sens que $f(t) \neq 0$ si et seulement si $t \in \{t_0, t_1, \ldots\}$ et $\sum_{j\geqslant 0} |f(t_j)|^2 < \infty$; l'ensemble $\{t_0, t_1, \ldots\}$ s'appelle le ***support*** de f et est noté S_f). Pour $f, g \in \ell^2(\mathbb{R})$, posons $\langle f, g\rangle = \sum_{t\in\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}$ (cette somme étant considérée comme la somme $\sum_{j\geqslant 0} f(t_j)\,\overline{g(t_j)}$ ou $\mathrm{S}_f \cap \mathrm{S}_g = \{t_0, t_1, \ldots\}$). Vérifier que $\ell^2(\mathbb{R})$, muni de $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, est un espace préhilbertien ayant la propriété suivante : si $e_x(t) = 1$ pour $t = x$, $e_x(t) = 0$ pour $t \neq x$, alors $e_x \in \ell^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, avec $\|e_x - e_y\|^2 = 2$ si $x \neq y$. Conclure que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace préhilbertien non séparable en utilisant l'exercice suivant.

6 Soit E un espace préhilbertien contenant une famille non dénombrable $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ telle que $\|f_\alpha - f_\beta\| \geqslant \varepsilon > 0$ dès que $\alpha \neq \beta$. Démontrer que E est non séparable en raisonnant comme suit : si E contenait un ensemble dénombrable dense $\{d_1, d_2, \ldots\}$, alors pour chaque $\alpha \in I$, on aurait $n(\alpha)$ tel que $\|f_\alpha - d_{n(\alpha)}\| < \varepsilon/4$; si $\alpha \neq \beta$, alors $n(\alpha) \neq n(\beta)$ car sinon $n(\alpha) = n(\beta) = m$ donnerait la contradiction

$$\varepsilon \leqslant \|f_\alpha - f_\beta\| = \|f_\alpha - d_m + d_m - f_\beta\| < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

puisque $\alpha \mapsto n(\alpha)$ est une injection, I serait au plus dénombrable.

7 (Continuation de l'exercice 5) Démontrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace hilbertien.

REMARQUE. Notons que $\ell^2(\mathbb{R}) = L^2(X, \Sigma, \mu)$ où $X = \mathbb{R}$, Σ est la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$ et μ est la mesure de comptage dans $\mathbb{R}$: $\mu(A) = \infty$ si A est un ensemble infini et $\mu(A) = n$ si la cardinalité de A est égale à $n < \infty$.

3.4 SYSTÈMES ORTHOGONAUX

3.4.1 Définition

Soit E un espace préhilbertien. Une famille de vecteurs $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans E s'appelle une famille ***orthogonale*** (ou un système orthogonal) si

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle = 0\,, \quad \alpha \neq \beta \text{ dans } I\,;$$

la famille s'appelle une famille ***orthonormale*** (ou un système orthonormal) si s'il s'agit d'une famille orthogonale telle que

$$\|\varphi_\alpha\| = 1\,, \quad \alpha \in I\,.$$

Si $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un système orthogonal formé des vecteurs non nuls, il est évident que $\psi_\alpha = \varphi_\alpha / \|\varphi_\alpha\|$, $\alpha \in I$, définit un système orthonormal ; nous l'appellerons le système orthonormal associé au système orthogonal $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

3.4.2 Proposition

Soit E un espace préhilbertien. Un système orthogonal $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ formé des vecteurs non nuls dans E est un système de vecteurs linéairement indépendants. Si E est séparable, chaque tel système orthogonal est au plus dénombrable.

DÉMONSTRATION

Sans restriction de généralité, nous pouvons supposer que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un système orthonormal. Si $\sum_{j=1}^n c_j \varphi_{\alpha_j} = 0$ pour un choix de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans I et $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbb{C}$, alors, pour chaque α_k,

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \varphi_{\alpha_j}\,,\, \varphi_{\alpha_k} \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle \varphi_{\alpha_j}, \varphi_{\alpha_k} \rangle = c_k$$

à cause de l'orthonormalité des φ_α ; donc $\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_n}$ sont linéairement indépendants. Ceci étant pour tout choix des indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on conclut que la famille entière $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est linéairement indépendante.

Si E est séparable, il existe un ensemble dénombrable $\{d_1, d_2, \ldots\}$ dense dans E. Pour chaque φ_α d'un système orthonormal $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans E, il existe un $d_{n(\alpha)}$ tel que

$$\|\varphi_\alpha - d_{n(\alpha)}\| < \frac{1}{2} ;$$

démontrons que si $\alpha \neq \beta$, alors $n(\alpha) \neq n(\beta)$. Sinon on aurait $d_{n(\alpha)} = d_{n(\beta)} = d$ et

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| \leqslant \|\varphi_\alpha - d\| + \|\varphi_\beta - d\| < 1$$

ce qui contredirait $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}$ (puisque $\varphi_\alpha \perp \varphi_\beta$, on a

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = \|\varphi_\alpha\|^2 + \|\varphi_\beta\|^2 = 2$$

car $\|\varphi_\alpha\| = \|\varphi_\beta\| = 1$). Donc la correspondance $\alpha \mapsto n(\alpha)$, $\alpha \in I$, est injective ; puisque les entiers $\geqslant 1$ forment un ensemble dénombrable, on conclut que I est au plus dénombrable. ♦

3.4.3 **Proposition** (*projection orthogonale*)

Soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un système orthogonal de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien E. Si $f \in E$, on a

$$\inf_{c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j \right\| = \left\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|$$

où $a_j = \langle f, \varphi_j \rangle / \|\varphi_j\|^2$, $j = 1, \ldots, n$; de plus,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\| < \left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j \right\| ,$$

à moins que $c_j = a_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $\{f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j\}$ est orthogonal à chaque vecteur appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|\varphi_j\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

avec égalité si et seulement si f est une combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Les nombres a_j sont caractérisés par le fait que $\left(f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j\right) \perp \varphi_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

DÉMONSTRATION

Posons $g = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j$; on vérifie que

$$\langle g, \varphi_j \rangle = a_j \|\varphi_j\|^2 = \langle f, \varphi_j \rangle , \quad j = 1, \ldots, n .$$

On conclut que $(f-g) \perp \varphi_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, ce qui établit que $f-g$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si $c_1, \ldots, c_n$ sont des nombres complexes quelconques, écrivons

$$f - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j = (f-g) + \sum_{j=1}^{n} (a_j - c_j)\varphi_j \; ;$$

puisque $(f-g) \perp \sum_{j=1}^{n}(a_j - c_j)\varphi_j$, on obtient de la formule de Pythagore (3.8) :

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j \right\|^2 = \|f-g\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j - c_j)\varphi_j \right\|^2$$

$$= \|f-g\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |a_j - c_j|^2 \|\varphi_j\|^2 \geqslant \|f-g\|^2$$

avec égalité si et seulement si $c_j = a_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. En écrivant $f = (f-g) + g$, on obtient de l'orthogonalité entre $(f-g)$ et g :

$$\|f\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g\|^2 = \|f-g\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|\varphi_j\|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|\varphi_j\|^2$$

avec égalité si et seulement si $f = g$, une combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Noter que si $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j$, alors on a nécessairement

$$c_j = \frac{\langle f, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2} = a_j \, , \quad 1 \leqslant j \leqslant n \, .$$

Si $\left(f - \sum_{j=1}^{n} b_j \varphi_j\right) \perp \varphi_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, un petit calcul montre que

$$b_j = \frac{\langle f, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2} = a_j \, . \qquad \blacklozenge$$

3.4.4 Définition d'une projection

Le vecteur $g = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j$ qui apparaît dans la proposition 3.4.3 sera appelé la ***projection orthogonale*** de f sur le sous-espace vectoriel S engendré par le système orthogonal $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$; nous écrivons $g = P_S f$. L'utilisation de cette terminologie géométrique est justifiée par les faits suivants :

(i) g est l'unique vecteur dans S tel que $\|f-g\| \leqslant \|f-\xi\|$ pour tout vecteur $\xi \in S$;

(ii) le vecteur $(f-g)$ est orthogonal à tout vecteur $\xi \in S$.

Autrement dit, g peut être considéré comme le pied de la perpendiculaire abaissée de f sur le sous-espace vectoriel S (cf. fig. 3.2).

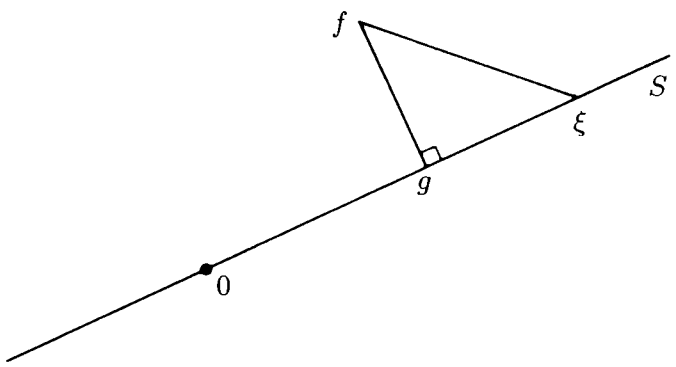


Fig. 3.2

Il est clair géométriquement que $P_S f$ ne dépend pas du choix des vecteurs $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ qui définissent S ; par ailleurs, on verra dans la suite (§ 3.4.7) que tout sous-espace vectoriel S de dimension $n < \infty$ dans un espace préhilbertien E est engendré par un système orthonormal contenant n vecteurs et ceci d'une infinité de manières.

L'expression analytique donnant $P_S f$ dépend évidemment du choix du système orthonormal (ou orthogonal) définissant S mais le vecteur obtenu $P_S f$ n'en dépend nullement. Dans la suite, on étudiera l'existence de la projection orthogonale $P_S f$ pour un sous-espace S de dimension infinie (sect. 3.7). Si S est engendré par n vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_n$, le calcul de $g = P_S f$ est basé sur une des deux propriétés caractéristiques de g : $g \in S$ est tel que

- $\|f - g\| = \inf_{\xi \in S} \|f - \xi\|$;
- $\langle f, f_j \rangle = \langle g, f_j \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

En introduisant un système de vecteurs orthogonaux $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ qui engendrent S (§ 3.4.7), on déduit l'existence et l'unicité de $g = P_S f$ en partant de la proposition 3.4.3 (cf. Ex. 7, 8, § 3.4.8).

3.4.5 Corollaire (*inégalité de Bessel*)

Soit $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un système orthonormal quelconque dans un espace préhilbertien E. Alors, pour tout $f \in E$, on a

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle f, \varphi_\alpha \rangle|^2 \leqslant \|f\|^2 .$$

DÉMONSTRATION

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n indices distincts dans I, on a (d'après la proposition 3.4.3)

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle|^2 \leqslant \|f\|^2 ;$$

puisque (par définition)

$$\sum_{\alpha\in I}|\langle f,\varphi_\alpha\rangle|^2=\sup\sum_{j=1}^{n}|\langle f,\varphi_{\alpha_j}\rangle|^2,$$

le supremum étant pris sur tout sous-ensemble fini $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ contenu dans I, le corollaire est démontré. ♦

3.4.6 Remarques

Les sommes du type $\sum_{\alpha\in I}a_\alpha$, $a_\alpha\in\mathbb{C}$, I étant un ensemble quelconque, sont discutées en détail dans le volume 2. Lorsque les $a_\alpha\geqslant 0$, on définit

$$\sum_{\alpha\in I}a_\alpha=\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{\alpha_j}:\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset I\right\}.$$

Puisque nos espaces préhilbertiens sont séparables, nous aurons besoin de l'inégalité de Bessel seulement dans le cas où I est au plus dénombrable. Nous discuterons, dans la section 3.5, la théorie générale des sommes du type $\sum_{\alpha\in I}f_\alpha$ où les f_α sont dans un espace préhilbertien et I est un ensemble quelconque au plus dénombrable. On aurait pu développer la théorie sans peine même lorsque la cardinalité de I est quelconque mais nous ne le ferons pas car nous n'en aurons aucun besoin (cf. Ex. 8, § 3.5.9).

3.4.7 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soient E un espace préhilbertien, f_1, f_2, ... une suite finie ou infinie des vecteurs linéairement indépendants dans E. Posons

$$\varphi_1=\frac{f_1}{\|f_1\|};$$

alors $\|\varphi_1\|=1$. Soit g_2 la projection orthogonale de f_2 sur le sous-espace vectoriel S_1 engendré par f_1 ; notons que S_1 est engendré également par φ_1 et, d'après la proposition 3.4.3, $g_2=a_1\varphi_1$ avec $a_1=\langle f_2,\varphi_1\rangle$; posons

$$\varphi_2=\frac{f_2-g_2}{\|f_2-g_2\|}.$$

Alors $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ est un système orthonormal qui engendre un sous-espace vectoriel S_2 (de dimension 2) qui est le même que celui engendré par f_1, f_2. Notons que $f_2-g_2\neq 0$ à cause de l'indépendance linéaire de f_1, f_2. En procédant par récurrence, on aura à l'étape numéro n (en supposant que l'on a au moins n vecteurs dans la suite f_1, f_2, ...) un vecteur φ_n défini par

$$\varphi_n=\frac{f_n-g_n}{\|f_n-g_n\|}$$

où g_n est la projection orthogonale de f_n sur le sous-espace vectoriel S_{n-1} engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ (qui est le même que celui engendré par $f_1, \ldots, f_{n-1}$). On obtient ainsi une suite (finie ou infinie selon que la suite $\{f_1, f_2, \ldots\}$ est finie ou infinie) de vecteurs $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ formant un système orthonormal ayant les propriétés suivantes :

(i) pour chaque n, le sous-espace vectoriel S_n engendré par $f_1, \ldots, f_n$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;

(ii) le sous-espace vectoriel S engendré par la totalité des $f_1, f_2, \ldots$ est égal au sous-espace engendré par les vecteurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Il est évident à partir de cette discussion que si $\{f_1, f_2, \ldots\}$ est un système linéairement indépendant et total (§ 3.3.1), alors $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ construit ci-dessus sera un système orthonormal total. Puisque tout espace préhilbertien séparable E possède une suite (finie ou infinie) de vecteurs linéairement indépendants totale (prop. 3.3.2), on conclut que *tout espace préhilbertien séparable E possède une suite (finie ou infinie) de vecteurs orthonormaux formant un ensemble total dans E.* Si la dimension de E est $n < \infty$, alors la suite orthonormale contiendra exactement n vecteurs.

3.4.8 Exercices

1 Vérifier que les vecteurs $e_0 = (1, 0, \ldots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots)$ forment une famille orthonormale totale dans ℓ^2.

2 Vérifier que dans $L^2([a, a + 2\pi])$, $a \in \mathbb{R}$, les familles suivantes sont orthogonales :

(i) $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$;

(ii) $\{1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(Chacune de ces deux familles est totale dans $L^2([a, a + 2\pi])$ ce qui constitue un élément essentiel de la théorie des séries de Fourier dans $\mathbb{R}$; nous démontrons ce fait dans le chapitre 4.)

3 Soit $E = E_1 \oplus E_2$ la somme directe des espaces préhilbertiens E_1, E_2 (Ex. 4, § 3.2.6). Si $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est une famille orthogonale dans E_1 et $\{\psi_\beta\}_{\beta \in J}$ est une famille orthogonale dans E_2, vérifier que la famille

$$\mathcal{F} = \{(\varphi_\alpha, 0), \alpha \in I\,;\, (0, \psi_\beta), \beta \in J\}$$

est orthogonale dans E ; si $\{\varphi_\alpha\}$ et $\{\psi_\beta\}$ sont des familles totales dans E_1, E_2 respectivement, démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est totale dans E.

4 Soient $f_1, \ldots, f_n$, n vecteurs dans $\mathbb{C}^n$; on associe une matrice $A = [a_{ij}]$ avec $\{f_1, \ldots, f_n\}$ en posant

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\,, \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\,.$$

Vérifier que A est une matrice unitaire si et seulement si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est un système orthonormal dans $\mathbb{C}^n$. (A est dite ***unitaire*** (Ex. 1, § 3.2.6) si $A^*A = AA^* = I_n$ où I_n est la matrice identité de type (n, n) et $A^* = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$, autrement dit $A^* = \overline{{}^tA}$; on dit que les colonnes de A sont formées par les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathbb{C}^n$.)

5 Soient $f_1, \ldots, f_n$, n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^n$. Vérifier que le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schimdt (§ 3.4.6) fournit un unique système de vecteurs orthonormaux $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $f_1 = b_{11}\varphi_1$, $f_2 = b_{12}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2$, ..., avec $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, ... Soient A et U les matrices de type (n, n) associées à $\{f_1, \ldots, f_n\}$ et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ respectivement (Ex. 4). Alors $A = UB$ où U est une matrice unitaire et B est une matrice triangulaire supérieure ayant les éléments diagonaux > 0 :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Conclure que toute matrice inversible complexe A de type (n, n) s'écrit de façon unique comme $A = UB$ où U est une matrice unitaire de type (n, n) et B est une matrice triangulaire supérieure complexe ayant les éléments diagonaux > 0.

6 Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ un système de n vecteurs linéairement indépendants dans un espace préhilbertien E ; par $\Gamma(f_1, \ldots, f_n)$ notons le déterminant de la matrice de Gram $G = [\langle f_i, f_j \rangle]$ (Ex. 3, § 3.2.6). Démontrer que $\Gamma(f_1, \ldots, f_n) > 0$ en raisonnant comme suit : soit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un système orthonormal qui engendre le même sous-espace vectoriel que $\{f_1, \ldots, f_n\}$; si $A = [a_{ij}]$ est la matrice telle que $f_i = a_{i1}\varphi_1 + \cdots + a_{in}\varphi_n$, alors $G = AA^*$ d'où $\det G = |\det A|^2 > 0$.

7 (Continuation de l'exercice 6) Soit S le sous-espace engendré par $f_1, \ldots, f_n$. Pour $f \in E$, soit $g = P_S f$, la projection orthogonale de f sur S (§ 3.4.4). Si $g = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$, vérifier que les c_i sont donnés par l'unique solution du système d'équation

$$\langle f, f_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle f_i, f_j \rangle\,.$$

(Noter que g est caractérisé par le fait que $\langle f, f_j \rangle = \langle g, f_j \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$.)

8 (Continuation des exercices 6 et 7) Démontrer que si $\delta = \inf_{\xi \in S} \|f - \xi\|$, alors

$$\delta^2 = \|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2 \quad \text{et} \quad \delta^2 = \frac{\Gamma(f, f_1, \ldots, f_n)}{\Gamma(f_1, \ldots, f_n)}.$$

(Pour l'existence de g, voir le paragraphe 3.4.4 ; on a $(f - g) \perp g$, ce qui donne $\|f\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g\|^2$; puisque $\Gamma(g, f_1, \ldots, f_n) = 0$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(f, f_1, \ldots, f_n) &= \Gamma(f, f_1, \ldots, f_n) - \Gamma(g, f_1, \ldots, f_n) \\ &= \det \left[\begin{array}{c|c} \|f\|^2 - \|g\|^2 & 0 \cdots 0 \\ \hline \langle f_1, f\rangle & \\ \vdots & G \\ \langle f_n, f\rangle & \end{array}\right] \\ &= \delta^2 \det G = \delta^2 \Gamma(f_1, \ldots, f_n)\end{aligned}$$

car $\langle f, f_j\rangle = \langle g, f_j\rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$.)

9 Démontrer que (avec $a, b \in \mathbb{C}$) :

(i) $\inf\limits_{a,b} \int_0^{2\pi} \left|\cos 2x - (a + b \sin x)\right|^2 \mathrm{d}x = \pi$;

(ii) $\inf\limits_{a,b} \int_{-\pi}^{\pi} \left|x - (a + b \cos x)\right|^2 \mathrm{d}x = \dfrac{2\pi^3}{3}$;

(iii) $\inf\limits_{a,b} \int_0^{2\pi} \left|x - (a + b \sin x)\right|^2 \mathrm{d}x = 2\pi \left(\dfrac{\pi^2}{3} - 2\right)$.

Dans (i) et (ii) l'infimum est atteint pour $a = b = 0$; dans (iii) l'infimum est atteint pour $a = \pi$, $b = -2$.

3.5 SÉRIES ET SOMMES DANS UN ESPACE PRÉHILBERTIEN

3.5.1 Préliminaires

Soit E un espace préhilbertien. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dans E (ce qui veut dire que $f_n \in E$, $n = 0, 1, \ldots$) est dite ***convergente*** s'il existe $f \in E$ tel que la suite des sommes partielles $\{S_n\}$, avec $S_n = f_0 + \cdots + f_n$, converge vers f, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n - f\| = 0.$$

On dit alors que f est la somme de la série $\sum_n f_n$ et on écrit $f = \sum_n f_n$.

Une condition nécessaire pour la convergence de la série $\sum_n f_n$ *est que* $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. En effet, si $S_n \to f$ lorsque $n \to \infty$, alors

$$f_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} f - f = 0\,.$$

Plus généralement, *si la série* $\sum_n f_n$ *est convergente, alors* $\{S_n\}$ *est une suite de Cauchy ; si* E *est hilbertien et* $\{S_n\}$ *est une suite de Cauchy, alors* $\sum_n f_n$ *est une série convergente.*

Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille dénombrable de vecteurs dans E ; nous dirons que la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est ***sommable*** (ou que la ***somme*** $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ existe) s'il existe $f \in E$ ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie I_ε dans I telle que

$$\left\| f - \sum_{\alpha\in J} f_\alpha \right\| < \varepsilon$$

pour toute partie finie J de I telle que $J \supset I_\varepsilon$. On écrit alors que $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ et on dit que la somme de la famille sommable $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est f.

Notons que si $I = \mathbb{N}$, il est nécessaire de distinguer entre la *série* $\sum_n f_n$ et la *somme* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. On verra dans la proposition 3.5.2 que l'existence de la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une condition beaucoup plus exigente que celle de la convergence de la série $\sum_n f_n$. Pour les séries, on utilisera les écritures suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,,\quad \sum_{n\geqslant 0} f_n\,,\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,,\quad \sum_n f_n$$

en spécifiant toujours qu'il s'agit d'une série ; à l'occasion, on considérera aussi les séries du type $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ où N est un entier quelconque et on les notera aussi comme $\sum_{n\geqslant N}^{\infty} f_n$; la définition de la convergence de telles séries est parfaitement analogue à celle des séries $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

La somme d'une famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ concerne un ensemble dénombrable de vecteurs indexés par un ensemble d'indices I où aucune notion d'ordre n'est privilégiée ; même lorsque $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, la sommabilité de la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ne tient aucun compte de l'ordre naturel existant dans I. La notion de la somme d'une famille dénombrable joue un rôle important dans la suite. Les relations entre la convergence d'une série et l'existence d'une somme sont établies dans la proposition suivante.

3.5.2 Proposition (*sommabilité et convergence commutative*)

Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *une famille dénombrable de vecteurs dans un espace préhilbertien* E.

(i) Si $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est sommable, alors la condition (C) suivante est vérifiée : pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie finie* I_ε *dans* I *telle que*

$$\left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\| < \varepsilon$$

dès que K *est une partie finie de* I *telle que* $K \cap I_\varepsilon = \emptyset$.

(ii) Supposons que E *soit hilbertien ; si la condition (C) est vérifiée, alors* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est sommable.*

(iii) Supposons que $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *soit sommable et* $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ *; alors pour toute énumération* $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ *de* I, *on a*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n} .$$

(iv) Si pour toute énumération $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ *de* I, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$ *est convergente, alors* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est sommable et la somme* $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ *est telle que* $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\alpha_n}$ *pour toute énumération* $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ *de* I.

DÉMONSTRATION

(i) Soit $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$; s'il existe I_ε, une partie finie de I, telle que

$$\left\| f - \sum_{\alpha\in J} f_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que J est une partie finie de I telle que $J \supset I_\varepsilon$. Donc si K est une partie finie de I, disjointe de I_ε, on aura

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\| &= \left\| \sum_{\alpha\in K\cup I_\varepsilon} f_\alpha - \sum_{\alpha\in I_\varepsilon} f_\alpha \right\| \\ &\leqslant \left\| \sum_{\alpha\in K\cup I_\varepsilon} f_\alpha - f \right\| + \left\| f - \sum_{\alpha\in I_\varepsilon} f_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

(ii) Supposons que E soit hilbertien et que la condition (C) soit vérifiée. Alors, pour $n = 1, 2, \ldots$, il existe une partie finie I'_n de I telle que

$$\left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\| < \frac{1}{n}$$

dès que $K \cap I'_n = \emptyset$, K une partie finie de I ; en passant aux $I_n = I'_1 \cup \ldots \cup I'_n$, on aura une suite croissante de parties finies de I telle que

$$\left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\| < \frac{1}{n}$$

dès que $K \cap I_n = \emptyset$, K une partie finie de I. Si $n < m$, on a

$$\left\| \sum_{\alpha \in I_m} f_\alpha - \sum_{\alpha \in I_n} f_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in I_m \setminus I_n} f_\alpha \right\| < \frac{1}{n} \cdot$$

car $(I_m \setminus I_n) \cap I_n = \emptyset$; autrement dit, la suite $\left\{\sum_{\alpha \in I_n} f_\alpha\right\}_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans E. Puisque E est complet, il existe $f \in E$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{\alpha \in I_n} f_\alpha \right\| = 0 .$$

Démontrons que $f = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha$; si $\varepsilon > 0$, il existe un n_0 tel que

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in I_{n_0}} f_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

si J est une partie finie de I telle que $J \supset I_{n_0}$, on aura

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in J} f_\alpha \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{\alpha \in I_{n_0}} f_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in J \setminus I_{n_0}} f_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

car $(J \setminus I_{n_0})$ est disjoint de I_{n_0}.

(iii) Pour $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie I_ε de I telle que

$$\left\| f - \sum_{\alpha \in J} f_\alpha \right\| < \varepsilon$$

dès que $J \supset I_\varepsilon$, J une partie finie de I ; soit N tel que

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \supset I_\varepsilon ;$$

alors, pour $n \geqslant N$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \supset I_\varepsilon$ et

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} f_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon, \quad n \geqslant N ,$$

de sorte que $\sum_j f_{\alpha_j} = f$.

(iv) Démontrons d'abord que sous l'hypothèse indiquée, la condition (C) est vérifiée. Sinon, on aurait un $\varepsilon > 0$ et une suite de parties finies $K_1, K_2, \ldots$ dans I, deux à deux disjointes, telle que

$$\left\| \sum_{\alpha \in K_j} f_\alpha \right\| \geqslant \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Soit $L = I \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$; écrivons $L = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$; énumérons I de manière suivante : $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n_1} = \beta_1\}$ est une énumération de $K_1 \cup \{\beta_1\}$; ensuite $\{\alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2-1}, \alpha_{n_2} = \beta_2\}$ est une énumération de $K_2 \cup \{\beta_2\}$, etc. Avec cette énumération $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ de I, la série $\sum_{j=0}^{\infty} f_{\alpha_j}$ ne peut pas converger car si S_n est la somme partielle $f_{\alpha_0} + \cdots + f_{\alpha_n}$, on aura

$$\|S_{n_{j+1}-1} - S_{n_j}\| = \left\| \sum_{\alpha \in K_{j+1}} f_\alpha \right\| \geqslant \varepsilon\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

ce qui exclut la convergence de S_n.

Supposons donc que la condition (C) soit vérifiée ; d'après la démonstration de (ii) ci-dessus, on aura une suite croissante de parties finies

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I$$

telle que

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} f_\alpha \right\| < \frac{1}{n}$$

dès que $K \cap I_n = \emptyset$, K une partie finie de I. Soit $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$; si $\alpha \in I \setminus J$, on aura $\|f_\alpha\| < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $f_\alpha = 0$ pour $\alpha \in I \setminus J$. Posons $I \setminus J = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ et écrivons $\widetilde{I}_1 = I_1 \cup \{\beta_1\}$, $\widetilde{I}_2 = I_2 \cup \{\beta_1, \beta_2\}$, ... ; si $\widetilde{I}_j$ contient n_j éléments, énumérons I comme $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ de telle manière que $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n_j-1}\} = \widetilde{I}_j$. Soit $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_{\alpha_j}$; de la démonstration de (ii) on a vu que la suite

$$\left\{ \sum_{\alpha \in I_n} f_\alpha \right\}_{n \geqslant 1} = \left\{ \sum_{\alpha \in \widetilde{I}_n} f_\alpha \right\}_{n \geqslant 1}$$

est une suite de Cauchy ; puisque

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} f_{\alpha_j} = f\,,$$

on conclut que la suite de Cauchy en question converge vers f. Puisque on a déjà démontré dans (ii) que, dans ce cas, $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha = f$, on a établi notre affirmation (iv). ♦

3.5.3 Remarques

Une série $\sum_n f_n$ dans un espace préhilbertien E est dite ***commutativement convergente*** si, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum_n f_{\sigma(n)}$ est convergente. De la proposition 3.5.2, on voit qu'*une somme* $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha$ *dans*

E existe (I dénombrable) si et seulement si la série $\sum_n f_{\alpha(n)}$ *est commutativement convergente pour une énumération quelconque* $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ *de* I ; alors la série $\sum_n f_{\alpha(n)}$ sera encore commutativement convergente pour toute autre énumération $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ de I et la somme de chacune de ces séries est égale à $f = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha$.

Lorsqu'on a une somme $\sum_{\alpha \in I} c_\alpha$ de nombres complexes, on sait (vol. 2) que la somme existe dans $\mathbb{C}$ si et seulement si

$$\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha| = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in J} |c_\alpha| : J \text{ partie finie de } I \right\} < \infty ;$$

ce fait est formulé comme suit : une série $\sum_n c_n$ dans $\mathbb{C}$ est commutativement convergente si et seulement la série $\sum_n c_n$ est absolument convergente, c'est-à-dire $\sum_n |c_n| < \infty$.

La situation est différente pour les séries et les sommes dans un espace préhilbertien général E. On dit qu'une série $\sum_n f_n$ (resp. famille $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$, I dénombrable) dans E est ***absolument convergente*** (resp. ***absolument sommable***) si la série $\sum_n \|f_n\| < \infty$ (resp. si $\sum_{\alpha \in I} \|f_\alpha\| < \infty$). Les relations entre convergence, convergence absolue et convergence commutative sont clarifiées par la proposition qui suit.

3.5.4 Proposition (*convergence absolue*)

Soit E un espace préhilbertien.

(i) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *une série absolument convergente dans E ; alors la suite des sommes partielles* $\{S_n\}_{n \geqslant 0}$ *d'une quelconque série* $\sum_n f_{\sigma(n)}$, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une bijection, est une suite de Cauchy ; si* $\sum_n f_{\sigma(n)} = f$ *pour une bijection* σ, *alors la série* $\sum_n f_n$ *est commutativement convergente vers la même somme* $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$. *En particulier, si E est hilbertien,* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est sommable et la somme est* $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *pour toute bijection* σ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

(ii) Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *une famille dénombrable absolument sommable. Si E est hilbertien, alors la somme* $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha$ *existe (c'est-à-dire* $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *est sommable).*

(iii) Si toute série absolument convergente $\sum_n f_n$ *dans E est convergente, alors E est un espace hilbertien ; de plus, si la somme de la série absolument convergente* $\sum_n f_n$ *est* $f \in E$, *alors* $\|f\| \leqslant \sum_n \|f_n\|$.

DÉMONSTRATION

(i) Supposons que $\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\| < \infty$; si $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ est une suite croissante de parties finies de $\mathbb{N}$ telle que $I_n \uparrow \mathbb{N}$ (c'est-à-dire $\bigcup_{n \geqslant 1} I_n = \mathbb{N}$) et $g_j = \sum_{n \in I_j} f_n$, alors $\{g_j\}_{j \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy car, pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$\sum_{n > N} \|f_n\| < \varepsilon$$

et ensuite il existe un n_0 tel que $I_j \supset \{0, \ldots, N\}$ pour $j \geqslant n_0$ d'où, pour $j, k \geqslant n_0$, on a

$$\|g_j - g_k\| \leqslant \sum_{n>N} \|f_n\| < \varepsilon .$$

Supposons que $\lim_{j\to\infty} g_j = f$ existe pour une suite croissante de parties finies I_n avec $I_n \uparrow \mathbb{N}$; soit $\{J_n\}_{n\geqslant 1}$ une autre suite croissante des parties finies de $\mathbb{N}$ telle que $J_n \uparrow \mathbb{N}$ et posons $h_j = \sum_{n\in J_j} f_n$. Pour N dans $\mathbb{N}^*$ quelconque, il existe n_0 tel que I_j et J_j contiennent $\{0, \ldots, N\}$ pour $j \geqslant n_0$; alors

$$\|g_j - h_j\| \leqslant \sum_{n>N} \|f_n\| , \quad j \geqslant n_0$$

d'où l'on voit que $\lim_{j\to\infty} h_j = f$ existe si $\lim_{j\to\infty} g_j = f$ existe. Ceci démontre (i).

(ii) Du fait que $\sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha\| < \infty$, on déduit immédiatement que la condition (C) de la proposition 3.5.2 est vérifiée, ce qui démontre l'affirmation (ii).

(iii) Soit $\{g_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans E ; alors pour $k = 1, 2, \ldots$, il existe une suite d'entiers positifs $n_0 < n_1 < \ldots$ telle que, pour $k \geqslant 1$,

$$\|g_m - g_n\| < 2^{-k-1} , \quad m, n \geqslant n_k .$$

Posons $f_0 = g_{n_0}$, $f_1 = g_{n_1} - g_{n_0}$, $f_2 = g_{n_2} - g_{n_1}$, ... ; alors

$$\|f_k\| = \|g_{n_k} - g_{n_{k-1}}\| < 2^{-k} , \quad k \geqslant 2 ,$$

et $\sum_{k\geqslant 0} \|f_k\| < \infty$. Donc

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} f_j = \lim_{k\to\infty} g_{n_k} = g$$

existe dans E d'où l'inégalité

$$\|g_n - g\| \leqslant \|g_n - g_{n_k}\| + \|g_{n_k} - g\|$$

pour $n < n_k$, montre que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ existe dans E. Ainsi E est complet.

Si la série absolument convergente $\sum_n f_n$ possède la somme f, alors $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j$ d'où

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} f_j \right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \|f_j\| = \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\| . \qquad \blacklozenge$$

Nous énumérons ici quelques propriétés élémentaires des séries et des sommes qui seront utilisées dans la suite.

3.5.5 Proposition (*propriétés des séries et des sommes*)

(i) Soient $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ *deux séries convergentes dans un espace préhilbertien* E. *Alors, pour tout* α, $\beta \in \mathbb{C}$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha f_n + \beta g_n)$ *est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} g_n \ ;$$

de plus, pour $\varphi \in E$,

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, , \, \varphi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \varphi \rangle \, .$$

(ii) Soient $f = \sum_{j\in I} f_j$, $g = \sum_{j\in I} g_j$ *deux sommes qui existent dans un espace préhilbertien* E, I *étant un ensemble dénombrable quelconque. Alors, pour tout* α, $\beta \in \mathbb{C}$, *la somme* $\sum_{j\in I}(\alpha f_j + \beta g_j)$ *existe et*

$$\sum_{j\in I}(\alpha f_j + \beta g_j) = \alpha f + \beta g \ ;$$

de plus, pour $\varphi \in E$,

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j\in I} \langle f_j, \varphi \rangle \, .$$

DÉMONSTRATION

Nous laissons la démonstration détaillée en exercice ; à titre d'exemple démontrons seulement la dernière formule. Pour J une partie finie quelconque de I, on a

$$\left| \langle f, \varphi \rangle - \sum_{j\in J} \langle f_j, \varphi \rangle \right| = \left| \left\langle f - \sum_{j\in J} f_j \, , \, \varphi \right\rangle \right| \leqslant \|\varphi\| \left\| f - \sum_{j\in J} f_j \right\| \ ;$$

pour $\varepsilon > 0$, il existe I_ε, une partie finie de I, tel que

$$\|\varphi\| \left\| f - \sum_{j\in J} f_j \right\| < \varepsilon$$

dès que J est une partie finie de I avec $J \supset I_\varepsilon$; alors

$$\left| \langle f, \varphi \rangle - \sum_{j\in J} \langle f_j, \varphi \rangle \right| < \varepsilon$$

pour toute partie finie J de I avec $J \supset I_\varepsilon$. Ceci établit que la somme scalaire $\sum_{j\in I} \langle f_j, \varphi \rangle$ existe et est égale à $\langle f, \varphi \rangle$. ♦

3.5.6 Remarques

On a déjà observé que tout espace préhilbertien E peut être considéré comme un sous-espace dense d'un espace hilbertien H (§ 3.1.7). La question de la convergence d'une série ou l'existence d'une somme d'une famille dénombrable dans E se décompose naturellement en deux parties.

(i) Est-ce que la série converge dans H ? ou est-ce que la somme existe dans H ?

(ii) Est-ce que la somme de la série ou de la famille est un élément de E ?

Pour la discussion de la première partie de la question, il suffit de nous placer dans l'espace hilbertien H ; c'est ce que nous ferons souvent.

Nous avons déjà noté (§ 3.5.3) que pour une série $\sum_n c_n$ dans $\mathbb{C}$, la convergence absolue de la série équivaut à sa convergence commutative, cette dernière étant équivalente à l'existence de la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$. Pour un espace hilbertien H de dimension infinie, il faut soigneusement distinguer entre la convergence absolue de la série $\sum_n f_n$ dans H et sa convergence commutative, cette dernière étant toujours équivalente à l'existence de la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, c'est-à dire à la sommabilité de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (prop. 3.5.2). Nous résumons la situation comme suit : soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace *hilbertien* ; considérons les affirmations suivante :

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$, c'est-à-dire $\sum_n f_n$ est absolument convergente ;
(B) la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ converge pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
(C) la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ converge pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la somme de la série f étant indépendante de σ ;
(D) la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ existe, c'est-à-dire $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Alors

$$(A) \Longrightarrow (B) \Longleftrightarrow (C) \Longleftrightarrow (D) ;$$

si la dimension de H est finie (A) $\Leftrightarrow$ (B) ; si la dimension de H est infinie, alors (B) $\not\Rightarrow$ (A). Ce dernier point devient évident si l'on considère la proposition suivante concernant l'existence des sommes d'une famille orthogonale.

3.5.7 Proposition (*somme d'une famille orthogonale*)

Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille orthogonale dans un espace hilbertien H. Alors la somme $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ existe si et seulement si $\sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|^2 < \infty$; si $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$, alors

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|^2 .$$

Si H n'est seulement que préhilbertien, la sommabilité de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ entraîne que $\sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|^2 < \infty$.

DÉMONSTRATION

Si $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ existe, alors, selon la proposition 3.5.2, il existe une partie finie I_0 de I telle que

$$\left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\| < 1$$

dès que $K \cap I_0 = \emptyset$, K une partie finie de I ; d'après la formule de Pythagore (3.8),

$$\sum_{\alpha\in K} \|f_\alpha\|^2 = \left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\|^2 < 1$$

d'où

$$\sum_{\alpha\in I_0^c} \|f_\alpha\|^2 = \sup_{\substack{K\subset I_0^c \\ K \text{ fini}}} \sum_{\alpha\in K} \|f_\alpha\|^2 \leqslant 1$$

ce qui donne

$$\sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in I_0} \|f_\alpha\|^2 + \sum_{\alpha\in I_0^c} \|f_\alpha\|^2 < \infty .$$

Notons que pour cette démonstration, il suffit que H soit préhilbertien. Supposons, d'autre part, que $\sum_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|^2 < \infty$ et H hilbertien ; alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie I_ε de I telle que

$$\sum_{\alpha\in K} \|f_\alpha\|^2 < \varepsilon^2$$

dès que $K \cap I_\varepsilon = \emptyset$, K une partie finie de I ; or, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ étant une famille orthogonale, on a

$$\left\| \sum_{\alpha\in K} f_\alpha \right\| = \left\{ \sum_{\alpha\in K} \|f_\alpha\|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon$$

dès que $K \cap I_\varepsilon = \emptyset$, K une partie finie de I. La proposition 3.5.2(ii) permet de conclure que la somme $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha$ existe dans H.

Si $f = \sum_{\alpha\in I} f_\alpha$, alors d'après la proposition 3.5.5

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{\alpha\in I} f_\alpha , f \right\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle f_\alpha, f\rangle = \sum_{\alpha\in I} \left\langle f_\alpha , \sum_{\beta\in I} f_\beta \right\rangle$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in I} \langle f_\alpha, f_\beta\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle f_\alpha, f_\alpha\rangle = \sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|^2 . \qquad \blacklozenge$$

3.5.8 Remarques

Notons que la formule $\|f\|^2 = \sum_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|^2$ est une généralisation directe de la formule de Pythagore (3.8). Si H est un espace hilbertien de dimension infinie, alors il existe une suite infinie de vecteurs orthonormaux $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (§ 3.4.6) ; si $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres complexes, alors la proposition 3.5.7 nous dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\varphi_n$ existe si et seulement si $\sum_n |a_n|^2 < \infty$. Si

$$\sum_n |a_n| = \infty\,, \quad \sum_n |a_n|^2 < \infty\,,$$

alors on aura une famille dénombrable $\{a_n\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ telle que la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi_n$ existe sans qu'elle soit absolument sommable ce qui veut dire que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\varphi_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \infty\,.$$

3.5.9 Exercices

1 Soit $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille dénombrable de nombres complexes. Démontrer que $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable si et seulement si

$$\sum_{\alpha\in I} |c_\alpha| < \infty \quad \text{dans le sens que} \quad \sup_J \sum_{\alpha\in J} |c_\alpha| < \infty\,,$$

J parcourant les parties finies de I. (Il suffit de considérer d'abord les c_α réels et ensuite d'écrire $c_\alpha = c_\alpha^+ - c_\alpha^-$ où $c_\alpha^+ = \max(c_\alpha, 0)$, $c_\alpha^- = \max(-c_\alpha, 0)$ avec $c_\alpha^\pm \geqslant 0$; pour un développement détaillé de la sommabilité d'une famille complexe quelconque $\{c_\alpha\}$ consulter le volume 2 où les définitions sont légèrement différentes mais équivalentes à celles que nous donnons ici lorsque l'on se restreint à $\mathbb{C}$.)

2 Soient $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, n vecteurs orthonormaux dans un espace préhilbertien E ; soit $f_\alpha = \sum_{j=1}^n c_{\alpha_j}\xi_j$, $\alpha \in I$, $c_{\alpha_j} \in \mathbb{C}$, I étant un ensemble dénombrable. Démontrer que $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{\alpha\in I} |c_{\alpha_j}| < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$, ce qui équivaut à la sommabilité absolue de $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ et alors

$$\sum_{\alpha\in I} f_\alpha = \sum_{j=1}^n c_j\xi_j \quad \text{avec } c_j = \sum_{\alpha\in I} c_{\alpha_j}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

(Utiliser la proposition 3.5.5 et l'exercice 1.)

3 Déduire de l'exercice 2 que dans un espace préhilbertien E de dimension finie, une famille dénombrable $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable si et seulement si elle est absolument sommable.

4 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans un espace préhilbertien E. Démontrer que la série $f_0 + f_1 - f_1 + f_2 - f_2 + \cdots$ converge dans E si et seulement si $f_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et qu'elle converge absolument si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$.

5 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans un espace hilbertien H. Démontrer qu'une condition suffisante mais non nécessaire pour l'existence de $\lim_{n\to\infty} f_n$ est

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n - f_{n+1}\| < \infty\,.$$

(Noter que, si $n < m$, $f_n - f_m = \sum_{i=n}^{m-1}(f_i - f_{i+1})$; d'autre part, si

$$f_{2k} = \frac{1}{k+1}\,\xi\,, \quad f_{2k+1} = \frac{-1}{k+1}\,\xi\,, \quad 0 \neq \xi \in H\,,\ k = 0, 1, \ldots,$$

alors $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ mais $\sum_{n\geqslant 0}\|f_n - f_{n+1}\| = \infty$.)

6 Soient $e_0 = (1, 0, \ldots)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots)$, ... dans ℓ^2 ; considérons la série

$$e_0 + \frac{1}{2}\,e_1 - \frac{1}{2}\,e_1 + \frac{1}{4}\,e_2 - \frac{1}{4}\,e_2 + \frac{1}{4}\,e_2 - \frac{1}{4}\,e_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

où il y a un bloc de 2^n termes du type

$$\frac{1}{2^n}\,e_n - \frac{1}{2^n}\,e_n + \cdots + \frac{1}{2^n}\,e_n - \frac{1}{2^n}\,e_n\,,$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ Démontrer les affirmations suivantes :

(i) la série converge et sa somme est e_0 ;
(ii) la série n'est pas commutativement convergente ;
(iii) si $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\pi(n)}$ converge pour une bijection $\pi = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors sa somme est e_0.

(Pour (ii), voir que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable ; ensuite pour (iii), voir que si $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\pi(n)}$ converge, alors $\langle \sum_{n=0}^{\infty} f_{\pi(n)}\,,\, e_j\rangle = 0$, $j \geqslant 1$.)

7 Avec e_0, e_1, ... comme dans l'exercice 6, posons

$$f_0 = e_0 - e_1,\ f_1 = -f_0,\ f_2 = (e_2 - e_3),\ f_3 = -f_2,\ \ldots,$$

$$f_{2n} = \frac{1}{n}\,(e_{2n} - e_{2n+1}),\ f_{2n+1} = -f_{2n}\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

Vérifier les affirmations suivantes :

(i) la famille $\{f_{2n}\}_{n\geqslant 0}$ est orthogonale avec $\|f_{2n}\| = \sqrt{2}/n$, $n \geqslant 1$;
(ii) la famille $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = 0$.

8 La définition de la sommabilité d'une famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de vecteurs dans un espace préhilbertien E peut être adoptée sans changement pour un ensemble infini d'indices I quelconque (non nécessairement dénombrable). Démontrer, en analysant la démonstration de la proposition 3.5.2, que si $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est sommable, alors il existe une partie J, au plus dénombrable, de I, telle que $f_\alpha = 0$ si $\alpha \in I \setminus J$. (Cet exercice montre que la notion de sommabilité concerne essentiellement les familles dénombrables.)

9 Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille sommable dans un espace préhilbertien E. Démontrer que $\|f_\alpha\| \to 0$ dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie I_ε dans I telle que $\|f_\alpha\| < \varepsilon$ si $\alpha \in I \setminus I_\varepsilon$; en particulier $\sup_{\alpha\in I} \|f_\alpha\| < \infty$.

3.6 BASES ORTHONORMALES

3.6.1 Proposition (*caractérisation des bases orthonormales*)

Soit $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien séparable E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) la famille $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est totale (§ 3.3.1) ;

(2) pour tout $f \in E$,

$$f = \sum_{\alpha\in I} \langle f, \varphi_\alpha\rangle \varphi_\alpha \ ;$$

(3) (relation de Parseval) pour tous f, g dans E,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle f, \varphi_\alpha\rangle \overline{\langle g, \varphi_\alpha\rangle} \ ;$$

(4) (égalité de Bessel) pour tout $f \in E$,

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle f, \varphi_\alpha\rangle|^2 \ .$$

REMARQUE. Il est sous-entendu que toutes les sommes $\sum_{\alpha\in I}$ qui apparaissent dans cet énoncé existent dans le sens de la définition de sommabilité proposée dans le paragraphe 3.5.1. Rappelons que I est nécessairement fini ou dénombrable (§ 3.4.2).

DÉMONSTRATION

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ une énumération de I ; puisque $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est une famille totale, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m \geqslant 1$ et des constantes $c_1, \ldots, c_m$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon .$$

D'après la proposition 3.4.3, on a

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{m} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j} \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon ,$$

ce qui entraîne aussi que, pour $N \geqslant m$,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{N} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j} \right\| \leqslant \left\| f - \sum_{j=1}^{m} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon .$$

On en conclut (prop. 3.5.2(iv)) que

$$\sum_{\alpha\in I} \langle f, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j} = f .$$

(2) $\Rightarrow$ (3) D'après la proposition 3.5.5(ii), on conclut de

$$f = \sum_{\alpha\in I} \langle f, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha$$

que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle f, \varphi_\alpha \rangle \langle \varphi_\alpha, g \rangle = \sum_{\alpha\in I} \langle f, \varphi_\alpha \rangle \overline{\langle g, \varphi_\alpha \rangle} .$$

(3) $\Rightarrow$ (4) L'égalité de Bessel est un cas particulier de la relation de Parseval avec $f = g$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Grâce à (4), pour $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle|^2 > \|f\|^2 - \varepsilon^2 ;$$

puisque $f - \sum_{j=1}^{n} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j}$ est orthogonal à $\sum_{j=1}^{n} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j}$ (prop. 3.4.3), on a

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j} \right\|^2 = \|f\|^2 - \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle \varphi_{\alpha_j} \right\|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle f, \varphi_{\alpha_j} \rangle|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

ce qui montre que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est une famille totale dans E. ♦

3.6.2 Remarques

L'énoncé (2) de la proposition 3.6.1 nous amène à proposer la définition suivante : une famille orthonormale totale $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans un espace préhilbertien E s'appelle une ***base orthonormale*** de E. D'après l'énoncé (2) de la proposition 3.6.1, tout vecteur $f \in E$ peut être représenté (*uniquement*, prop. 3.6.3) comme une *combinaison linéaire infinie* des vecteurs φ_α, $\alpha \in I$.

Rappelons que dans l'algèbre linéaire, une famille de vecteurs $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ d'un espace vectoriel E s'appelle une base de E si tout vecteur $f \in E$ s'écrit comme une combinaison linéaire *finie* unique des vecteurs ξ_α, $\alpha \in I$:

$$f = c_1 \xi_{\alpha_1} + \cdots + c_n \xi_{\alpha_n} .$$

De ce point de vue, une base orthonormale d'un espace préhilbertien E n'est certainement pas une base de E si $\dim E = \infty$; néanmoins, cette terminologie est aujourd'hui bien ancrée dans la théorie des espaces hilbertiens et préhilbertiens et nous l'utiliserons sans hésitations.

Certains auteurs préfèrent l'appellation ***base hilbertienne*** pour ce que l'on a appelé base orthonormale ; pour distinguer les bases orthonormales des bases de l'algèbre linéaire, on peut appeler ces dernières *bases algébriques* ; nous n'en aurons besoin qu'assez rarement dans notre livre.

3.6.3 Proposition (*existence d'une base othonormale*)

Tout espace préhilbertien séparable E possède une base orthonormale. Soit $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une telle base orthonormale pour E, espace préhilbertien séparable.

(i) Si pour une famille de nombres complexes $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la famille $\{a_\alpha \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est sommable dans E, alors $\sum_{\alpha \in I} |a_\alpha|^2 < \infty$; en posant $f = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \varphi_\alpha$, on a $a_\alpha = \langle f, \varphi_\alpha \rangle$, $\alpha \in I$.

(ii) Supposons que E est un espace hilbertien ; si $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est une famille de nombres complexes telle que $\sum_{\alpha \in I} |a_\alpha|^2 < \infty$, alors $\{a_\alpha \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est sommable et $f = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \varphi_\alpha \in E$ avec $a_\alpha = \langle f, \varphi_\alpha \rangle$, $\alpha \in I$.

DÉMONSTRATION

Puisque E est un espace préhilbertien séparable, il existe dans E un ensemble total au plus dénombrable formé d'une suite (finie ou infinie) de vecteurs linéairement indépendants $f_1, f_2, \ldots$ (prop. 3.3.2) ; soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ la suite orthonormale obtenue de $f_1, f_2, \ldots$ par le procédé de Gram–Schmidt (§ 3.4.6). Alors $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (ou $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ si $\{f_n\}$ est une suite $f_1, \ldots, f_N$) est une famille orthonormale totale, c'est-à-dire une base orthonormale pour E. Les énoncés (i) et (ii) sont des conséquences des propositions 3.5.7 et 3.5.5. ♦

3.6.4 Isomorphisme

Deux espaces préhilbertiens E et F sont dits ***isomorphes*** s'il existe une bijection linéaire $u : E \to F$ telle que

$$\langle u(f), u(g)\rangle = \langle f, g\rangle$$

pour tous f, g dans E ; en particulier $\|u(f)\| = \|f\|$ pour tout $f \in E$ de sorte que $u : E \to F$ et $u^{-1} : F \to E$ sont des applications linéaires continues. On dit que u est un ***isomorphisme*** (quelquefois on dit aussi que u est un *isomorphisme isométrique*) entre E et F.

3.6.5 Proposition (*caractérisation de* $\mathbb{C}^N$ *et* ℓ^2)

Soit E un espace préhilbertien séparable.

(i) Si $\dim E = N < \infty$, *alors E est un espace hilbertien isomorphe à* $\mathbb{C}^N$.

(ii) Si $\dim E = \infty$, *alors E est isomorphe à un sous-espace vectoriel dense de* ℓ^2 ; *E est isomorphe à* ℓ^2 *si et seulement si E est un espace hilbertien séparable de dimension infinie.*

DÉMONSTRATION

(i) Si $\dim E = N$, on a une base orthonormale $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ pour E (démonstration § 3.6.3) ; alors, si $f \in E$, on a $f = \sum_{j=1}^{N} \langle f, \varphi_j\rangle \varphi_j$. Posons

$$u(f) = \big(\langle f, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle f, \varphi_N\rangle\big) \in \mathbb{C}^N ;$$

alors $u : E \to \mathbb{C}^N$ est linéaire et, pour f, g dans E,

$$\big\langle u(f), u(g)\big\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle f, \varphi_j\rangle \overline{\langle g, \varphi_j\rangle} = \langle f, g\rangle$$

où $\big\langle u(f), u(g)\big\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^N$. On en conclut que u est bijective de sorte que u est un isomorphisme. Puisque $\mathbb{C}^N$ est complet, on en déduit que E est complet (voir la démonstration qui suit).

(ii) Si $\dim E = \infty$, soit $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ une base orthonormale pour E (§ 3.6.3). Si $f \in E$, on a $f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$; posons $u(f) = (a_0, a_1, \ldots)$ où $a_j = \langle f, \varphi_j \rangle$, $j \geqslant 0$. D'après l'égalité de Bessel (prop. 3.6.1),

$$\|u(f)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = \|f\|^2 < \infty\,, \quad f \in E\,,$$

de sorte que $u : E \to \ell^2$; il est évident que u est linéaire ; de la relation de Parseval (prop. 3.6.1), on a que, si $g \in E$, $u(g) = (b_0, b_1, \ldots)$, $b_j = \langle g, \varphi_j \rangle$, $j \geqslant 0$, alors

$$\big\langle u(f), u(g) \big\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \bar{b}_j = \langle f, g \rangle$$

où $\big\langle u(f), u(g) \big\rangle$ est le produit scalaire canonique de ℓ^2. Posons $F = u(E)$; puisque u est linéaire, $u(E)$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^2 ; le fait que $u(f) = \|f\|$ pour tout $f \in E$, montre que u est injective de sorte que, d'après ce qui précède, $u : E \to F$ est un isomorphisme. De plus

$$u(\varphi_0) = e_0 = (1, 0, \ldots)\,,\ u(\varphi_1) = e_1 = (0, 1, 0, \ldots)\,,\ \ldots\,,$$

donc $\{e_0, e_1, \ldots\} \subset F$; puisque les e_n forment un ensemble total dans ℓ^2, on conclut que F est dense dans ℓ^2.

Supposons que E soit hilbertien ; si $(a_0, a_1, \ldots) \in \ell^2$, d'après la proposition 3.6.3(ii), la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ converge vers la somme $f \in E$ avec $u(f) = (a_0, a_1, \ldots)$; donc $u(E) = \ell^2$ et $u : E \to \ell^2$ est un isomorphisme.

Finalement, si E est isomorphe à ℓ^2, il existe $u : E \to \ell^2$, une bijection linéaire telle que $\big\langle u(f), u(g) \big\rangle = \langle f, g \rangle$ pour tous f, g dans E ; si $\big\{f_n\big\}_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans E, alors $\big\{u(f_n)\big\}_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans ℓ_2 car

$$\big\|u(f_n) - u(f_m)\big\| = \big\|u(f_n - f_m)\big\| = \big\|f_n - f_m\big\|$$

d'où l'existence de $a \in \ell^2$ tel que $u(f_n) \to a$ $(n \to \infty)$; si $f = u^{-1}(a)$, on aura $f_n \to f$ $(\, n \to \infty)$ car

$$\big\|f_n - f\big\| = \big\|u(f_n - f)\big\| = \big\|u(f_n) - a\big\| \xrightarrow{n \to \infty} 0\,.$$

Ainsi, E est complet. ♦

3.6.6 Remarques

Les sous-espaces vectoriels de ℓ^2 peuvent être très variés ; certains sont fermés, d'autres ne le sont pas ; certains sont denses dans ℓ^2, d'autres ne le sont pas. Les sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^2 sont, de nouveau, des espaces hilbertiens. Donc, si E est un espace préhilbertien non complet, E sera isomorphe à un sous-espace vectoriel dense, nécessairement non fermé, dans ℓ^2.

Une particularité d'un espace préhilbertien (ou hilbertien) E de dimension infinie est d'avoir une infinité de sous-espaces vectoriels denses dans E, alors que dans un espace hilbertien de dimension finie E, chaque sous-espace vectoriel est automatiquement fermé et il n'est dense dans E que s'il coïncide avec E.

Ainsi, considérons l'espace $E = C([0,1])$, formé des fonctions complexes continues dans $[0,1]$ et muni du produit scalaire L^2,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,, \quad f,\ g \in C([0,1])\,.$$

Pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ considérons le sous-espace vectoriel $C^{(n)}([0,1])$, formé des fonctions n-fois continûment dérivables dans $[0,1]$. Chacun des sous-espaces vectoriels $C^{(n)}([0,1])$ est dense dans l'espace préhilbertien séparable $E = C([0,1])$; en effet, si P représente l'espace formé des restrictions à $[0,1]$ de tous les polynômes complexes à une variable, alors P aussi est un sous-espace vectoriel de E et

$$P \subset C^{\infty}([0,1]) \subset C^{(n)}([0,1]) \subset E = C([0,1])\,;$$

d'après un théorème de Weierstrass (voir le volume 1 pour le cas des fonctions continues réelles d'où le cas complexe peut se déduire aisément), pour chaque $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in P$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} \bigl|p(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon\,;$$

alors

$$\|p - f\| = \left(\int_0^1 \bigl|p(x) - f(x)\bigr|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < \varepsilon$$

ce qui montre que P est dense dans E ; il s'ensuit que chaque $C^{(n)}([0,1])$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, est dense dans E.

On peut démontrer que P n'est isomorphe à aucun des sous-espaces vectoriels $C^{(n)}([0,1])$. (Esquissons d'une démonstration qui sort de notre cadre : dans P, on a une base algébrique dénombrable formée des fonctions $b_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$; tout espace isomorphe à P doit avoir la même propriété ; or $C^{(n)}([0,1])$ n'a pas cette propriété algébrique, car dans $C^{(n)}([0,1])$ on a une structure d'un espace de Banach qui exclut l'existence d'une base algébrique dénombrable à cause du théorème de Baire.) Il est vraisemblable que les espaces $C^{(n)}([0,1])$ soient deux à deux non isomorphes en tant qu'espaces préhilbertiens ; mais la discussion de cette question n'entre pas dans nos considérations.

3.6.7 Système orthonormal complet

Soit E un espace préhilbertien. Une famille orthonormale (ou orthogonale) $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ dans E est dite ***complète*** si $\langle \varphi, \varphi_\alpha\rangle = 0$ pour tout $\alpha \in I$ entraîne que $\varphi = 0$; autrement dit, on ne peut pas agrandir la famille $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$

sans perdre la propriété de l'orthogonalité de la famille. Pour une famille orthogonale, la propriété d'être complète est très intimement liée à celle d'être totale. Plus précisément *si* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est une famille orthonormale (ou orthogonale) totale, alors elle est complète.* Nous faisons la démonstration dans le cas où I est dénombrable (ce qui équivaut à supposer que E est séparable) et la famille $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est orthonormale. Il suffit alors d'utiliser la proposition 3.6.1(2) pour conclure que si $\langle\varphi,\varphi_\alpha\rangle = 0$ pour tout $\alpha\in I$ alors $\varphi = 0$. Réciproquement *si* E *est hilbertien, alors toute famille orthonormale (ou orthogonale) complète* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est totale.* A nouveau, nous faisons la démonstration pour le cas d'un espace hilbertien E séparable et $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ famille orthonormale en établissant la validité de l'énoncé (2) de la proposition 3.6.1 : soit $f\in E$; puisque $\sum_{\alpha\in I}|\langle f,\varphi_\alpha\rangle|^2 < \infty$ (à cause de l'inégalité de Bessel, § 3.4.5) et E est hilbertien, la somme

$$g = \sum_{\alpha\in I}\langle f,\varphi_\alpha\rangle\varphi_\alpha$$

existe dans E (prop. 3.6.3(ii)) ; si $\varphi = f - g$, alors on vérifie aisément (avec prop. 3.5.5) que $\langle\varphi,\varphi_\alpha\rangle = 0$, $\alpha\in I$, d'où la complétion de la famille $\{\varphi_\alpha\}$ entraîne que $\varphi = 0$, c'est-à-dire

$$f = \sum_{\alpha\in I}\langle f,\varphi_\alpha\rangle\varphi_\alpha$$

est valable pour tout $f\in E$, ce qui équivaut à la totalité de la famille orthonormale $\{\varphi_\alpha\}$.

Ainsi *dans un espace hilbertien, une famille orthonormale (ou orthogonale) est complète si et seulement si elle est totale.* Mais nous verrons dans la section suivante (§ 3.7.13) que *dans un espace préhilbertien séparable, non hilbertien, il existe toujours une famille orthonormale complète qui n'est pas totale.*

Une famille orthonormale (ou orthogonale) complète s'appelle aussi un système orthonormal (ou orthogonal) complet ; dans un espace hilbertien, un système orthonormal (ou orthogonal) complet est aussi une base orthonormale (orthogonale) (§ 3.6.2).

3.6.8 Terminologie

On dit que la famille orthogonale (avec éléments non nuls) $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est une ***base orthogonale*** de l'espace préhilbertien E si la famille orthonormale associée $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\psi_\alpha = \varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|$, est une base orthonormale de E ; les propriétés principales d'une base orthonormale sont données dans la proposition 3.6.1. Dans les calculs pratiques, on a souvent à travailler avec une ***base orthogonale*** $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$; nous donnons explicitement les propriétés principales d'une telle base orthogonale dans un espace préhilbertien E ; elles sont une transcription simple des énoncés (2), (3) et (4) de la proposition 3.6.1 :

- pour tout $f \in E$,

$$f = \sum_{\alpha \in I} \frac{\langle f, \varphi_\alpha \rangle}{\|\varphi_\alpha\|^2} \varphi_\alpha ;$$

les nombres $\langle f, \varphi_\alpha \rangle / \|\varphi_\alpha\|^2$ s'appellent les ***coefficients de Fourier*** de f par rapport à la base orthogonale $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$;

- (relation de Parseval) pour tous f, g dans E,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\alpha \in I} \frac{\langle f, \varphi_\alpha \rangle \overline{\langle g, \varphi_\alpha \rangle}}{\|\varphi_\alpha\|^2} ;$$

- (égalité de Bessel) pour tout $f \in E$,

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha \in I} \frac{|\langle f, \varphi_\alpha \rangle|^2}{\|\varphi_\alpha\|^2} .$$

3.6.9 Exercices

1 Démontrer que deux espaces préhilbertiens de même dimension finie sont isomorphes ; en déduire qu'un espace préhilbertien de dimension finie est hilbertien.

2 Démontrer que chaque sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien est fermé.

3 Démontrer qu'un sous-espace vectoriel est fermé dans un espace hilbertien si et seulement s'il est complet (donc hilbertien).

4 Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces préhilbertien telle que $\|u(f)\| = \|f\|$ pour tout $f \in E$; démontrer que $\langle u(f), u(g) \rangle = \langle f, g \rangle$ pour tout f, $g \in E$; en particulier si $u(E) = F$, alors u est un isomorphisme entre E et F. (Utiliser la formule de polarisation (3.5).)

5 Pour $a = (a_0, a_1, \ldots) \in \ell^2$, posons $u(a) = (0, a_0, a_1, \ldots)$; vérifier que $u : \ell^2 \to \ell^2$ est linéaire avec $\langle u(a), u(b) \rangle = \langle a, b \rangle$ pour tous a, $b \in \ell^2$ mais que u n'est pas un isomorphisme de ℓ^2 sur ℓ^2 car $u(\ell^2) \neq \ell^2$.

6 Soit E, F deux espaces hilbertiens séparables ; soit $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ une base orthonormale de E et soit $\{\psi_0, \psi_1, \ldots\}$ une base orthonormale de F. Posons

$$u\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_{n+1}$$

avec $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Vérifier que $u : E \to F$ est une application linéaire telle que $\langle u(f), u(g) \rangle = \langle f, g \rangle$ pour tous f, $g \in E$ mais $u(E) \neq F$.

7 Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels $\geqslant 0$; posons

$$E_\lambda = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\lambda_n < \infty \right\} .$$

Vérifier les affirmations suivantes :

(i) E_λ est toujours un sous-espace vectoriel dense dans ℓ^2 ;
(ii) pour $\lambda_n = 1$, $n \geqslant 0$, E_λ n'est pas un sous-espace vectoriel fermé ;
(iii) si $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, alors $E_\lambda = \ell^2$.

8 Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, soit $a(\lambda) = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$; démontrer que les vecteurs de la famille non dénombrable $\{a(\lambda)\}$ sont linéairement indépendants dans ℓ^2.

9 Soit $R_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, où

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Démontrer que $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite orthonormale dans $L^2([0,1])$ telle que

$$\int_0^1 R_n^m(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ entier pair} \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } m \text{ entier impair} \geqslant 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^{n} R_j^{m_j}(x)\,dx = \prod_{j=1}^{n} \int_0^1 R_j^{m_j}(x)\,dx\,, \quad m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}\,.$$

Pour cette démonstration, il est utile d'établir d'abord les faits suivants : posons $I_k^{(n)} =]\,k2^{-n}\,,\,(k+1)2^{-n}\,[$, $n = 1, 2, \ldots$ $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$;

(i) $\{x \in [0,1] : R_n(x) = 1\} = \bigcup \{I_k^{(n)} : 0 \leqslant k < 2^n\,,\ k \text{ entier pair}\}$;
(ii) $\{x \in [0,1] : R_n(x) = -1\} = \bigcup \{I_k^{(n)} : 0 \leqslant k < 2^n\,,\ k \text{ entier impair}\}$;
(iii) si λ est la mesure de Lebesgue dans $[0,1]$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda\{x \in [0,1] : R_n(x) = 1\} = \lambda\{x \in [0,1] : R_n(x) = -1\} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda\{x \in [0,1] : R_1(x) = \varepsilon_1\,, \ldots,\ R_n(x) = \varepsilon_n\} = \frac{1}{2^n}$$

où $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ est une suite arbitraire de ± 1.

Considérons le sous-espace vectoriel $H \subset L^2([0,1])$ formé des fonctions du type $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$. Démontrer que :

(a) H est un espace hilbertien isomorphe à $L^2([0,1])$;

(b) si $f \in H$, alors $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$;

(c) pour tout m, $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f(x) R_m(x) R_n(x)\,dx = 0$ pour tout $f \in H$;

(d) les fonctions $R_m R_n \notin H$, m, $n \in \mathbb{N}^*$ (noter que $R_n^2 = 1$ p.p.) de sorte que $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas un système orthonormal complet dans $L^2([0,1])$.

REMARQUES

Les R_n s'appellent les ***fonctions de Rademacher*** ; la propriété (iii) ci-dessus équivaut, en langage de la théorie des probabilités, à l'affirmation suivante : $\{R_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que chaque R_n prend les valeurs ± 1 avec probabilité égale à $1/2$; la suite $\{R_n\}$ fournit un modèle analytique pour le jeu de pile ou face en interprétant $R_n = 1$ comme l'observation de pile au n-ième essai et $R_n = -1$ comme celle de face au n-ième essai.

3.7 APPROXIMATION OPTIMALE

3.7.1 Préliminaires

Soit E un espace préhilbertien. Si A est une partie non vide de E et f est un élément quelconque de E, un problème naturel qui se présente est d'estimer

$$d(f, A) = \inf_{\xi \in A} \|f - \xi\|$$

et de trouver, si possible, $f_0 \in A$ tel que $\|f - f_0\| = d(f, A)$. On dit que $d(f, A)$ est la ***distance*** entre f et A et que f_0 est une ***approximation optimale*** de f par les éléments de A. On vérifie aisément que $d(f, A) = 0$ *si et seulement si* $f \in \overline{A}$ car $f \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe $f_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$, tels que $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$. En particulier, *si* $A = \overline{A}$ (c'est-à-dire si A est fermé), *alors* $d(f, A) = 0$ *équivaut à avoir* $f \in A$.

Le problème théorique principal est de savoir si une approximation optimale f_0 de f par les éléments de A existe et si elle est unique. En général, sans aucune hypothèse sur A, ni l'existence de f_0, ni son unicité ne sont garanties même lorsque E est un espace de dimension 1 ; nous laissons cette réflexion au lecteur qui s'en convaincra rapidement par des dessins appropriés dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, un espace hilbertien de dimension 1.

Dans le cas où la dimension de E est finie, l'existence de $f_0 \in A$ tel que $d(f, A) = \|f - f_0\|$ est assurée pour tout $f \in E$, dès que A est une partie fermée non vide de E. Plus généralement, on peut démontrer ce qui suit : *si* A *est une partie non vide dans un espace préhilbertien* E *telle que, pour tout* $M > 0$,

$A_M = \{\xi \in A : \|\xi\| \leqslant M\}$ *est compact, alors pour tout* $f \in E$ *il existe* $f_0 \in A$ *tel que* $\|f - f_0\| = d(f, A)$. Nous esquissons une démonstration brièvement : il existe $\xi_n \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\|f - \xi_n\| \to d(f, A)$ lorsque $n \to \infty$; on établit que $\sup_n \|\xi_n\| = M < \infty$; puisque A_M est compact, il existe une sous-suite $\{\xi_{n_j}\}$ telle que $\xi_{n_j} \to f_0 \in A$ lorsque $j \to \infty$; alors

$$\|f - f_0\| = \lim_{j \to \infty} \|f - \xi_{n_j}\| = d(f, A)\,. \qquad \blacklozenge$$

La condition de compacité de A_M s'avère être trop forte dans les applications où E est de dimension infinie. Il se trouve que si A est une partie *convexe* non vide, alors l'existence de $f_0 \in A$ telle que $\|f - f_0\| = d(f, A)$ est assurée sous une condition générale souvent vérifiée : *A est une partie complète* ce qui veut dire que si $\{\xi_n\}$ est une suite de Cauchy dans A, alors il existe $g \in A$ tel que $\xi_n \to g$ lorsque $n \to \infty$. Notons que *toute partie complète dans un espace préhilbertien est fermée et, réciproquement, une partie fermée dans un espace hilbertien est complète.*

Rappelons qu'un ensemble non vide A dans E est dit ***convexe*** si, pour tous a, b dans A, toute ***combinaison convexe*** $\xi_\alpha(a, b) = (1 - \alpha)a + \alpha b$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, est dans A ; l'ensemble des points $\{\xi_\alpha(a, b) : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ s'appelle le ***segment fermé*** $[a, b]$. Ainsi A est convexe si $[a, b] \subset A$ dès que $a, b \in A$.

3.7.2 Proposition (*projection sur un ensemble convexe*)

Soit A un ensemble convexe non vide dans un espace préhilbertien E.

(i) Si A est complet, alors pour tout $f \in E$ il existe $f_0 \in A$ tel que $\|f - f_0\| = d(f, A)$.

(ii) S'il existe $f_0 \in A$ tel que $\|f - f_0\| = d(f, A)$, alors un tel f_0 est unique.

REMARQUE. Ainsi, si A est non vide, convexe et complet, l'*existence* et l'*unicité* de $f_0 \in A$ tel que $\|f - f_0\| = d(f, A)$ sont simultanément assurées ; la convexité seule de A assure que *si* $f_0 \in A$ *existe* il est unique ; f_0 s'appelle aussi la ***projection*** de f sur A et nous la noterons souvent $P_A f$.

DÉMONSTRATION

(i) Soit $\delta = d(f, A)$; il existe une suite $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans A telle que $\|f - \xi_n\| \to \delta$ lorsque $n \to \infty$; démontrons que $\{\xi_n\}$ est une suite de Cauchy.

Puisque A est convexe, $(\xi_m + \xi_n)/2$ est dans A pour $m, n \geqslant 1$ d'où

$$\left\| f - \frac{1}{2}(\xi_m + \xi_n) \right\| \geqslant \delta\,, \quad m\,,\ n \geqslant 1\,;$$

de l'identité du parallélogramme (3.9) et de cette dernière inégalité, on déduit que

$$\begin{aligned}\|\xi_m - \xi_n\|^2 &= \|(\xi_m - f) - (\xi_n - f)\|^2 \\ &= 2\left\{\|\xi_m - f\|^2 + \|\xi_n - f\|^2\right\} - \|\xi_m + \xi_n - 2f\|^2 \\ &\leqslant 2\left\{\|f - \xi_m\|^2 + \|f - \xi_n\|^2\right\} - 4\delta^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0\,.\end{aligned}$$

Puisque A est complet, il existe $f_0 \in A$ tel que $\xi_n \to f_0$ lorsque $n \to \infty$ d'où

$$\|f - f_0\| = \lim_{n\to\infty} \|f - \xi_n\| = \delta = d(f, A)\,.$$

(ii) Supposons que $\|f - f_0\| = \delta = d(f, A)$ pour un $f_0 \in A$; si $\tilde{f}_0 \in A$ est tel que $\|f - \tilde{f}_0\| = \delta$, il faut voir que $f_0 = \tilde{f}_0$, c'est-à-dire $\|f_0 - \tilde{f}_0\| = 0$. De l'identité du parallélogramme, il résulte que

$$\begin{aligned}\|f_0 - \tilde{f}_0\|^2 &= \|(f_0 - f) - (\tilde{f}_0 - f)\|^2 \\ &= 2\left\{\|f_0 - f\|^2 + \|\tilde{f}_0 - f\|^2\right\} - \|f_0 + \tilde{f}_0 - 2f\|^2 \\ &= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(f_0 + \tilde{f}_0) - f\right\|^2\end{aligned}$$

Puisque $(1/2)(f_0 + \tilde{f}_0) \in A$, on a

$$\left\|\frac{1}{2}(f_0 + \tilde{f}_0) - f\right\| \geqslant \delta$$

ce qui donne, en conjonction de ce qui précède, que

$$\|f_0 - \tilde{f}_0\|^2 \leqslant 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0\,,$$

c'est-à-dire $\|f_0 - \tilde{f}_0\| = 0$. ♦

3.7.3 Caractérisation d'une approximation optimale

Ecrivons $P_A f = f_0$ lorsque $f_0 \in A$ existe avec $\|f - f_0\| = d(f, A)$. On a vu dans la proposition 3.7.2 que f_0 existe si A est non vide, convexe et complet ; de plus, f_0 est unique dès qu'il existe si A est convexe. L'affirmation suivante caractérise $f_0 = P_A f$ de deux manières différentes.

Soit A une partie convexe non vide dans un espace préhilbertien E. Pour $f \in E$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $f_0 \in A$ *tel que* $\|f - f_0\| = d(f, A)$;
(ii) il existe $f_0 \in A$ *tel que*

$$\mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f_0\rangle \leqslant 0 \quad \textit{pour tout } \xi \in A\ ; \tag{3.12}$$

(iii) il existe $f_0 \in A$ *tel que*

$$\mathrm{Re}\langle f - \xi\,,\, f_0 - \xi\rangle \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } \xi \in A. \tag{3.13}$$

DÉMONSTRATION

(i)⇒(ii) Pour $\xi \in A$ et $0 < t < 1$, $\{(1-t)f_0 + t\xi\} \in A$ d'où

$$\|f - f_0\|^2 \leqslant \|f - \{(1-t)f_0 + t\xi\}\|^2 = \|(f - f_0) - t(\xi - f_0)\|^2 =$$
$$= \|f - f_0\|^2 + t^2\|\xi - f_0\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f_0\rangle$$

ce qui donne

$$2\,\mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f_0\rangle \leqslant t\|\xi - f_0\|^2\ ;$$

en faisant $t \to 0$, on obtient (3.12).

(ii)⇒(i) Pour $\xi \in A$, (3.12) entraîne que

$$0 \geqslant \mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f_0\rangle = \mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f + f - f_0\rangle$$
$$= \|f - f_0\|^2 + \mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f\rangle$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|f - f_0\|^2 \leqslant -\,\mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f\rangle \leqslant \|f - f_0\|\,\|\xi - f\|$$

ce qui donne $\|f - f_0\| \leqslant d(f, A)$ d'où $\|f - f_0\| = d(f, A)$ car $\|f - f_0\| \geqslant d(f, A)$ à cause du fait que $f_0 \in A$.

(ii)⇒(iii) Pour $\xi \in A$, (3.12) entraîne que

$$\mathrm{Re}\langle f - \xi\,,\, f_0 - \xi\rangle = \mathrm{Re}\langle f - f_0 + f_0 - \xi\,,\, f_0 - \xi\rangle$$
$$= \|f_0 - \xi\|^2 - \mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f_0\rangle \geqslant 0$$

ce qui est (3.13).

(iii)⇒(ii) Pour $\xi \in A$ et $0 < t < 1$, (3.13) entraîne que

$$\mathrm{Re}\,\langle f - \{(1-t)f_0 + t\xi\}\,,\, f_0 - \{(1-t)f_0 + t\xi\}\rangle \geqslant 0$$

car $\{(1-t)f_0 + t\xi\} \in A$; il en résulte que

$$t^2\|f_0 - \xi\|^2 + t\,\mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, f_0 - \xi\rangle \geqslant 0$$

d'où

$$t\|f_0 - \xi\|^2 \geqslant \mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi - f_0\rangle$$

ce qui donne (3.12) en faisant $t \to 0$. ♦

La figure 3.3 illustre le contenu géométrique de l'équivalence entre (i), (ii) et (iii). La condition (i) dit que $f_0 \in A$ est, parmi les points de A, celui qui est à une distance minimale de f ; la condition (ii) dit que l'angle au sommet f_0 (dans le triangle déterminé par f, f_0, ξ) est obtus et ceci pour tout choix de $\xi \in A$; de même, la condition (iii) dit que l'angle au sommet ξ est aigu, ce qui est évidemment (géométriquement) équivalent à (ii) car la somme des trois angles d'un triangle euclidien vaut 180°. Nous n'avons pas défini analytiquement l'angle entre les vecteurs d'un espace préhilbertien mais une telle définition est possible dans tout espace préhilbertien réel en se basant sur le produit scalaire, exactement comme dans $\mathbb{R}^N$; nous n'utiliserons jamais explicitement la notion d'angle dans nos développements analytiques dans un espace préhilbertien même si elle reste sous-jacente à plusieurs de nos considérations. Notons, à titre d'information, que tout plan (sous-espace vectoriel réel de dimension 2) dans un espace préhilbertien quelconque est géométriquement indistinguable du plan euclidien (réalisé analytiquement par $\mathbb{R}^2$, par exemple).

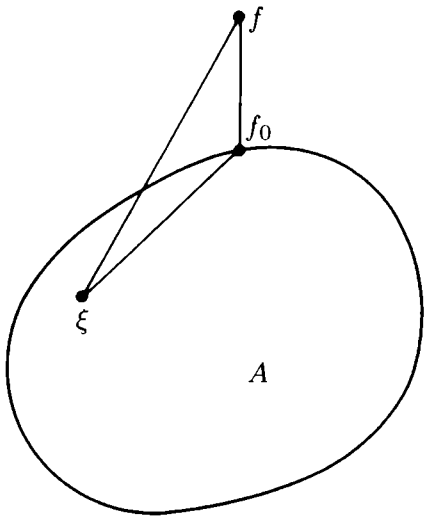


Fig. 3.3

3.7.4 Contractivité des projections

Soit A une partie convexe non vide d'un espace préhilbertien E ; si $P_A f$, $P_A g$ existent pour deux éléments f, g dans E, alors

$$\|P_A f - P_A g\| \leqslant \|f - g\| . \tag{3.14}$$

En effet, puisque $P_A f$, $P_A g$ sont dans A avec

$$\|P_A f - f\| = d(f, A) , \quad \|P_A g - g\| = d(g, A) ,$$

on obtient de (3.12) que

$$\mathrm{Re}\langle f - P_A f\,,\, P_A g - P_A f\rangle \leqslant 0$$

$$\mathrm{Re}\langle g - P_A g\,,\, P_A f - P_A g\rangle \leqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\langle P_A g - g\,,\, P_A g - P_A f\rangle \leqslant 0$$

d'où, par addition, on conclut que

$$\mathrm{Re}\langle (f-g) + (P_A g - P_A f)\,,\, P_A g - P_A f\rangle \leqslant 0\,;$$

il en résulte que

$$\|P_A g - P_A f\|^2 + \mathrm{Re}\langle f - g\,,\, P_A g - P_A f\rangle \leqslant 0$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$\|P_A g - P_A f\|^2 \leqslant \mathrm{Re}\langle f - g\,,\, P_A f - P_A g\rangle \leqslant \|f-g\|\,\|P_A f - P_A g\|$$

ce qui prouve (3.14).

En particulier, *si A est une partie convexe non vide complète dans un espace préhilbertien E, alors l'application $P_A : E \to A$ est une contraction* (c'est-à-dire (3.14) et est valable pour tous f, $g \in E$). Une conséquence importante de la contractivité de P_A est que $f \mapsto P_A f$ est une application continue.

3.7.5 Projection sur un sous-espace vectoriel

Un cas important de la proposition 3.7.2 est celui où $A = F$ est un *sous-espace vectoriel* dans un espace préhilbertien E. Supposons que, pour tout $f \in E$, $P_F f$ existe, c'est-à-dire $P_F f \in F$ et

$$\|f - P_F f\| = d(f, F) = \inf_{\xi \in F} \|f - \xi\|\,;$$

on a vu que $P_F f \in F$ est uniquement déterminé dès qu'il existe et que son existence est assurée si F est complet. En fait, $P_F f$ peut exister pour tout $f \in E$ pour certains sous-espaces F non complets ; nous discuterons ce point séparément (prop. 3.7.7). Si $P_F f$ existe pour tout $f \in E$, nous dirons que $P_F : E \to F$ est la ***projection orthogonale*** de E sur F et $P_F f$ est la projection orthogonale de f sur F ; le sens de cette terminologie deviendra évidente dans la suite (prop. 3.7.6(ii)).

Si A est une partie non vide de E, nous posons

$$A^\perp = \{f \in E : f \perp \xi \text{ pour tout } \xi \in A\}\,.$$

Notons que $A^\perp$ *est toujours un sous-espace vectoriel fermé de E*. La démonstration facile de cette affirmation est laissée en exercice. De plus, il est évident que

$$A \cap A^\perp = \{0\}$$

car si $\xi \in A \cap A^\perp$, alors $\langle \xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2 = 0$.

3.7.6 Proposition (*projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel*)

Soit E un espace préhilbertien ; soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $P_F f$ existe pour tout $f \in E$. Alors $P_F : E \to E$ est une application ayant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $f \in E$, $P_F f$ est l'unique vecteur de F tel que

$$\|f - P_F f\| = d(f, F) ;$$

en particulier, $f \in F$ si et seulement si $P_F f = f$;

(ii) pour tout $f \in E$, $P_F f$ est l'unique vecteur de F tel que $(f - P_F f) \in F^\perp$;

(iii) $P_F : E \to E$ est une application linéaire continue avec $\|P_F f\| \leqslant \|f\|$, $f \in E$; on a $P_F(E) = F$ avec

$$F = \{f \in E : P_F f = f\}, \quad F^\perp = \ker P_F = \{f \in E : P_F f = 0\} ;$$

(iv) P_F est ***idempotent*** *:*

$$P_F^2 = P_F ; \tag{3.15}$$

(v) P_F est ***symétrique*** *: pour tout f, g dans E,*

$$\langle P_F f, g\rangle = \langle f, P_F g\rangle ; \tag{3.16}$$

de plus,

(vi) F est un sous-espace vectoriel fermé tel que $F \oplus F^\perp = E$, c'est-à-dire tout $f \in E$ s'écrit uniquement comme $f = g + h$ avec $g \in F$, $h \in F^\perp$.

DÉMONSTRATION

(i) On a déjà vu que si $P_F f \in F$ existe, alors il est unique (car F est convexe) et que $P_F(F) = F$.

(ii) On utilise (3.12) ; puisque F est un sous-espace vectoriel et $P_F f \in F$, $(\xi - P_F f) \in F$ si et seulement si $\xi \in F$; de (3.12), on a alors la caractérisation suivante de $f_0 = P_F f$: on a

$$\mathrm{Re}\langle f - f_0\,,\, \xi\rangle \leqslant 0\,, \quad \xi \in F\,,$$

d'où, en passant à $-\xi$ et ensuite à $i\xi$ pour $\xi \in F$, on conclut que $\langle f - f_0\,,\, \xi\rangle = 0$ pour tout $\xi \in F$, c'est-à-dire $(f - f_0) \in F^\perp$.

(iii) Si f, $g \in E$, alors d'après (ii) $\{f - P_F(f)\} \in F^\perp$, $\{g - P_F(g)\} \in F^\perp$; il s'ensuit que

$$\{(f + g) - (P_F(f) + P_F(g))\} \in F^\perp\,,$$

d'où, grâce à la caractérisation (ii), $P_F(f+g) = P_F f + P_F g$; de même $P_F(\lambda f) = \lambda P_F(f)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in F$. Puisque

$$f = P_F f + \{f - P_F f\}\,, \quad f \in E\,,$$

on obtient de la formule de Pythagore que

$$\|f\|^2 = \|P_F f\|^2 + \|f - P_F f\|^2 \geqslant \|P_F f\|^2$$

d'où $\|P_F f\| \leqslant \|f\|$, $f \in E$, et la continuité de l'application linéaire $P_F : E \to E$. Il est évident de (i) que $P_F f = f$ équivaut à avoir $f \in F$ d'où $P_F(E) = F$; de (ii) on déduit que $P_F f = 0$ si et seulement si $f \in F^\perp$, c'est-à-dire $\ker P_F = F^\perp$.

(iv) Puisque $P_F f \in F$, pour tout $f \in F$, on a de (i) que

$$P_F(P_F f) = P_F f\,, \quad f \in F\,,$$

ce qui est (3.15).

(v) Pour tous f, $g \in E$, on a, à cause de (i) et (ii), que

$$(f - P_F f) \perp P_F g\,, \quad (g - P_F g) \perp P_F f\ ;$$

donc

$$\langle P_F f, g\rangle = \langle P_F f\,,\, P_F g + g - P_F g\rangle = \langle P_F f, P_F g\rangle$$
$$\langle f, P_F g\rangle = \langle P_F f + f - P_F f\,,\, P_F g\rangle = \langle P_F f, P_F g\rangle$$

ce qui établit (3.16).

(vi) Si F n'est pas fermé, il existe $f \in \overline{F} \setminus F$; alors $d(f, F) = 0$ et il n'existe pas de vecteur $f_0 \in F$ tel que

$$\|f - f_0\| = d(f, F) = 0\,.$$

Donc, F est fermé ; si $f \in E$, posons

$$g = P_F f\,, \quad h = f - P_F f\ ;$$

alors $g \in F$, $h \in F^\perp$ et $f = g + h$. Si $f = g' + h'$, $g' \in F$, $h' \in F^\perp$, alors $0 = (g - g') + (h - h')$ d'où $(g - g') = (h' - h) = \xi$ est tel que $\xi \in F \cap F^\perp$; alors $\xi = 0$ et $g = g'$, $h = h'$. ♦

3.7.7 **Proposition** (*caractérisation des projections orthogonales*)

Soit E un espace préhilbertien. Si $P : E \to E$ est une application linéaire idempotente (3.15) et symétrique (3.16), alors $P = P_F$ où F est un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $F \oplus F^\perp = E$ (cf. prop.3.7.6(vi)). Inversement, si F est un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $F \oplus F^\perp = E$, alors P_F existe.

DÉMONSTRATION

Soit $P : E \to E$ une application linéaire vérifiant (3.15) et (3.16) ; posons $P(E) = F \subset E$; puisque P est linéaire, F est un sous-espace vectoriel de E. Démontrons que, pour tout $f \in E$, $(f - Pf) \in F^{\perp}$; en effet, grâce à (3.15), $P(f - Pf) = 0$ d'où, grâce à (3.16), pour tout $g \in E$,

$$0 = \langle P(f - Pf)\,,\, g\rangle = \langle f - Pf\,,\, Pg\rangle\,;$$

donc $(f - Pf) \perp \xi$ dès que ξ est de la forme Pg, $g \in E$, c'est-à-dire dès que $\xi \in F$; on conclut que $(f - Pf) \in F^{\perp}$. De (ii) de la proposition 3.7.6, on conclut que $P_F f$ existe et $P_F f = Pf$ pour tout $f \in E$; la partie (vi) de la proposition 3.7.6 permet d'affirmer que F est un sous-espace fermé avec $E = F \oplus F^{\perp}$.

Inversement, supposons que $E = F \oplus F^{\perp}$ où F est un sous-espace vectoriel fermé de E ; alors chaque $f \in E$ s'écrit uniquement comme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F$, $f_2 \in F^{\perp}$; posons $Pf = f_1$, $f \in E$. On vérifie aisément que $f \mapsto Pf$ est une application linéaire, idempotente dans E ; elle est aussi symétrique car si $g \in E$, $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in F$, $g_2 \in F^{\perp}$, alors

$$\langle Pf, g\rangle = \langle f_1\,,\, g_1 + g_2\rangle = \langle f_1, g_1\rangle$$
$$\langle f, Pg\rangle = \langle f_1 + f_2\,,\, g_1\rangle = \langle f_1, g_1\rangle$$

d'où

$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, Pg\rangle \quad \text{pour } f\,,\, g \in E\,.$$

On conclut de la première partie de l'affirmation que $Pf = P_F f$, $f \in E$; ♦

Le cas le plus important des propositions 3.7.6 et 3.7.7 est celui où E est hilbertien et F est un sous-espace fermé de E. A cause de son importance, nous formulons ce cas explicitement.

3.7.8 Proposition (*projection orthogonale dans un espace hilbertien*)

Soient E un espace hilbertien et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors $P_F : E \to E$ est une application linéaire continue définie pour $f \in E$ par l'unique vecteur $P_F f \in F$ tel que

$$\|f - P_F f\| = \inf_{\xi \in F} \|f - \xi\|\,;$$

on a $\|P_F f\| \leqslant \|f\|$, $f \in E$; P_F est idempotent (3.15) et symétrique (3.16) $F = P_F(E)$, $F^{\perp} = \ker(P_F)$ et $E = F \oplus F^{\perp}$. Inversement, toute application linéaire $P : E \to E$ qui est idempotente et symétrique est de la forme $P = P_F$ où F est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Toute cette proposition ainsi que les notations utilisées dans son énoncé sont contenues dans les propositions 3.7.6 et 3.7.7

3.7.9 Remarques

Ce qui est particulier dans le cas d'un espace hilbertien E c'est que pour tout sous-espace vectoriel *fermé* $F \subset E$, on a $E = F \oplus F^{\perp}$. Cette affirmation est en défaut si E est préhilbertien mais non hilbertien (§ 3.7.13) ; même dans ce cas si le sous-espace vectoriel F est *complet*, alors $E = F \oplus F^{\perp}$ et P_F existe (prop. 3.7.2, 3.7.6 et 3.7.7).

L'énoncé suivant est contenu dans les discussions précédentes ; nous le formulons séparément pour une référence plus aisée.

3.7.10 Proposition (*caractérisation des sous-espaces vectoriels fermés dans un espace hilbertien*)

Soient E un espace hilbertien, F un sous-espace vectoriel de E.

(i) F est fermé si et seulement si $F \oplus F^{\perp} = E$.

(ii) F est fermé si et seulement si $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

(iii) $\overline{F} = E$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

DÉMONSTRATION

(i) Si F est fermé, alors $E = F \oplus F^{\perp}$ d'après la proposition 3.7.8 ; si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors F est fermé d'après le raisonnement direct suivant (ce fait peut être aussi déduit de la proposition 3.7.8) : si $f_n \in F$ et $f_n \to f$ $(n \to \infty)$, alors, pour tout $\xi \in F^{\perp}$, on a $\langle f, \xi \rangle = 0$ car $\langle f, \xi \rangle = \lim_n \langle f_n, \xi \rangle = 0$; en écrivant $f = g + h$, $g \in F$, $h \in F^{\perp}$, on a

$$0 = \langle f, h \rangle = \langle g, h \rangle + \|h\|^2 = \|h\|^2$$

d'où $h = 0$ et $f = g \in F$.

(ii) Si $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$, alors F est fermé car $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé pour toute partie non vide A de E.

Si F est fermé, on a $E = F \oplus F^{\perp}$; puisque $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé, on a $E = F^{\perp} \oplus \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$; de ces deux égalités on conclut que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

(iii) Notons que si A est une partie non vide de E, alors $A^{\perp} = \left(\overline{A}\right)^{\perp}$; puisque $E^{\perp} = \{0\}$, on obtient que si $\overline{F} = E$ alors $F^{\perp} = \left(\overline{F}\right)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. D'autre part si $F^{\perp} = \{0\}$, alors

$$\{0\} = F^{\perp} = \overline{F}^{\perp} ;$$

de $E = \overline{F} \oplus \left(\overline{F}\right)^{\perp}$ on conclut que $\overline{F} = E$. ♦

3.7.11 Corollaire (*critère pour qu'un ensemble soit total*)

Soit E un espace hilbertien.

(i) Une partie A de E est totale si et seulement si $A^{\perp} = \{0\}$.

(ii) Une famille orthonormale (ou orthogonale) $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ dans E est totale si et seulement si la famille est complète.

DÉMONSTRATION

(i) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par A ; A se dit total si et seulement si $\overline{F} = E$; notons qu'il est évident que $A^{\perp} = F^{\perp}$; donc $A^{\perp} = \{0\}$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$, c'est-à-dire $\overline{F} = E$ (d'après la proposition 3.7.10).

(ii) Posons $A = \{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$; la condition que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est complète équivaut à avoir $A^{\perp} = \{0\}$; donc (i) entraîne l'affirmation donnée. ♦

REMARQUE. Les affirmations contenues dans la proposition 3.7.10 et son corollaire 3.7.11 sont en défaut si E est préhilbertien mais non hilbertien (§ 3.7.13).

3.7.12 Proposition (*théorème de Fréchet-Riesz sur la représentation des fonctionnelles linéaires continues*)

Soit E un espace préhilbertien

(i) Pour tout $\xi \in E$, $u_\xi(f) = \langle f, \xi \rangle$, $f \in E$, définit une fonctionnelle linéaire continue avec

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |u_\xi(f)| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\langle f, \xi \rangle| = \|\xi\| .$$

(ii) Si E est hilbertien, alors pour toute fonctionnelle linéaire continue $u : E \to \mathbb{C}$, il existe un unique élément $\xi \in E$ tel que $u(f) = \langle f, \xi \rangle$, $f \in E$.

DÉMONSTRATION

(i) La linéarité de u_ξ est évidente ; de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|u_\xi(f)| \leqslant \|\xi\| \, \|f\| , \quad f \in E ,$$

ce qui prouve la continuité de u_ξ (prop. 3.1.6) ; de plus,

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |u_\xi(f)| \leqslant \|\xi\| .$$

Puisque

$$u_\xi \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \right) = \left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|} , \xi \right\rangle = \|\xi\|$$

(lorsque $\xi \neq 0$, le cas $\xi = 0$ étant banal), on conclut que

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |u_\xi(f)| = \|\xi\| .$$

(ii) Si $u(f) = 0$ pour tout $f \in E$, alors il suffit de prendre $\xi = 0$; sinon, posons $F = u^{-1}(0) = \{f \in E : u(f) = 0\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel qui est fermé (car u est continue) et $F \neq E$; donc, $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp}$ contient des vecteurs non nuls. En fait si $g \neq 0$ et $g \in F^{\perp}$, alors $F^{\perp} = \{\lambda g : \lambda \in \mathbb{C}\}$; en effet, si $h \in F^{\perp}$, alors $u(h - \lambda g) = 0$ où $\lambda = u(h)/u(g)$ (noter que $u(g) \neq 0$ car $g \notin F$) d'où $(h - \lambda g) \in F \cap F^{\perp}$ (car h et λg sont dans le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$) entraînant que $h - \lambda g = 0$, c'est-à-dire $h = \lambda g$. Puisque $E = F \oplus F^{\perp}$, on conclut que $F = \{g\}^{\perp}$; si $f \in E$, on a

$$f = (f - \lambda_f g) + \lambda_f g$$

avec

$$\lambda_f = \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|^2}, \quad \lambda_f g \in F^{\perp}, \quad (f - \lambda_f g) \in F$$

car $\langle f - \lambda_f g\,,\, g\rangle = 0$; donc $u(f) = \lambda_f u(g)$. Soit

$$\xi = \frac{\overline{u}(g)}{\|g\|^2}\, g\,;$$

alors, pour $f \in E$,

$$\langle f, \xi\rangle = \frac{u(g)}{\|g\|^2}\,\langle f, g\rangle = \lambda_f u(g) = u(f)\,.$$

Si $\langle f, \xi\rangle = \langle f, \xi'\rangle$ pour tout $f \in E$, alors $\xi = \xi'$ car $(\xi - \xi') \perp f$ pour tout $f \in E$ et en particulier $(\xi - \xi') \perp (\xi - \xi')$ d'où $\|\xi - \xi'\|^2 = 0$. ♦

3.7.13 Un contre-exemple

Soient H un espace hilbertien séparable, E un espace préhilbertien avec $E \subset H$, $\overline{E} = H$, $E \neq H$. Pour exemple, on peut prendre $H = \ell^2$, $E = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n = 0$ pour tout n assez grand$\}$ ou $H = L^2([0\,,1])$, $E = C([0\,,1])$; plus généralement, si E est un espace préhilbertien séparable non complet, on peut prendre H comme la complétion de E (§ 3.1.7).

Soit $\psi \in H \setminus E$; posons $F = E \cap \{\psi\}^{\perp}$. Nous démontrons que :

(i) F est un sous-espace vectoriel fermé dans E avec $F \neq E$;
(ii) si $f \in E$ et f est orthogonal à chaque vecteur de F, alors $f = 0$.

DÉMONSTRATION

(i) Etablissons d'abord que $\overline{F} = \{\psi\}^{\perp}$; puisque $\{\psi\}^{\perp}$ est fermé (dans H) et $F \subset \{\psi\}^{\perp}$, on a évidemment $\overline{F} \subset \{\psi\}^{\perp}$. Soit $f \in \{\psi\}^{\perp}$; il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que $\|g_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$; alors

$$\langle g_n, \psi\rangle = \langle g_n - f\,,\, \psi\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Prenons $\xi \in E \setminus F$; ξ existe car sinon au aurait $\langle h, \psi \rangle = 0$ pour tout $h \in E$ ce qui entraînerait que $\langle h, \psi \rangle = 0$ pour tout $h \in H$ d'où l'on aurait $\psi = 0$, une impossibilité. Posons

$$\alpha_n = \frac{\langle g_n, \psi \rangle}{\langle \xi, \psi \rangle}, \quad h_n = g_n - \alpha_n \xi \in E$$

ce qui est possible car $\langle \xi, \psi \rangle \neq 0$; on a

$$\langle h_n, \psi \rangle = \langle g_n, \psi \rangle - \alpha_n \langle \xi, \psi \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

d'où $h_n \in F = E \cap \{\psi\}^\perp$, $n \in \mathbb{N}$; puisque $\alpha_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on a

$$\|h_n - f\| \leqslant \|g_n - f\| + |\alpha_n| \, \|\xi\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

établissant que $f \in \overline{F}$; ainsi, $\{\psi\}^\perp \subset \overline{F}$, ce qui donne $\overline{F} = \{\psi\}^\perp$. On conclut que

$$\overline{F} \cap E = \{\psi\}^\perp \cap E = F$$

ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel *fermé dans* E ; on a déjà vu que $E \setminus F \neq \emptyset$.

(ii) De $\overline{F} = \{\psi\}^\perp$, on conclut que $F^\perp = (\overline{F})^\perp = S_\psi$ où $S_\psi = \{\lambda\psi : \lambda \in \mathbb{C}\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par ψ. Donc si $f \in F^\perp$, alors $f = \lambda\psi$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$; si f est aussi dans E, alors $f = 0$ car alors $f \in S_\psi \cap \{\psi\}^\perp$; ainsi, si f est un élément de E qui est orthogonal à chaque vecteur de F, alors $f = 0$. ♦

Nous considérons maintenant $F \subset E$; E est un espace préhilbertien non complet et F est un sous-espace vectoriel fermé dans E avec $E \setminus F$ non vide. En oubliant l'espace hilbertien H ambiant, nous pouvons traduire (ii) ci-dessus comme l'affirmation suivante : $F^\perp = \{0\}$ (où $F^\perp = \{f \in E : f \perp \xi \text{ pour tout } \xi \in F\}$). On en conclut que dans E, $F \oplus F^\perp = F \neq E$, ce qui montre que la projection orthogonale $P_F f$ n'existe pas pour tout $f \in E$ (cf. prop. 3.7.6). Puisque F est un espace préhilbertien séparable, il existe une suite orthonormale totale $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ dans F ; puisque $F^\perp = \{0\}$ (dans E), cette suite orthogonale est *complète* dans E sans être *totale* dans E car le sous-espace vectoriel fermé engendré par les φ_n est $F \subset E$, $F \neq E$. (Cette discussion est basée sur le problème 3, section 6.3, de Dieudonné [6].)

3.7.14 Exercices

1 Dans ℓ^2, soient $a = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $\xi = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$. Vérifier que

$$P_F a = \frac{11}{18}\xi, \quad d(a, F) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{121}{108}\right)^{1/2}$$

(en admettant que $\|a\|^2 = 1 + (1/2)^2 + \cdots = \pi^2/6$).

2 Dans ℓ^2, soient $a = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $\xi_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $\xi_2 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$ et $\xi_3 = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$. Vérifier que

$$P_F a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots\right), \quad d(a, F) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)\right)^{1/2}$$

3 Soit $H = L^2(\mathbb{R})$; pour $A \subset \mathbb{R}$ (A borélien), $\lambda(A) > 0$, λ mesure de Lebesgue, posons $\widetilde{P}_A f = 1_A f$, $f \in H$. Vérifier que $\widetilde{P}_A$ est la projection orthogonale sur le sous-espace fermé $F_A = \{f \in H : f = 0 \text{ sur } A^c\}$. Démontrer que

$$d(f, F_A) = \left\{\int_{A^c} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right\}^{1/2}, \quad f \in H.$$

Voir que si $\lambda(A) = 0$, alors $\widetilde{P}_A$ est l'opérateur 0.

4 Soit A une partie non vide dans un espace préhilbertien E. Démontrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Si B est une partie de E telle que $B \supset A$, démontrer que $B^\perp \subset A^\perp$. Démontrer que $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

5 Soit $P = P_F$ où F est un sous-espace d'un espace préhilbertien E (en supposant que $P_F f$ existe pour tout $f \in E$) ; vérifier que $\langle Pf, f\rangle = \|Pf\|^2$, $f \in E$; démontrer que $f \in F$ si et seulement si $\|f\| = \|Pf\|$.

6 Soit F un sous-espace fermé dans un espace hilbertien H ; posons $P = P_F$. Vérifier que $I - P = P_{F^\perp}$ où I est l'opérateur identité dans H ($If = f$, $f \in H$).

7 Soit E un espace préhilbertien ; si $\xi \in E$, $\xi \neq 0$, posons $S = \{f \in E : \langle f, \xi\rangle = 1\}$. Vérifier directement que $d(0, S) = 1/\|\xi\|$.

8 Soit $F = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : a_0 = a_2 = \cdots = 0\}$; vérifier que

$$F^\perp = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : a_1 = a_3 = \cdots = 0\}$$

et que si $b \in \ell^2$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$P_F b = (0, b_1, 0, b_3, \ldots), \quad P_{F^\perp} b = (b_0, 0, b_2, 0, b_4, \ldots).$$

9 Soit $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un système orthonormal complet dans un espace hilbertien séparable E ; si $J \subset I$, J non vide, posons $F_J = \{f \in E : \langle f, \varphi_\alpha\rangle = 0, \ \alpha \in J\}$. Vérifier que $F_J^\perp = F_{J^c}$ si $J \neq I$ et $F_J^\perp = \{0\}$ si $J = I$; de plus, si $f \in E$, $P_{F_J} f = \sum_{\alpha\in J^c} \langle f, \varphi_\alpha\rangle \varphi_\alpha$. Voir que l'exercice 8 est un cas particulier de l'exercice 9.

10 Soit $E = C([0\,,\,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,, \quad f\,,\ g \in E\,.$$

Posons $u(f) = \int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$; vérifier que $f \mapsto u(f)$ est une fonctionnelle linéaire continue dans E ; démontrer que u ne peut pas être représentée comme $u(f) = \langle f, \xi\rangle$, $f \in E$, par un $\xi \in E$.

11 (Continuation de l'exercice 10) Soit $u(f) = f(0)$, $f \in E$; démontrer que $u : E \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire discontinue.

12 Soit E un espace préhilbertien dense dans un espace hilbertien H. Démontrer que $u : E \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue si et seulement s'il existe $\psi \in H$ tel que $u(f) = \langle f, \psi\rangle$, $f \in E$; établir que ψ est unique.

3.8 COMPLÉMENTS

3.8.1 Espaces vectoriels topologiques

Les espaces hilbertiens et préhilbertiens sont les exemples les plus utiles des espaces vectoriels topologiques. Ces derniers sont des espaces vectoriels munis d'une topologie (c'est-à-dire munis d'une famille distinguée des sous-ensembles dits *ouverts* vérifiant quelques conditions simples données dans le volume 2) telle que l'opération de somme et celle de la multiplication par un scalaire sont des opérations continues. Parmi ces espaces topologiques, les plus simples sont les *espaces normés* dans lesquels la topologie est définie par une *norme* ; si la norme provient d'un produit scalaire, l'espace normé est préhilbertien ; si l'espace normé est complet, on dit que l'espace est un *espace de Banach* ; les espaces hilbertiens sont donc les espaces de Banach dont la norme est définie par un produit scalaire. La théorie des espaces vectoriels topologiques s'appelle l'***analyse fonctionnelle***, une terminologie qui provient du fait qu'un grand nombre des espaces vectoriels dans cette théorie sont constitués de fonctions (par exemple $C([0\,,\,1])$, $C^\infty(\Omega)$, $L^2(\mathbb{R}^N)$, etc.). A présent, presque toute l'analyse est imprégnée des méthodes de l'analyse fonctionnelle ; ces méthodes sont constituées d'un mélange des considérations géométriques, algébriques et analytiques ; elles ont permis une grande simplification et une unification dans notre façon d'aborder les problèmes les plus variés.

3.8.2 Remarques historiques

L'analyse fonctionnelle est essentiellement une création des mathématiciens du XX$^{\text{e}}$ siècle. Ce sont d'abord les espaces hilbertiens (pour cette discussion, nous ne distinguerons pas entre les espaces hilbertiens et préhilbertiens,

sauf lorsque ce sera nécessaire) qui ont fait leur apparition sous la forme de l'espace ℓ^2 dans les travaux de Hilbert sur les équations intégrales durant les années 1904-1910. Pendant un certain temps, par « l'espace de Hilbert » on désignait seulement l'espace ℓ^2, même si dans les articles de 1907 devenus rapidement célèbres, F. Riesz et E. Fischer, d'une façon indépendante mais presque simultanée, avaient démontré que $L^2(X)$, X un intervalle de $\mathbb{R}$, était isomorphe à ℓ^2 (ce n'était pas leur vocabulaire). Ce n'est que dans un article important de J. von Neumann de 1929 que l'on trouve, pour la première fois, une description axiomatique d'une espace hilbertien séparable, à tout point identique aux définitions courantes d'aujourd'hui (comme celle donnée dans ce chapitre). Une monographie classique de M. Stone de 1932, basée sur ses propres travaux des années 1929-1930 et ceux de von Neumann et d'autres, fait une mise au point de la théorie si complète et si admirable qu'elle reste encore aujourd'hui un livre à consulter. Bien entendu, il y a eu de nombreuses généralisations et approfondissements de la théorie depuis 1932 ; la quantité de publications monographiques ou didactiques sur l'analyse fonctionnelle (depuis 1932 et surtout après 1945) est immense ; bornons-nous à indiquer un autre grand classique du sujet, celui de S. Banach, publié en langue française en 1932 ; il est certainement le premier ouvrage sur les espaces de Banach (appelés « espaces du type (B) » par Banach).

Les problèmes mathématiques qui ont amené Hilbert et ses successeurs aux espaces hilbertiens sont anciens ; en fait, ce sont les mêmes problèmes qui nous obligent à inclure une modeste introduction à la théorie hilbertienne dans ce présent volume. Ces problèmes commencèrent par des essais de résolution de certaines équations aux dérivées partielles (que nous verrons dans la suite) que l'on appelle équation des ondes, équation de la chaleur et équation de la théorie du potentiel (ou équation de Laplace–Poisson). Dans un travail qui marque une étape essentielle du développement de la physique et des mathématiques, Fourier introduit ce que l'on appelle universellement aujourd'hui « l'analyse de Fourier » qui consiste en une utilisation des séries et des intégrales trigonométriques pour la présentation d'une fonction assez générale. Le grand traité de Fourier *Théorie analytique de la chaleur* date de 1822, alors que ses premiers travaux furent bien antérieurs (1807-1808). On ne peut qu'admirer (comme on l'a toujours fait depuis sa publication) le style limpide de Fourier ; voici la première phrase de sa préface : « Les causes primordiales ne nous sont point connues ; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle. » Fourier croit posséder dans l'analyse mathématique un outil sans pareil pour l'étude de la nature ; il écrit au sujet de cet outil : « La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et indéterminé dans les solutions ; elles les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles » (...) « Si la matière nous échappe comme celle de l'air et de la lumière par son extrême ténuité, si les corps sont placés loin de nous, dans l'immensité de l'espace, si l'homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques

successives que sépare un grand nombre de siècles, si les actions de la gravité et de la chaleur s'exercent dans l'intérieur du globe solide à des profondeurs qui seront toujours inaccessibles, l'analyse mathématique peut encore saisir les lois de ces phénomènes. »

La théorie de Fourier, elle-même émanant des problèmes des vibrations étudiés par d'Alembert, Daniel Bernoulli et Euler pendant le XVIII^{e} siècle, amène Sturm et Liouville, dès les années 1830, à étudier les développements en séries de fonctions orthogonales plus générales que les fonctions trigonométriques. Durant tout le reste de XIX^{e} siècle, on voit une succession de mathématiciens importants s'atteler à ce travail ; le mathématicien danois J. P. Gram n'est certes pas parmi les plus connus de tous. Néanmoins, son unique article sur le sujet (publié en 1883 et basé sur sa thèse faite à l'Université de Copenhague en 1879) introduit une analyse claire du problème d'approximation optimale en moyenne quadratique (c'est-à-dire dans L^2) qui lui permit d'étudier les développements en séries orthogonales très variées (par exemple, en série de fonctions de Legendre, ou de Bessel ou, encore, de Hermite dans notre terminologie) ; cet article contient son procédé d'orthonormalisation ainsi que ses déterminants (Ex. 6-8, § 3.4.7). Gram a poursuivi, dans la suite, une carrière auprès des compagnies d'assurances danoises.

E. Schmidt (dont le nom est tradionnellement attaché au procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt) fut un élève de Hilbert. L'article de Schmidt (daté de 1907 et basé sur sa thèse faite à Göttingen en 1905) indique clairement la priorité de Gram ; les simplifications apportées par Schmidt aux travaux de Hilbert dans ce domaine ont sans doute contribué beaucoup au développement de l'analyse hilbertienne.

L'opportunité qui a conduit Hilbert à l'étude des équations intégrales est la publication (en 1903) par le mathéticien suédois, I. Fredholm, d'une formule pour la solution φ d'une équation intégrale (dite de *seconde espèce*)

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

où f, φ et K sont des fonctions continues (réelles) des variables réelles s, t dans $[a\,,\,b]$, f et K étant données, λ étant un paramètre éventuellement complexe. L'importance de ces équations intégrales provient du fait qu'elles permettent la résolution des équations différentielles importantes (mentionnées précédemment) ; ce point était particulièrement compris par tous les mathématiciens (tels C. Neumann, H. Poincaré et bien d'autres) qui travaillaient dans ce domaine et Hilbert le premier. Dès que Hilbert a eu connaissance des travaux de Fredholm (déjà à partir de 1901, avant même que l'article principal de Fredholm de 1903 ne paraisse), il organise un séminaire sur le sujet et il incite plusieurs jeunes doctorants à travailler dans ce domaine (parmi ces doctorants notons ceux qui sont devenus, par la suite, eux-même très connus : Kellogg (1902, année de la dissertation), Schmidt (1905), Hellinger (1907), Weyl (1908), Haar (1909), Courant (1910), Hurwitz (1910), Steinhaus (1911)). Durant les années 1900 à 1910, Hilbert travaille personnellement aussi sur les équations intégrales

et leurs applications et il publie une série de six articles importants (dans lesquels il développe sa théorie de « espace hilbertien » qui est notre ℓ^2) ; ils ont été publiés sous la forme d'un livre en 1912 ; récemment (en 1989), ils ont été réédités avec, en plus, trois articles fondamentaux de E. Schmidt (des années 1907 et 1908) et un article historique de A. Pietsch dont nous avons relevé quelques données ici (D. Hilbert, E. Schmidt, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Teubner, Leipzig, 1989).

Nous ne pouvons pas expliquer ici en détail le passage de l'équation intégrale à la théorie des espaces ℓ^2 proposé par Hilbert ; le reste de notre livre essaie de présenter quelques aspects saillants de ce passage. Il suffit de dire ici que puisque $C([a, b])$ est isomorphe à un sous-espace (dense) de ℓ^2, on peut faire correspondre à f et φ un élément de ℓ^2 (en choisissant une base orthonormale appropriée dans $C([a, b])$) et faire correspondre à K une matrice infinie $[k_{ij}]$ de sorte que l'équation intégrale devient un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$f_i = \varphi_i - \lambda \sum_{j \geqslant 0} k_{ij} \varphi_j , \quad i \geqslant 0 .$$

En supposant que $K(s,t) = K(t,s)$ (ce qui donne $k_{ij} = k_{ji}$), Hilbert résout le dernier système en généralisant les idées bien connues de l'algèbre linéaire élémentaire dans $\mathbb{R}^N$. Par contre, Schmidt évite ce passage à ℓ^2 et étudie l'équation intégrale comme une équation dans l'espace préhilbertien $C([0, 1])$ du type

$$f = \varphi - \lambda K \varphi$$

de sorte que l'approche de Schmidt est plus « moderne » de notre point de vue ; en effet, c'est la méthode de Schmidt (mise au point par les travaux ultérieurs de Riesz et d'autres) que nous présenterons dans la suite.

Comme Dieudonné l'a indiqué à juste titre dans son livre (*History of functional analysis*, North Holland, Amsterdam, 1981), deux autres courants mathématiques qui prennent leurs sources dans les années 1900-1910 rendent le développement de l'analyse fonctionnelle (et, en particulier, de l'analyse hilbertienne) possible ; il s'agit du développement de l'intégrale de Lebesgue (thèse de Lebesgue faite à Paris et publiée en 1902) et l'introduction des espace métriques par M. Fréchet (thèse faite à Paris et publiée en 1906). Il est vrai que ni Hilbert, ni Schmidt ne se sont servis de l'intégrale de Lebesgue (ni de la théorie des espaces métriques) ; l'un a travaillé dans l'espace hilbertien ℓ^2 et l'autre dans l'espace préhilbertien $C([a, b])$ où la théorie de Lebesgue peut être évitée, au risque d'avoir un développement quelquefois laborieux et incomplet. Même les théorèmes de Riesz et Fischer établissant l'isomorphisme entre L^2 et ℓ^2 n'ont pas pu pendant longtemps lever un préjugé tenace dans la communauté mathématique suivant lequel l'intégrale de Lebesgue est :

(i) un raffinement inutile ;

(ii) trop compliquée.

Mais il faut comprendre que sans la complétion de l'espace sous-jacent la théorie elle-même reste incomplète et aucune théorie de l'intégration qui n'est pas essentiellement équivalente à celle de Lebesgue ne peut fournir les espaces complets en partant des espaces des fonctions continues (espaces munis de leur produit scalaire habituel nécessaire pour les approximations en moyenne quadratique) ; en plus, nous avons souligné dans le volume 1 la commodité de la théorie de Lebesgue dans les calculs des intégrales pluridimensionnelles et dans les questions de convergence les plus simples. Sans un espace hilbertien sous-jacent (donc un espace préhilbertien et complet), le fondement théorique même de la mécanique quantique actuelle ne serait pas possible ; la situation est semblable à celle des nombres réels ; dans les calculs « pratiques », on ne se sert que des nombres rationnels (même l'ordinateur le plus puissant ne peut envisager des calculs qu'avec un nombre *fini* de nombres rationnels), alors qu'aucune théorie physico-mathématique ne peut démarrer efficacement sans le fondement fourni par le corps de *tous* les nombres réels.

L'introduction des espaces métriques par Fréchet donne un langage géométrique de grande utilité aux mathématiques ; il est vrai que les espaces topologiques généraux introduits bientôt par Hausdorff (cette théorie a été publiée pour la première fois en 1914 dans son livre important « Grundzüge der Mengenlehre ») présentent un cadre encore plus simple pour les considérations des notions de limite et de continuité ; puisque la norme déduite du produit scalaire d'un espace préhilbertien joue un rôle si central dans l'étude de ces espaces, il est naturel que la théorie des espaces métriques soit immédiatement utile pour la définition de la continuité et de la limite dans les espaces hilbertiens. Néanmoins, Hilbert et Schmidt établirent ces définitions directement (comme nous l'avons fait dans ce chapitre) sans se référer à la théorie de Fréchet, publiée seulement en 1906 (donc peut-être inconnue à l'époque de leurs premiers travaux pour lesquels elle ne pouvait pas apporter encore beaucoup d'aide). Par contre, on s'aperçoit dans les écrits de F. Riesz (dès 1908) l'intérêt de ce dernier pour les espaces métriques et les espaces topologiques plus généraux (qui n'existaient pas encore dans la littérature mathématique).

Ces rappels historiques sont naturellement fort incomplets ; on a négligé complètement les apports antérieurs importants de Volterra et l'école italienne ainsi que l'influence essentielle de la théorie du calcul des variations (un sujet important de l'analyse que nous n'étudierons pas dans ce livre). Pour une étude plus détaillée de l'histoire de l'analyse fonctionnelle, nous recommandons le livre de Dieudonné déjà cité ci-dessus.

3.8.3 Suggestions bibliographiques

Nous donnons d'abord deux références qui ont une nature encyclopédique : Dunford-Schwartz [7], Dautray-Lions [4]. Dunford-Schwartz contient une grande partie de l'analyse fonctionnelle utilisée couramment par les chercheurs actuels. Dautray-Lions est un ouvrage conçu pour une « lecture accessible à un ingénieur ou à un chercheur ne venant y puiser que les informations

dont il a besoin pour traiter son problème » ; il contient une présentation moderne de la théorie et de la pratique des équations différentielles aux dérivées partielles du point de vue de l'analyse fonctionnelle.

Deux livres plus introductifs sont : Kolmogorov Fomine [16], Riesz–Nagy [19]. Kolmogorov–Fomine donne une introduction aux espaces topologiques, espaces métriques et espaces vectoriels topologiques ; la théorie de l'intégration de Lebesgue est présentée en détail , la présentation étant d'un niveau abordable pour les débutants. Riesz Nagy contient un exposé complet de la théorie des opérateurs autoadjoints dans les espaces hilbertiens ; un des auteurs de ce livre (F. Riesz) est à l'origine du théorème d'isomorphisme $L^2 \leftrightarrow \ell^2$ mentionné dans le paragraphe précédent.

L'ouvrage de Dieudonné [6] contient une introduction solide à la théorie des espaces métriques, espaces normés et espaces hilbertiens.

Pour les informations biographiques des mathématiciens, une source fiable est D.S.B. (*Dictionary of scientific biography*). Une biographie détaillée de Fourier est donnée par F. Herivel (*Joseph Fourier, The man and the Physicist*, Clarendon Press, Oxford, 1975). Les œuvres mathématiques de plusieurs mathématiciens cités sont facilement accessibles dans les bibliothèques.

CHAPITRE 4

Développements orthogonaux

Le sujet de ce chapitre est le développement en série des fonctions de carré intégrables en utilisant certaines bases orthogonales spéciales des espaces $L^2(X)$. Le cas le plus important est celui où X est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et la base orthogonale est formée des fonctions trigonométriques ; c'est la théorie des ***séries de Fourier***. Ensuite nous étudierons les bases orthogonales formées des fonctions polynomiales ; c'est la théorie des ***polynômes orthogonaux***. De plus, on considère certaines bases orthogonales dans les espaces $L^2(X)$ lorsque $X = \mathbb{R}$ ou $X = [\,0\,, \infty\,[$, ce qui nous conduit aux polynômes de Hermite et de Laguerre. Du point de vue de la théorie générale du chapitre 3, il s'agit ici d'exemples particuliers de bases orthogonales d'un espace hilbertien ; néanmoins, ces exemples particuliers sont d'une importance capitale pour toute l'analyse.

4.1 SÉRIES DE FOURIER

4.1.1 Introduction

Le fait principal de la théorie des séries de Fourier est que : « toute » fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est 2π-périodiques s'écrit comme

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{inx} \tag{4.1}$$

ou comme

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.2}$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x\,, \; n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x\,, \; n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{4.4}$$

La théorie délimite les types de fonctions f qui peuvent entrer dans cette étude et elle précise le sens exact des relations indiquées par $\sim$ dans (4.1) et (4.2). Sans entrer immédiatement dans ces considérations en détail, fixons un peu de terminologie, en supposant d'abord que f est *intégrable* dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < \infty ;$$

cette condition est indiquée par l'écriture $f \in L^1([-\pi, \pi])$; puisque f est supposé être 2π-périodique, ceci entraîne que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+2\pi} |f(x)| \, dx < \infty , \quad \int_a^{a+2\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx .$$

Ainsi, on peut écrire que $f \in L^1([a, a+2\pi])$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ dès que $f \in L^1([-\pi, \pi])$ à cause du fait que

$$f(x + 2\pi) = f(x) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Sous cette condition sur f, les coefficients a_n, b_n, c_n dans (4.3) et (4.4) sont bien définis ; on dit que (4.1) est la ***série de Fourier complexe*** de f et que (4.2) est la ***série de Fourier réelle*** de f ; les c_n sont des ***coefficients de Fourier complexes*** et les a_n, b_n sont des ***coefficients de Fourier réels*** de f. Si f est une fonction réelle, alors les coefficients a_n, b_n sont réels et $\overline{c}_n = c_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$; en pratique, on utilise souvent la série de Fourier réelle lorsque f est une fonction réelle mais du point de vue théorique ce choix ne s'impose pas. En fait, il y a des avantages algébriques considérables dans l'utilisation de la série de Fourier complexe (4.2) dans tous les cas ; d'autre part, les formules

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) , \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) , \quad e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

permettent de passer aisément de (4.1) à (4.2) et vice versa.

Du point de vue de la théorie des espaces hilbertiens (chap. 3), (4.1) et (4.2) révèlent le fait important suivant : *chacune des familles orthogonales suivantes forme une base orthogonale de* $L^2([a, a+2\pi])$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \mapsto e^{inx}, \, n \in \mathbb{Z}\} , \quad \{x \mapsto \cos nx, \, n \in \mathbb{N} ; \, x \mapsto \sin nx, \, n \in \mathbb{N}^*\} .$$

Nous démontrerons cette proposition dans le paragraphe 4.1.8. En utilisant le produit scalaire canonique dans $L^2([a, a+2\pi])$, on vérifie sans peine que les coefficients a_n, b_n, c_n sont simplement les coefficients de Fourier de $f \in L^2([-\pi, \pi])$ par rapport aux bases orthogonales ci-dessus (dans le sens de la définition générale donnée dans le paragraphe 3.6.8).

La théorie générale des bases orthogonales développées dans le chapitre 3 (et résumée dans le paragraphe 3.6.8), nous permet alors d'attribuer aux formules (4.1) et (4.2) le sens suivant : si $f \in L^2\big([-\pi\,,\,\pi]\big)$, alors

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{inx} \right|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{4.5}$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left\{ \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\} \right|^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{4.6}$$

Puisque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, on peut remplacer les bornes $-\pi$, $+\pi$ dans (4.5) et (4.6) par a, $a + 2\pi$ respectivement où a est un nombre réel quelconque (§ 4.1.2).

Pour les fonctions f plus régulières (par exemple, C^1 par morceaux), nous verrons que les séries dans (4.1) et (4.2) convergent pour toutes les valeurs de x, la somme étant égale à $f(x)$ si x est un point de continuité de f.

La théorie se généralise facilement au cas des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ qui sont p-périodiques où p est un nombre > 0 quelconque (c'est-à-dire $f(x+p) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$) ; il suffit alors de remplacer les fonctions 2π-périodiques $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$ par les fonctions p-périodiques $x \mapsto \exp\big(in(2\pi/p)x\big)$, $n \in \mathbb{Z}$, et, de même, de remplacer $x \mapsto \cos nx$, $x \mapsto \sin nx$ par $x \to \cos(n(2\pi/p)x)$ et $x \to \sin(n(2\pi/p)x)$, $n \in \mathbb{N}$; les formules (4.3) et (4.4) subissent alors un petit changement.

Ce qui précède contient un résumé de la partie essentielle de la théorie des séries de Fourier des fonctions d'une variable réelle ; nous considérons aussi, brièvement, le cas des fonctions de plusieurs variables réelles. L'esquisse de la théorie présentée dans ce paragraphe sera maintenant reprise en détail.

4.1.2 Formules préliminaires

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction p-périodique, $p > 0$, avec

$$\int_0^p \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \infty\,;$$

alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+p} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \infty \quad \textit{et} \quad \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

REMARQUE. En principe, nos intégrales sont prises au sens de Lebesgue (vol. 1) ; dans les exemples concrets, f sera souvent continue ou continue par morceaux dans chaque intervalle compact, de sorte que les intégrales peuvent être considérées au sens élémentaire de Cauchy–Riemann.

DÉMONSTRATION

Il suffit de considérer le cas $f \geqslant 0$; pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int_{np}^{(n+1)p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x+np)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$$

car $f(x+np) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$; ceci démontre notre affirmation si $a = np$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Si $a \neq np$, $n \in \mathbb{Z}$, alors il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$np < a < (n+1)p\,;$$

notons qu'alors, $np < a < (n+1)p < (a+p)$ et

$$\begin{aligned}\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{(n+1)p} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(n+1)p}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{(n+1)p} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{np}^{a} f(x+p)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{(n+1)p} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{np}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{np}^{(n+1)p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

♦

(2) Les fonctions $x \mapsto \exp(in\tau x)$, $\tau = 2\pi/p$, $p > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, *forment une famille orthogonale dans* $L^2([a, a+p])$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *; de plus*

$$\int_a^{a+p} \left|\exp(in\tau x)\right|^2 \mathrm{d}x = p\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

C'est un calcul qui généralise l'exercice 2 (§ 3.4.7).

(3) Les fonctions $x \mapsto \cos(n\tau x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sin(n\tau x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau = 2\pi/p$, $p > 0$, *forment une famille orthogonale dans* $L^2([a, a+p])$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *; de plus*

$$\int_a^{a+p} \left|\cos(n\tau x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_a^{a+p} \left|\sin(n\tau x)\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{p}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Le cas $p = 2\pi$ est donné dans l'exercice 2 (§ 3.4.7). Ce qu'il faut vérifier pour établir l'orthogonalité de la famille sont les formules suivantes : m, n dans $\mathbb{N}$,

$$\int_a^{a+p} 1 \cdot \cos(n\tau x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} 1 \cdot \sin(n\tau x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^{a+p} \cos(m\tau x)\cos(n\tau x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} \sin(m\tau x)\sin(n\tau x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$\int_a^{a+p} \cos(m\tau x)\sin(n\tau x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pour tous } m,\ n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Ces formules s'établissent aisément en utilisant les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A-B) + \sin(A+B)\}.$$

Notons par ailleurs que le cas $p > 0$ se déduit immédiatement du cas $p = 2\pi$ par un changement de variable ; de plus, il suffit de considérer $a = 0$ (grâce à (1) ci-dessus).

(4) Soit

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} ;$$

alors

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \tag{4.7}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$; *pour* $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = 2n+1$.

DÉMONSTRATION

On a

$$(\mathrm{e}^{ix} - 1)\,D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \{\mathrm{e}^{i(k+1)x} - \mathrm{e}^{ikx}\} = \mathrm{e}^{i(n+1)x} - \mathrm{e}^{-inx}. \tag{4.8}$$

En multipliant les deux membres de (4.8) par $(1/2i)\,\mathrm{e}^{-ix/2}$, on obtient

$$\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2})\,D_n(x) = \frac{1}{2i}\{\mathrm{e}^{i(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{-i(n+1/2)x}\}$$

d'où, en utilisant $\sin t = (\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it})/2i$, on établit (4.7). ♦

REMARQUE. D_n s'appelle le *noyau de Dirichlet* d'indice n.

(5) Soit

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\{D_0(x) + \cdots + D_n(x)\}.$$

Alors

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x} = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}^2 \tag{4.9}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$; *pour* $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(x) = (n+1)$.

DÉMONSTRATION

De (4.8), on obtient

$$(e^{ix} - 1)\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}\}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&(e^{-ix} - 1)(e^{ix} - 1)\sum_{k=0}^{n} D_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\{e^{ikx} - e^{-i(k+1)x} - e^{i(k+1)x} + e^{-ikx}\} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\{e^{ikx} - e^{i(k+1)x}\} + \sum_{k=0}^{n}\{e^{-ikx} - e^{-i(k+1)x}\} \\
&= \{1 - e^{i(n+1)x}\} + \{1 - e^{-i(n+1)x}\} = 2\{1 - \cos(n+1)x\}\,;
\end{aligned}$$

puisque

$$(e^{-ix} - 1)(e^{ix} - 1) = 2 - \{e^{ix} + e^{-ix}\} = 2(1 - \cos x),$$

en utilisant $\cos t = 1/2(e^{it} + e^{-it})$, on obtient (4.9). ♦

REMARQUE. K_n s'appelle le *noyau de Fejér* d'indice n.

(6) On a

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $K_n(x) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) pour tout $\delta \in\,]0, \pi[$,

$$\sup_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} K_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

DÉMONSTRATION

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\,.$$

(ii) A partir de (4.9), c'est évident.

(iii) Si $0 < \delta < \pi$, alors $\cos x \leqslant \cos\delta$ pour $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$ d'où grâce à (4.9), on a

$$\sup_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} K_n(x) \leqslant \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \qquad \blacklozenge$$

4.1.3 Sommes partielles d'une série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique intégrable dans $[-\pi\,,\,\pi]$; si les c_m sont les coefficients de Fourier complexes donnés par (4.3), posons

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}\,, \quad n = 0,\,1,\,\ldots\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

On dit que $S_n(f;x)$ est la n-ième ***somme partielle*** de la série de Fourier complexe de f. Posons

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\big\{S_0(f;x) + \cdots + S_n(f;x)\big\}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

On dit que $\sigma_n(f;x)$ est la ***moyenne*** de Cesàro (d'ordre 1) d'indice n associée aux sommes partielles $S_n(f;x)$. *On a les formules suivantes : pour* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \tag{4.10}$$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,\mathrm{d}t \tag{4.11}$$

où D_n *est le noyau de Dirichlet et* K_n *le noyau de Fejér définis par (4.7) et (4.9).*

DÉMONSTRATION

On a

$$\begin{aligned} S_n(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{e}^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik(x-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t\,; \end{aligned}$$

de même,

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_k(x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,\mathrm{d}t\,.\ \blacklozenge$$

En utilisant le fait que les D_n, K_n sont 2π-périodiques et que $D_n(-x) = D_n(x)$, $K_n(-x) = K_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire (4.10) et (4.11) comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t \quad (4.12)$$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\,. \quad (4.13)$$

REMARQUE. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique intégrable dans $[-\pi, \pi]$; si les c_n sont les coefficients de Fourier complexes de f (4.3) et les a_n, b_n sont les coefficients de Fourier réels de f (4.4), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{ikx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,.$$

En effet, $c_0 = a_0/2$ et, pour $k \geqslant 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\mathrm{e}^{ikx}+\mathrm{e}^{-ikx}}{2}\,\mathrm{d}x = (c_k + c_{-k})$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\mathrm{e}^{ikx}-\mathrm{e}^{-ikx}}{2i}\,\mathrm{d}x = i(c_k - c_{-k})$$

d'où

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n}\{c_k\,\mathrm{e}^{ikx} + c_{-k}\,\mathrm{e}^{-ikx}\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{(c_k + c_{-k})\cos kx + i(c_k - c_{-k})\sin kx\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos kx + b_k\sin kx\}\,.$$

Autrement dit, *les sommes partielles de la série de Fourier réelle de f sont exactement* $S_n(f;x)$, $n \geqslant 0$. Donc tous les théorèmes concernant la série de Fourier complexe de f qui utilisent $\{S_n(f;x)\}_{n\geqslant 0}$ peuvent être formulés en termes de sommes partielles de la série de Fourier réelle de f et vice versa.

Notons pour la suite que *si f est intégrable au carré dans un intervalle compact* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *alors f est intégrable dans* $[a,b]$. En effet, on a

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + 1\right), \quad x \in [a,b]$$

à cause de l'inégalité élémentaire, $2c \leqslant (c^2+1)$ valable pour $c \geqslant 0$, ce qui entraîne que

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{b-a}{2} < \infty .$$

Les fonctions continues dans $[a,b]$ sont de carré intégrable dans $[a,b]$; plus généralement, toute fonction bornée dans $[a,b]$ est de carré intégrable, en supposant qu'elle soit borélienne (ou mesurable), condition très générale que nous admettrons toujours dans la suite (vol. 1, chap. 5).

4.1.4 Quelques conventions

Si f est une fonction complexe définie dans un intervalle $]a, a+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$, on pose

$$f(a+) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

lorsque cette limite existe ; $f(a+)$ s'appelle la ***limite à droite*** en a de f. Si f est une fonction complexe définie dans un intervalle $]a-\varepsilon, a[$ $(\varepsilon > 0)$, on pose

$$f(a-) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$

lorsque cette limite existe ; $f(a-)$ s'appelle la ***limite à gauche*** en a de f.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ avec $p = (b-a) > 0$. Une fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s'appellera un ***prolongement p-périodique*** de f si $\widetilde{f}$ est p-périodique et $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $a < x < b$; c'est un léger abus de langage dans le sens que $\widetilde{f}$ est un prolongement de $f|_{]a,b[}$ et non pas de f ; $\widetilde{f}$ est uniquement déterminée dès que l'on a fixé la valeur de $\widetilde{f}(a)$ (ou de $\widetilde{f}(b) = \widetilde{f}(a)$) ; un vrai prolongement p-périodique de f n'est possible que si $f(a) = f(b)$. Il est clair, géométriquement, qu'un prolongement p-périodique de f existe ; on peut le définir analytiquement comme suit : si $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a+np \leqslant x < a+(n+1)p = b+np\ ;$$

fixons une valeur quelconque pour $\widetilde{f}(a)$ et posons $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(a)$ si $x = a+np$; si $a+np < x < b+np$, alors posons $\widetilde{f}(x) = f(x - np)$. On vérifie que $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un prolongement p-périodique de f dans le sens de la définition donnée ci-dessus. Notons les propriétés simples suivantes de $\widetilde{f}$:

- si $f(a+)$ existe, alors $\widetilde{f}(a+) = \widetilde{f}(b+) = \widetilde{f}(a+np+) = f(a+)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- si $f(b-)$ existe, alors $\widetilde{f}(b-) = \widetilde{f}(a-) = \widetilde{f}(b+np+) = f(b-)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\widetilde{f}$ est continue en a (ou b) si et seulement si $f(a) = f(b)$ et f est continue en a et b ; $\widetilde{f}$ est continue dans $\mathbb{R}$ si et seulement si f est continue dans $[\,a\,,\,b\,]$ et $f(a) = f(b)$.

Souvent dans la suite nous utiliserons le même symbole pour f et $\widetilde{f}$; aussi nous dirons que le prolongement p-périodique est obtenu en donnant une certaine valeur à celui-ci au point $x = a$.

4.1.5 **Proposition** (*théorème de Fejér*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\sigma_n(f;x) - f(x)\bigr| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

où $\{\sigma_n(f;x)\}$ sont les moyennes de Cesàro associées aux sommes partielles $\{S_n(f;x)\}$ de la série de Fourier complexe de f (§ 4.1.3).

DÉMONSTRATION

On utilise (4.13) et les propriétés de K_n données dans le paragraphe 4.1.2(6) ; puisque

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1\,,$$

on a avec (4.13)

$$\sigma_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bigl\{f(x-t) - f(x)\bigr\}\,K_n(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

ainsi

$$\bigl|\sigma_n(f;x) - f(x)\bigr| \leqslant J_1 + J_2$$

avec

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \bigl|f(x-t) - f(x)\bigr|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \bigl|f(x-t) - f(x)\bigr|\,K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

où $\delta \in\,]\,0\,,\,\pi\,[$ sera choisi de manière appropriée. Puisque f est continue et périodique, f est bornée et uniformément continue ; il existe donc $M > 0$ tel que $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant M$, $x \in \mathbb{R}$, et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in\,]\,0\,,\,\pi\,[$ tel que

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ dès que $|x - y| \leqslant \delta$; grâce au paragraphe 4.1.2(6iii) il existe N tel que si $n \geqslant N$, alors

$$K_n(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

si $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$. Alors, si δ est choisi comme indiqué et $n \geqslant N$, on a

$$J_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$J_2 \leqslant 2M \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon$$

dès que $n \geqslant N$. ♦

4.1.6 Compléments concernant le théorème de Fejér

La démonstration du théorème de Fejér (prop. 4.1.5) fournit beaucoup d'autres informations sur $\sigma_n(f;x)$, même lorsque la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est seulement *intégrable* sur $[-\pi, \pi]$. Nous énumérons un certain nombre de ces propriétés en esquissant brièvement leurs démonstrations.

(i) Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in \mathbb{R}$, alors $m \leqslant \sigma_n(f;x) \leqslant M$, $x \in \mathbb{R}$.

La démonstration est immédiate en partant de (4.13) et du fait que $K_n \geqslant 0$ avec $(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(ii) Si $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ existent en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(f;x_0) = \frac{1}{2}\{f(x_0+) + f(x_0-)\}.$$

En particulier si f est continue en x_0, alors $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x_0) = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION

Posons $c = \{f(x_0+) + f(x_0-)\}/2$; de (4.13), on a

$$\sigma_n(f;x_0) - c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \left\{ \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} - c \right\} \mathrm{d}t$$

d'où

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f;x_0) - c| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) \left| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} - c \right| \mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} K_n(t) \left| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} - c \right| \mathrm{d}t \\ &= J_1 + J_2 . \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\{f(x_0-t)+f(x_0+t)\}=c\,,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,\mathrm{d}t=1\,,$$

il existe $\delta>0$ assez petit tel que $J_1<\varepsilon/2$; d'autre part,

$$J_2\leqslant \mu_n\left\{|c|+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x\right\}\,,\quad \mu_n=\sup_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}K_n(t)\,,$$

d'où $J_2<\varepsilon/2$ si $n\geqslant N$ puisque $\mu_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Au total, $J_1+J_2<\varepsilon$ si $n\geqslant N$. ♦

(iii) Si f est continue dans un intervalle fermé $I\subset\mathbb{R}$, alors

$$\sup_{x\in I}|\sigma_n(f;x)-f(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0\,.$$

Nous laissons la démonstration en exercice.

(iv) Si $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ existent en un point $x_0\in\mathbb{R}$ et si $\lim_{n\to\infty}S_n(f;x_0)$ existe, alors

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f;x_0)=\frac{1}{2}\{f(x_0+)+f(x_0-)\}\,.$$

En particulier, si f est continue en x_0 et $\lim_{n\to\infty}S_n(f;x_0)$ existe, alors $\lim_{n\to\infty}S_n(f;x_0)=f(x_0)$.

La démonstration est immédiate en partant du résultat de l'analyse élémentaire suivant : si $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes qui converge vers α, alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\{\alpha_0+\cdots+\alpha_n\}=\alpha\,.$$

(v) Théorème de Lebesgue

On a

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f;x)=f(x)\quad p.p.\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème dont la preuve exige une analyse un peu plus subtile.

(vi) Unicité des coefficients de Fourier

Si deux fonctions f, g (définies dans $\mathbb{R}$ à valeurs complexes), 2π-périodiques et intégrables dans $[-\pi,\pi]$ ont les mêmes coefficients de Fourier complexes (ou réels), alors $f=g$ p.p.

La démonstration est immédiate en utilisant le théorème de Lebesgue car $\sigma_n(f;x)=\sigma_n(g,x)$. Si f et g sont continues, le théorème de Fejér (prop. 4.1.5)

entraîne que $f = g$ partout ; on peut en déduire l'énoncé pour le cas des fonctions f, g intégrables dans $[-\pi, \pi]$ en utilisant un raisonnement direct. Il suffit d'établir que si $h = f - g$ est une fonction 2π-périodique, intégrable dans $[-\pi, \pi]$, ayant les coefficients de Fourier complexes c_n nuls, alors $h = 0$ p.p. Posons

$$H(x) = \int_{-\pi}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\,;$$

alors $H(-\pi) = 0$, $H(\pi) = c_0 = 0$ et on peut prolonger H à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité pour avoir une fonction continue 2π-périodique $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (§ 4.1.4). On vérifie que tous les coefficients de Fourier complexes sauf un de H sont également nuls en utilisant une intégration par partie (pour les intégrales de Lebesgue) comme suit : si $n \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = H(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-inx}}{-in}\bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = 0$$

car $H'(x) = h(x)$ p.p. (x) et

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Si

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\,,$$

alors $H - \alpha$ sera une fonction continue 2π-périodique dont tous les coefficients de Fourier sont nuls d'où $H - \alpha = 0$ d'après le théorème de Fejér ; puisque $h(x) = H'(x)$ p.p. (x), on en conclut que $h(x) = 0$ p.p. (x).

L'unicité pour le cas où f et g sont de carré intégrable dans $[-\pi, \pi]$ est immédiate à cause du fait qu'alors $f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n = g$ dans l'espace hilbertien $L^2\big([-\pi, \pi]\big)$ où $\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, et les c_n sont les coefficients de Fourier complexes de f et de g (cf. (4.18)).

4.1.7 Remarques concernant les moyennes de Cesàro

Soit $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes ; les moyennes de Cesàro associées sont $\sigma_n = 1/(n+1)\,\{S_0 + \cdots + S_n\}$. On sait que si $S_n \to S$ $(n \to \infty)$, alors $\sigma_n \to S$ $(n \to \infty)$ mais la réciproque est souvent en défaut. Ainsi, si $S_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, on vérifie aisément que $\sigma_n \to 0$ $(n \to \infty)$ alors que $\lim_n S_n$ n'existe pas. Lorsque $\sigma_n \to S$ $(n \to \infty)$, on dit que S_n ***converge*** vers la limite S ***au sens de Cesàro*** avec $n \to \infty$; ainsi, la convergence ordinaire entraîne la convergence au sens de Cesàro (vers une même limite) mais non réciproquement. Lorsque

$$S_n = a_0 + \cdots + a_n \quad \text{où } S_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k$$

et S_n converge au sens de Cesàro vers S avec $n \to \infty$, on dit que la série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ ou $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j$ est ***sommable au sens de Cesàro*** (et a la somme S).

Le théorème de Fejér entraîne que *la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique continue f est sommable au sens de Cesàro à chaque point $x \in \mathbb{R}$, la somme étant égale à $f(x)$ pour tout point $x \in \mathbb{R}$*. Le théorème de Lebesgue dit que la série de Fourier de toute fonction 2π-périodique f, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, est sommable au sens de Cesàro vers la somme $f(x)$ pour presque tout point $x \in \mathbb{R}$.

Ces résultats justifient dans un certain sens notre affirmation préliminaire que « toute » fonction f peut être développée dans une série de Fourier.

Néanmoins, il est nécessaire d'ajouter qu'il existe beaucoup de fonctions 2π-périodiques et continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont la série de Fourier diverge sur un ensemble dénombrable dense de points de $\mathbb{R}$; mais, heureusement, les séries de Fourier des fonctions continues (2π-périodiques) convergent p.p. dans $\mathbb{R}$ (cas particulier d'un théorème de Carleson). Nous discuterons la question de la convergence ponctuelle des séries de Fourier plus en détails ultérieurement.

4.1.8 Complétude des fonctions trigonométriques

Nous formulons d'abord un corollaire immédiat du théorème de Fejér. Nous disons qu'une expression

$$q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}$$

où $c_k \in \mathbb{C}$, $-n \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}^*$, définit un ***polynôme trigonométrique*** (de degré n si c_n ou $c_{-n} \neq 0$).

(1) Si $g : [a, a+2\pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que $g(a) = g(a+2\pi)$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique q tel que

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant a+2\pi} |g(x) - q(x)| < \varepsilon \, .$$

DÉMONSTRATION

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ le prolongement 2π-périodique continue de g ; d'après le théorème de Fejér, il existe un n tel que si $q(x) = \sigma_n(g; x)$, alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - q(x)| = \sup_{a \leqslant x \leqslant a+2\pi} |g(x) - q(x)| < \varepsilon \, .$$

Notons que $\sigma_n(g; x)$ est un polynôme trigonométrique. ♦

Nous donnons maintenant la propriété centrale de la suite $\{\mathrm{e}^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

(2) Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, forment une famille orthogonale complète dans l'espace hilbertien $H = L^2([a, a+2\pi])$, $a \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Nous savons que dans un espace hilbertien, une famille orthogonale est complète si et seulement si elle est totale (chap. 3) ; il suffit donc d'établir que si $f \in H$, $\varepsilon > 0$, alors il existe un polynôme trigonométrique q tel que $\|f - q\| < \varepsilon$.

De la théorie générale de l'intégration (vol. 1), on déduit d'abord l'existence d'une fonction continue $g : [a\,,\, a + 2\pi] \to \mathbb{C}$, $g(a) = g(a + 2\pi)$, telle que $\|f - g\| < \varepsilon/2$; de (1) on obtient un polynôme trigonométrique q tel que

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant a+2\pi} |g(x) - q(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors

$$\|g - q\|^2 = \int_a^{a+2\pi} |g(x) - q(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

d'où $\|f - q\| \leqslant \|f - g\| + \|g - q\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ♦

REMARQUE. Notons que même sans la théorie de l'intégration évoquée ci-dessus, l'affirmation (1) entraîne que les fonctions $n \mapsto \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, forment une base orthogonale dans l'espace préhilbertien $C([a\,,\, a + 2\pi])$. Cette affirmation élémentaire suffit pour beaucoup d'applications.

Notons un corollaire important de l'énoncé (1).

(3) Théorème de Weierstrass

Si $f : [a\,,\, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P dans la variable x tel que

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)| < \varepsilon\,.$$

DÉMONSTRATION

Supposons d'abord que $a = 0$, $b = 1$; en prolongeant f convenablement à l'intervalle $[-\pi\,,\, \pi]$, on peut supposer que $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ et $f : [-\pi\,,\, \pi] \to \mathbb{C}$ est continue ; soit q un polynôme trigonométrique tel que

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - q(x)| \leqslant \sup_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |f(x) - q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Remplaçons chaque terme e^{ikx} qui apparaît dans q par une partie de sa série de Taylor pour avoir finalement un polynôme p tel que

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p(x) - q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,;$$

alors,

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p(x)| < \varepsilon\,.$$

Le cas général se réduit au cas $[0, 1]$ via une transformation affine ; en effet, si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors $\varphi(t) = f\big(a + t(b-a)\big)$ définit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue ; soit $p(t)$ un polynôme en t tel que

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|\varphi(x) - p(t)\big| < \varepsilon .$$

Posons

$$P(x) = p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) ;$$

alors $P(x)$ est un polynôme en x tel que

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \big|f(x) - P(x)\big| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|\varphi(x) - p(t)\big| < \varepsilon . \qquad \blacklozenge$$

REMARQUE. Une forme générale du théorème de Weierstrass concernant l'approximation polynomiale d'une fonction continue f des N variables $(x_1, \ldots, x_N)$ est donnée dans le volume 1. Notons que si f au paragraphe (3) est une fonction à valeurs réelles, alors le polynôme P peut être choisi à coefficients réels ; en effet, puisque

$$\big|f(x) - \operatorname{Re} P(x)\big| \leqslant \big|f(x) - P(x)\big|$$

si $f(x)$ est réel, le polynôme à coefficient réel $\operatorname{Re} P(x)$ répond à notre exigence.

Des énoncés (1) et (2), on obtient aisément des énoncés utilisant les fonctions trigonométriques réelles $\cos nx$, $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$. En effet, chaque polynôme trigonométrique $q(x)$ s'écrit comme

$$q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_n \{\cos kx + i \sin kx\}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

où $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$; d'autre part, toute expression de la forme

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

avec les a_j, b_j dans $\mathbb{C}$ s'écrit comme un polynôme trigonométrique de la forme

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}$$

On en déduit donc l'affirmation suivante.

(4) Les fonctions $x \mapsto \cos nx$, $x \mapsto \sin nx$, $n \in \mathbb{N}^*$, *et la fonction constante* 1 *forment une famille orthogonale complète dans l'espace hilbertien* $L^2([a\,,\,a+2\pi])$, $a \in \mathbb{R}$.

Dorénavant, par ***polynôme trigonométrique*** nous entendons soit une expression de la forme

$$q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{ikx}\,, \tag{4.14}$$

soit une expression de la forme

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \tag{4.15}$$

où les a_k, b_k et c_k sont des nombres complexes ; on a vu que si (4.14) et (4.15) représentent la même fonction q, alors

$$\begin{aligned} &c_0 = a_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \\ &c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k)\,, \qquad k \geqslant 1\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On dit que $q(x)$ est un ***polynôme trigonométrique réel*** si dans l'écriture (4.15) les a_k, b_k sont réels ; ceci équivaut à avoir $c_0 \in \mathbb{R}$ et $\bar{c}_k = c_{-k}$, $k \geqslant 1$, dans l'écriture (4.14). Notons que la condition, $\{c_n \neq 0$ ou $c_{-n} \neq 0\}$ équivaut à la condition $\{a_n \neq 0$ ou $b_n \neq 0\}$.

Observons que tout polynôme trigonométrique est une fonction continue et 2π-périodique.

4.1.9 Formules pour les séries de Fourier dans $[\,a\,,\,a+2\pi\,]$

La complétude des familles de fonctions orthogonales données par e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, ou par 1, $\cos nx$, $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, dans l'espace hilbertien $H = L^2([a\,,\,a+2\pi])$ permet l'application de la théorie des bases orthogonales développée au chapitre 3 (avec un résumé dans le paragraphe 3.6.8).

Considérons d'abord la famille de fonctions orthogonales $\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Si $f \in H$, on sait que les coefficients de Fourier par rapport à la base $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sont donnés par

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{4.17}$$

car ici $\|\varphi_n\|^2 = 2\pi$; de plus $\{c_n\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable dans H, ayant la somme f ; nous écrivons

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{inx}$$

où les c_n sont définis par (4.17). Le fait que $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n$ dans l'espace hilbertien H entraîne la validité des formules

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a+2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx} \right|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{4.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a+2\pi} \left| f(x) - \sum_{k\in I_n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx} \right|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{4.19}$$

où $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset \mathbb{Z}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{Z}$, chaque I_n étant de cardinalité finie.

Supposons que f, $g \in H$ avec

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \, \mathrm{e}^{inx} ;$$

alors

$$\|f\|^2 = \int_a^{a+2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{4.20}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{d_n} . \tag{4.21}$$

Ici, (4.20) est l'égalité de Bessel et (4.21) est la relation de Parseval ; une façon sûre de se rappeler de (4.20) est d'utiliser la formule de Pythagore générale établie dans la proposition 3.5.7 : puisque $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n$, on a

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \, \|\varphi_n\|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

ce qui est (4.20).

De même, une façon sûre de se rappeler de (4.21) est d'utiliser la linéarité et la continuité du produit scalaire dans la forme donnée dans la proposition 3.5.5 : puisque $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n$, on a

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\langle\varphi_n, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\overline{\langle g, \varphi_n\rangle} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\overline{d_n} \cdot 2\pi$$

car

$$d_n = \frac{\langle g, \varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{1}{2\pi} \langle g, \varphi_n\rangle$$

ce qui donne (4.21). Noter que (4.20) est le cas particulier de (4.21) lorsque $g = f$.

Les formules (4.18), (4.20) et (4.21) sont d'une grande utilité ; on verra des exemples concrets de leur application dans les exercices (sect. 4.3).

La discussion pour la famille orthogonale donnée par 1, $\cos nx$, $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}^*$, est parfaitement analogue. Soit $f \in H$; le coefficient de Fourier a_n (correspondant à $\cos nx$) est donné par

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,, \quad n \geqslant 1$$

et le coefficient de Fourier b_n (correspondant à $\sin nx$) est donné par

$$b_n = \frac{\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

Si nous notons le coefficient de Fourier de f correspondant à 1 par $a_0/2$, alors

$$\frac{1}{2}\,a_0 = \frac{\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et permet d'écrire

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,, \quad n \geqslant 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\,, \quad n \geqslant 1\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ici, nous écrivons, pour $f \in H$,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx + b_n \sin nx\} \tag{4.23}$$

où les a_n et b_n sont donnés par (4.22). La théorie générale du chapitre 3 nous garantit que la série de (4.23) converge commutativement vers f (en tant que série dans H et pas nécessairement comme série de nombres complexes) ; en particulier,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+2\pi}\left|f(x) - \left\{\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_n\cos kx + b_k\sin kx)\right\}\right|^2 \mathrm{d}x = 0\,. \tag{4.24}$$

L'égalité de Bessel et la relation de Parseval nous donnent maintenant les analogues de (4.20) et (4.21) en partant de (4.23) et de

$$g(x) \sim \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\}$$

où $g \in H$ et les α_n, β_n sont les coefficients de Fourier réels de g (c'est-à-dire donnés par la formule (4.22) avec f remplacé par g). On a

$$\|f\|^2 = \int_a^{a+2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi|a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \tag{4.25}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi a_0\,\overline{\alpha_0} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n\,\overline{\alpha}_n + b_n\,\overline{\beta}_n\}\,. \tag{4.26}$$

Indiquons de nouveau la façon sûre d'obtenir (4.26) ((4.25) étant le cas particulier de (4.26) où $g = f$) : à cause de la linéarité et de la continuité du produit scalaire, on a le droit d'intégrer terme à terme dans (4.23) ; ceci est justifié par la proposition 3.5.5 ; on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,a_0 \overline{\int_a^{a+2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \overline{\int_a^{a+2\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x} + b_n \overline{\int_a^{a+2\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\,a_0 \cdot \overline{\alpha_0\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n\overline{(\alpha_n\pi)} + b_n\overline{(\beta_n\pi)}\}
\end{aligned}$$

ce qui est (4.26).

4.1.10 Séries de Fourier dans $[a\,,\,a+p\,]$

En utilisant les résultats du paragraphe 4.1.8, on obtient facilement ce qui suit ($p > 0$, $a \in \mathbb{R}$).

(1) Les fonctions $x \mapsto \exp(in\tau x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\tau = 2\pi/p$, forment une famille orthogonale complète dans l'espace hilbertien $H = L^2\big([\,a\,,\,a+p\,]\big)$.

(2) Les fonctions $x \mapsto \cos(n\tau x)$, $x \mapsto \sin(n\tau x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau = 2\pi/p$, et la fonction constante 1 forment une famille orthogonale complète dans l'espace hilbertien $H = L^2\big([\,a\,,\,a+p\,]\big)$.

Indiquons brièvement une démonstration de (1). Il faut établir que si $f \in H$ est telle que

$$\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\tau x}\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{4.27}$$

alors $f = 0$; or, en posant $x = a + y/\tau$, on a

$$\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\tau x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-ian\tau}\int_0^{2\pi} f\Big(a+\frac{y}{\tau}\Big)\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y$$

d'où (4.27) entraîne que

$$\int_0^{2\pi} g(y)\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y = 0\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,,$$

avec $g(y) = f(a + y/\tau)$; du résultat de complétude établi pour $[\,0\,,\,2\pi\,]$, on a $g(y) = 0$ p.p. $y \in [\,0\,,\,2\pi\,]$ d'où $f(x) = 0$ p.p. $x \in [\,a\,,\,a+p\,]$. ♦

En fait, on peut transposer toutes les formules du paragraphes 4.1.9 à $H = L^2\big([\,a\,,\,a+p\,]\big)$ en utilisant une transformation affine appropriée. Soit $f \in H$; écrivons

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{in\tau x} \tag{4.28}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\tau x + b_n \sin n\tau x\} \tag{4.29}$$

les coefficients c_n, a_n et b_n étant les coefficients de Fourier de f par rapport aux bases orthogonales indiquées. Alors

$$c_n = \frac{1}{p}\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\tau x}\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_a^{a+p} f(x)\,\cos n\tau x\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_a^{a+p} f(x)\,\sin n\tau x\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

La série (4.28) s'appelle la ***série de Fourier complexe*** de $f : [\,a\,,\,a+p\,] \to \mathbb{C}$; de même (4.29) donne la ***série de Fourier réelle*** de f ; les c_n sont les ***coefficients de Fourier complexes*** et les a_n, b_n sont les ***coefficients de Fourier réels*** de f.

La théorie générale des bases orthogonales dans les espaces hilbertiens, nous donne maintenant les formules suivantes ($\tau = 2\pi/p$) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+p}\Big|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{ik\tau x}\Big|^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+p}\Big|f(x) - \Big\{\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\tau x + b_k\sin k\tau x)\Big\}\Big|^2\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Plus généralement, les séries dans (4.28) et (4.29) sont commutativement convergentes, au sens de l'espace hilbertien $L^2([a\,,\,a+p])$, vers f.

L'égalité de Bessel et la relation de Parseval fournissent les formules suivantes :

$$\int_a^{a+p} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = p\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{p}{4}\,|a_0|^2 + \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Si $g \in H$ avec

$$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\,\mathrm{e}^{in\tau x}\,,\quad g(x) \sim \frac{1}{2}\,\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\}\,,$$

alors

$$\int_a^{a+p} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = p\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\overline{d_n} = \frac{p}{4}\,a_0\overline{\alpha_0} + \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\overline{\alpha_n} + b_n\overline{\beta_n}\}\,.$$

Nous laissons les vérifications de ces formules en exercice ; il suffit de suivre les procédés indiqués dans le paragraphe 4.1.9.

REMARQUE. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et p-périodique, alors l'analogue du théorème de Fejér (prop. 4.1.5) sera le suivant : posons

$$S_k(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n\,\mathrm{e}^{in\tau x}\,,\quad \tau = \frac{2\pi}{p}\,,\quad \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n(f;x)\,;$$

alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(f;x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

4.1.11 Séries de Fourier en sinus et en cosinus dans $[0\,,\,\ell]$

Dans ce paragraphe, H désignera $L^2([0\,,\,\ell])$. On a que les fonctions données par 1, $\cos(2\pi nx/\ell)$, $\sin(2\pi nx/\ell)$, $n \geqslant 1$, forment une base orthogonale de H ; un petit raisonnement supplémentaire permet d'obtenir des bases orthogonales de H formées de fonctions en sinus seulement (ou en cosinus seulement).

(1) Les fonctions $x \mapsto \sin(\pi nx/\ell)$, $n = 1, 2, \ldots$, *forment une famille orthogonale complète dans* H.

(2) Les fonctions $x \mapsto \cos(\pi nx/\ell)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *forment une famille orthogonale complète dans* H.

DÉMONSTRATION

L'orthogonalité de chacune de ces deux familles se vérifie aisément.

(1) Soit $f : [0, \ell] \to \mathbb{C}$; nous associons à f son ***prolongement impair*** g à $[-\ell, \ell]$ par la formule

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ell \\ -f(-x) & \text{si } -\ell \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Notons que $g : [-\ell, \ell] \to \mathbb{C}$ est une fonction impaire : $g(x) = -g(-x)$, $-\ell \leqslant x \leqslant \ell$; de plus si $f \in H$, alors $g \in L^2([-\ell, \ell])$. Il faut démontrer que si $f \in H$ et

$$\int_0^\ell f(x) \sin\Big(\frac{\pi n x}{\ell}\Big)\, \mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,, \tag{4.30}$$

alors $f = 0$; soit g le prolongement impair de f à $[-\ell, \ell]$; si f vérifie (4.30), alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\ell}^\ell g(x) \sin\Big(\frac{\pi n x}{\ell}\Big)\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^\ell f(x) \sin\Big(\frac{\pi n x}{\ell}\Big)\, \mathrm{d}x = 0$$

(car $x \mapsto g(x)\sin(\pi n x/\ell)$ est une fonction paire dans $[-\ell, \ell]$) et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\ell}^\ell g(x) \cos\Big(\frac{\pi n x}{\ell}\Big)\, \mathrm{d}x = 0$$

car $x \mapsto g(x)\cos(\pi n x/\ell)$ est une fonction impaire dans $[-\ell, \ell]$. La complétude de la famille orthogonale $x \mapsto \sin(\pi n x/\ell)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \cos(\pi n x/\ell)$, $n \in \mathbb{N}$, dans $L^2([-\ell, \ell])$ (§ 4.1.8(2), avec $a = -\ell$, $p = 2\ell$) entraîne que $g = 0$ d'où $f = 0$.

(2) Soit $f : [0, \ell] \to \mathbb{C}$; nous associons à f son ***prolongement pair*** g à $[-\ell, \ell]$ par la formule

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ell \\ f(-x) & \text{si } -\ell \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Notons que $g : [-\ell, \ell] \to \mathbb{C}$ est une fonction paire : $g(x) = g(-x)$, $-\ell \leqslant x \leqslant \ell$; de plus si $f \in H$, alors $g \in L^2([-\ell, \ell])$. Puisque $x \mapsto g(x)\cos(\pi n x/\ell)$ est une fonction paire et $x \mapsto g(x)\sin(\pi n x/\ell)$ est une fonction impaire, on a, si pour $f \in H$,

$$\int_0^\ell f(x) \cos\Big(\frac{\pi n x}{\ell}\Big)\, \mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

alors

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\cos\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\ell} f(x)\cos\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad n\in\mathbb{N}\,,$$

et

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\sin\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,;$$

d'après le résultat de complétude donné précédemment (§ 4.1.8(2)), on a $g = 0$ d'où $f = 0$. ♦

Les résultats de complétude (1) et (2) entraînent la possibilité du développement des fonctions de $H = L^2([0\,,\,\ell])$ en séries de sinus et de cosinus respectivement ; à nouveau, ce sont des cas particuliers de la théorie générale des bases orthogonales donnée dans le chapitre 3.

Ainsi, si $f\in H = L^2([0\,,\,\ell])$, alors

$$f(x)\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big) \tag{4.31}$$

$$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big) \tag{4.32}$$

où

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Pour obtenir les formules pour les coefficients a_n, b_n, on procède en pratique comme suit : multiplions les deux côtés de (4.31) par $\cos(\pi kx/\ell)$ et intégrons entre 0 et ℓ ; on aura

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\ell} f(x)\cos\Big(\frac{\pi kx}{\ell}\Big)\\
&= \frac{1}{2}a_0\int_0^{\ell}\cos\Big(\frac{\pi kx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^{\ell}\cos\Big(\frac{\pi nx}{\ell}\Big)\cos\Big(\frac{\pi kx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= a_k\int_0^{\ell}\cos^2\Big(\frac{\pi kx}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{\ell}{2}a_k
\end{aligned}$$

à cause de l'orthogonalité de la famille $x\mapsto\cos(\pi nx/\ell)$ dans H.

Le procédé est analogue pour le calcul des b_k. De (4.31)-(4.32), on tire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\ell \left| f(x) - \left\{ \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) \right\} \right|^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\ell \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) \right|^2 \mathrm{d}x = 0$$

et les égalités de Bessel

$$\|f\|^2 = \int_0^\ell |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\ell}{4}\,|a_0|^2 + \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 .$$

Si $g \in H$, on obtient les relations de Parseval

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^\ell f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\, a_0 \int_0^\ell \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\ell \overline{g(x)} \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^\ell \overline{g(x)} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \mathrm{d}x \,; \end{aligned}$$

si

$$g(x) \sim \frac{1}{2}\,\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right), \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right),$$

alors

$$\int_0^\ell f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{\ell}{4}\, a_0 \overline{\alpha}_0 + \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\alpha}_n = \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{\beta}_n .$$

Notons la version du théorème de Fejér qui est applicable aux séries (4.31) et (4.32).

Soit $f : [\,0\,,\,\ell\,] \to \mathbb{C}$ une fonction continue ; alors son prolongement pair $g : [\,-\ell\,,\,\ell\,] \to \mathbb{C}$ sera continue avec $g(-\ell) = g(\ell) = f(\ell)$; on peut donc prolonger g à $\mathbb{R}$ pour avoir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2ℓ-périodique avec $g(x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$. La série (4.31) est simplement la série de Fourier réelle de la fonction 2ℓ-périodique et continue g ; donc si

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;x)\,,$$

alors la version 2ℓ-périodique (cf. remarque, § 4.1.10) du théorème de Fejér donne

$$\sup_{x\in[0\,,\,\ell]} \left|\sigma_n(f;x) - f(x)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Si $f : [0\,,\,\ell] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, son prolongement impair $g : [-\ell\,,\,\ell] \to \mathbb{C}$ sera continu si et seulement si $f(0) = 0$; de plus, $g(-\ell) = g(\ell)$ si et seulement si $f(\ell) = 0$. Donc si $f(0) = f(\ell) = 0$, on peut alors prolonger le prolongement impair g pour obtenir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2ℓ-périodique avec $f(x) = g(x)$, $x \in [0\,,\,\ell]$. La série (4.32) est la série de Fourier réelle de la fonction 2ℓ-périodique et continue g (*si f est continue et $f(0) = f(\ell) = 0$*) ; donc si

$$S_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right)\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f;x)\,,$$

on a alors

$$\sup_{x\in[0\,,\,\ell]} \left|\sigma_n(f;x) - f(x)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Si f est continue mais $f(0) \neq 0$ ou $f(\ell) \neq 0$, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ obtenue par le prolongement 2ℓ-périodique du prolongement impair sera continue sauf aux points $0, \pm\ell, \pm 2\ell, \ldots$ mais on aura $g(0+) = f(0)$, $g(0-) = -f(0)$, $g(\ell-) = f(\ell)$, $g(\ell+) = -f(\ell)$, etc. et on peut utiliser les versions 2ℓ-périodiques de (ii) et (iii) du paragraphe 4.1.6. On voit directement de (4.32) que la série concernée donne la valeur zéro lorsque $x = 0, \pm\ell, \ldots$, donc elle est égale à $f(x)$ pour $x = 0$ ou ℓ seulement si $f(0) = f(\ell) = 0$.

4.2 CONVERGENCE PONCTUELLE DES SÉRIES DE FOURIER

4.2.1 Préliminaires

On a vu qu'à toute fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ ($b = a+p$) de carré intégrable on peut associer une série de Fourier complexe (4.28) qui converge vers f dans le sens de $L^2([a\,,\,b])$; une affirmation analogue est vraie aussi pour la série de Fourier réelle (4.29). Pour fixer les idées, nous nous occupons du cas des séries de Fourier complexes, la théorie étant identique pour les séries de Fourier réelles. La question que nous voulons étudier ici est celle concernant la convergence ponctuelle de (4.28) : étant donné un point $x \in [a\,,\,b]$ est-ce que la série (4.28) converge ? et, si oui, converge-t-elle vers $f(x)$?

Pour étudier cette question, il suffira de considérer le cas particulier de l'intervalle $[-\pi, \pi]$; le cas général en découle via la transformation affine

$$\theta : [a, b] \longrightarrow [-\pi, \pi], \quad \theta(x) = \frac{2\pi}{b-a}(x-a) - \pi .$$

Pour simplifier la présentation, nous considérons les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques ; le paragraphe 4.1.4 explique comment une fonction donnée sur un intervalle de longueur 2π peut être prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité ; ces fonctions f seront toujours supposées être au moins intégrables dans $[-\pi, \pi]$ (donc, dans $[a, a+2\pi]$, pour tout $a \in \mathbb{R}$) de sorte que les coefficients de Fourier complexes $c_n = c_n(f)$ sont bien définis selon la formule (4.3). Comme précédemment (§ 4.1.3), nous posons

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

4.2.2 Une condition nécessaire et suffisante

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable dans $[-\pi, \pi]$. Des paragraphes 4.1.2 et 4.1.3, on sait que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \right\} D_n(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, \mathrm{d}t, \quad D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)}{\sin(t/2)} ;$$

donc, si $s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} S_n(f; x) - s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right\} D_n(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \big\{ \varphi(x; t) - s \big\} D_n(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.33}$$

où $\varphi(x; t) = \big\{ f(x+t) + f(x-t) \big\}/2$ car $\varphi(x; -t) = \varphi(x; t)$, $D_n(-t) = D_n(t)$, entraînent que

$$\int_{0}^{\pi} \big\{ \varphi(x; t) - s \big\} D_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \big\{ \varphi(x; t) - s \big\} D_n(t)\, \mathrm{d}t .$$

De (4.33), on conclut qu'*une condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim_{n\to\infty} S_n(f; x) = s$ *(pour un* x *fixe) est que l'intégrale dans (4.33) tend vers* 0 *lorsque* $n \to \infty$.

Une grande partie de l'étude de la convergence ponctuelle des séries de Fourier s'obtient de l'analyse de l'***intégrale de Dirichlet*** (4.33).

4.2.3 Lemme de Riemann–Lebesgue

(1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *une fonction intégrable où* $[a, b]$ *est un intervalle compact de* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ *; en particulier,*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x\, \mathrm{d}x = 0\,, \qquad \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

DÉMONSTRATION

Supposons d'abord que f est de classe C^1 ; alors une intégration par parties donne, pour $\lambda \neq 0$,

$$I(f;\lambda) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x = \frac{f(x)\, \mathrm{e}^{i\lambda x}}{i\lambda}\bigg|_{x=0}^{x=b} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(x)\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x$$

d'où

$$\left|I(f;\lambda)\right| = \left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{M}{|\lambda|} \tag{4.34}$$

avec

$$M = \left\{ \left|f(b)\right| + \left|f(a)\right| + \int_a^b \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x \right\}\,.$$

De (4.34), on conclut que $\left|I(f;\lambda)\right| \to 0$ lorsque $|\lambda| \to \infty$ si f est de classe C^1 ; de la théorie d'intégration (vol. 1), on sait que dans le cas général, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ de classe C^1 telle que

$$\int_a^b \left|f(x) - \varphi(x)\right| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Puisque $\lim_{|\lambda|\to\infty} \left|I(\varphi;\lambda)\right| = 0$, il existe λ_0 tel que $\left|I(\varphi;\lambda)\right| \leqslant \varepsilon/2$ dès que $|\lambda| > \lambda_0$; alors, pour $|\lambda| > \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \left|I(f;\lambda)\right| &\leqslant \left|I(\varphi;\lambda)\right| + \left|I(f;\lambda) - I(\varphi;\lambda)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \left|f(x) - \varphi(x)\right| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Les formules avec $\cos \lambda x$, $\sin \lambda x$ sont des conséquences immédiates en utilisant les formules d'Euler pour ces derniers. ♦

(2) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* 2π*-périodique et intégrable dans* $[-\pi, \pi]$*, alors* $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$ *où les* $c_n(f)$ *sont les coefficients de Fourier complexes de* f*.*

Puisque

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

(2) est un corollaire immédiat de (1).

REMARQUES. De (4.34) on conclut que si f dans (2) est de classe C^1, alors $|c_n(f)| \leqslant M/|n|$, $n \in \mathbb{Z}^*$, M étant une constante > 0 dépendant de f.

En fait, (1) reste valable même lorsque $a = -\infty$, $b = \infty$; on y reviendra lorsque l'on étudiera les transformées de Fourier.

L'énoncé (1) s'appelle souvent le lemme de Riemann–Lebesgue ; il joue un rôle important dans les considérations de la convergence ponctuelle des séries de Fourier.

Notons que (2) est immédiat pour les fonctions f de carré intégrable dans $[-\pi, \pi]$; en effet, grâce a l'inégalité de Bessel, on a dans ce cas $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < \infty$; ceci prouve que $c_n(f) \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$.

4.2.4 Déductions du lemme de Riemann-Lebesgue

(1) Si $g : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ *est intégrable, alors, pour tout* $\delta \in [0, \pi]$*,*

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} g(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = 0,$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{g(t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\,\mathrm{d}t = 0.$

DÉMONSTRATION

Puisque $D_n(t) = \sin(n + 1/2)t / \sin(t/2)$ et

$$\int_{\delta}^{\pi} \left|\frac{g(t)}{\sin(t/2)}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sin(\delta/2)} \int_{\delta}^{\pi} |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

$$\int_{\delta}^{\pi} \left|\frac{g(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\delta} \int_{\delta}^{\pi} |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,,$$

(i) et (ii) sont des conséquences immédiates du paragraphe 4.2.3(1). ♦

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique et intégrable dans* $\mathbb{R}$ *; soit* $x \in \mathbb{R}$ *fixe. Alors* $\lim_{n\to\infty} S_n(f; x) = s$ *si et seulement si pour un* $\delta \in]0, \pi]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\delta} \{\varphi(x; t) - s\} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

où $\varphi(x; t)$ *est comme dans (4.33).*

DÉMONSTRATION

Puisque

$$\int_\delta^\pi |\varphi(x;t) - s| \, \mathrm{d}t < \infty \,,$$

on a de (1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi \{\varphi(x;t) - s\} D_n(t) \, \mathrm{d}t = 0 \,;$$

on conclut avec (4.33). ♦

(3) Principe de localisation

Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions 2π-périodiques et intégrables telles que $f(x) = g(x)$ pour $x \in \,]\, a - \delta \,,\, a + \delta \,[\,$, $\delta > 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \{S_n(f;a) - S_n(g;a)\} = 0 \,.$$

DÉMONSTRATION

De (4.33), on obtient

$$S_n(f;a) - S_n(g;a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(t) D_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi h(t) D_n(t) \, \mathrm{d}t$$

où

$$h(t) = \frac{1}{2} \{f(a+t) + f(a-t)\} - \frac{1}{2} \{g(a+t) + g(a-t)\} \,;$$

notons que $h(t) = 0$ si $|t| < \delta$ à cause de l'égalité $f(x) = g(x)$, $x \in \,]\, a-\delta \,,\, a+\delta \,[\,$. Puisque

$$\int_0^\pi |h(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

on conclut à l'aide de (1). ♦

REMARQUE. On formule l'énoncé (3) souvent comme suit : *le comportement de la série de Fourier de f en un point $a \in \mathbb{R}$ dépend seulement de ses valeurs dans un voisinage ouvert de a, aussi petit soit-il.* Cette propriété des séries de Fourier est surprenante car dans la série de Fourier de f,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \, \mathrm{e}^{inx} \,,$$

les valeurs des $c_n(f)$ dépendent de la définition de f dans un intervalle tout entier de longueur 2π.

Une conséquence de (3) est que si la série de Fourier de g converge vers s en un point a et $f(x) = g(x)$, $x \in \,]\, a - \delta \,,\, a + \delta \,[\,$, alors la série de Fourier de f converge aussi vers s en ce point a.

4.2.5 Critères de convergence pontuelle

Dans ce paragraphe, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, intégrable dans $[-\pi, \pi]$ avec

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{inx}, \quad c_n = c_n(f),$$

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}.$$

Nous reformulons, encore une fois, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $S_n(f; a)$, a un point de $\mathbb{R}$, vers $s \in \mathbb{C}$ lorsque $n \to \infty$.

(1) On a $\lim_{n\to\infty} S_n(f; a) = s$ *si et seulement si, pour un* $\delta \in]0, \pi]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin(n + 1/2)t}{t} \psi(t) \, \mathrm{d}t = 0 \tag{4.35}$$

où

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \{ f(a + t) + f(a - t) \} - s.$$

DÉMONSTRATION

Grâce à (2) du paragraphe 4.2.4, il suffit d'établir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \left\{ \frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t} \right\} \psi(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Posons

$$\theta(t) = \frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t};$$

alors $|\theta(t)| \leqslant M$, $0 < t \leqslant \delta$, où $0 < M < \infty$, car θ est continue dans $]0, \delta]$ et $\lim_{t\to 0} \theta(t)$ existe ; en fait, $\theta(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$ ce que l'on vérifie aisément. Donc

$$\int_0^{\delta} |\theta(t)\psi(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant M \int_0^{\delta} |\psi(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

d'où l'on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \cdot \theta(t)\psi(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

grâce au lemme de Riemann–Lebesgue. ♦

(2) Critère de Dini

Si, pour un $\delta \in]0, \pi]$, $s \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(a+t) + f(a-t) - 2s}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty,$$

alors $\lim_{n\to\infty} S_n(f; a) = s$.

DÉMONSTRATION

C'est immédiat à partir de (1) car l'hypothèse est ici, avec les notations de (1),

$$\int_0^\delta \left| \frac{\psi(t)}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, la validité de (4.35). ♦

(3) Version asymétrique du critère de Dini

Si, pour un $\delta \in]0, \pi]$, *il existe* s_+, s_- *dans* $\mathbb{C}$ *tels que*

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(a+t) - s_+}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(a-t) - s_-}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty$$

alors $\lim_{n\to\infty} S_n(f; a) = s = (s_+ + s_-)/2$.

DÉMONSTRATION

Reprenons la notation de (1) ; on a

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\{f(a+t) + f(a-t) - 2s\} = \frac{1}{2}\{f(a+t) - s_+\} + \frac{1}{2}\{f(a-t) - s_-\};$$

sous les hypothèses admises ici, on a

$$\int_0^\delta \left| \frac{\psi(t)}{t} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\delta \left| \frac{f(a+t) - s_+}{t} \right| \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\delta \left| \frac{f(a-t) - s_-}{t} \right| \mathrm{d}t < \infty$$

d'où la conclusion grâce au critère de Dini. ♦

(4) Cas particuliers importants de (2) et (3)

(i) Si f vérifie une condition de Hölder-Lipschitz au point $a \in \mathbb{R}$

$$|f(a+t) - f(a)| \leqslant M|t|^\alpha \quad \textit{pour } |t| \leqslant \delta$$

où $\delta > 0$, $M > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *alors* $\lim_{n\to\infty} S_n(f; a) = f(a)$.

(ii) Si $f'(a)$ *existe, alors* $\lim_{n\to\infty} S_n(f; a) = f(a)$.

(iii) Supposons que $s_+ = f(a+)$ *et* $s_- = f(a-)$ *existent et*

$$\left|f(a+t) - s_+\right| \leqslant Mt^\alpha\,, \quad \left|f(a-t) - s_-\right| \leqslant Mt^\alpha\,, \qquad 0 < t \leqslant \delta\,,$$

où $\delta > 0$, $M > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$ *; alors*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;a) = \frac{1}{2}\left\{f(a+) + f(a-)\right\}.$$

(iv) Supposons que $s_+ = f(a+)$, $s_- = f(a-)$ *existent ainsi que*

$$\lim_{0<t\to 0} \frac{f(a+t) - s_+}{t} = D_+ f(a)\,, \quad \lim_{0<t\to 0} \frac{f(a-t) - s_-}{-t} = D_- f(a)\,;$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;a) = \frac{1}{2}\left\{f(a+) + f(a-)\right\}.$$

DÉMONSTRATION

(i) On a

$$\left|f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)\right| \leqslant 2M|t|^\alpha\,, \quad |t| \leqslant \delta\,,$$

d'où

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant 2M \int_0^\delta \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}} < \infty\,;$$

le critère de Dini permet de conclure.

(ii) Si $f'(a)$ existe, on a évidemment $\left|f(a+t) - f(a)\right| \leqslant M|t|$ pour $|t| \leqslant \delta$, $\delta > 0$ suffisamment petit et $M > \left|f'(a)\right|$; on conclut de (i).

Les preuves de (iii) et (iv) sont analogues. ♦

4.2.6 Remarques et compléments sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier

Les énoncés (4ii) et (4iv) du paragraphe 4.2.5 seront les seuls que nous utiliserons dans la suite. Pour ces énoncés, il existe une démonstration courte et astucieuse (due à P. R. Chernoff, « Pointwise convergence of Fourier series », *American Mathematical Monthly*, vol. 87 (1980), pp. 399-400 ; elle est complétée par R. Redheffer, « Convergence of Fourier series at a discontinuity », *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, vol. 15 (1984), pp. 1007-1009 ; voir aussi Courant et Hilbert [3, p. 72]). Indiquons cette preuve pour (4iii) (§ 4.2.5) ; on suppose d'abord que $a = 0$ et $f(0) = 0$, $f'(0)$ existe et on pose

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ix} - 1} & \text{si } x \neq 0,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ \alpha = \dfrac{f'(0)}{i} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $g(x+2\pi) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$; on vérifie que $\lim_{x\to 0} g(x) = \alpha$, d'où g est bornée dans un voisinage $]-\varepsilon, \varepsilon[$ de 0, $0 < \varepsilon < \pi/2$; puisque

$$|e^{ix} - 1|^2 > 2(1 - \cos\varepsilon), \quad \varepsilon \leqslant |x| \leqslant \pi,$$

g est intégrable dans $[-\pi, \pi]$. Puisque $f(x) = (e^{ix} - 1)g(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, on a

$$c_n(f) = c_{n-1}(g) - c_n(g), \quad n \in \mathbb{Z}$$

d'où

$$S_n(f;0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = c_{-n-1}(g) - c_n(g) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

grâce au lemme de Riemann–Lebesgue. Pour a quelconque, on passe à $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = f(x + a) - f(a)$; alors $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0)$ existe si $f'(a)$ existe, et

$$c_n(\varphi) = \begin{cases} e^{ina} c_n(f) & \text{si } n \neq 0 \\ c_0(f) - f(a) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

d'où

$$S_n(\varphi;0) = S_n(f;a) - f(a) ;$$

puisque $S_n(\varphi;0) \to 0$ $(n \to \infty)$, on a $S_n(f;a) \to f(a)$ $(n \to \infty)$. En fait, ce raisonnement prouve aussi (4i) (§ 4.2.5) ainsi que le reste de cette affirmation (4) moyennant une petite variation (Ex. 26, sect. 4.3).

L'idée principale derrière les démonstrations données dans les paragraphes précédents provient de l'article classique de Dirichlet de 1829 (*Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données*, article VIII, Werke, vol. 1, édition Chelsea, 1969) ; dans cet article, Dirichlet donne la première démonstration rigoureuse du fait que la série de Fourier d'une fonction f assez générale converge vers $f(x)$ ou $(1/2)\{f(x+) + (x-)\}$ à tout point x. Dirichlet démontre son théorème sous les hypothèses suivantes (appelées depuis longtemps « ***conditions de Dirichlet***»), sur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodiques :

(i) f est bornée et possède seulement un nombre fini de points de discontinuité dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$; si x est un point de discontinuité de f, alors $f(x+)$, $f(x-)$ existent ;

(ii) il existe $x_0 = -\pi < x_1 < \ldots < x_n = \pi$ tels que f est monotone dans chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Une lecture de la démonstration de Dirichlet révèle immédiatement que celle-ci peut donner des résultats beaucoup plus généraux dès que l'on possède une définition générale de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$; Dirichlet en est parfaitement conscient et il essaie de généraliser la notion de l'intégrale au-delà de celle donnée par Cauchy. En fait dans un autre article (article IX, Werke, vol. 1, 1837,

en allemand ; le seul autre écrit de Dirichlet connu sur le sujet), il n'est pas très loin de proposer l'intégrale que l'on appelle aujourd'hui intégrale de Riemann ; le lemme de Riemann-Lebesgue se trouve déjà dans l'article de 1829 de Dirichlet, avec la différence que celui-ci travaille avec une généralisation très partielle de l'intégrale de Cauchy, prévue initialement pour les fonctions continues dans les intervalles compacts. Riemann dans sa « thèse d'habilitation » (*Habilitationsschrift*, 1854, article XII, Werke, Edition Springer-Verlag, Teubner, 1990, article publié après sa mort, pour la première fois, en 1867) introduit son intégrale justement pour pouvoir compléter l'étude de Dirichet ; en même temps, il introduit une nouvelle méthode pour l'étude des séries de Fourier que nous ne présenterons pas ici. Finalement, Lebesgue, avec son intégrale en 1902, est en mesure de tirer un maximum de profit de la méthode de Dirichlet ; son livre (*Leçon sur les séries trigonométriques*, 1re édition en 1906, réédité en 1975 par Albert Blanchard, Paris) donne une présentation très lisible et instructive de la convergence des séries de Fourier.

Nos propositions ne couvrent pas le théorème de Dirichlet car une fonction, même si elle est monotone, continue, strictement croissante dans un intervalle, peut être non dérivable en une infinité non dénombrable de points ; mais selon un théorème important de Lebesgue, une telle fonction est dérivable presque partout. Avec un petit peu plus d'effort, nous aurions pu démontrer un théorème définitif dans cette direction (dû à Jordan, donné dans son célèbre *Cours d'analyse*, 3e édition, vol.3, 1909-1915 ; ce théorème apparaît dans le volume 2, p. 277) et dit que la série de Fourier d'une fonction f « ***à variation bornée*** » dans $[-\pi, \pi]$, converge à chaque point x vers $\{f(x+) + f(x-)\}/2$. La notion d'une fonction à variation bornée est due à Jordan ; lorsqu'il s'agit d'une fonction réelle dans un intervalle compact, on peut démontrer qu'elle est à variation bornée si et seulement si elle est la différence de deux fonctions monotones croissantes. Aussi, il est facile de démontrer qu'une fonction qui vérifie les conditions de Dirichlet est, en fait, un cas particulier d'une fonction à variation bornée ; ainsi, le théorème de Jordan contient le résultat de Dirichlet de manière très satisfaisante.

Une très courte démonstration du théorème de Jordan est possible si l'on utilise un peu de la théorie de la mesure ; voir G. A. Lions (« A simple proof of the Dirichlet-Jordan convergence test », *American Mathematical Monthly*, vol. 93 (1986), pp. 281-282) ; cette démonstration réussit à éviter l'utilisation explicite du « second théorème de la moyenne » en se servant du théorème de Fubini qui le cache.

Notons qu'une fonction réelle peut être dérivable partout dans un intervalle sans qu'elle soit à variation bornée ; aussi une telle fonction peut avoir une infinité de maximums et de mininums dans chaque sous-intervalle (donc elle ne peut pas vérifier les conditions de Dirichlet). Nous mentionnons l'existence de telles fonctions, sûrement un peu bizarres du point de vue des utilisateurs moyens de la théorie des séries de Fourier, seulement pour indiquer que notre proposition 4.2.5(4) couvre non seulement beaucoup de cas d'utilité pratique mais recouvre également des exemples d'une complication extraordinaire où la

série de Fourier de la fonction concernée converge encore vers la valeur de la fonction à chaque point.

Les progrès récents, au sujet de la convergence ponctuelle des séries de Fourier, concernent leur convergence presque partout (p.p.) au sens de la mesure de Lebesgue. Pour les fonctions dans $L^2([-\pi, \pi])$ (et, en particulier, pour les fonctions continues dans $[-\pi, \pi]$), L. Carleson a pu montrer en 1966 que les séries de Fourier converge p.p. (forcément vers les fonctions concernées) ; ce résultat a pu être généralisé par R. A. Hunt en 1968 aux fonctions dans $L^p([-\pi, \pi])$, $p > 1$ (fonction f telles que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$). Les démonstrations de ces résultats, malgré plusieurs simplifications apportées à celles-ci, restent assez inaccessibles. Pour être complet, il faut ajouter que Kolmogorov, en 1926, a donné un exemple d'une fonction intégrable dans $[-\pi, \pi]$ (c'est-à-dire appartenant à $L^1([-\pi, \pi])$) dont la série de Fourier diverge partout. Nous avons déjà remarqué (§ 4.1.7) qu'il existe beaucoup de fonctions continues dans $[-\pi, \pi]$ dont la série de Fourier diverge sur un ensemble infini (de mesure nulle nécessairement, d'après le théorème précédemment cité de Carleson) même si la série converge partout, même uniformément dans $[-\pi, \pi]$, au sens de Cesàro.

Un ouvrage de grande envergure qui fait une synthèse de tous les résultats classiques sur la convergence des séries de Fourier est celui de Zygmund [22]. Nous commenterons, dans la suite, les développements modernes dans la théorie de Fourier.

4.2.7 Convergence uniforme

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, e^{inx}$ une série trigonométrique ; si cette série converge uniformément pour x dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ce qui veut dire qu'il existe $f(x)$, $x \in I$, avec

$$\sup_{x\in I} \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k \, e^{ikx} - f(x) \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 ,$$

alors elle converge uniformément pour les x dans

$$\widetilde{I} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} (I + 2m\pi)$$

à cause de la 2π-périodicité de chaque terme de la série ; de plus, sa somme $f(x)$ définie une fonction continue dans $\widetilde{I}$ car la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue (pour ce théorème élémentaire voir le volume 1 ou le volume 2). *Si* $I = [-\pi, \pi[$ *(ou* $I = [a, a + 2\pi[$ *pour un* $a \in \mathbb{R}$*), alors la série converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *et définit une fonction continue,* 2π*-périodique,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, e^{inx}$. *De plus,* $c_n = c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, f *étant l'unique fonction continue,* 2π*-périodique, définie dans* $\mathbb{R}$ *dont les coefficients de Fourier complexes sont les* c_n.

En effet, en posant $S_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k \, \mathrm{e}^{ikx}$, on a, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x = c_n$$

à cause du fait que $S_m(x) \to f(x)$ lorsque $m \to \infty$ uniformément en $x \in [\,-\pi\,,\,\pi\,]$. L'unicité de f a été vue dans le paragraphe 4.1.6(vi).

Nous passons maintenant à une réciproque partielle de l'énoncé précédent.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique ; supposons qu'il existe une fonction bornée $p : [\,-\pi\,,\,\pi\,] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux (cf. remarque (ii) ci-après), telle que, pour $a < b$, a, $b \in [\,-\pi\,,\,\pi\,]$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b p(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Alors la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{inx}$ de f converge absolument et uniformément pour $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$.

DÉMONSTRATION

On a, pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} c_n = c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{f(x) \, \mathrm{e}^{-inx}}{-in} \Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{in} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{in} \, c_n(p) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $f(-\pi) = f(\pi)$ et la formule de l'intégration par parties (appliquée à $g(x) = \mathrm{e}^{-inx}/-in$, $a = -\pi$, $b = \pi$) :

$$\int_a^b f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x) g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b p(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

valable pour g de classe C^1 et f comme ci-dessus ; il suffit de décomposer $[\,a\,,\,b\,]$ dans un nombre fini de sous-intervalles où p est continue et appliquer la formule élémentaire de l'intégration par parties en observant que

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x p(x) \, \mathrm{d}t = p(x)$$

si x est un point de continuité de p.

Puisque p est bornée, p est de carré intégrable dans $[\,-\pi\,,\,\pi\,]$ d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \big| c_n(p) \big|^2 < \infty$$

d'après l'inégalité de Bessel ; de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|}\,|c_n(p)| \leqslant \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(p)|^2 \right\}^{1/2} < \infty$$

d'où la convergence absolue de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{ikx}\,, \quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

alors

$$\sup_x |S_n(x) - S(x)| \leqslant \sum_{k>n} |c_k| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

de sorte que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{inx}$ converge uniformément pour $x \in \mathbb{R}$ vers $S(x)$. On conclut (voir l'énoncé précédent) que S est continue (et 2π-périodique) dans $\mathbb{R}$ et $c_n = c_n(S)$, $n \in \mathbb{Z}$; puisque $c_n = c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, on conclut que $S = f$. ♦

REMARQUES

(i) La démonstration montre que *la proposition reste valable si* $f : [-\pi\,,\,\pi] \to \mathbb{C}$ *est continue,* $f(-\pi) = f(\pi)$, *et il existe* $p \in L^2([-\pi\,,\,\pi])$ *tel que, pour* $a < b$, $a,\, b \in [-\pi\,,\,\pi]$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4.36}$$

En effet, il suffit d'établir pour de telles fonctions f que la formule de l'intégration par parties utilisée dans la démonstration ci-dessus reste valable ; ceci est possible mais nous ne donnons pas les détails d'une telle preuve. Une telle formule générale de l'intégration par parties reste valable même lorsque $p \in L^1([-\pi\,,\,\pi])$. Lorsque f vérifie (4.36) pour a, b dans un intervalle I avec $p \in L^1(I)$, on dit que f est ***absolument continue*** dans I, ayant la ***densité*** p ; dans l'énoncé (1) ci-dessus, la densité p est continue par morceaux dans $[-\pi\,,\,\pi]$. *Une fonction absolument continue dans* I *est continue* ; ceci est évident de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

La terminologie « absolument continue » est traditionnelle dans la théorie des fonctions d'une variable réelle.

(ii) Rappelons la définition exacte d'une fonction continue par morceaux dans un intervalle compact $[\alpha\,,\,\beta]$; $p : [\alpha\,,\,\beta] \to \mathbb{C}$ est dite ***continue par morceaux*** s'il existe $x_0 = \alpha < x_1 < \ldots < x_n = \beta$ tel que p est continue dans chaque $]\,x_j\,,\,x_{j+1}\,[$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, et $p(x_j+)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $p(x_j-)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, existent. Une telle fonction p est bornée dans $[\alpha\,,\,\beta]$ et $p(\alpha+)$, $p(\beta-)$, $p(\xi+)$ et $p(\xi-)$ existent, $\xi \in\,]\,\alpha\,,\,\beta\,[$; aussi, p possède au plus un nombre fini de points de discontinuité dans $[\alpha\,,\,\beta]$.

(iii) Supposons que f soit absolument continue dans $[\alpha, \beta]$ ayant une densité p continue par morceaux dans $[\alpha, \beta]$; autrement dit, f vérifie (4.36) pour $a, b \in [\alpha, \beta]$ avec p continue par morceaux dans $[\alpha, \beta]$. *Si* $\xi \in]\alpha, \beta[$ *et* p *est continue en* ξ, *alors* $f'(\xi)$ *existe et* $f'(\xi) = p(\xi)$; *si* $\xi \in [\alpha, \beta[$, *alors* $\mathrm{D}_+ f(\xi)$ *existe et* $\mathrm{D}_+ f(\xi) = p(\xi+)$ *où*

$$\mathrm{D}_+ f(\xi) = \lim_{0<t\to 0} \frac{f(\xi + t) - f(\xi)}{t} ;$$

si $\xi \in]\alpha, \beta]$, *alors* $\mathrm{D}_- f(\xi)$ *existe et* $\mathrm{D}_- f(\xi) = p(\xi-)$ *où*

$$\mathrm{D}_- f(\xi) = \lim_{0<t\to 0} \frac{f(\xi - t) - f(\xi)}{-t} .$$

Les démonstrations de ces affirmations sont simples.

(iv) Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f'(\xi)$ existe partout sauf éventuellement à un nombre fini de points $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans $]\alpha, \beta[$, $\xi_1 < \ldots < \xi_n$ où $\mathrm{D}_+ f(\xi_j)$, $\mathrm{D}_- f(\xi_j)$ existent, $1 \leqslant j \leqslant n$; supposons que $\xi \mapsto f'(\xi)$ soit continue dans $]\xi_j, \xi_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, n$, avec $\xi_0 = \alpha$, $\xi_{n+1} = \beta$ et que $f'(\xi_j+)$, $f'(\xi_j-)$ existent, $1 \leqslant j \leqslant n$. *Si* $p(\xi) = f'(\xi)$, $\xi \neq \xi_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *alors* f *vérifie (4.36) pour* $a, b \in [\alpha, \beta]$. Les valeurs de p aux points $\xi_1, \ldots, \xi_n$ peuvent être arbitraires. Nous dirons que la fonction continue f est C^1 ***par morceaux*** dans $[\alpha, \beta]$.

(v) Plus généralement, nous dirons qu'une fonction continue par morceaux $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ est C^1 par morceaux s'il existe $x_0 = \alpha < x_1 < \ldots < x_n < \beta$ tel que $f_j : [x_j, x_{j+1}] \to \mathbb{C}$ est continue et C^1 par morceaux où $f_j(x) = f(x)$ si $x \in]x_j, x_{j+1}[$ et $f_j(x_j) = f(x_j+)$, $f_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}-)$.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique qui est* C^1 *par morceaux dans* $[-\pi, \pi]$ *(ou dans tout autre intervalle compact de longueur de* 2π*). Si* $[\alpha, \beta]$ *est un intervalle compact tel que* f *est continue en chaque point de* $[\alpha, \beta]$, *alors la série de Fourier de* f *converge uniformément vers* $f(x)$ *pour* $x \in [\alpha, \beta]$.

DÉMONSTRATION

Nous démontrons la proposition d'abord pour une fonction particulière, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, avec $h(x) = (\pi - x)/2$ si $0 < x < 2\pi$, $h(0) = 0$; nous obtiendrons ensuite la démonstration générale en utilisant (1).

Observons que dans $[-\pi, \pi]$, on a (fig. 4.1) :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant \pi \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -h(-x) = -\dfrac{\pi + x}{2} & \text{si } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

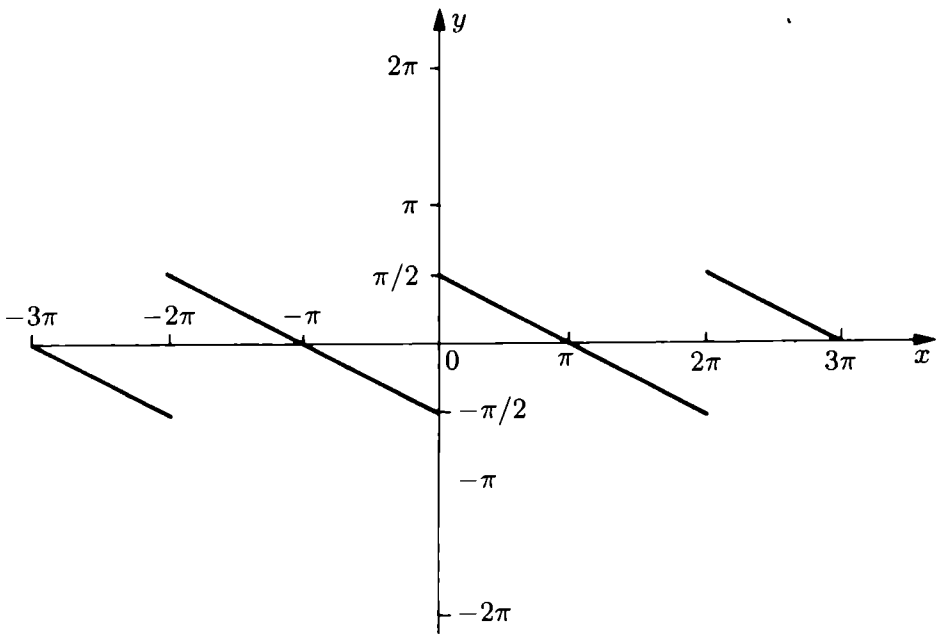


Fig. 4.1

Un petit calcul montre que la série de Fourier de h est donnée par

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(h)\, \mathrm{e}^{inx}$$

avec $c_0(h) = 0$, $c_n(h) = 1/2ni$, $n \in \mathbb{Z}^*$; il est plus commode ici de calculer la série de Fourier réelle ; la série de Fourier complexe en découle en posant $\sin nx = (\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx})/2i$, nous n'en aurons pas besoin.

Du paragraphe 4.2.4(4), on conclut que

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

dans le sens que la série converge en chaque point $x \in \mathbb{R}$ avec la somme égale à $h(x)$; pour x un multiple intégral de 2π, c'est évident, car les deux côtés sont alors nuls et pour les autres x, $h'(x)$ existe (avec $h'(x) = -1/2$). Il est facile de démontrer directement (Ex. 19, sect. 4.3) la convergence uniforme de la série de Fourier de h dans tout intervalle de la forme $[\,\varepsilon\,,\, 2\pi - \varepsilon\,]$, $0 < \varepsilon < \pi$, de sorte que la série est aussi uniformément convergente dans tout intervalle compact ne contenant aucun des points de discontinuités de h (c'est-à-dire 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, etc.)

Supposons que les discontinuités de f (vérifiant les conditions de l'énoncé) dans $[\,-\pi\,,\, \pi\,[$ sont $\xi_1, \ldots, \xi_m$ avec

$$0 \neq s(\xi_j) = f(\xi_j+) - f(\xi_j-)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\,;$$

nous supposons, sans restriction de la généralité, que si $f(x+) = f(x-)$, alors $f(x) = f(x+) = f(x-)$ de sorte que f est alors continue en x. Posons

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{s(\xi_j)}{\pi} h(x - \xi_j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Evidemment, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique ; puisque la seule discontinuité de h dans $[-\pi, \pi[$ est $x = 0$, l'unique discontinuité de $x \mapsto h(x - \xi_j)$ dans $[-\pi, \pi]$ est $x = \xi_j$; d'autre part, puisque $h(0+) = \pi/2$, $h(0-) = -\pi/2$, on a

$$g(\xi_j+) - g(\xi_j-) = f(\xi_j+) - f(\xi_j-) - \frac{s(\xi_j)}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

d'où la continuité de g, d'abord en chaque point dans $[-\pi, \pi[$ et ensuite dans $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Puisque f et h sont C^1 par morceaux dans $[-\pi, \pi]$, g l'est aussi ; on conclut de (1) que la série de Fourier de g converge uniformément dans $\mathbb{R}$. On en déduit que si $[\alpha, \beta]$ est un intervalle compact ne contenant aucun des points $\xi_j + 2n\pi$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $n \in \mathbb{Z}$, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers $f(x)$ pour $x \in [\alpha, \beta]$. ♦

4.2.8 Quelques conseils pratiques

Etant donné une fonction (réelle ou complexe) f définie dans un intervalle borné de longueur p, il faut imaginer son prolongement à $\mathbb{R}$ par p-périodicité comme indiqué dans le paragraphe 4.1.4, avant de la développer dans une série de Fourier (réelle ou complexe). L'exemple de la fonction h dans la démonstration du (2) (§ 4.2.7) montre que dans certains cas, il peut être plus commode d'utiliser la série de Fourier réelle. Dans la discussion suivante, nous prenons $p = 2\pi$ et nous nous servirons de la série de Fourier réelle.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique et de carré intégrable dans $[-\pi, \pi]$ ayant la série de Fourier réelle

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(1) On peut alors intégrer terme à terme la série de Fourier autant de fois que l'on veut pour obtenir les séries de Fourier de $f_1 = \int f$, $f_2 = \int f_1$, ... *(*$\int g$ *représentant une primitive de* g*).*

Avant de démontrer (1) donnons un exemple de son application. On a vu que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad 0 < x < 2\pi. \tag{4.37}$$

On en obtient

$$\int_0^x \frac{\pi - t}{2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x \sin nt\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cos nx \right)$$

d'où (en utilisant $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, voir les exercices de la section 4.3)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\,. \tag{4.38}$$

De même,

$$\frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2}{6}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \tag{4.39}$$

$$-\frac{x^4}{48} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{\pi^2}{12}\,x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos nx\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \tag{4.40}$$

(avec $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$; rappelons que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$ est connu explicitement pour $k = 1, 2, \ldots$; vol. 2).

Pour la démonstration de (1), il suffit d'utiliser la proposition 3.5.5 ; puisque la série de Fourier converge vers f dans $L^2([0\,,\,2\pi])$ (pour fixer les idées, nous considérons cet intervalle particulier de longueur 2π), on a pour $g \in L^2([0\,,\,2\pi])$,

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\,a_0 \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nt\, g(t)\,\mathrm{d}t + b_n \int_0^{2\pi} \sin nt\, g(t)\,\mathrm{d}t \right\}$$

d'où le résultat en prenant $g = 1_{[0\,,\,x]}$. En faisant ce calcul précisément (comme ci-dessus pour (4.38), (4.39) et (4.40)), on s'aperçoit que la série de Fourier de $\int f$ converge mieux que celle de f. En effet, si f est de classe C^1, $f_1 = \int f$ sera de classe C^2 et on peut montrer que si $f_1(0) = f_1(2\pi)$, alors les coefficients de la série de Fourier de f_1 seront d'ordre n^{-2} (Ex. 20, sect. 4.3).

Posons

$$F(x) = \int_0^x \left\{ f(t) - \frac{1}{2}\,a_0 \right\} \mathrm{d}t\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

alors $F(0) = F(2\pi) = 0$ et $F(x + 2\pi) = F(x)$; à l'aide de ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \{a_n \cos nt + b_n \sin nt\}\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} a_n \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{b_n}{n} \right\}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (4.41) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \end{aligned}$$

avec $(1/2)\alpha_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$, $\alpha_n = -b_n/n$, $\beta_n = a_n/n$; notons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right\}^{1/2} < \infty$$

et de même $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty$ car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\} < \infty .$$

Le sens exact de (1) est que *(4.41) est la série de Fourier réelle de F*. En effet, F étant une fonction 2π-périodique et continue et (4.41) une série uniformément convergente, on obtient que les α_n, β_n sont des coefficients de Fourier de F.

Avec un petit peu plus d'effort, *on peut démontrer que (4.41) reste valable dès que* $f \in L^1([0, 2\pi])$, *la série de (4.41) étant toujours la série de Fourier de* f.

D'ici l'on peut tirer une conséquence importante : *si*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est la série de Fourier de $f \in L^1([0, 2\pi])$, *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$ *est une série convergente*. Il suffit de poser $x = 0$ dans (4.41) pour avoir la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n = \sum_{n \geqslant 1} -b_n/n$.

L'observation précédente permet de donner *des exemples de séries trigonométriques convergentes partout qui ne sont pas des séries de Fourier*. Par exemple, la série

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

converge partout (même uniformément dans $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$; Ex. 19, sect. 4.3) mais puisque $\sum_{n \geqslant 2} 1/(n \ln n) = \infty$, elle n'est pas la série de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (2π-périodique, continue dans $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$) ; l'explication est que f n'est pas intégrable dans $[0, 2\pi]$.

L'opération de la dérivation terme à terme d'une série de Fourier exige une attention plus particulière ; ainsi la dérivation terme à terme de (4.37), nous donne le résultat absurde

$$-\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx\,,$$

la série $\sum_n \cos nx$ étant divergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Néanmoins, on peut donner un sens à l'opération de la dérivation terme à terme en utilisant la théorie des distributions (§ 4.5.6). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et de classe C^1, alors la série de Fourier de f' s'obtient par la dérivation terme à terme de la série de Fourier de f ; évidemment, la série de Fourier de f converge uniformément (§ 4.2.7(1)) mais celle de f' peut ne pas converger ponctuellement ; en tout cas, la série de Fourier de f' converge vers f' dans le sens de $L^2([-\pi\,,\,\pi])$ car f', étant continue, est de carré intégrable dans $[-\pi\,,\,\pi]$.

4.2.9 Comment reconnaître une série de Fourier

Soit Σ une série trigonométrique de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{inx}$ où les $c_n \in \mathbb{C}$; pour l'instant, nous ne nous préoccupons pas de la nature de la convergence de la série, considérée d'abord comme une écriture formelle. Plusieurs questions naturelles se pose au sujet de Σ.

(i) Est-ce que Σ est une série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, intégrable dans $[-\pi\,,\,\pi]$ (dans le sens que $c_n = c_n(f) = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{Z}$) ?

(ii) Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{inx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}$ et soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$; est-ce que Σ est alors une série de Fourier, éventuellement celle de la fonction f ?

(iii) Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{inx}$ converge p.p. $x \in \mathbb{R}$ et définit ainsi une fonction f intégrable dans $[-\pi\,,\,\pi]$; est-ce que Σ est alors la série de Fourier de f ?

Une discussion détaillée de ces questions nous amènerait trop loin ; nous nous contenterons de donner quelques indications qui seront utiles dans la suite et nous fournirons les réponses simples connues. Bien entendu, la discussion des séries trigonométriques réelles $(1/2)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ dans ce contexte est parfaitement similaire.

Une réponse simple et utile à (i) est la suivante : *si* $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, *alors* Σ *est la série de Fourier d'une fonction* f *(unique à un ensemble négligeable près) qui est même de carré intégrable dans* $[-\pi\,,\,\pi]$. C'est une conséquence immédiate de la théorie des bases orthogonales (chap. 3) et du fait que $\{\mathrm{e}^{inx}\}$ fournit une base orthogonale de $L^2([-\pi\,,\,\pi])$. Il est généralement difficile de savoir si oui ou non Σ est une série de Fourier d'une fonction intégrable dans $[-\pi\,,\,\pi]$; le lemme de Riemann–Lebesgue nous dit que, $|c_n| \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$, est une condition nécessaire mais elle est loin d'être suffisante.

Une première réponse à (ii) est négative ; on a déjà vu un exemple (§ 4.2.8, $\sum_{n\geqslant 2}(\sin nx)/\ln x$) d'une série trigonométrique Σ qui converge à chaque point $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$ sans qu'elle soit une série de Fourier de f (ou d'une autre fonction intégrable dans $[-\pi, \pi]$; f n'est pas intégrable dans $[-\pi, \pi]$). Par contre, *si la convergence de la série est uniforme ou dans le sens de* $L^2([-\pi, \pi])$, *alors* Σ *est la série de Fourier de* f. La démonstration simple est contenue dans la remarque précédente et dans le paragraphe 4.2.7.

Une réponse plus satisfaisante à (ii) est la suivante : *si* Σ *converge vers* $f(x)$ *en chaque point* $x \in [-\pi, \pi[$ *et si* f *est intégrable dans* $[-\pi, \pi]$, *alors* Σ *est la série de Fourier de* f. La démonstration de cette affirmation, apparemment simple (et évidemment utile), exige des considérations fines. Un résultat plus complet, qui fait le lien avec la question (iii), est le suivant : *si* Σ *converge vers* $f(x)$ *pour* $x \in [-\pi, \pi[\setminus E$, E *étant un ensemble au plus dénombrable, et si* f *est intégrable dans* $[-\pi, \pi]$, *alors* Σ *est la série de Fourier de* f. L'énoncé précédent concerne $E = \emptyset$; rappelons qu'une fonction f définie dans $[-\pi, \pi[$ partout sauf sur un ensemble négligeable E (par exemple E au plus dénombrable) peut être prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité en posant $f(x) = 0$, $x \in E$, sans que la définition de f dans l'ensemble exceptionnel négligeable E affecte l'intégrabilité de f dans $[-\pi, \pi]$. Ceci dit, si l'on sait seulement que Σ converge vers f(x) p.p. $x \in [-\pi, \pi[$ (c'est-à-dire $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$, $x \in [-\pi, \pi[\setminus E$, $\lambda(E) = 0$, λ étant la mesure de Lebesgue) et que $f \in L^1([-\pi, \pi])$, Σ *n'est pas nécessairement la série de Fourier de* f *(ni d'une autre fonction intégrable dans* $[-\pi, \pi]$*)*. Autrement dit, une première réponse à (iii) est négative ; d'ailleurs, une analyse complète de (iii) semble être d'une extrême complexité. Néanmoins, on peut énoncer (et démontrer) l'affirmation utile suivante : *si* $\sum_n c_n e^{inx} = f(x)$ *p.p.* $x \in [-\pi, \pi]$ *et* $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, *alors* $f \in L^2([-\pi, \pi])$ *et* $c_n : c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. En effet, puisque $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, il existe $g \in L^2([-\pi, \pi])$ tel que $c_n = c_n(g)$, $n \in \mathbb{Z}$; on sait aussi que

$$S_n(g; x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

converge dans le sens de $L^2([-\pi, \pi])$ vers g. Dans la démonstration de la complétude de $L^2(X)$ (§ 3.2.4), on a vu qu'il existe $n_1 < n_2 < \ldots$ tel que

$$\lim_{j\to\infty} S_{n_j}(g; x) = g(x) \quad \text{p.p. } x \in [-\pi, \pi]$$

d'où on conclut que $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in [-\pi, \pi]$. ♦

Finalement, *supposons que* Σ *est connue comme la série de Fourier de* f, *intégrable dans* $[-\pi, \pi]$, *et que* Σ *converge vers une fonction* $g(x)$ *p.p.* $x \in [-\pi, \pi]$ *; alors* $f(x) = g(x)$ *p.p.* $x \in [-\pi, \pi]$. En effet, selon le théorème de Lebesgue sur la convergence p.p. des moyennes de Cesàro (§ 4.1.6(v)), on a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f; x) = f(x) \qquad \text{p.p. } x \in [-\pi, \pi] ;$$

puisque,

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{ikx} \xrightarrow{n\to\infty} g(x) \quad \text{p.p. } x \in [-\pi, \pi],$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = g(x) \quad \text{p.p. } x \in [-\pi, \pi]$$

d'où $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in [-\pi, \pi]$.

La première réponse à (ii) était donnée par Cantor dans les années 1870-1872 ; un de ses théorèmes peut être formulé comme suit : si Σ converge en chaque point $x \in [-\pi, \pi]$ vers zéro, alors les c_n sont tous nuls. Cantor essaie de généraliser ce résultat en supposant que Σ converge vers zéro pour $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$ où l'ensemble exceptionnel E est « petit » ; c'est son effort à cerner ce problème qui constitue la naissance de la théorie des ensembles qui est aujourd'hui le langage même de toutes les mathématiques. Le livre de Zygmund ([22, chap. IX] contient des réponses plus détaillées aux questions proposées ci-dessus.

4.3 EXERCICES

1 Soit

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ c_2 & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Vérifier que la série de Fourier réelle de f est donnée par

$$f(x) \sim \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{2(c_1 - c_2)}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \right\}.$$

Voir que pour $x = 0, \pm\pi$, la série converge vers

$$\frac{c_1 - c_2}{2} = \frac{1}{2} \{ f(0+) + f(0-) \}$$

comme prévu par la théorie ; en calculant la série pour $x = \pi/2$, établir que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

En utilisant l'égalité de Bessel, établir que

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en conclut que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

2 Soit $f(x) = x^2$, $a \leqslant x \leqslant b$. Vérifier que la série de Fourier complexe de f est

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2n\pi x i}{b-a}\right)$$

où

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{b-a}{2n\pi}\left\{\dfrac{b-a}{n\pi} + i(a+b)\right\}\exp\left(\dfrac{-2n\pi a i}{b-a}\right) & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

En déduire que la série de Fourier réelle de f est

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right\}$$

où $a_0 = (a^2+ab+b^2)/3$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{b-a}{n\pi}\left\{\frac{b-a}{n\pi}\cos\frac{2n\pi a}{b-a} + (a+b)\sin\frac{2n\pi a}{b-a}\right\}$$

$$b_n = \frac{b-a}{n\pi}\left\{-(a+b)\cos\frac{2n\pi a}{b-a} + \frac{b-a}{n\pi}\sin\frac{2n\pi a}{b-a}\right\}.$$

Obtenir :

(i) pour $a = -\pi$, $b = \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\,, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi\,;$$

(ii) pour $a = 0$, $b = 2\pi$,

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right\}, \quad 0 < x < 2\pi\,.$$

De (i), obtenir $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n^2 = \pi^2/12$ en posant $x = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ en posant $x = \pi$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

En posant $x = 0$ dans (ii) vérifier que la série donne bien

$$\frac{1}{2}\{f(0+) + f(0-)\} = \frac{1}{2}\{0 + (2\pi)^2\} = 2\pi^2\,.$$

3 Soit $f(x) = \cos ax$, $x \in [-\pi, \pi]$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Vérifier que la série de Fourier réelle de f donne

$$\cos ax = \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{a^2 - n^2} \right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

En déduire que, pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2}$$

$$\operatorname{ctg} a\pi = \frac{1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}.$$

4 En utilisant la relation de Parseval et les développements en séries de Fourier réelles de $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos ax$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, obtenir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{2a^3} \operatorname{ctg}(a\pi) - \frac{\pi^2}{6a^2}.$$

5 Soit $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. De la série en sinus de f, obtenir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Voir que la série de Fourier réelle de $x \mapsto x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ est exactement la série en sinus de f. Que donne l'égalité de Bessel appliquée à $f \in L^2([0, \pi])$?

6 Soit $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. De la série en cosinus de f, obtenir

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Voir que la série de Fourier réelle de $x \mapsto |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, est exactement la série en cosinus de f. De l'égalité de Bessel, obtenir

$$\int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^2}{4} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^4} \frac{\pi}{2}$$

d'où $\sum_{n \geqslant 1} (2n-1)^{-4} = \pi^4/96$; en déduire que $\sum_{n \geqslant 1} n^{-4} = \pi^4/90$.

7 Soit $f(x) = (1/2)(\pi - x)$, $-\pi < x < \pi$; vérifier en calculant la série de Fourier réelle de f que

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx\,, \quad -\pi < x < \pi\,.$$

Etudier et expliquer le résultat de la substitution $x = \pm\pi$ dans la série ; comparer avec la série (4.37).

8 De la série en cosinus de $f(x) = (1/2)(\pi - x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, obtenir :

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\,.$$

9 En utilisant les différentes séries de Fourier établir les formules suivantes :

(i) $\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$, $0 < x < 1$, où

$$b_n = \frac{2n\pi}{1 + n^2\pi^2} \left\{1 + (-1)^{n+1}\,\mathrm{e}\right\}\,, \quad n \geqslant 1\,;$$

(ii) $\mathrm{e}^x = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, où

$$a_n = \frac{2}{1 + n^2\pi^2} \left\{-1 + (-1)^n\,\mathrm{e}\right\}\,, \quad n \geqslant 0\,;$$

(iii) $\mathrm{e}^x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{in\pi x}$, $-1 < x < 1$, où

$$c_n = \frac{(-1)^n \operatorname{sh} 1}{1 - n\pi i}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,;$$

(iv) $\mathrm{e}^x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{2n\pi x i}$, $0 < x < 1$, où

$$c_n = \frac{\mathrm{e} - 1}{1 - 2n\pi i}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

10 En utilisant la série en sinus pour la fonction constante 1 dans $]\,0\,,\,L\,[$, démontrer que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{L}\,, \quad 0 < x < L\,.$$

En déduire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

11 Soit $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité ; démontrer que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

12 (Continuation de l'exercice 11) Soit

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0\,; \end{cases}$$

posons $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$, $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, g étant prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité ; vérifier que

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Noter que $f'(x) = g(x)$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ et que la série pour g est obtenue par la dérivation terme à terme de la série pour f. Comment aurait-on pu prévoir l'égalité entre g et sa série de Fourier à partir de l'exercice 11 ?

13 Démontrer que

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14 Démontrer que les séries de Fourier complexes de $x \mapsto (\cos x)^m$, $x \mapsto (\sin x)^m$, $m = 1, 2, \ldots$, sont données par :

(i) $(\cos x)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$,

$$c_n = \begin{cases} 2^{-m}\binom{m}{k} & \text{si } n = 2k - m,\ k = 0, 1, \ldots, m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) $(\sin x)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$,

$$c_n = \begin{cases} (2i)^{-m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} & \text{si } n = 2k - m,\ k = 0, 1, \ldots, m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, pour $N = 1, 2, \ldots$, on a

$$(\cos x)^{2N+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}\left\{2\cos(2N+1)x + \cdots + 2\binom{2N+1}{N}\cos x\right\}$$

$$(\cos x)^{2N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N}\left\{2\cos 2Nx + \cdots + 2\binom{2N}{N-1}\cos 2x + \binom{2N}{N}\right\}.$$

15 Soit $f(x) = -\ln(2\sin x/2)$ si $0 < x < 2\pi$; on pose $f(0) = 0$ et on prolonge f par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$. Vérifier que $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Démontrer que la série de Fourier réelle de f est donnée par $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\cos nx$ en établissant (§ 4.2.10)

$$-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx\,, \quad 0 < x < 2\pi\,,$$

comme suit : de $-\ln(1-z) = \sum_{n\geqslant 1} z^n/n$, $|z| < 1$, on a

$$-\operatorname{Re}\ln(1 - r\,\mathrm{e}^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos nt\,, \quad 0 \leqslant r < 1\,,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\,.$$

On laisse $r \to 1$ et on observe que

$$-\operatorname{Re}\ln(1 - \mathrm{e}^{it}) = -\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)\,, \quad 0 < t < 2\pi\,.$$

(On se sert du théorème d'Abel (vol. 2) et de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(1/n)\cos nt$, $0 < t < 2\pi$ (Ex. 19).)

REMARQUE. La vérification directe de

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

semble être compliquée (sauf pour $n = 0$).

16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 (non nécessairement périodique). Démontrer les affirmations suivantes :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left\{f(0) + f(2\pi)\right\}$;

(ii) si r, $s \in \mathbb{Z}$, $r < s$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{2r\pi}^{2s\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(2r\pi) + \sum_{j=r+1}^{s-1} f(2j\pi) + \frac{1}{2}f(2s\pi)$$

ce qui donne

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(2j\pi)$$

si $f(x) = 0$ pour $|x| \geqslant T$, T un nombre > 0 (c'est-à-dire si f est à support compact).

REMARQUE. Cette formule est valable sous des conditions beaucoup plus générales ; elle s'appelle la ***formule sommatoire de Poisson***.

17 Soit Σ la série trigonométrique $1/2 + \cos x + \cos 2x + \cdots$

(i) De (4.7) et (4.9), on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z},$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\{S_0(x) + \cdots + S_n(x)\} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(x+1)x}{2(1-\cos x)}.$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$; $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \infty$ si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

REMARQUE. Σ est une série trigonométrique qui converge vers 0 au sens de Cesàro en dehors d'un ensemble dénombrable sans que les termes de la série soient identiquement nuls.

18 Soit Σ la série trigonométrique $\sin x + \sin 2x + \cdots$

(i) Etablir

$$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos(1/2\,x) - \cos(n+1/2)x}{2\sin(1/2\,x)}, \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

(en écrivant $2\sin(1/2\,x)\sin kx = \cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x$).

(ii) Posons $\sigma_n(x) = 1/n\,\{S_1(x) + \cdots + S_n(x)\}$; démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

19 Soit $\{a_1, a_2, \ldots\}$ une suite de nombres > 0 telle que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. L'objectif de cet exercice est d'établir que les séries :

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

convergent uniformément pour $x \in [\varepsilon, 2\pi\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$; observer que (i) converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que (ii) converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi)\mathbb{Z}$; (ii) converge en $x = 0$ si et seulement si $\sum_n a_n < \infty$ et alors (ii) converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) (Lemme d'Abel ; cf. vol. 2) Si $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite complexe, alors

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j\right| \leqslant 2M a_{n+1}$$

où $k = 1, 2, \ldots$, $M = \sup_{n\geqslant 1} |b_1 + \cdots + b_n|$. Pour établir ce lemme, on vérifie la formule (dite de la ***sommation partielle d'Abel***) :

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k} (a_j - a_{j+1}) S_j - a_{n+1} S_n + a_{n+k+1} S_{n+k}$$

où $S_n = (b_1 + \cdots + b_n)$.

(b) Si $b_n = \sin nx$, $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, vérifier en utilisant l'exercice 18(i) et (a) que

$$\sup_{n\geqslant 1} |b_1 + \cdots + b_n| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)}\,.$$

(c) Si $b_n = \cos nx$, $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi$, établir, de même, que

$$\sup_{n\geqslant 1} |b_1 + \cdots + b_n| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)}\,.$$

(d) Si $S_n(x) = (a_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx)$ ou $(a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx)$, démontrer que, pour $n < m$,

$$\sup_{x\in[\,\varepsilon\,,\,2\pi-\varepsilon\,]} \big|S_n(x) - S_m(x)\big| \leqslant \frac{2}{\sin(\varepsilon/2)}\, a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Conclure la convergence uniforme de (i) et (ii) dans $[\,\varepsilon\,,\,2\pi - \varepsilon\,]$.

20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^k, $k = 1, 2, \ldots$ Démonter que, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f) \quad \text{et} \quad |c_n(f)| \leqslant \frac{M}{|n|^k}$$

où $M = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|\, dx$. En déduire que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty$.

21 Soit $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\sum_n |a_n| < \infty$; démontrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est continue et 2π-périodique et dont la série de Fourier complexe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$ est donnée par $c_0(f) = a_0$, $c_n(f) = a_n/2$ si $n \geqslant 1$, $c_n(f) = a_{-n}/2$ si $n \leqslant -1$.

22 Soit $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres > 0 avec $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$. Démontrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que $|c_n(f)| \geqslant \varepsilon_n$ pour une infinité d'indices n. (Choisir $\{n_k\}$ tel que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{n_k} < \infty$; définir f comme dans l'exercice 21 avec $a_{n_k} = 2\varepsilon_{n_k}$ et $a_n = 0$ si $n \neq n_k$.)

23 Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions définies par $e^{i(n+\alpha)x}$, $n \in \mathbb{Z}$, forment un système orthogonal complet dans $L^2([a, a+2\pi])$, $a \in \mathbb{R}$. En déduire que les fonctions définies par $\cos(n+1/2)x$, $\sin(n+1/2)x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ forment un système orthogonal complet dans $L^2([a, a+2\pi])$, $a \in \mathbb{R}$. Conclure que chacune des familles de fonctions $\{\cos(n+1/2)x,\ n = 0, 1, \ldots\}$, $\{\sin(n+1/2)x,\ n = 0, 1, \ldots\}$ forme un système orthogonal complet dans $L^2([0, \pi])$. (L'orthogonalité est facile à vérifier directement dans chaque cas en utilisant les formules trigonométriques du paragraphe 4.1.2.)

24 (Continuation de l'exercice 23) Soit $f(x) = (\pi - x)/2$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; vérifier que les coefficients de Fourier de f par rapport à la base orthogonale de $L^2([0, 2\pi])$ donnée par $e^{i(n+1/2)x}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont $2(2n+1)^{-2}/\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Conclure que

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n+1/2)x}}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n+1/2)x}{(2n+1)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

les séries étant absolument et uniformément convergentes.

REMARQUE. Puisque $f(0+) \neq f(2\pi-)$, les séries de Fourier « ordinaires » de f ne peuvent pas être uniformément convergentes dans $[0, 2\pi]$ (cf. (4.37)). Le passage à une base orthogonale $e^{i(n+\alpha)x}$, $n \in \mathbb{Z}$, avec α approprié, peut donner dans certains cas des séries uniformément convergentes (cf. Zygmund [22, p. 71]).

25 Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 avec $f(0) = f(\pi) = 0$. Démontrer l'inégalité de Wirtinger

$$\int_0^\pi |f'(x)|^2 \, dx \geqslant \int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx$$

avec égalité si et seulement si $f(x) = \alpha \sin x$, α constante complexe, en complétant le raisonnement qui suit :

(i) puisque $\{\sin nx\}_{n \geqslant 1}$ donne une base orthogonale pour $L^2([0, \pi])$, on a $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, les a_n étant les coefficients de Fourier de f par rapport aux $\{\sin nx\}$; de plus

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 ;$$

(ii) utilisant la base orthogonale $\{\cos nx\}_{n \geqslant 0}$ pour $L^2([0, \pi])$, on a de même $f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nx$ avec

$$\int_0^\pi |f'(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 ;$$

(iii) une intégration par parties donne $b_n = n a_n$, $n \geqslant 1$, $b_0 = 0$.

26 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable dans $[-\pi, \pi]$. Supposons que $f(a+) = s_+$, $f(a-) = s_-$ et que

$$\int_{a-\delta}^{a} \left| \frac{f(x) - s_-}{x - a} \right| \mathrm{d}x < \infty, \quad \int_{a}^{a+\delta} \left| \frac{f(x) - s_+}{x - a} \right| \mathrm{d}x < \infty$$

pour un $\delta > 0$. Nous voulons démontrer que $S_n(f; a) \to (s_+ + s_-)/2$ lorsque $n \to \infty$ en utilisant la méthode esquissée au début du paragraphe 4.2.6. Supposons d'abord que $a = 0$; soit $h(x) = s_+$ si $0 < x \leqslant \pi$ et $h(x) = s_-$ si $-\pi \leqslant x < 0$. On vérifie que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(h) = c_k(0) = \frac{1}{2}(s_+ + s_-).$$

Si $g(x) = f(x) - h(x)$, alors

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{g(x)}{x} \right| \mathrm{d}x < \infty$$

d'où l'on conclut que $S_n(g; 0) \to g(0) = 0$ lorsque $n \to \infty$ (d'après ce qui est déjà établi dans le paragraphe 4.2.6). Puisque

$$S_n(g; 0) = S_n(f; 0) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(h) ;$$

on conclut que $S_n(f; 0) \to (s_+ + s_-)/2$ lorsque $n \to \infty$. Pour $a \neq 0$, on passe à $\varphi(x) = f(x + a)$.

4.4 COMPLÉMENTS ET GÉNÉRALISATIONS

4.4.1 Phénomène de Gibbs

Lorsqu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (continue par morceaux, 2π-périodique) possède une discontinuité en un point a (avec $f(a+) \neq f(a-)$), sa série de Fourier ne peut pas converger uniformément dans un intervalle contenant a. En 1899, Gibbs (physicien américain connu pour ses travaux de mécanique statistique) constate, probablement sur la base des calculs numériques, l'apparition d'un « phénomène » que nous exprimons analytiquement comme suit : soit $S_n(f; x)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier réelle de f (supposée pour simplifier *réelle, 2π-périodique, C^1 par morceaux dans* $[-\pi, \pi]$) ; soit

$a \in \mathbb{R}$ tel que $d_a = f(a+) - f(a-) \neq 0$; *alors, pour tout nombre* α *dans l'intervalle fermé* I_a *d'extrémités*

$$f(a-) - \frac{d_a}{\pi} P, \quad f(a+) + \frac{d_a}{\pi} P, \qquad P = -\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \sim 0 \cdot 2811 \ldots,$$

il existe une suite $\{x_n\}$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, *telle que* $S_n(f; x_n) \to \alpha$ *lorsque* $n \to \infty$; *de plus, si* $S_n(f; x_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ *pour une suite* $\{x_n\}$ *avec* $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, *alors* $\alpha \in I_a$.

Cette affirmation est interprétée géométriquement comme suit : le graphe G_n^f de $x \mapsto S_n(f; x)$ converge, lorsque $n \to \infty$, vers l'ensemble formé par la réunion du graphe G^f de $x \mapsto f(x)$ et de la réunion des intervalles verticaux $\{a\} \times I_a$, où a parcourt l'ensemble D des discontinuités de f (de cardinalité dénombrable, s'il n'est pas vide) ; dans cette formulation géométrique, on suppose que si $f(x+) = f(x-)$, alors $f(x) = f(x+) = f(x-)$. La situation est illustrée par la figure 4.2 où $f = \varphi$ est la fonction 2π-périodique définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

avec $\varphi(0) = \varphi(\pm\pi) = 0$; ici $I_a = [\,-1 - 2P/\pi\,,\, 1 + 2P/\pi\,]$ pour $a = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. (La figure 4.2 montre $G^{\varphi} \cup \bigcup_{a \in \pi\mathbb{Z}} I_a$; la partie hachurée concerne $I_a \setminus [\,-1\,,\, 1\,]$; la figure est un croquis, elle ne prétend pas être exacte). Ce qui a surpris Gibbs et beaucoup d'autres mathématiciens, c'est le fait que G_n^f converge vers un ensemble plus grand que

$$G^f \cup \bigcup_{a \in D} \{a\} \times J_a$$

où J_a est l'intervalle fermé d'extrémités $f(a-)$, $f(a+)$; si $f(a+) > f(a-)$ (comme pour φ où $\varphi(0+) = 1$, $\varphi(0-) = -1$), alors $d_a = f(a+) - f(a-) > 0$ et

$$J_a = \big[f(a-)\,,\, f(a+)\big] \subset I_a = \left[f(a-) - \frac{d_a}{\pi} P\,,\, f(a+) + \frac{d_a}{\pi} P\right],$$

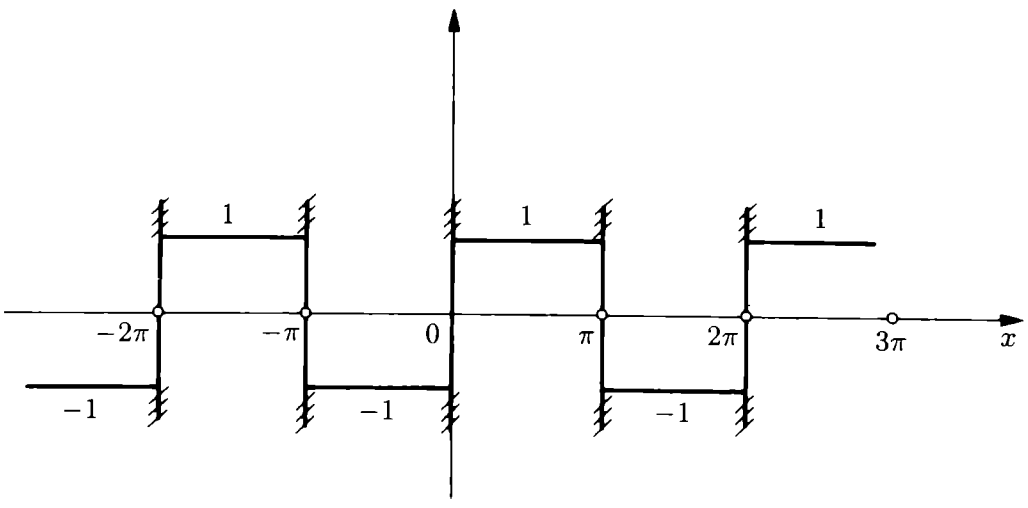


Fig. 4.2

le « dépassement » étant de longueur $(2P/\pi)d_a$; si $f(a+) < f(a-)$, alors $d_a < 0$ et

$$J_a = [f(a+)\,,\, f(a-)] \subset I_a = \left[f(a+) + \frac{d_a}{\pi}\,P\,,\, f(a-) - \frac{d_a}{\pi}\,P\right],$$

le « dépassement » étant de longueur $(2P/\pi)|d_a|$. On note que la longueur de I_a est, dans tous les cas, égale à

$$|d_a| + \frac{2}{\pi}\,|d_a|P = |d_a|\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + P\right)$$
$$= |d_a|\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right) = |d_a|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

en utilisant le fait que $\pi/2 = \int_0^\infty (\sin t/t)\,\mathrm{d}t$ (vol. 1 ou vol. 2). En posant

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$

on peut écrire que la longueur de I_a est égale à $|d_a| \cdot 2\psi(\pi)/\pi$; on étudie $\psi(x)$ plus en détail ci-après ; un calcul numérique montre que

$$\frac{2}{\pi}\,\psi(\pi) \sim 1 \cdot 1789797\ldots$$

ce que Gibbs et d'autres mathématiciens ont caractérisé par 18 % de dépassement (*overshoot*) de la longeur « naturelle » $|d_a|$ du saut au point de discontinuité a de f. Notons

$$\frac{2P}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left\{\psi(\pi) - \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{2}{\pi}\,\psi(\pi) - 1 \sim 0 \cdot 1789797\ldots$$

Une meilleure compréhension de la différence entre la convergence en chaque point (de $S_n(f;x)$) et la convergence uniforme, acquise graduellement depuis 1850, ont levé certes une partie du mystère qui planait sur l'observation de Gibbs ; néanmoins, un fait remarquable subsiste dans le « phénomène de Gibbs » (terminologie universellement adoptée, même dans les contextes dépassant le cadre des séries de Fourier) : *la constante P (ou $(2/\pi)\psi(\pi)$) est indépendante de la fonction f et du point de discontinuité a considéré.*

Nous donnons maintenant une démonstration analytique du phénomène de Gibbs pour la fonction φ de (4.42) au point $x = 0$; ici, $d_0 = f(0+) - f(0-) = 2$. La série de Fourier réelle de φ est (Ex. 1, sect. 4.3)

$$\varphi(x) \sim \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right\}.$$

Posons

$$S_n(\varphi;x) = S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

On a

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,;$$

c'est une conséquence de

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,,$$

en observant que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x}$$

ce qui s'obtient de

$$\sin x\cos(2k-1)x = \frac{1}{2}\left\{\sin 2kx - \sin 2(k-1)x\right\}$$

où $\sin 2nx/\sin x$ pour $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, est interprété comme

$$\lim_{x\to m\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x} = \frac{2n}{(-1)^m}\,.$$

Donc

$$S_n(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^x\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin 2nt\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$S_n(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{t}{\sin t}\left(\frac{t-\sin t}{t^2}\right)\sin 2nt\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.43}$$

Pour $0 < t < \pi/2$, $t \mapsto t/\sin t$ est strictement croissante car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{\sin t}\right) = \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,(\operatorname{tg} t - t) > 0$$

étant donné que $\operatorname{tg} t > t$ si $0 < t < \pi/2$ (ce que l'on établit à partir de $(\sin t)/t = (1/t)\int_0^t \cos u\,\mathrm{d}u > \cos t$) ; donc $t/\sin t < \pi/2$, $0 < t < \pi/2$; de plus

$$0 < \frac{t-\sin t}{t^2} = \frac{t}{3!} - \frac{t^3}{5!} + \cdots < \frac{t}{3!}\,,\quad 0 < t < \frac{\pi}{2}\,.$$

Utilisant ces estimations dans le membre de droite de (4.43), on obtient

$$\left|S_n(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| < \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{t}{6}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{12} \tag{4.44}$$

valable pour $n = 1, 2, \ldots$, $0 < x \leqslant \pi/2$. Posons

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,,\quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On sait que (vol. 1 ou vol. 2)

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2} ;$$

aussi $\psi(-x) = \psi(x)$, $\psi'(x) = \sin x/x$ si $x \neq 0$ ($\psi'(0) = 1$) d'où $\psi'(x) = 0$ si et seulement si $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^*$. De l'étude des signes de $\sin x$ dans $]m\pi\,,\,(m+1)\pi[$, on conclut aisément que $\psi(\pi)$, $\psi(3\pi)$, ... sont des maximums relatifs et que $\psi(2\pi)$, $\psi(4\pi)$, ... sont des minimums relatifs de ψ dans $]0\,,\,\infty[$ avec

$$\psi(\pi) > \psi(3\pi) > \ldots > 0\,, \quad 0 < \psi(2\pi) < \psi(4\pi) < \ldots\,, \qquad \lim_{m\to\infty} \psi(m\pi) = \frac{\pi}{2} ;$$

les figures 4.3 et 4.4 montrent $\psi(x)$ et $\sin x/x$, pour $x > 0$.

Ainsi,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) = \psi(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

et

$$P = -\int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = -\left\{\lim_{x\to\infty} \psi(x) - \psi(\pi)\right\} > 0$$

ce qui est immédiat aussi à partir du comportement de $\sin x/x$ pour $x \geqslant \pi$.

De (4.44), on a

$$\left|S_n(x) - \frac{2}{\pi}\,\psi(2nx)\right| < \frac{x^2}{12}\,, \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^* ; \tag{4.45}$$

puisque $\psi(-x) = \psi(x)$, $S_n(-x) = -S_n(x)$, on a, pour $-\pi/2 \leqslant x < 0$,

$$\begin{aligned} \left|S_n(x) + \frac{2}{\pi}\,\psi(2nx)\right| &= \left|-S_n(x) - \frac{2}{\pi}\,\psi(2nx)\right| \\ &= \left|S_n(-x) - \frac{2}{\pi}\,\psi(-2nx)\right| < \frac{x^2}{12}\,. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Notons que $S_n(0) = \psi(0) = 0$. On conclut que si $\{x_n\}$ est une suite telle que

$$x_n \to 0\,, \quad S_n(x_n) \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

lorsque $n \to \infty$, alors

$$\alpha \in \left[-\frac{2}{\pi}\,\psi(\pi)\,,\,\frac{2}{\pi}\,\psi(\pi)\right] = \left[1 - \frac{2}{\pi}\,P\,,\,1 + \frac{2}{\pi}\,P\right].$$

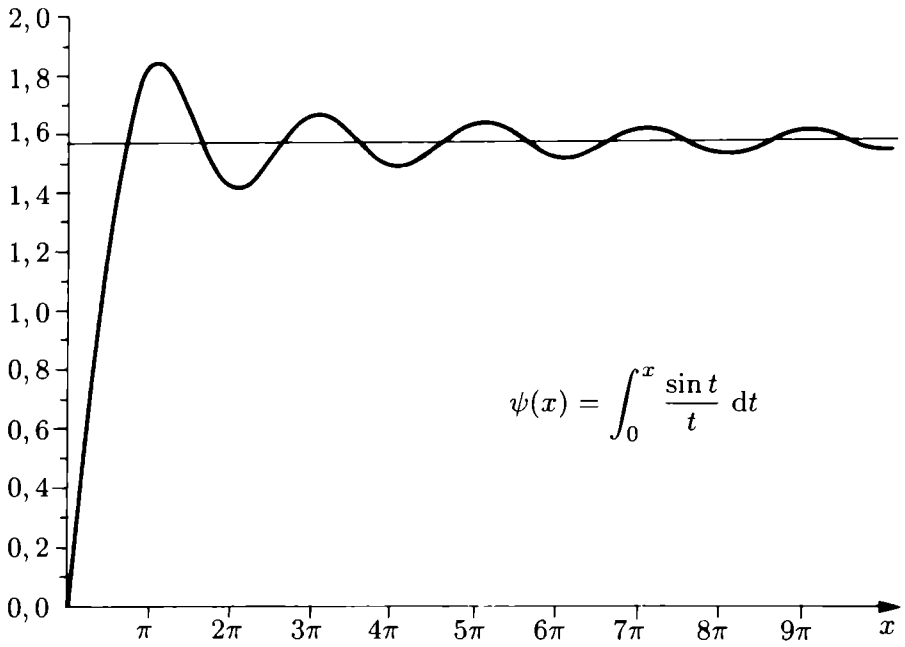

2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
π
2π
3π
4π
5π
6π
7π
8π
9π
x
$\psi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Fig. 4.3

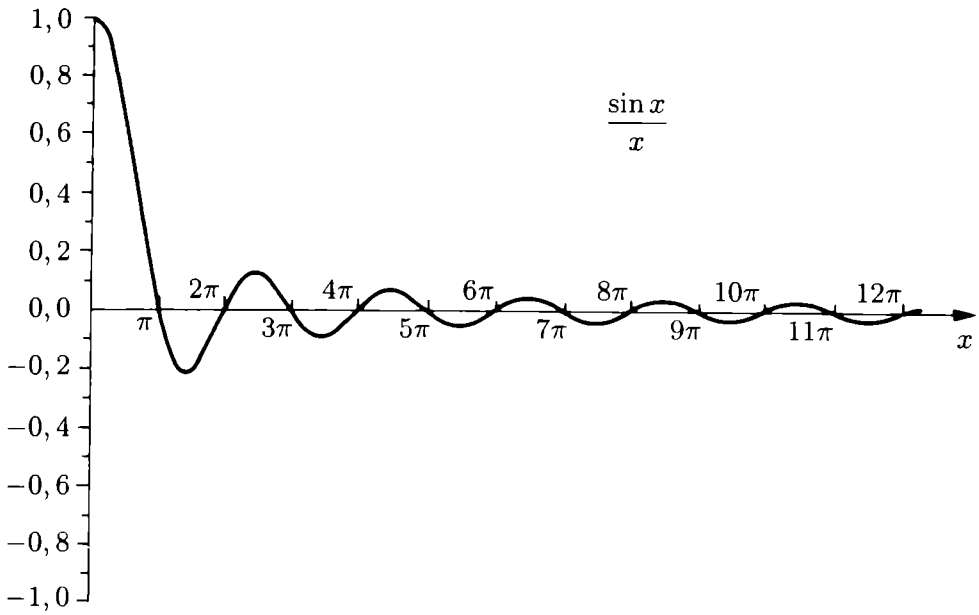

1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1,0
π
2π
3π
4π
5π
6π
7π
8π
9π
10π
11π
12π
x
$\frac{\sin x}{x}$

Fig. 4.4

En effet, si $\alpha > 0$, on déduit alors de (4.45) et (4.46) que $x_n \geqslant 0$ pour tout n suffisamment grand et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\psi(2nx_n) = \alpha$$

avec $0 \leqslant \alpha \leqslant (2/\pi)\psi(\pi)$; le même raisonnement donne que si $\alpha < 0$, alors $x_n \leqslant 0$ pour tout n suffisamment grand et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\psi(2nx_n) = -\alpha$$

avec $0 \leqslant \alpha \leqslant (2/\pi)\psi(\pi)$. D'autre part, si $\alpha \in \left[-(2/\pi)\psi(\pi)\,,\,(2/\pi)\,\psi(\pi)\right]$, $\alpha \geqslant 0$, il existe $\xi \in [\,0\,,\,\pi\,]$ tel que $(2/\pi)\psi(\xi) = \alpha$ car $0 \leqslant (\pi/2)\alpha \leqslant \psi(\pi)$ et la continuité de $x \mapsto \psi(x)$, $\psi(0) = 0$, entraîne l'existence d'un $\xi \in [\,0\,,\,\pi\,]$ avec $\psi(\xi) = (\pi/2)\alpha$; si $\{x_n\}$ est une suite telle que

$$0 < x_n \longrightarrow 0\,, \quad 2nx_n \longrightarrow \xi$$

lorsque $n \to \infty$, alors, de (4.45),

$$\left|S_n(x_n) - \frac{2}{\pi}\psi(2nx_n)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\psi(2nx_n) = \frac{2}{\pi}\psi(\xi) = \alpha\,.$$

En utilisant (4.46), un raisonnement analogue est applicable pour $\alpha < 0$ dans $\left[-(2/\pi)\psi(\pi)\,,\,(2/\pi)\psi(\pi)\right]$. Ceci établit le phénomène de Gibbs pour φ au point $x = 0$.

Pour une fonction générale f, on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{d_a}{2}\,\varphi(x-a)$$

d'où $d_a = f(a+) - f(a-)$; on vérifie que

$$g(a+) = f(a+) - \frac{1}{2}\,d_a\,, \quad g(a-) = f(a-) + \frac{1}{2}\,d_a$$

d'où $g(a+) = g(a-)$. On pose $g(a) = g(a+) = g(a-)$. On a

$$S_n(f;x) = S_n(g;x) + \frac{1}{2}\,d_a S_n(x-a)$$

où les $S_n(x)$ sont les sommes partielles de Fourier de φ au point x définies ci-dessus et $S_n(f;x)$, $S_n(g;x)$ sont les sommes correspondantes pour f et g respectivement. Puisque $g(a+) = g(a-)$, g est continue dans un intervalle ouvert contenant a et, à chaque point x de cet intervalle, on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(g;x) = g(x)$$

compte tenu des hypothèses faites sur f, qui font que g vérifie les conditions (4iv) du paragraphe 4.2.5. Ainsi, si $x_n \to a$ et $\lim_{n\to\infty} S_n(f;x_n) = \alpha$, alors

$$\alpha \in g(a) + \frac{1}{2}\, d_a \left[-1 - \frac{2}{\pi}\, P\,,\ 1 + \frac{2}{\pi}\, P\right] ;$$

puisque $g(a) = f(a+) - d_a/2$, α appartient à l'intervalle fermé I_a d'extrémités

$$f(a+) - d_a - \frac{2}{\pi}\, P = f(a-) - \frac{2}{\pi}\, P\,, \quad f(a+) + \frac{2}{\pi}\, P\,.$$

Inversement, chaque point $\alpha \in I_a$ s'obtient comme

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} S_n(f;x_n)$$

avec $x_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$. Ceci achève la démonstration du phénomène de Gibbs.

4.4.2 Remarques

Pour notre livre, l'importance du phénomène de Gibbs est limitée. Nous en avons détaillé la démonstration pour illustrer les méthodes analytiques développées précédemment. Néanmoins, l'étude mathématique du phénomène de Gibbs a attiré l'attention de nombreux mathématiciens et on continue d'étudier ce phénomène dans des contextes différents de celui des séries de Fourier. Il semble que ce fût le mathématicien Wilbraham qui aurait étudié mathématiquement le phénomène concerné en 1848, bien avant l'observation empirique de Gibbs ; certains auteurs (beaucoup moins nombreux) insistent donc pour l'appeler : phénomène de Wilbraham–Gibbs. Une étude historique détaillée est donnée dans un article de E. Hewitt et R. E. Hewitt (« The Gibbs–Wilbraham phenomemon : an episode in Fourier analysis », *Archive for history of exact sciences*, vol. 21 (1979), pp. 129-160) ; les figures 4.3 et 4.4 sont copiées de leur articles.

L'article historique le plus complet est sans doute celui de H. Burkhardt dans *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung* de 1908 ; il est étalé sur 1800 pages et il semble contenir toutes les références mathématiques et physiques pertinentes connues jusqu'en 1908 ; sa lecture est toujours instructive.

4.4.3 Séries de Fourier multiples

Considérons, pour simplicité, une fonction complexe f de deux variables réelles x et y telle que

$$f(x+p,y) = f(x,y)\,, \quad f(x,y+q) = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

où $p > 0$, $q > 0$; autrement dit, pour y fixe, $x \mapsto f(x,y)$ est p-périodique et, pour x fixe, $y \mapsto f(x,y)$ est q-périodique. Supposons que

$$\int_0^p \int_0^q |f(x,y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty\,.$$

Pour y fixe, on peut écrire

$$f(x,y) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(y) \exp\left(imx\frac{2\pi}{p}\right) \tag{4.47}$$

où

$$c_m(y) = \frac{1}{p}\int_0^p f(x,y)\exp\left(-imx\frac{2\pi}{p}\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

En développant $y \mapsto c_m(y)$ en une série de Fourier (noter que $c_m(y+q) = c_m(y)$), on a

$$c_m(y) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{mn}(y)\exp\left(iny\frac{2\pi}{q}\right) \tag{4.48}$$

où

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \frac{1}{q}\int_0^q c_m(y)\exp\left(-iny\frac{2\pi}{q}\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{pq}\int_0^p\int_0^q f(x,y)\exp\left\{-2\pi i\left(\frac{mx}{p}+\frac{ny}{q}\right)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{4.49}$$

A partir de (4.47) et (4.48), on obtient

$$f(x,y) \sim \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} c_{m,n}\exp\left\{2\pi i\left(\frac{mx}{p}+\frac{ny}{q}\right)\right\} \tag{4.50}$$

où les $c_{m,n}$ (les coefficients de Fourier complexes de f) sont donnés par (4.49). On dit que (4.50) est la *série de Fourier complexe* de f, fonction de deux variables, p-périodique en x, q-périodique en y.

Supposons que f est de carré intégrable dans le rectangle $[\,0\,,\,p\,]\times[\,0\,,\,q\,]$; alors f définit un élément de $L^2(X)$, $X = [\,a\,,\,a+p\,]\times[\,b\,,\,b+q\,]$, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ quelconque. Du point de vue de l'espace hilbertien $L^2(X)$, le fait fondamental est le suivant : *les fonctions de* (x,y)

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \exp\left\{2\pi i\left(\frac{mx}{p}+\frac{ny}{q}\right)\right\}\,,\quad (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

forment une base orthogonale pour $L^2(X)$.

En effet,

$$\left\langle \varphi_{m,n}\,,\,\varphi_{m',n'}\right\rangle = \int_a^{a+p}\mathrm{d}x\int_b^{b+q}\exp\left\{2\pi i\left(\frac{mx}{p}-\frac{m'x}{p}+\frac{ny}{q}-\frac{n'y}{q}\right)\right\}\mathrm{d}y = 0$$

si $(m,n)\neq(m',n')$ car si $n\neq n'$, l'intégrale en y est déjà nulle et si $n=n'$ mais $m\neq m'$, l'intégrale en y est égale à

$$q\exp\left\{2\pi\left(\frac{mx}{p}-\frac{m'x}{p}\right)\right\}$$

dont l'intégration en x donne zéro. Pour voir que $\{\varphi_{m,n}\}$ est un système orthogonal complet dans $L^2(X)$, on peut raisonner comme suit : soit $f \in L^2(X)$ tel que

$$\langle f\,,\,\varphi_{m,n}\rangle = 0\,, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2\,;$$

il faut démontrer que $f = 0$. On a

$$\begin{aligned}\langle f\,,\,\varphi_{m,n}\rangle &= \int_0^q \exp\left(-2\pi i\frac{ny}{q}\right)\mathrm{d}y \int_0^p f(x,y)\exp\left\{-2\pi i\frac{mx}{p}\right\}\mathrm{d}x \\ &= p\int_0^q c_m(y)\exp\left(-2\pi i\frac{ny}{q}\right)\mathrm{d}y = 0\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,\end{aligned}$$

d'où $c_m(y) = 0$ p.p.(y), $m \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne que, pour presque tout $y \in [b\,,\,b+q]$, $f(x,y) = 0$ p.p.(x) (à cause de la complétude des fonctions $x \mapsto \exp\bigl(2\pi i(mx/p)\bigr)$, $m \in \mathbb{Z}$, dans $L^2\bigl([a\,,\,a+p]\bigr)$ et la complétude des fonctions $y \mapsto \exp\bigl(2\pi i(ny/q)\bigr)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans $L^2\bigl([b\,,\,b+q]\bigr)$). On conclut (en utilisant le théorème de Fubini, un raisonnement de la théorie de la mesure que nous ne détaillons pas) que $f(x,y) = 0$ p.p. $(x,y) \in X$, c'est-à-dire $f = 0$.

La théorie des bases orthogonales développées au chapitre 3 est maintenant applicable directement à (4.50) ; ceci donne, en particulier,

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}} \left\| f - \sum_{\substack{-N_1\leqslant m\leqslant N_1\\ -N_2\leqslant n\leqslant N_2}} \varphi_{m,n} \right\| = 0$$

où

$$\|g\| = \left(\int_a^{a+p}\int_b^{b+q} |g(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

De plus, l'égalité de Bessel donne

$$\|f\|^2 = pq \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |c_{m,n}|^2$$

car $\|\varphi_{m,n}\|^2 = pq$.

Cette discussion se généralise facilement aux cas des fonctions périodiques de N variables $(x_1, \ldots, x_N)$. On peut aussi considérer les séries de Fourier réelles en utilisant les bases orthogonales du type (pour $N = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$)

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{2\pi mx}{p}\right)\cos\left(\frac{2\pi ny}{q}\right)\,, \quad \cos\left(\frac{2\pi mx}{p}\right)\sin\left(\frac{2\pi ny}{q}\right)\,,\\ &\sin\left(\frac{2\pi mx}{p}\right)\cos\left(\frac{2\pi ny}{q}\right)\,, \quad \sin\left(\frac{2\pi mx}{p}\right)\sin\left(\frac{2\pi ny}{q}\right)\,,\end{aligned}$$

pour m, n parcourant $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.

La théorie de la convergence ponctuelle devient un peu plus compliquée ; en ce qui concerne la convergence en norme de $L^2(X)$, on peut former une somme partielle quelconque

$$S_A = \sum_{(m,n)\in A} c_{m,n}\varphi_{m,n}$$

où A est une partie finie de $\mathbb{Z}^2$; alors la théorie du chapitre 3 dit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie A_ε telle que

$$\|f - S_A\| < \varepsilon$$

dès que $A \supset A_\varepsilon$, A partie finie de $\mathbb{Z}^2$. On peut écrire ceci comme suit : $S_A \to f$ dans $L^2(X)$ lorsque $A \to \mathbb{Z}^2$. Par contre, l'étude de $S_A(x,y)$ lorsque $A \to \mathbb{Z}^2$ pour un (x,y) fixe peut être très compliquée. Si f est de classe C^2, on peut démontrer que $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |c_{m,n}| < \infty$; dans ce cas la série (4.50) est absolument convergente pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et alors $S_A(x,y) \to f(x,y)$ lorsque $A \to \mathbb{Z}^2$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la convergence étant même uniforme : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε fini tel que

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |S_A(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon$$

dès que $A \supset A_\varepsilon$, A fini. Mais, il existe des fonctions continues f telles que pour

$$A_{N_1,N_2} = \{(m,n) : |m| \leqslant N_1\,,\ |n| \leqslant N_2\}\,,$$

on a

$$\limsup_{N_1,N_2} |S_{A_{N_1,N_2}} f(x,y)| = \infty \quad \text{p.p.}(x,y)$$

de sorte que la convergence p.p. de $S_{A_{N_1,N_2}} f(x,y)$ est exclue ; ce résultat négatif surprenant (dû à C. Feffermann, 1971) montre que la convergence ponctuelle des séries de Fourier des fonctions continues de deux variables est de nature très différente de celle pour les fonctions d'une variable où le théorème de Carleson (§ 4.2.6) garantit la convergence de la série p.p. Nous ne poursuivrons pas l'étude de la convergence ponctuelle de $S_A f(x,y)$; pour nous, il suffit de savoir que $S_A f \to f$ dans $L^2(X)$ lorsque $A \to \mathbb{Z}^2$.

4.4.4 Généralisation

Le passage aux séries de Fourier de plusieurs variables en partant de celles-ci pour une variable est un cas très particulier des considérations générales suivantes. Soient X et Y deux ensembles avec $X \subset \mathbb{R}^M$, $Y \subset \mathbb{R}^N$; supposons que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est une base orthogonale de $L^2(X)$ et $\{\psi_\beta\}_{\beta\in J}$ est une base orthogonale de $L^2(Y)$. *Alors les fonctions*

$$\{(x,y) \mapsto \varphi_\alpha(x)\psi_\beta(y)\}_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$$

forment une base orthogonale de $L^2(X \times Y)$. La démonstration de cette affirmation est exactement comme celle donnée dans le paragraphe précédent au sujet des fonctions $\{\varphi_{m,n}\}$.

Bien entendu, on peut généraliser l'affirmation précédente au cas de $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n)$ en utilisant les bases orthogonales $\{\varphi_\alpha^j\}_{\alpha \in I_j}$ dans $L^2(X_j)$; *alors les fonctions*

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi_{\alpha_1}^1(x_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}^n(x_n)$$

forment une base orthogonale de $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n)$.

Toute la théorie des bases orthogonales du chapitre 3 est ainsi applicable aux espaces $L^2(X_1 \times \cdots \times X_n)$.

4.5 SÉRIES DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS

4.5.1 Préliminaires

La notion de distribution généralise celle des fonctions et des mesures de manière très utile. Nous l'exposons ici pour le cas d'une variable (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$) ; la généralisation à $\mathbb{R}^N$ sera signalée au moment opportun dans la suite.

Ecrivons $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour l'espace vectoriel formé des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont *indéfiniment dérivables* et à *support compact* (c'est-à-dire, il existe $T > 0$, dépendant de φ, tel que $\varphi(x) = 0$ si $|x| > T$) ; souvent on écrit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dans le volume 1, on a vu que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ contient beaucoup de fonctions. En effet, pour toute fonction f intégrable dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi_n(x)| \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Par ***distribution*** dans $\mathbb{R}$, nous entendons une fonctionnelle linéaire $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ qui est ***continue*** dans un sens que nous expliquerons dans la suite (§ 4.5.3) ; cette condition de continuité n'est pas très restrictive et nous l'ignorerons la plupart du temps. Voici d'abord quelques exemples importants des distributions.

4.5.2 Exemples de distributions

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction ***localement intégrable*** c'est-à-dire

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$

pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Posons, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

puisque φ est à support compact et f est localement intégrable, $u(\varphi)$ est bien défini pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il est évident que $\varphi \mapsto u(\varphi)$ est linéaire ; nous disons que u est la *distribution engendrée* par f et, si nécessaire, nous le noterons par u_f. Notons que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une autre fonction localement intégrable telle que $u_f = u_g$, ce qui veut dire

$$u_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = u_g(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f(x) = g(x)$ p.p.(x) ce que nous nous écrivons comme $f = g$. Ainsi, $u_f = u_g$ *entraîne que* $f = g$ *et vice versa*. La démonstration de cette affirmation se fait en établissant que *si* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est localement intégrable et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,,$$

alors $h = 0$ *p.p.*

La preuve de cette dernière affirmation dépend du ***lemme général*** suivant : *Soit* $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction borélienne bornée à support compact ; supposons que* $|\xi(x)| \leqslant C$ *pour* $x \in \mathbb{R}$. *Alors il existe une suite* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *et* $T > 0$ *tels que*

(i) $\xi(x) = 0$, $\varphi_n(x) = 0$ *pour* $|x| > T$ *et* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $|\varphi_n(x)| \leqslant C$ *pour* $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \xi(x)$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}$.

En admettant ce lemme, la preuve de $h = 0$ p.p. est immédiate ; en effet, si $h \neq 0$ p.p., on aurait une partie borélienne bornée $A \subset \mathbb{R}$ avec mesure$(A) > 0$ et $C > 0$ tels que $0 < |h(x)| \leqslant C$ pour $x \in A$; prenons $\xi = \overline{h}\,1_A$ dans le lemme. On aurait alors une suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que le calcul suivant serait justifié :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-T}^{T} h(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \int_{-T}^{T} |h(x)|^2\,1_A(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2\,1_A(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

où le passage à la limite serait justifié par le théorème de Lebesgue car

$$|h(x)\varphi_n(x)| \leqslant C|h(x)|\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,, \qquad \int_{-T}^{T} |h(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Cette contradiction nous indique que $h = 0$ p.p. La démonstration du lemme dépend des résultats concernant la théorie de l'intégration démontrés dans le volume 1 (pp. 313-317).

DÉMONSTRATION DU LEMME

Pour $\delta > 0$, soit $\psi_\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi_\delta(x) = 0$ si $|x| \geqslant \delta$, $\psi_\delta(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Posons

$$\xi_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y)\psi_\delta(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(x-y)\xi(y)\,\mathrm{d}y\ ;$$

On a vu (vol. 1, p. 314) que $\xi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que $\xi_\delta(x) = 0$ si $|x| > T_1 + \delta$ où $T_1 > 0$ est tel que $\xi(x) = 0$ pour $|x| > T_1$; de plus,

$$\left|\xi_\delta(x)\right| \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\delta(y)\,\mathrm{d}y = C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On sait (vol. 1, prop. 5.11.4, p. 317) que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi(x) - \xi_\delta(x)\right| \mathrm{d}x = 0\ ;$$

on en conclut (par un raisonnement utilisé dans la démonstration de la complétude de $L^2(X, \Sigma, \mu)$, § 3.2.4) qu'il existe une suite $\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \xi_{\delta_n}(x) = \xi(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}\,.$$

En prenant $\varphi_n = \xi_{\delta_n}$, $T > T_1$, on a une suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ répondant aux exigences du lemme. ♦

On peut donc identifier la distribution u engendrée par f à f elle-même ; aussi, on écrit $\langle f, \varphi \rangle$ au lieu de $u(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, si u est la distribution engendrée par f.

Exemple 2

Soit $a \in \mathbb{R}$; définissons la fonctionnelle linéaire $\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par

$$\langle \delta_a\,,\, \varphi \rangle = \delta_a(\varphi) = \varphi(a)\ ;$$

la distribution δ_a s'appelle la ***distribution de Dirac*** au point a ; δ_0 sera notée simplement par δ, la distribution de Dirac (au point 0). Dans la littérature appliquée, on appelle souvent δ_a la *fonction de Dirac* au point a et on va jusqu'à écrire

$$\langle \delta_a\,,\, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\delta_a(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)$$

en disant que « $\delta_a(x) = 0$ pour $x \neq a$ et $\delta_a(x) = \infty$ pour $x = a$ ». Cet abus de langage n'est pas nécessairement mauvais, pourvu que l'on se souvienne qu'il est une description pittoresque en place de notre définition exacte.

Si D est un ensemble fini ou dénombrable dans $\mathbb{R}$ sans points d'accumulation, on peut définir une distribution u par

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \sum_{a\in D} \delta_a(\varphi)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,;$$

puisque $\varphi(x)$ est zéro pour $|x| > T$; on a, en fait,

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \sum_{\substack{a\in D\\ |a|\leqslant T}} \varphi(a)$$

la somme à droite étant une somme finie. On décrira cette distribution par la formule

$$u = \sum_{a\in D} \delta_a\,.$$

Exemple 3

Soit $a \in \mathbb{R}$; posons

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \varphi'(a)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Il est clair que $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est linéaire ; nous verrons le sens de cette distribution ci-après. Plus généralement, si

$$L\varphi = \alpha_0\varphi + \alpha_1\varphi' + \cdots + \alpha_n\varphi^{(n)}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, on peut définir une distribution $u = u_L$ par

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \alpha_0\varphi(a) + \alpha_1\varphi'(a) + \cdots + \alpha_n\varphi^{(n)}(a) = (L\varphi)(a)\,.$$

Nous noterons l'ensemble des distributions dans $\mathbb{R}$ par $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, nous définissons $u + v$, αu ($\alpha \in \mathbb{C}$) par

$$\langle u+v\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\varphi\rangle + \langle v\,,\,\varphi\rangle\,, \quad \langle \alpha u\,,\,\varphi\rangle = \alpha\langle u\,,\,\varphi\rangle\,, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Ainsi, $u+v$ et αu sont dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; donc, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est aussi un espace vectoriel ; on dit que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est l'***espace dual*** de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

4.5.3 Condition de continuité

Soit $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire. Nous proposons deux définitions de continuité pour u qui sont en fait équivalentes ; on dit que u est ***continue*** si la condition (i) ou (ii) est vérifiée.

(i) Pour tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante $c(K) \geqslant 0$ et un entier $m(K) \geqslant 0$ tels que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant c(K) \sum_{j \leqslant m(K)} \|\mathrm{D}^j \varphi\|_\infty, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

dès que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ (c'est-à-dire, $\varphi(x) = 0$ si $x \in K^c$) où

$$\|\mathrm{D}^j \varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

(ii) On a $\lim_{n \to \infty} \langle u, \varphi_n \rangle = 0$ pour toute suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

(a) il existe un intervalle compact $K \subset \mathbb{R}$ avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$ (ce qui veut dire que $\varphi_n(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, dès que $x \in K^c$) ;

(b) pour $j = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathrm{D}^j \varphi_n\|_\infty = 0$$

Si la suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie (a) et (b), on dit que $\varphi_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Il n'est pas difficile de démontrer que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. Si u vérifie la condition (i) de telle manière que $m(K) \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$, pour tout intervalle compact K, alors on dit que u est une ***distribution d'ordre fini*** (d'ordre au plus m).

DÉMONSTRATION

(i)⇒(ii) Si $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors (i) entraîne

$$|\langle u, \varphi_n \rangle| \leqslant c(K) \sum_{j \leqslant m(K)} \|\mathrm{D}^j \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

où K est un intervalle compact tel que $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii)⇒(i) Nous procédons par contradiction ; si (i) n'est pas vérifiée, il existe un intervalle compact $K \subset \mathbb{R}$, une suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, tels que

$$|\langle u, \varphi_n \rangle| > n \sum_{j \leqslant n} \|\mathrm{D}^j \varphi_n\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}^* ;$$

on peut supposer que $\langle u, \varphi_n \rangle = 1$ en remplaçant φ_n par $\psi_n = \varphi_n / \langle u, \varphi_n \rangle$. Alors

$$\sum_{j \leqslant n} \|\mathrm{D}^j \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

d'où $\|\mathrm{D}^j \varphi_n\|_\infty < 1/n$ si $n \geqslant j$ et $\lim_{n \to \infty} \|\mathrm{D}^j \varphi_n\|_\infty = 0$, $j = 0, 1, \ldots$ Ainsi, $\varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ mais $\langle u, \varphi_n \rangle \not\to 0$ $(n \to \infty)$, ce qui veut dire que (ii) n'est pas vérifiée non plus. ♦

Soit u la fonctionnelle linéaire engendrée par une fonction localement sommable f :

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Si $\operatorname{supp}\varphi\subset K$, on a

$$\big|\langle u\,,\,\varphi\rangle\big| \leqslant \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| = c(K)\|\varphi\|_\infty$$

de sorte que u est continue (d'après la condition (i)) et d'ordre 0.

De même δ_a est une distribution d'ordre 0 car

$$\big|\langle\delta_a\,,\,\varphi\rangle\big| = |\varphi(a)| \leqslant \|\varphi\|_\infty\,.$$

Par contre, la distribution u définie par $\langle u,\varphi\rangle = \varphi'(a)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, est d'ordre 1 ; il existe aussi des distributions qui ne sont pas d'ordre fini. Une distribution u d'ordre 0 est une ***mesure de Radon*** ; on peut prendre ceci comme une définition d'une mesure de Radon. Ainsi, δ_a correspond à la mesure concentrée au point a et la distribution engendrée par une fonction localement intégrable f est la mesure de Radon qui attribue la mesure

$$\mu(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

à tout ensemble borélien borné $A\subset\mathbb{R}$; μ est la mesure dont la ***densité*** est f. La mesure de Lebesgue est la distribution engendrée par $f\equiv 1$.

Il est impossible de fournir un exemple explicite d'une fonctionnelle linéaire $u:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ qui ne soit pas continue ; toute construction d'une telle u doit utiliser les constructions abstraites basées sur « l'axiome du choix » de la théorie des ensembles qui permet de démontrer l'existence d'une base algébrique pour tout espace vectoriel, en particulier $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En excluant l'axiome du choix, on peut arriver à une théorie des ensembles dans laquelle toute fonctionnelle linéaire $u:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ est continue. La situation est analogue à celle concernant l'existence des ensembles non mesurables dans $\mathbb{R}$ ou à l'existence d'une fonctionnelle linéaire discontinue définie dans un espace hilbertien. Nous ne proposons pas de travailler dans une version formelle nouvelle de la théorie des ensembles ; les propos précédents sont ajoutés pour indiquer qu'en négligeant la vérification de la continuité des fonctionnelles linéaires $u:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ définies par les formules « explicites simples », on ne court aucun danger.

4.5.4 Opérations sur les distributions

On a déjà défini la somme de deux distributions et le produit d'une distribution par un nombre complexe. Nous définissons maintenant la ***dérivée*** d'une distribution $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, en posant

$$\langle u'\,,\,\varphi\rangle = -\langle u\,,\,\varphi'\rangle\,,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{4.51}$$

Il est évident que $u' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est linéaire ; u' s'appelle la première dérivée de u. Plus généralement, on définit la n-ième dérivée $u^{(n)}$ de u en posant

$$\langle u^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle u, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{4.52}$$

où $n = 1, 2, \ldots$; on a $u^{(n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ (avec $u^{(0)} = u$). Si $u = f$, une fonction de classe C^1, on vérifie que $u' = f'$ où f' est la dérivée dans le sens ordinaire de f. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(x)\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\langle f, \varphi' \rangle \end{aligned}$$

car $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\varphi(x) = 0$, étant donné que $\varphi(x) = 0$ pour $|x|$ suffisamment grand. L'intérêt de (4.51) et (4.52) est qu'ils définissent $u^{(n)}$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$; ainsi, *toute distribution est indéfiniment dérivable*. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction localement sommable, on écrira dorénavant $f^{(n)}$ pour la distribution définie par la n-ième dérivée de la distribution engendrée par f :

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) ;$$

si nécessaire, on ajoutera que $f^{(n)}$ est pris au sens des distributions. Si f est de classe $C^{(n)}$, alors $f^{(n)}$ au sens ordinaire correspond à la distribution $u^{(n)}$ engendrée par la n-ième dérivée de u. Observons que l'opération de la dérivation des distributions est beaucoup plus générale que la dérivation des fonctions ; une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ peut être dérivable à chaque point de $\mathbb{R}$ (définissant ainsi une fonction $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) sans que f' soit localement intégrable ; donc on ne peut pas parler de la distribution engendrée par la fonction f'. Néanmoins, la distribution f' existe dans le sens de la formule (4.51).

On peut définir la ***limite*** d'une suite ou d'une famille de distributions ; si $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, on dit que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

On démontre que *si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle \textit{ existe}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

alors $\langle u, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle$ *définit* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. C'est un énoncé très important et utile ; en admettant notre attitude vis-à-vis de la condition de continuité, cet énoncé est immédiat car $\varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est évidemment linéaire.

Nous définissons maintenant la ***translation*** par $t \in \mathbb{R}$ d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; on définit $\tau_t u$ par

$$\langle \tau_t u\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\tau_{-t}\varphi\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{4.53}$$

où $(\tau_{-t}\varphi)(x) = \varphi(x+t)$. Notons que $\tau_{-t}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction localement intégrable, alors $\tau_t f$, en tant que fonction localement intégrable, engendre la même distribution que celle définie par (4.53) :

$$\langle \tau_t f\,,\,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(y+t)\,\mathrm{d}y = \langle f\,,\,\tau_{-t}\varphi\rangle\,.$$

Démontrons que, *si* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *alors*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tau_{-t}u - u}{t} = u'; \tag{4.54}$$

autrement dit, la définition usuelle de la dérivation peut être applicable aux distributions. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\tau_{-t}u - u}{t}\,,\,\varphi\right\rangle &= \frac{1}{t}\left\{\langle \tau_{-t}u\,,\,\varphi\rangle - \langle u\,,\,\varphi\rangle\right\} \\ &= \frac{1}{t}\langle u\,,\,\tau_t\varphi - \varphi\rangle = \left\langle u\,,\,\frac{\tau_t\varphi - \varphi}{t}\right\rangle\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{\tau_{-t}u - u}{t}\,,\,\varphi\right\rangle = \langle u\,,\,-\varphi'\rangle = -\langle u\,,\,\varphi'\rangle$$

car

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x-t) - \varphi(x)}{-t}\cdot(-1) = -\varphi'(x)\,.$$

Nous disons que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une ***distribution p-périodique*** $(p > 0)$ si $\tau_p u = u$, c'est-à-dire si

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\tau_{-p}\varphi\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit $\check{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par

$$\langle \check{u}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\check{\varphi}\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $x \in \mathbb{R}$; u est dite ***paire*** ou ***symétrique*** si $u = \check{u}$, u est dite ***impaire*** si $u = -\check{u}$. Ainsi, u est paire si

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\check{\varphi}\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et u est impaire si

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = -\langle u\,,\,\check{\varphi}\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

La multiplication des distributions n'est pas définie en général ; néanmoins, on peut définir fu, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, par la formule

$$\langle fu\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,f\varphi\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{4.55}$$

Notons que $f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On peut définir la convergence des séries dont les termes sont des distributions ; c'est simplement la spécialisation de la notion de limite aux distributions. Nous l'explicitons pour l'utiliser dans la suite : soit $u_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$; on dit que $\sum_n u_n$ converge si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la série $\sum_n \langle u_n, \varphi\rangle$ converge ; la somme est alors une distribution, notée $\sum_n u_n$ dans $D'(\mathbb{R})$ avec

$$\left\langle \sum_n u_n\,,\,\varphi \right\rangle = \sum_n \langle u_n, \varphi\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{4.56}$$

On peut dériver (4.56) terme à terme sans restriction : on a

$$\left\langle \sum_n u_n'\,,\,\varphi \right\rangle = \sum_n \langle u_n', \varphi\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{4.57}$$

En effet, on a, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\sum_n \langle u_n', \varphi\rangle = -\sum_n \langle u_n, \varphi'\rangle = -\left\langle \sum_n u_n\,,\,\varphi' \right\rangle$$

ce qui montre que si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n u_n'$ converge et

$$\left(\sum_n u_n\right)' = \sum_n u_n'\,.$$

On notera la grande simplicité et la généralité de (4.57) ; dès qu'une série de distribution converge, on peut la dériver terme à terme (autant de fois que l'on veut).

REMARQUES. Dans la littérature des sciences appliquées, on a souvent tendance à considérer une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ comme une *fonction généralisée* d'une variable (notée $u(x)$) et on voit les formules du type suivant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

cette formule est simplement notre définition de u' dans (4.51). Les écritures comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.58}$$

ne sont pas nuisibles, pourvu que l'on se souvienne qu'il s'agit d'une écriture formelle, son sens étant défini par le fait que u est une fonctionnelle linéaire

opérant sur *les fonctions* φ *de* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; chaque fois que l'on doit considérer (4.58) pour des fonctions φ plus générales (ce qui peut arriver), il est nécessaire d'étudier d'abord si le domaine de définition de u peut être élargi. C'est souvent possible ; ainsi, si u est une mesure (distribution d'ordre 0), (4.58) est bien définie pour toute fonction mesurable à support compact. Si u est la mesure de Lebesgue, (4.58) est définie par toute fonction f intégrable, etc.

Sans entrer dans les détails, indiquons comment on peut intégrer les fonctions à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ainsi, si pour chaque $t \in [a, b]$, $u(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $t \mapsto \langle u(t), \varphi \rangle$ est intégrable dans $[a, b]$, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut poser

$$\left\langle \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \varphi \right\rangle = \int_a^b \langle u(t)\,,\ \varphi \rangle\,\mathrm{d}t\,.$$

Il est clair que $s = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ est une distribution car

$$\varphi \mapsto \langle s\,,\ \varphi \rangle = \int_a^b \langle u(t)\,,\ \varphi \rangle\,\mathrm{d}t\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

est linéaire.

4.5.5 Série de Fourier d'une distribution périodique

Nous considérons le cas d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui est 2π-périodique ; le cas général de p-périodicité s'en déduit par analogie ou par homothétie (Ex. 12, 13, sect. 4.6). Le premier pas est d'étendre le domaine de définition de $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ pour y inclure les fonctions 2π-périodiques et de classe C^∞.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction quelconque à support compact, nous posons

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2n\pi)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

puisque $f(x) = 0$ pour $|x|$ grand, la série est en fait une somme d'un nombre fini de termes et $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique ; nous dirons que $\widetilde{f}$ est la fonction 2π-périodique associée à f. *Il existe une fonction* $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $\widetilde{\alpha} \equiv 1$. En effet, si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\theta \geqslant 0$, $\theta(x) > 0$ pour $x \in [0, 2\pi]$, alors $\widetilde{\theta}$ est une fonction C^∞ et 2π-périodique qui est > 0 partout ; si $\alpha = \theta/\widetilde{\theta}$, alors $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\widetilde{\alpha} \equiv 1$. *Avec une telle fonction* α, *on a*

$$\langle u\,,\ \varphi \rangle = \langle u\,,\ \alpha\widetilde{\varphi} \rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{4.59}$$

dès que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *est* 2π*-périodique*. En effet, de

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x)\alpha(x + 2n\pi)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

on a

$$\langle u\,,\ \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle u\,,\ \varphi\tau_{-2n\pi}\alpha \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \tau_{-2n\pi}u\,,\ \varphi\tau_{-2n\pi}\alpha \rangle$$

car $\tau_{2n\pi}u = u$, $n \in \mathbb{Z}$; donc

$$\begin{aligned}\langle u\,,\,\varphi\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle u\,,\,\tau_{2n\pi}(\varphi\tau_{-2n\pi}\alpha)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle u\,,\,\alpha\tau_{2n\pi}\varphi\rangle \\ &= \langle u\,,\,\alpha\widetilde{\varphi}\rangle\,.\end{aligned}$$

Disons que $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$ si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^∞ et 2π-périodique ; notons que $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est 2π-périodique, *nous définissons*

$$u_{2\pi} : \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

par la formule

$$\langle u_{2\pi}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\alpha\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})\,, \tag{4.60}$$

où $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est tel que $\widetilde{\alpha} \equiv 1$. Notons que $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $u_{2\pi} \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $u_{2\pi}$ est une fonctionnelle linéaire (continue dans le sens expliqué ci-dessous) ; observons que $\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et φ est de classe C^∞. *La définition de* $u_{2\pi}$ *ne dépend pas du choix de* α. En effet, si $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\widetilde{\beta} \equiv 1$, alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a d'après (4.59)

$$\langle u\,,\,\beta\varphi\rangle = \langle u\,,\,\alpha(\widetilde{\beta\varphi})\rangle = \langle u\,,\,\alpha\varphi\rangle$$

car

$$\widetilde{\beta\varphi}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta(x+2n\pi)\varphi(x+2n\pi) = \varphi(x)\widetilde{\beta}(x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Nous disons que $\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$, *dans* $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$ si $\varphi_n \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, et

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathrm{D}^j\varphi_n\right\|_\infty = 0\,, \quad j = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

où

$$\left\|\mathrm{D}^j\varphi_n\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \left|\varphi_n^j(x)\right|\,.$$

Alors $u_{2\pi}$ définie par (4.60) est continue au sens que si $\varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ dans $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors $\langle u_{2\pi}\,,\,\varphi_n\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$; nous ne donnons pas la démonstration facile de cette affirmation ; elle utilise simplement les considérations du paragraphe 4.5.3.

Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u étant 2π-périodique. Le *n-ième coefficient de Fourier* (complexe) de u (ou de $u_{2\pi}$), noté $c_n(u)$, est défini par

$$\begin{aligned}c_n(u) &= \frac{1}{2\pi}\,\langle u_{2\pi}\,,\,\chi_{-n}\rangle\,, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\langle u\,,\,\alpha\chi_{-n}\rangle\end{aligned} \tag{4.61}$$

où $\chi_m(x) = \mathrm{e}^{imx}$, $m \in \mathbb{Z}$, et α est comme dans (4.60). Notons que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une *fonction 2π-périodique intégrable dans* $[-\pi, \pi]$ et $u = f$ (u est engendrée par f), alors

$$\begin{aligned} \langle u_{2\pi}, \varphi \rangle &= \langle f_{2\pi}, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

En effet, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\psi(x+2n\pi)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\widetilde{\psi}(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

d'où (d'après (4.60)), pour $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_{2\pi}, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\widetilde{\alpha\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

car $\widetilde{\alpha\varphi}(x) = \varphi(x)$, à cause du fait que $\widetilde{\alpha} \equiv 1$ et φ est 2π-périodique.

La *série de Fourier* (complexe) de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u étant 2π-périodique, sera notée

$$u \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u)\chi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u)\,\mathrm{e}^{inx}. \tag{4.63}$$

Les séries dans (4.63) seront considérées comme des séries dans $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ ou encore dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, chaque terme étant une distribution 2π-périodique. Nous démontrons dans la suite que *ces séries convergent toujours au sens des distributions vers $u_{2\pi}$ ou u.*

Le passage de u à $u_{2\pi}$ est bijectif dans le sens suivant :

(i) si u et v sont deux distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui sont 2π-périodiques, alors $u_{2\pi} = v_{2\pi}$ entraîne que $u = v$;

(ii) si $\theta \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors il existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u étant 2π-périodique, tel que $u_{2\pi} = \theta$; d'après (i), cet u est unique.

En effet, si $u_{2\pi} = v_{2\pi}$, alors $w = u - v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, w est 2π-périodique, et $w_{2\pi} = 0$ car, pour $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a selon (4.60),

$$\langle w_{2\pi}, \varphi \rangle = \langle w, \alpha\varphi \rangle = \langle u, \alpha\varphi \rangle - \langle v, \alpha\varphi \rangle = \langle u_{2\pi}, \varphi \rangle - \langle v_{2\pi}, \varphi \rangle = 0 ;$$

si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a alors selon (4.59) et (4.60)

$$\langle w, \psi \rangle = \langle w, \alpha\widetilde{\psi} \rangle = \langle w_{2\pi}, \widetilde{\psi} \rangle = 0$$

d'où $w = 0$ et $u = v$; ceci prouve (i). Pour (ii), étant donné $\theta \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, posons

$$\langle u\,,\,\psi\rangle = \langle \theta\,,\,\widetilde{\psi}\rangle\,,\quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,; \tag{4.64}$$

alors $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u est 2π-périodique et, si $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a, selon (4.60) et la définition de u,

$$\langle u_{2\pi}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\alpha\varphi\rangle = \langle \theta\,,\,\widetilde{\alpha\varphi}\rangle = \langle \theta\,,\,\varphi\rangle$$

car $\widetilde{\alpha\varphi} = \varphi$ étant donné que $\widetilde{\alpha} = 1$ et φ est 2π-périodique ; autrement dit $u_{2\pi} = \theta$.

REMARQUES. Les distributions 2π-périodiques dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ correspondent, en fait, aux distributions sur le cercle $\mathbb{T}$ de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$, exactement comme les fonctions 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ correspondent aux fonctions complexes définies dans $\mathbb{T}$. Le passage de u à $u_{2\pi}$ est une façon analytique rigoureuse de faire la correspondance ; on peut aussi établir la correspondance géométriquement, ce qui serait plus naturel mais demanderait d'autres développements formels.

4.5.6 Proposition (*théorème fondamental pour la série de Fourier des distributions 2π-périodiques*)

Les notations sont données dans le paragraphe 4.5.5.

(i) Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 2π-périodique ; alors il existe $M > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $|c_n(u)| \leqslant M|n|^m$, $n \in \mathbb{Z}^*$; si $S_N(u) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(u)\chi_n$, alors

$$S_N(u) \xrightarrow{N\to\infty} u \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,.$$

(ii) Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $|c_n| \leqslant M|n|^m$, $n \in \mathbb{Z}^*$, pour $M > 0$, $m \in \mathbb{N}$ appropriés. Alors il existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u étant 2π-périodique, tel que $c_n(u) = c_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

REMARQUES. Rappelons que les $c_n(u)$ sont définis par (4.61) et $\chi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $c_n(u) = c_n(u_{2\pi})$, on peut considérer (i) et (ii) comme les énoncés concernant $u_{2\pi} = \theta \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ car les $\chi_n \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$, $S_N \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$; la conclusion sera alors

$$S_N(u) \xrightarrow{N\to\infty} u_{2\pi} \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})\,.$$

ce point sera explicité dans la démonstration qui suit. L'énoncé (i) s'écrit comme

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u)\chi_n$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION

(i) D'après (4.61) et la condition de continuité (i) (§ 4.5.3), on a

$$|c_n(u)| \leqslant \frac{C(K)}{2\pi} \sum_{j \leqslant m(K)} \|\mathrm{D}^j(\alpha\chi_{-n})\|_\infty$$

où K est un intervalle compact tel que $\alpha(x) = 0$ si $x \in K^c$; en écrivant $m = m(K)$, on a, en utilisant la formule de Leibniz,

$$\mathrm{D}^j(\alpha\chi_{-n})(x) = \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \mathrm{D}^r(\mathrm{e}^{-inx})\, \mathrm{D}^{j-r}\alpha(x)$$

d'où, pour $|n| \geqslant 1$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathrm{D}^j(\alpha\chi_{-n})(x)| \leqslant C_j |n|^m$$

avec

$$C_j = \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \|\mathrm{D}^{j-r}\alpha\|_\infty$$

car

$$|\mathrm{D}^r(\mathrm{e}^{-inx})| = |(-in)^r| = |n|^r \leqslant |n|^m .$$

On en conclut qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|c_n(u)| \leqslant M|n|^m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous considérons $S_N(u)$ comme un élément de $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$; si $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle S_N(u)\,,\,\varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} c_n(u)\langle\chi_n\,,\,\varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} 2\pi c_n(u)c_{-n}(\varphi)$$

selon (4.62) ; selon (4.61), on a alors

$$\begin{aligned} \langle S_N(u)\,,\,\varphi\rangle &= \sum_{n=-N}^{N} \langle u_{2\pi}\,,\,\chi_{-n}\rangle c_{-n}(\varphi) \\ &= \left\langle u_{2\pi}\,,\, \sum_{n=-N}^{N} c_{-n}(\varphi)\,\chi_{-n} \right\rangle . \end{aligned} \tag{4.65}$$

Notons que

$$\sum_{n=-N}^{N} c_{-n}(\varphi)\,\chi_{-n} = S_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi)\,\chi_n \ ;$$

φ étant dans $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on sait (§ 4.2.3(1)) que $S_N(\varphi)$ converge uniformément vers φ dans $\mathbb{R}$ lorsque $N \to \infty$; de plus (Ex. 20, sect. 4.3), pour $j = 1, 2, \ldots$,

$$S_N^{(j)}(\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi)(in)^j \chi_n = \sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi^{(j)})\,\chi_n \xrightarrow{N\to\infty} \varphi^{(j)}$$

uniformément dans $\mathbb{R}$; autrement dit, $S_N(\varphi) \to \varphi$ lorsque $N \to \infty$ dans $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$ d'où (selon (4.65))

$$\lim_{N\to\infty} \langle S_N(u)\,,\,\varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle u_{2\pi}\,,\,S_N(\varphi)\rangle = \langle u_{2\pi}\,,\,\varphi\rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Ainsi, on a démontré que $S_N(u) \to u_{2\pi}$ $(N \to \infty)$ dans $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$; ceci entraîne que $S_N(u) \to u$ $(N \to \infty)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par le raisonnement général suivant : si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors, selon (4.64) (et le calcul après (4.62)), on a

$$\langle S_N(u)\,,\,\psi\rangle = \langle S_N(u)\,,\,\widetilde{\psi}\rangle \xrightarrow{N\to\infty} \langle u_{2\pi}\,,\,\widetilde{\psi}\rangle = \langle u\,,\,\psi\rangle$$

en observant que $\widetilde{\psi} \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(ii) Notons d'abord que si $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n \cdot c_{-n}(\varphi)| < \infty\,;$$

en effet, en utilisant le fait que φ est de classe C^{m+2} et est 2π-périodique, on a, pour $n \in \mathbb{Z}^*$ (Ex. 20, sect. 4.3),

$$|c_n \cdot c_{-n}(\varphi)| \leqslant M \cdot |n|^m \cdot \frac{|c_{-n}(\varphi^{(m+2)})|}{|n|^{m+2}} \leqslant \frac{M}{|n|^2}\,\|\mathrm{D}^{m+2}\varphi\|_\infty$$

car

$$|c_{-n}(\varphi^{(m+2)})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{D}^{m+2}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\mathrm{D}^{m+2}\varphi\|_\infty\,.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n \cdot c_{-n}(\varphi)| \leqslant |c_0 c_0(\varphi)| + M\|\mathrm{D}^{m+2}\varphi\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^2} < \infty\,. \qquad (4.66)$$

Donc, pour $\varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})$,

$$F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \cdot c_{-n}(\varphi)$$

est bien défini et $F : \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est évidemment linéaire ; de (4.66) on conclut que F est continue et définit ainsi $\theta \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$ avec

$$\langle \theta\,,\, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \cdot c_{-n}(\varphi)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R})\,.$$

De (4.61), en écrivant $\theta = u_{2\pi}$ pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (cf. (4.64)), on a, pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$c_m(u) = \frac{1}{2\pi} \langle \theta\,,\, \chi_{-m} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot c_{-n}(\chi_{-m}) = c_m$$

car

$$c_{-n}(\chi_{-m}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-imx}\, \mathrm{e}^{inx}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Notons que (4.66) dit que la distribution 2π-périodique $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (ou $u_{2\pi} \in \mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$) est d'ordre au plus $m + 2$. ♦

REMARQUE. On a

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \chi_n\,, \quad \chi_n(x) = \mathrm{e}^{imx}\,,$$

dans le sens des distributions 2π-périodiques dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (ou dans $\mathcal{D}'_{2\pi}(\mathbb{R})$).

4.5.7 Complément et remarques historiques

Soulignons encore que, contrairement à la théorie classique donnée dans les sections précédentes, la série de Fourier d'une distribution périodique quelconque converge toujours (au sens des distributions) vers la distribution de départ ; de plus, on sait exactement quel type de suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ peut représenter les coefficients de Fourier d'une distribution périodique ; la proposition 4.5.6 contient l'énoncé précis. Cette simplification considérable de la théorie classique est rendue possible par l'introduction des distributions à la place des fonctions ; cette remarque ne doit pas nous inciter à croire que les considérations de la théorie classique sont inutiles ; elles gardent toute leur valeur à cause des nombreuses applications qui en font usage.

Nous indiquons quelques corollaires immédiats mais importants de la proposition 4.5.6.

COROLLAIRE 1. *Unicité des coefficients de Fourier*

Si $c_n(u) = c_n(v)$, $n \in \mathbb{Z}$, *pour deux distributions* 2π*-périodiques* u, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *alors* $u = v$.

En effet, en passant à $w = u - v$, il suffit de voir que $c_n(w) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, entraîne que $w = 0$; ceci est immédiat de la proposition 4.5.6(i). ♦

Notons que le corollaire 1 généralise (vi) (§ 4.1.6) qui concerne l'unicité des coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodiques et intégrables dans $[-\pi, \pi]$; ici, la démonstration du corollaire 1 suit une voie différente (et peut-être plus simple, quitte à devoir définir les distributions).

COROLLAIRE 2. *Dérivation terme à terme des séries de Fourier*

La série de Fourier d'une distribution 2π-périodique $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ peut être dérivée terme à terme pour obtenir la série de Fourier de u'.

En effet, soit

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u)\,\chi_n\,, \quad \chi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}\ ;$$

pour établir que

$$u' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n(u)\,\chi_n$$

il suffit (d'après prop. 4.5.6(i)) de voir que

$$c_n(u') = inc_n(u)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Or, selon (4.61), pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(u') &= \langle u'\,,\, \alpha\chi_{-n}\rangle = -\langle u\,,\, (\alpha\chi_{-n})'\rangle \\ &= -\langle u\,,\, \alpha'\chi_{-n}\rangle + in\langle u\,,\, \alpha\chi_{-n}\rangle = 2\pi inc_n(u) \end{aligned}$$

car, d'après (4.59),

$$\langle u\,,\, \alpha'\chi_{-n}\rangle = \langle u\,,\, \widetilde{\alpha'\chi_{-n}}\rangle = 0$$

puisque

$$\widetilde{\alpha'\chi_{-n}}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha'(x + 2m\pi)\,\chi_{-n}(x) = 0$$

en conséquence de

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha(x + 2m\pi) = \widetilde{\alpha}(x) = 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

cela donne en dérivant terme à terme (opération sans problème car α étant à support compact, la série est une somme finie)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha'(x + 2m\pi) = 0\,.$$

La théorie des distributions se généralise aisément à $\mathbb{R}^N$; on obtient ainsi un énoncé parfaitement analogue à celui de la proposition 4.5.6 pour les distributions périodiques dans $\mathbb{R}^N$.

La théorie des distribution est due à L. Schwartz ; elle apparaît dans ses premières publications dans les années 1945 et 1947. La première édition de son livre *Théorie des distributions* est de 1950 et 1951 (deux volumes) ; une nouvelle édition en un volume (Hermann, 1966) de ce livre reste, malgré plusieurs autres exposés excellents, un ouvrage indispensable. Dans son autobiographie intitulée *Un mathématicien aux prises avec le siècle* (Edition Odile Jacob, 1997), Schwartz décrit très précisément son cheminement vers la découverte de la théorie des distributions, surtout durant les années 1943-1945 ; outre l'intérêt scientifique, son autobiographie est passionnante par l'éclairage personnel qu'il y donne sur cette période sombre de l'histoire récente française.

La théorie des distributions est aujourd'hui un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles (et pour bien d'autres branches de l'analyse mathématique) ; nous serons obligé d'y revenir, même si c'est de manière épisodique, dans les chapitres consacrés aux équations aux dérivées partielles.

COROLLAIRE 3. *Les distributions sont les dérivées des fonctions*

Toute distribution périodique u s'écrit comme $c_0 + f^{(N)}$ (au sens des distributions) où f est une fonction périodique, $N \in \mathbb{N}$, $c_0 \in \mathbb{C}$.

En effet, si u est 2π-périodique, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \chi_n\,, \quad c_n = c_n(u)\,,\ \chi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}\ ;$$

si $|c_n| \leqslant M|n|^m$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $M > 0$ (prop. 4.5.6), posons

$$f(x) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{(in)^{m+2}}\, \chi_n(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Puisque

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n|}{|n|^{m+2}} < \infty\,,$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique ; du corollaire 2, on a $f^{(m+2)} = u - c_0$ au sens des distributions. Alors $u = c_0 + f^{(N)}$ avec $N = m + 2$, $c_0 = c_0(u)$. ♦

REMARQUE. Plus généralement, toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (périodique ou non) restreinte à un intervalle ouvert borné I (une notion que nous n'expliquerons pas) est de la forme $g^{(N)}$ (au sens des distributions) où $g \in C(I)$; on peut déduire cette affirmation du corollaire 3.

4.6 EXERCICES

1 Soit H la fonction de Heaviside : $H(x) = 0$ si $x < 0$, $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$. Vérifier que $H' = \delta_0$ au sens des distributions.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction ayant un nombre fini de discontinuité de première espèce, $x_1 < \ldots < x_n$, avec $f(x_j+) - f(x_j-) = s_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$; on suppose que $f'(x)$ existe et $x \mapsto f'(x)$ est continue pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Vérifier que $u'_f = u_{f'} + \sum_{j=1}^{n} s_j \delta_{x_j}$ où u_f, $u_{f'}$ sont les distributions engendrées par f, f'.

3 Démontrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$u(\varphi) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

existe et

$$u(\varphi) = \lim_{0<A\to 0} \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

En déduire que $\varphi \mapsto u(\varphi)$ définit une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre 1. (On écrit $u = \mathrm{VP}(1/x)$, VP : valeur principale).

4 Soit $f(x) = \ln|x|$, $x \neq 0$; démontrer que $f' = \mathrm{VP}(1/x)$ au sens des distributions.

5 Démontrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$v(\varphi) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right\}$$

existe et que

$$v(\varphi) = \lim_{0<A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

En déduire que $\varphi \mapsto v(\varphi)$ définit une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre 2. (On écrit $v = \mathrm{PF}(1/x^2)$, PF : partie finie.)

6 Démontrer que $u' = -v$ où $u = \mathrm{VP}(1/x)$ (Ex. 3), $v = \mathrm{PF}(1/x^2)$ (Ex. 5).

7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}\,, \quad 0 < x < 2\pi\,,$$

et $f(0) = 0$; on sait d'après (4.37) que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$f' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}$$

au sens des distributions ; vérifier directement que la série de Fourier de la distribution f' est donnée par $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ établissant ainsi

$$-\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

au sens des distributions (c'est un cas particulier du corollaire 2, § 4.5.7).

8 Vérifier que, au sens des distributions,

$$\big(H(x)\cos x\big)' = -H(x)\sin x + \delta$$
$$\big(H(x)\sin x\big)' = H(x)\cos x$$

où H est défini dans l'exercice 1.

9 Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, vérifier que, au sens des distributions, $(\alpha u)' = \alpha' u + \alpha u'$.

10 Posons $\alpha(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ démontrer que $\alpha u = 0$ si et seulement si $u = c\delta$, c une constante complexe.

11 Posons $\theta(x) = (2\pi/p)x$, $p > 0$; si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, définissons

$$\langle v, \varphi\rangle = \langle u, \varphi \circ \theta\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Vérifier que $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En posant $v = T_\theta u$, démontrer que $u = T_{\theta^{-1}} v$ où $\theta^{-1}(x) = (p/2\pi)x$.

12 (Continuation de l'exercice 11) Démontrer que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est p-périodique si et seulement si $v = T_\theta u$ est 2π-périodique. (Noter que $\tau_p(\varphi \circ \theta) = (\tau_{2\pi}\varphi) \circ \theta$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ où $(\tau_p f)(x) = f(x - p)$.)

13 (Continuation de l'exercice 12) De la série de Fourier de v obtenir que la série de Fourier de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, p-périodique, est donnée par

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u)\,\chi_n \circ \theta\,, \quad \chi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$$

où

$$c_n(u) = \frac{2\pi}{p}\,c_n(v) = \frac{1}{p}\,\big\langle u\,,\,(\alpha \circ \theta)(\chi_n \circ \theta)\big\rangle\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

avec $\beta = \alpha \circ \theta$ tel que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta(x + np) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ (α étant comme dans (4.61)). (Puisque $u = T_{\theta^{-1}} v$ (Ex. 11), on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle u\,,\,\varphi\rangle &= \langle v\,,\,\varphi \circ \theta^{-1}\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(v)\big\langle \chi_n\,,\,\varphi \circ \theta^{-1}\big)\big\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{p}\,c_n(v)\,\chi_n \circ \theta\,,\,\varphi \right\rangle .)\end{aligned}$$

14 Posons $u_\varepsilon = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n+\varepsilon}$; démontrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_{k/N} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

15 Soit $u_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{a+2n\pi}$, $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que $u_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est 2π-périodique et

$$c_n(u_a) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-ina}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(On obtient $c_n(u_a)$ avec un petit calcul basé sur (4.61) ; le résultat est évident si l'on considère u_a comme une distribution de Dirac concentrée en $\mathrm{e}^{ia} \in \mathbb{T}$, le cercle unité du plan complexe, un point de vue que nous n'avons pas formalisé.)

16 De la série de Fourier de u_a de l'exercice 15, on sait que

$$u_a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-ina} \chi_n$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (prop. 4.5.6). Vérifier cette formule en établissant directement que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-ina} \langle \chi_n , \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}(\widetilde{\varphi}) \mathrm{e}^{-ina}$$

$$= \widetilde{\varphi}(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(a + 2n\pi) = \langle u_a , \varphi \rangle .$$

17 Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 2π-périodique. Vérifier que sa série de Fourier complexe peut être écrite sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

(forme dite *série de Fourier réelle*) où $a_0 = c_0(u)$, $a_n = (1/\pi)\langle u , \alpha(x) \cos nx \rangle$, $b_n = (1/\pi)\langle u , \alpha(x) \sin nx \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$, α étant comme dans (6.61).

18 (Continuation de l'exercice 17) Démontrer que u est paire si et seulement si $b_n = 0$, $n \geqslant 1$ et que u est impaire si et seulement si $a_n = 0$, $n \geqslant 0$ (pour la définition des distributions paires et impaires, voir le paragraphe 4.5.4).

19 Si u_a est la distribution donnée dans l'exercice 15, posons $v_a = u_a + u_{-a}$, $w_a = u_a - u_{-a}$. Vérifier que v_a est paire, w_a est impaire et obtenir les séries de Fourier réelles de v_a, w_a.

20 Soit $f(x) = -\ln(2 \sin x/2)$ si $0 < x < 2\pi$, $f(0) = 0$, f étant prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité (c'est-à-dire $f(x) = -\ln\big(2|\sin x/2|\big)$, $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$). On a vu dans l'exercice 15 (sect. 4.3) que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

En utilisant la proposition 4.5.6 voir que :

(i) $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ au sens des distributions ;
vérifier cette formule directement en établissant (ii), pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

(ii) $$-\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin nx\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\, \mathrm{d}x.$$

REMARQUE. Noter que f est localement intégrable mais que sa fonction dérivée classique $f'(x) = -1/2 \operatorname{ctg} x/2$, $0 < x < 2\pi$ (prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$, avec une valeur quelconque à $x = 0$) n'est pas localement intégrable. Ainsi, $x \mapsto f'(x)$ ne peut pas définir une distribution directement via la formule $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; on peut procéder comme dans l'exercice 3, mais cette fois à chaque point $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, la singularité est du type $(1/2)(x - 2n\pi)^{-1}$; la distribution u ainsi obtenue est notée $u = \mathrm{VP}\big((-1/2) \operatorname{ctg} x/2\big)$; (i) donne une autre définition de u.

4.7 POLYNÔMES ORTHOGONAUX

4.7.1 Préliminaires

Soit X un sous-intervalle (borné ou non) de $\mathbb{R}$. Une ***fonction poids*** dans X est une fonction $\rho : X \to [\,0\,, \infty[$ telle que $\rho(x) > 0$ p.p.(x), ρ étant intégrable dans X. Par $L^2(X;\rho)$ nous notons l'espace hilbertien $L^2(X, \Sigma, \mu)$ (§ 3.2.4) où Σ est la tribu borélienne de X et

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad A \in \Sigma\,;$$

plus explicitement, un élément de $L^2(X;\rho)$ est (une classe d'équivalence associée à) une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ telle que

$$\|f\|^2 = \int_X |f(x)|^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

comme expliqué dans le chapitre 3, les éléments de $L^2(X;\rho)$ seront considérés comme des fonctions complexes, dites de *carré intégrable relatif à* ρ. Si f, g sont dans $L^2(X;\rho)$, on notera leur produit scalaire (sauf mention contraire) par

$$\langle f\,,\, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Si $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ est une famille orthogonale (ou orthonormale) dans $L^2(X;\rho)$, nous dirons que les φ_α sont ***orthogonales*** (ou ***orthonormales***) ***dans*** X, ***relativement à*** ρ ; lorsque $\rho \equiv 1$, on écrit $L^2(X)$ au lieu de $L^2(X;1)$ et on parle simplement des fonctions orthogonales (ou orthonormales) dans X. Pour la

suite, ρ est une fonction poids fixée dans X ; un changement de la fonction poids ρ sur un ensemble négligeable de X ne change pas l'espace $L^2(X;\rho)$ et n'affecte pas la théorie qui suit.

Posons $f_n(x) = x^n$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$; *si X est borné, les f_n sont dans $L^2(X;\rho)$; si X est non borné, nous supposerons que ρ est telle que les f_n soient dans $L^2(X;\rho)$*. Notons que les f_n sont linéairement indépendantes dans tout intervalle de $\mathbb{R}$; donc, les f_n forment une suite d'éléments linéairement indépendants dans $L^2(X;\rho)$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (§ 3.4.6) appliqué sur $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assure l'existence d'une suite de polynômes, *à coefficients réels*, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ telle que :

(i) φ_n est un polynôme réel de degré n ($n \in \mathbb{N}$, φ_0 étant une constante réelle non nulle),

(ii) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthogonale dans $L^2(X;\rho)$, c'est-à-dire, pour m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, on a

$$\langle \varphi_m , \varphi_n \rangle = \int_X \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Toute suite de polynômes réels $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant les deux propriétés spécifiées est dite ***suite de polynômes orthogonaux associés à*** X, ρ ; on dira aussi que les φ_n sont les polynômes orthogonaux associés à X, ρ. *Si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de polynômes orthogonaux associés à X, ρ, alors il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $\psi_n = \alpha_n\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$*. Pour établir cette affirmation, il suffit de prendre les φ_n comme les polynômes obtenus par le procédé de Gram-Schmidt de sorte que chaque polynôme réel de degré n soit une combinaison linéaire réelle des $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$. Puisque φ_0 et ψ_0 sont des constantes réelles non nulles, on a $\alpha_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\psi_0 = \alpha_0\varphi_0$; supposons que $\psi_j = \alpha_j\varphi_j$, $j < n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^*$, pour un entier $n \geqslant 1$. Alors ψ_n, étant un polynôme réel de degré n, est une combinaison linéaire réelle de $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ donc de $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}, \varphi_n$; soit

$$\psi_n = b_0\psi_0 + \cdots + b_{n-1}\psi_{n-1} + b_n\varphi_n\ ;$$

alors, pour $j < n$,

$$\langle \psi_n , \psi_j \rangle = 0 = b_j\|\psi_j\|^2 + b_n\langle \varphi_n , \psi_j \rangle = b_j\|\psi_j\|^2$$

(car $\langle \varphi_n , \psi_j \rangle = 0$, $j < n$, étant donné que φ_n est orthogonal à tout polynôme de degré $< n$). On en conclut que $b_j = 0$, $j < n$ (car $\|\psi_j\| \neq 0$, ψ_j étant un polynôme non nul) d'où $\psi_n = b_n\varphi_n$; en prenant $\alpha_n = b_n$, α_n étant évidemment non nul, on établit l'affirmation avancée par récurrence.

On voit donc que la suite de polynômes orthogonaux associés à X, ρ est unique à des constantes (réelles non nulles) multiplicatives près ; on fixe ces constantes par différentes conditions de ***standardisation***. Celles-ci sont généralement de trois types :

(1) on exige que les polynômes orthogonaux φ_n associés à X, ρ soit ***normalisés*** (c'est-à-dire $\|\varphi_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$) et que le coefficient de x^n dans $\varphi_n(x)$ soit > 0 ; on vérifie (Ex. 5, § 3.4.7) que ces conditions déterminent les φ_n uniquement ;

(2) on fixe le coefficient k_n de x^n dans $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ (par exemple, $k_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$) ;

(3) on fixe la valeur de φ_n à un point x_0, $n \in \mathbb{N}$ (par exemple, $\varphi_n(x_0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$) ;

pour cette dernière condition, il faut être certain d'avance que les polynômes orthogonaux ne s'annullent pas en x_0. Lorsque $\rho \equiv 1$, nous parlerons des polynômes orthogonaux dans X (ou associés à X) sans mentionner ρ. Notons que deux fonctions poids qui sont égales presque partout dans X ont les mêmes polynômes orthogonaux associés.

Si les polynômes orthogonaux $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à X, ρ forment un système orthogonal complet (chap. 3), alors on peut développer toute fonction $f \in L^2(X;\rho)$ dans une série $\sum_n a_n\varphi_n$ appropriée (sect. 3.6). *C'est toujours le cas lorsque X est un intervalle borné* ; lorsque X est non borné, la complétude des polynômes orhtogonaux dépend de la nature de la fonction poids ρ. Nous considérerons ces deux cas séparément.

4.7.2 **Proposition** (*complétude des polynômes orthogonaux dans un intervalle borné*)

Soit X un sous-intervalle borné de $\mathbb{R}$; pour toute fonction poids ρ dans X, les polynômes orthogonaux associés à X, ρ forment un système orthogonal complet dans $L^2(X;\rho)$.

REMARQUE. Le point essentiel ici est que $\overline{X}$ est compact dans $\mathbb{R}$. La condition importante sur ρ est que $\rho \geqslant 0$ et $0 < \int_X \rho(x)\,dx < \infty$; le fait que $\rho(x) > 0$ p.p.(x) joue un rôle secondaire dans cette proposition.

DÉMONSTRATION

La proposition équivaut à l'affirmation que les polynômes forment un ensemble dense dans $L^2(X;\rho)$ (§ 3.6.7). Nous admettons d'après la théorie de l'intégration (vol. 1) que si $f \in L^2(X;\rho)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe une fonction continue $g : \overline{X} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\|f - g\| = \left\{\int_X |f(x) - g(x)|^2 \rho(x)\,dx\right\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après le théorème d'approximation de Weierstrass (§ 4.1.8(3)), il existe un polynôme h tel que

$$\sup_{x\in\overline{X}} |g(x) - h(x)|^2 < \frac{\varepsilon}{2M}$$

où $M = \{\int_X \rho(x)\,\mathrm{d}x\}^{1/2}$. Alors $\|g - h\| < \varepsilon/2$ d'où

$$\|f - h\| \leqslant \|f - g\| + \|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Ceci établit la densité des polynômes dans $L^2(X;\rho)$. ♦

REMARQUE. Soient $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux associés à X, ρ (X borné ou non, ρ fonction poids quelconque dans X). Si h est un polynôme à coefficients complexes (réels) de degré N, alors h admet une représentation *unique* comme une combinaison linéaire complexe (réelle) de $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$; c'est une conséquence de la définition même des φ_n via le procédé de Gram–Schmidt ; en fait,

$$h = \sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_j$$

avec

$$a_j = \frac{\langle h\,,\,\varphi_j\rangle}{\|\varphi_j\|^2}\,, \quad j = 0,\,1,\,\ldots,\,N\,.$$

4.7.3 Complétude des polynômes orthogonaux au cas d'intervalle non borné

Soit X un intervalle non borné dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les polynômes orthogonaux ne forment pas toujours un système orthogonal complet ; dans l'exercice 14 (sect. 4.8), nous présentons en détail un exemple (dû à Stieltjes) d'une fonction poids continue $\rho : X = \,]\,0\,,\,\infty\,[\,\to\,]\,0\,,\,\infty\,[$ telle que les polynômes orthogonaux ne forment pas un système orthogonal complet dans $L^2(X;\rho)$ (les fonctions $x \mapsto x^n$ étant toujours dans $L^2(X;\rho)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Une analyse complète aboutisant à une caractérisation des fonctions poids ρ telles que les polynômes soient dense dans $L^2(X;\rho)$, nous emmènerait trop loin ; nous donnerons quelques indications sur cette problématique dans un paragaphe ultérieur (§ 4.9.2). Ici, nous énonçons et démontrons une proposition qui donne une condition suffisante sur ρ pour que les polynômes soient denses dans $L^2(X;\rho)$. Intuitivement, il s'agit d'une condition qui fait que $\rho(x)$ devient assez petit lorsque $|x| \to \infty$. ***La proposition qui suit nous suffira pour la démonstration de la complétude des polynômes orthogonaux associés aux noms d'Hermite et de Laguerre.***

4.7.4 Proposition (*condition suffisante pour la complétude des polynômes orthogonaux dans un intervalle non borné*)

Soit ρ une fonction poids dans un intervalle non borné $X \subset \mathbb{R}$; supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_X \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,. \tag{4.67}$$

Alors les polynômes orthogonaux associés à X, ρ forment un système orthogonal complet dans l'espace hilbertien $H = L^2(X;\rho)$.

DÉMONSTRATION

Notons que (4.67) entraîne que $x \mapsto x^n$ est dans H pour $n \in \mathbb{N}$ car $\alpha^{2n}|x|^{2n}/(2n)! \leqslant \mathrm{e}^{\alpha|x|}$.

Il faut démontrer que si $f \in H$ est tel que

$$\int_X f(x)x^n\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.68}$$

alors $f(x) = 0$ p.p. $x \in X$. Pour $f \in H$, posons

$$F(s) = \int_X \mathrm{e}^{sx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

où $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$; si $|\sigma| < \alpha/2$, $f \in H$, alors

$$\begin{aligned}\int_X \left|\mathrm{e}^{sx} f(x)\right|\rho(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_X \mathrm{e}^{(\alpha/2)|x|}\left|f(x)\right|\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_X \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_X \left|f(x)\right|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < \infty\end{aligned}$$

à cause de (4.67) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans H. On conclut que F est holomorphe pour $|\operatorname{Re} s| < \alpha/2$ et

$$F^{(n)}(s) = \int_X \mathrm{e}^{sx} x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $|\operatorname{Re} s| < \alpha/2$ (voir le volume 2 pour la théorie des fonctions holomorphes utilisée dans cette démonstration).

Si $f \in H$ vérifie (4.68), alors $F^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, d'où le théorème d'unicité des fonctions holomorphes entraîne que $F(s) = 0$ pour tout s tel que $|\operatorname{Re} s| < \alpha/2$. En prenant $s = it$, on a

$$0 = F(it) = \int_X \mathrm{e}^{itx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.69}$$

Puisque $f \in H$ et $\left|f(x)\right| \leqslant \left(1 + \left|f(x)\right|^2\right)/2$, $x \in X$, on conclut que

$$\int_X \left|f(x)\right|\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

de sorte que $\varphi = f\rho 1_X$ (on pose $f(x) = \rho(x) = 0$, $x \in X^c$) est une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$. Selon (4.69), la transformée de Fourier de φ est identiquement nulle ce qui entraîne que $\varphi(x) = 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$ (ce théorème fondamental ainsi que la théorie des transformées de Fourier seront établis au chapitre 6). Puisque $\rho(x) > 0$ p.p. $x \in X$, on conclut que $f(x) = 0$ p.p. $x \in X$. ♦

REMARQUES. S'il existe $\beta > 0$, $T > 0$, $C > 0$ tels que

$$\rho(x) \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\beta|x|}\,, \quad |x| \geqslant T\,,\ x \in X\,, \tag{4.70}$$

alors (4.67) est vérifiée dès que $0 < \alpha < \beta$.

En effet, si $X^T = \{x \in X : |x| \geqslant T\}$, alors, de (4.70),

$$\int_{X^T} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2C \int_T^\infty \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)x}\,\mathrm{d}x < \infty\,;$$

si $X_T = \{x \in X : |x| < T\}$, alors

$$\int_{X_T} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^{\alpha T} \int_X \rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

d'où

$$\int_X \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_{X_T} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x + \int_{X^T} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

La démonstration de la proposition 4.7.4 est inspirée par une note de E. Hewitt (*American Mathematical Monthly*, vol. 61, 1954, pp. 249-250). Il faut comprendre que tout théorème établissant la complétude d'une famille de fonctions orthogonales dans un espace $L^2(X, \Sigma, \mu)$ exige, en général, un effort non négligeable. On a déjà vu cela pour la complétude des fonctions trigonométriques dans $L^2([-\pi\,,\,\pi])$; aucun raisonnement purement algébrique ne peut établir ce genre de résultat. La condition (4.67) sur ρ est une condition suffisamment simple (et bien connue) pour que les polynômes orthogonaux associés à X, ρ soient complets ; cette condition est loin d'être nécessaire pour la conclusion visée dans la proposition 4.7.4 (pour plus d'informations se reporter au paragraphe 4.9.2).

4.7.5 Exemples : polynômes orthogonaux classiques

Nous énumérons ici quelques exemples importants de polynômes orthogonaux associés aux différents choix de X et de ρ. Les noms donnés à ces polynômes correspondent à leur unique définition après une standardisation appropriée qui est indiquée (chaque fois qu'une telle standardisation existe). Certains de ces polynômes seront étudiés avec un peu plus de détails dans les paragraphes suivants.

1 Polynômes de Legendre

Ce sont les polynômes orthogonaux $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à $X = [-1\,,\,1]$, $\rho \equiv 1$, avec $P_n(1) = 1$. Ces polynômes sont aussi appelés les *polynôme sphériques* à cause de leur relation avec les polynômes harmoniques en trois variables restreints à une sphère.

2 Polynômes de Chebyshev

Il y en a de deux espèces, $\{T_n(x)\}$, $\{U_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}$; les T_n sont associés à $X = [-1, 1]$, $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (avec $\rho(\pm 1) = 1$), et les U_n sont associés à $X = [-1, 1]$, $\rho(x) = (1 - x^2)^{1/2}$. On donne leurs définitions exactes comme suit : en posant $\theta = \arccos x$, $x \in X$, on a

$$T_n(x) = \cos n\theta\,, \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4.71}$$

En effet puisque

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cdot \cos\theta\,,$$

on voit, par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\cos n\theta$ est un polynôme de degré n en $\cos\theta$ d'où $T_n(x)$ est un polynôme en x de degré n, vérifiant la *formule de récurrence*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.72}$$

avec $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. De même, puisque

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cdot \cos\theta + \cos n\theta \cdot \sin\theta\,,$$

on a que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\big(\sin(n+1)\theta\big)/\sin\theta$ est un polynôme de degré n en $\cos\theta$ d'où $U_n(x)$ est un polynôme en x de degré n ; puisque

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta \cdot \cos\theta\,,$$

on a

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ce qui donne la *formule de récurrence*

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.73}$$

avec $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. L'orthogonalité des $\{T_n\}$ et des $\{U_n\}$ s'établit immédiatement par le calcul suivant : pour m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\big(1-x^2\big)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cdot \cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\big(1-x^2\big)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(m+1)\theta \cdot \sin(n+1)\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Notons que $T_n(1) = 1$, $U_n(1) = (n+1)$; les T_n, U_n pour $n = 0, 1, 2, 3$ se calculent rapidement en utilisant (4.72) et (4.73) :

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$U_0(x) = 1\,, \quad U_1(x) = 2x\,, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1\,, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x\,.$$

3 Polynômes de Jacobi

Ce sont les polynômes orthogonaux notés $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à $X = [-1, 1]$, $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\rho(\pm 1) = 1$, avec $\alpha > -1$, $\beta > -1$, standardisés par la condition

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Pour $\alpha = \beta = 0$, on obtient les polynômes de Legendre ; $\alpha = \beta = -1/2$ donne les polynômes de Chebyshev $\{T_n(x)\}$ (à un facteur numérique près) et $\alpha = \beta = 1/2$ donne les polynômes de Chebyshev $\{U_n(x)\}$ (à un facteur numérique près).

En général, lorsque $\alpha = \beta > -1$, les polynômes de Jacobi s'appellent ***polynômes ultrasphériques*** (ou ***polynômes de Gegenbauer***) ; ils sont alors paramétrés par $\lambda = \alpha + 1/2$ et notés $C_n^\lambda(x)$ ou $P_n^{(\lambda)}(x)$, $\lambda > -1/2$ (ainsi, $C_n^\lambda(x) = P_n^{(\alpha+1/2,\alpha+1/2)}(x)$).

4 Polynômes de Laguerre

Ce sont les polynômes orthogonaux notés $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à $X =]0, \infty[$, $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$, avec la standardisation que le coefficient k_n de x^n dans $L_n^{(\alpha)}(x)$ est égal à 1. (Certains auteurs choissisent la standardisation $k_n = (-1)^n/n!$ ou $(-1)^n$.)

5 Polynômes d'Hermite

Ce sont les polynômes orthogonaux notés $\{H_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à $X = \mathbb{R}$, $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, avec la standardisation que le coefficient de x^n dans $H_n(x)$ est égal à 2^n. (Certains auteurs utilisent $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ et la standardisation n'est pas la même partout.)

Chacun de ces systèmes de polynômes orthogonaux peut être transplanté par homothétie à un intervalle d'extrémités $a < b$ (Ex. 1, sect. 4.8). Ils forment dans leur ensemble ce que l'on appelle traditionnellement les ***polynômes orthogonaux classiques***.

C'est une conséquence immédiate des propositions 4.7.2 et 4.7.4 (en particulier, voir la condition (4.70) sur ρ) que *chacun des systèmes de polynômes orthogonaux énumérés ici forme une base orthogonale de l'espace* $L^2(X;\rho)$ *correspondant*.

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un quelconque de ces systèmes de polynômes orthogonaux ; alors pour tout $f \in L^2(X;\rho)$ correspondant, on a (d'après la théorie générale du chapitre 3)

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

où

$$a_n = \frac{\langle f\,,\,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\displaystyle\int_X f(x)\varphi_n\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_X \varphi_n^2(x)\rho_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

et

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n \right\|^2 = \int_X \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x) \right|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{N\to\infty} 0\,.$$

On dira que les a_n sont les *coefficients de Fourier* de f relatif au système $\{\varphi_n\}$ et que la série $\sum_n a_n\varphi_n$ est le *développement en série orthogonale* de f relatif au système $\{\varphi_n\}$.

4.7.6 Propriétés générales des polynômes orthogonaux

Soient $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux associés à l'intervalle $X \subset \mathbb{R}$ (X borné ou non) et à la fonction poids ρ ; les notations $\|f\|$, $\langle f, g\rangle$, pour f, $g \in L^2(X;\rho)$, sont comme dans le paragraphe 4.7.1.

(1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme φ_n possède n zéros distincts réels contenus dans l'intérieur $\mathring{X}$ de X.

(En particulier, les zéros de φ_n sont simples.)

DÉMONSTRATION

Puisque φ_0 est une constante et $\varphi_n \perp \varphi_0$, on a

$$\int_X \varphi_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,;$$

ceci montre que φ_n doit changer de signe dans $\mathring{X}$ et, ainsi, doit posséder au moins un zéro d'ordre impair dans $\mathring{X}$. Supposons que φ_n possède exactement, m zéros d'ordre impair dans $\mathring{X}$ avec $m < n$, ces zéros étant $x_1, \ldots, x_m$; posons $p(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_m)$; puisque p est un polynôme de degré $m < n$, on a $\varphi_n \perp p$, c'est-à-dire

$$\int_X \varphi_n(x)p(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Puisque chaque zéro de $\varphi_n p$ dans $\mathring{X}$ est d'ordre pair, $\varphi_n p$ ne change pas de signe dans $\mathring{X}$ ce qui rend la dernière équation impossible. Ainsi, $m = n$ et notre affirmation est établie. ♦

REMARQUE. Si a est une extrémité de X avec $a \in \mathbb{R}$, alors on conclut de ce qui précède que $\varphi_n(a) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$; ceci permet de trouver $\alpha_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha_n \varphi_n(a) = 1$.

(2) Formule de récurrence

On a, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$\varphi_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)\varphi_n(x) - C_n \varphi_{n-1}(x) \tag{4.74}$$

où

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad B_n = A_n\left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n}\right), \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}},$$

k_n = *coefficient de* x^n *dans* $\varphi_n(x)$, k'_n = *coefficient de* x^{n-1} *dans* $\varphi_n(x)$,

$$h_n = \|\varphi_n\|^2 = \int_X \varphi_n^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

avec $\varphi_0(x) = k_0$, $h_0 = \|\varphi_0\|^2 = k_0^2 \int_X \rho(x)\,\mathrm{d}x$.

DÉMONSTRATION

Posons $P(x) = \varphi_{n+1}(x) - A_n x \varphi_n(x)$ avec A_n comme ci-dessus ; alors le coefficient de x^{n+1} dans $P(x)$ est nul et $P(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$; donc

$$P(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

avec

$$a_k = \frac{\langle P, \varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{h_k}\langle P, \varphi_k\rangle.$$

Si $k \leqslant n-2$,

$$\begin{aligned}\langle P, \varphi_k\rangle &= \langle \varphi_{n+1}, \varphi_k\rangle - A_n\langle x\varphi_n(x), \varphi_k(x)\rangle \\ &= \langle \varphi_{n+1}, \varphi_k\rangle - A_n\langle \varphi_n(x), x\varphi_k(x)\rangle = 0\end{aligned}$$

car $\varphi_{n+1} \perp \varphi_k$ et $\varphi_n \perp p$, $p(x) = x\varphi_k(x)$, $p(x)$ étant de degré $\leqslant n-1$; donc $a_k = 0$, $k \leqslant n-2$. En comparant les coefficients de x^n des polynômes dans l'égalité

$$\varphi_{n+1}(x) - A_n x\varphi_n(x) = P(x) = a_n\varphi_n(x) + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

on obtient, des définitions de k_n, k'_n, k'_{n+1}, que

$$k'_{n+1} - A_n k'_n = a_n k_n$$

d'où

$$a_n = \frac{k'_{n+1}}{k_n} - A_n \frac{k'_n}{k_n} = A_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right) = B_n \,.$$

Finalement,

$$a_{n-1} = \frac{1}{h_{n-1}} \langle P \,,\, \varphi_{n-1} \rangle$$

avec

$$\begin{aligned} \langle P \,,\, \varphi_{n-1} \rangle &= \langle \varphi_{n+1} \,,\, \varphi_{n-1} \rangle - A_n \langle x\varphi_n(x) \,,\, \varphi_{n-1}(x) \rangle \\ &= -A_n \langle \varphi_n(x) \,,\, x\varphi_{n-1}(x) \rangle = -A_n \langle \varphi_n(x) \,,\, k_{n-1} x^n \rangle \\ &= -\frac{A_n k_{n-1}}{k_n} \langle \varphi_n(x) \,,\, k_n x^n \rangle = -\frac{A_n k_{n-1}}{k_n} \langle \varphi_n \,,\, \varphi_n \rangle \\ &= -\frac{A_n k_{n-1} h_n}{k_n} \end{aligned}$$

d'où

$$a_{n-1} = -\frac{h_n}{h_{n-1}} \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = -C_n \,.$$

Ainsi, (4.74) est établie. ♦

Nous établissons maintenant les équations différentielles vérifiées par les polynômes orthogonaux classiques ; pour notre livre, ces équations différentielles constituent une des raisons principales pour l'étude des polynômes orthogonaux ; mais, en fait, les applications des polynômes orthogonaux sont beaucoup plus variées.

L'étude des polynômes orthogonaux classique (§ 4.7.5) est grandement unifiée et simplifiée par l'observation suivante : *les polynômes orthogonaux classiques* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient une* ***formule de Rodriguez*** *générale : pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n \varphi_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \mathrm{D}^n \left[\rho(x) Q^n(x) \right] \tag{4.75}$$

où α_n est un nombre approprié dans $\mathbb{R}^*$, ρ est la fonction poids associée aux φ_n et $Q(x)$ est un polynôme donné par

$$Q(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) & \text{pour les polynôme de Jacobi} \\ x & \text{pour les polynômes de Laguerre} \\ 1 & \text{pour les polynômes d'Hermite.} \end{cases}$$

Nous démontrons cette affirmation séparément pour chacun des trois cas signalés, établissant également les équations différentielles et les formules précises pour chacun des polynômes concernés ; rappelons que les polynômes de Jacobi contiennent comme cas particulier ceux de Legendre, entre autres.

4.7.7 Polynômes de Jacobi

Vérifions d'abord que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \mathrm{D}^n\big[\rho(x)\big(x^2-1\big)^n\big]$$

avec $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ($\alpha > -1$, $\beta > -1$), $\rho(\pm 1) = 1$, est un polynôme de degré n et que les p_n sont orthogonaux relatifs à ρ dans $X = [\,-1\,,\,1\,]$; les conditions $\alpha > -1$, $\beta > -1$, assurent l'intégrabilité de ρ dans $[\,-1\,,\,1\,]$. Pour la suite, nous établissons la formule

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,\mathrm{d}x = 2^{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} \tag{4.76}$$

valable pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ Il suffit de poser $x = 2t - 1$ dans l'intégrale de (4.76) pour avoir

$$2^{2n+\alpha+\beta+1}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}\,\mathrm{d}t = 2^{2n+\alpha+\beta+1}B(\alpha+n+1\,,\,\beta+n+1)$$

où

$$B(a,b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}\,\mathrm{d}t\,, \quad a>0\,,\ b>0$$

est l'intégrale bêta étudiée dans les volumes 1 et 2 ; puisque

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

on obtient l'égalité (4.76).

La formule de Leibniz pour $\mathrm{D}^n(fg)$ donne, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= (-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\mathrm{D}^n\big\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\big\} \\
&= (-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{D}^k(1-x)^{n+\alpha}\mathrm{D}^{n-k}(1+x)^{n+\beta} \\
&= (-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1) \\
&\quad \times (1-x)^{n+\alpha-k}(n+\beta)\cdots(n+\beta-n+k+1)(1+x)^{\beta+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}(n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1)(n+\beta)\cdots(\beta+k+1) \\
&\quad \times (1-x)^{n-k}(1+x)^k\,;
\end{aligned} \tag{4.77}$$

le coefficient de x^n dans $p_n(x)$ est

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1)(n+\beta)\cdots(\beta+k+1) > 0 \quad \text{si } n > 0$$

(car $\alpha > -1$, $\beta > -1$ entraîne que chaque terme de la somme est > 0). Puisque $p_0(x) = 1$, on a établi que, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, $p_n(x)$ est un polynôme de degré n en x.

Démontrons que $\langle p_n , p_m \rangle = 0$, $m < n = 1, 2, \ldots$, ce qui équivaut à $\langle p_n(x) , x^m \rangle = 0$, $m < n = 1, 2, \ldots$; une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \langle p_n(x) , x^m \rangle &= \int_{-1}^{1} \mathrm{D}^n \left\{ \rho(x) \left(x^2 - 1\right)^n \right\} x^m \, \mathrm{d}x \\ &= (-1) \int_{-1}^{1} \mathrm{D}^{n-1} \left\{ \rho(x) \left(x^2 - 1\right)^n \right\} m x^{m-1} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

car, pour $x = \pm 1$,

$$\mathrm{D}^j \left\{ \rho(x) \left(x^2 - 1\right)^n \right\} = (-1)^n \mathrm{D}^j \left\{ (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right\} = 0$$

si $j < n$, ce qui est visible des calculs précédents. En faisant des intégrations par parties $(m+1)$ fois, on a

$$\langle p_n(x) , x^m \rangle = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \mathrm{D}^{n-m-1} \left\{ \rho(x) \left(x^2 - 1\right)^n \right\} \mathrm{D}^{m+1}(x^m) \, \mathrm{d}x = 0$$

car $\mathrm{D}^{m+1}(x^m) = 0$.

Ainsi, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système de polynômes orthogonaux associé à $X = [-1 , 1]$, $\rho(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}$; donc

$$\alpha_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = p_n(x) , \quad n \in \mathbb{N}$$

α_n étant tel que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} .$$

De (4.77), on a

$$\alpha_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

d'où

$$\alpha_n \binom{n+\alpha}{n} = n! \binom{n+\alpha}{n} 2^n ,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_n = 2^n \cdot n!$$

Ainsi,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k \tag{4.78}$$

formule valable pour $n = 0, 1, 2, \ldots$; notons que $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ et

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2} \{(\beta+1)(x-1) + (\alpha+1)(x+1)\} = \frac{1}{2} \{(\alpha+\beta+2)x + (\alpha-\beta)\}.$$

Calculons k_n, k'_n (les coefficients de x^n, x^{n-1} respectivement dans $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$), pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n = \|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2$, $n \in \mathbb{N}$. Puisque, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(x-1)^{n-k}(x+1)^k &= (x^{n-k} - (n-k)x^{n-k-1} + \cdots)(x^k + kx^{k-1} + \cdots) \\ &= x^n + (2k-n)x^{n-1} + \cdots\end{aligned}$$

on obtient à partir de (4.78)

$$k_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} = \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} \tag{4.79}$$

$$k'_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (2k-n) = \frac{\alpha-\beta}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta-1}{n-1}. \tag{4.80}$$

Les formules (4.79) et (4.80) se déduisent de la théorie des séries entières (vol. 2) :

$$(1+x)^\lambda = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\lambda}{n} x^n, \quad (1+x)^\mu = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\mu}{n} x^n$$

$$(1+x)^{\lambda+\mu} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\lambda+\mu}{n} x^n$$

d'où

$$\binom{\lambda+\mu}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\lambda}{k} \binom{\mu}{n-k}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

De même, par une dérivation de $(1+x)^\lambda$, on a

$$\lambda x (1+x)^{\lambda-1} = \sum_{n \geqslant 0} n \binom{\lambda}{n} x^n$$

d'où l'égalité

$$\lambda x(1+x)^{\lambda+\mu-1} = \left\{\sum_{n\geqslant 0} n\binom{\lambda}{n} x^n\right\}\left\{\sum_{n\geqslant 0}\binom{\mu}{n} x^n\right\}$$
$$= \lambda x \sum_{n\geqslant 0}\binom{\lambda+\mu-1}{n} x^n$$

ce qui donne

$$\sum_{n\geqslant 0} k\binom{\lambda}{k}\binom{\mu}{n-k} = \lambda\binom{\lambda+\mu-1}{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Avec ces formules, (4.79) est immédiate et (4.80) s'obtient par un petit calcul direct.

On a

$$h_n = \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\rangle = \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), k_n x^n\rangle = \frac{k_n}{\alpha_n}\langle p_n(x), x^n\rangle$$
$$= \frac{k_n(-1)^n}{\alpha_n}\int_{-1}^{1} \mathrm{D}^n\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}x^n\,\mathrm{d}x$$

et, après n intégration par parties,

$$h_n = \frac{k_n}{\alpha_n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}n!\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}\frac{1}{2^n n!}n!\,2^{2n+\alpha+\beta+1}B(\alpha+n+1, \beta+n+1)$$

en utilisant (4.76), (4.79) et la valeur de α_n ; on en déduit

$$\begin{aligned} h_n &= \binom{2n+\alpha+\beta}{n} 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

La connaissance des k_n, k'_n, h_n nous permet d'obtenir la formule de récurrence pour les $P_n^{(\alpha,\beta)}$ à partir de la formule générale (4.74) ; avec la notation de (4.74), on a

$$A_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}$$

$$B_n = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}$$

$$C_n = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}$$

ce qui donne la formule de récurrence

$$\begin{aligned}
&2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&= (2n+\alpha+\beta+1)\big((2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x+\alpha^2-\beta^2\big)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&\quad - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$

Démontrons maintenant que $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *vérifie l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre suivante :*

$$(1-x^2)y'' + \big(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\big)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0\,. \tag{4.83}$$

DÉMONSTRATION

Il est commode d'écrire (4.83) comme

$$\mathrm{D}\Big\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\Big\} + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y = 0\,. \tag{4.84}$$

Un petit calcul montre que

$$\mathrm{D}\Big\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\Big\} = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}Z = \rho(x)Z$$

où Z est un polynôme réel de degré $\leqslant n$; nous démontrons que $Z \perp p$ pour tout polynôme réel p de degré $\leqslant n-1$, ce qui entraîne que $Z = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour établir que $Z \perp p$, on calcule (pour p un polynôme réel de degré $\leqslant n-1$)

$$\begin{aligned}
\langle Z\,,\,p\rangle &= \int_{-1}^{1} \rho(x)Z(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{D}\Big\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\Big\}p(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'p'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1} y\,\mathrm{D}\Big\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}p'(x)\Big\}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1} y(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}r(x)\,\mathrm{d}x = \langle y\,,\,r\rangle = 0
\end{aligned}$$

en faisant deux intégrations par parties et en observant que r est un polynôme réel de degré $\leqslant n-1$.

Donc (4.84) est établie, excepté la vérification de la formule $\lambda = n(n + \alpha + \beta + 1)$; on a ainsi (4.83) sous la forme

$$(1 - x^2)y'' + \{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x\}y' + \lambda y = 0\,. \tag{4.85}$$

Puisqu'il s'agit d'une équation homogène, on peut supposer que $y = x^n + \cdots$ (d'après la division par une constante appropriée) ; le calcul du coefficient de x^n dans (4.85) donne

$$-n(n-1) - n(\alpha + \beta + 2) + \lambda = 0$$

d'où $\lambda = n(n + \alpha + \beta + 1)$. ♦

En posant $x = 1 - 2t$, $Z(t) = y(1 - 2t)$ dans (4.83), on vérifie que Z est une solution de l'équation différentielle hypergéométrique (voir l'exercice 31 et la suite (sect. 2.8) pour les solutions de cette équation) :

$$t(1-t)Z'' + \big((\alpha + 1) - (\alpha + \beta + 2)t\big)Z' + n(n + \alpha + \beta + 1)Z = 0\,. \tag{4.86}$$

L'équation (4.86) possède deux solutions linéairement indépendantes

$$Z_1(t) = F(-n,\, n + \alpha + \beta + 1\,;\alpha + 1\,;t)$$
$$Z_2(t) = t^{-\alpha}F(-n - \alpha,\, n + \beta + 1\,;1 - \alpha\,;t)$$

où Z_2 est défini seulement si $\alpha \notin \mathbb{N}^*$; rappelons que

$$F(a, b\,; c\,; t) = 1 + \frac{ab}{c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}\,t^2 + \cdots$$

pour $c \notin -\mathbb{N}$ et notons que $F(a, b\,; c\,; t)$ est un polynôme en t si et seulement si a ou b est un entier $\leqslant 0$. On conclut que, si $\alpha \notin \mathbb{N}^*$, les seules solutions polynomiales non triviales de (4.86) sont des multiples de Z_1 ; si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, Z_1 est toujours une solution polynomiale non triviale de (4.86) et, alors que Z_2 n'est pas définie, on peut démontrer qu'il n'y a aucune solution polynomiale linéairement indépendante de Z_1. Transposant ces remarques à l'équation (4.83), on peut conclure que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta > -1$,

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n} Z_1\left(\frac{1-x}{2}\right) \\ &= \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n,\, n + \alpha + \beta + 1\,;\alpha + 1\,;\frac{1-x}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.87}$$

C'est la représentation des polynômes de Jacobi en termes de fonctions hypergéométriques. La richesse de la théorie des fonctions hypergéométriques devient alors une source pour la déduction de beaucoup de propriétés des polynômes de Jacobi.

4.7.8 Polynômes de Legendre

Même si ces polynômes constituent un cas très particulier ($\alpha = \beta = 0$) des polynômes de Jacobi, nous détaillons ici leurs propriétés principales à cause de leurs importances. Ces propriétés sont obtenues en posant $\alpha = \beta = 0$ dans les formules du paragraphe 4.7.7 ; on peut les démontrer directement en suivant les démarches du paragraphe 4.7.7 qui deviennent très simples à cause de l'hypothèse simplificatrice $\alpha = \beta = 0$.

Le n-ième polynôme de Legendre $P_n(x)$ est (pour $n = 0, 1, \ldots$)

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\mathrm{D}^n\Big\{\big(x^2-1\big)^n\Big\} \quad \textit{(formule de Rodriguez)}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k\,.$$

$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal dans $L^2([-1\,,\,1])$: pour m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{si } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \textit{si } m = n. \end{cases}$$

Le coefficient de x^n dans $P_n(x)$ est

$$2^{-n}\binom{2n}{n} \quad (n \geqslant 0)\,;$$

le coefficient de x^{n-1} $(n \geqslant 1)$ étant 0 ; $P_n(1) = 1$. On a la *formule de récurrence* : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

avec $P_0(x) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $y = P_n(x)$ vérifie l'équation différentielle de Legendre :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\,.$$

On a

$$P_0(x) = 1\,,\ P_1(x) = x\,,\ P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2-1)\,,\ P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3-3x)\,.$$

Notons que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ (Ex. 4, sect. 4.8).

Dans le volume 2, on a démontré que la ***fonction génératrice*** des $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \big(1-2xz+z^2\big)^{-1/2}\,, \quad |x| \leqslant 1\,,\ |z| < 1\,.$$

4.7.9 Polynômes de Laguerre

Notre point de départ est la formule de Rodriguez générale (4.75) avec

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha}\,, \quad \alpha > -1\,, \quad x \in X = \left]\,0\,,\,\infty\,\right[\,.$$

Posons $L_n^{(\alpha)}(x) = p_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, où

$$p_n(x) = \frac{(-1)^n}{\rho(x)}\,\mathrm{D}^n\{\rho(x)x^n\} = (-1)^n\,\mathrm{e}^x x^{-\alpha}\mathrm{D}^n\{\mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha}\}\,. \tag{4.88}$$

Les $L_n^{(\alpha)}(x)$ s'appellent ***polynômes de Laguerre*** (§ 4.7.5(4)).

Nous vérifions d'abord que p_n *est un polynôme de degré* n *ayant le coefficient* k_n *de* x^n *égal à* 1 ; en effet,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (-1)^n\,\mathrm{e}^x x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{D}^k(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{D}^{n-k}(x^{n+\alpha}) \\ &= (-1)^n\,\mathrm{e}^x x^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-x}a_k x^{k+\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+n}a_k x^k \end{aligned}$$

où $a_n = 1$, $a_{n-1} = (n+\alpha)$, $a_k = (n+\alpha)\cdots(k+\alpha+1)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Nous écrivons

$$L_n^{(\alpha)}(x) = p_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(k+\alpha+1)x^k\,.$$

Notons que le coefficient k'_n de x^{n-1} dans $p_n(x)$, $n \geqslant 1$, est égal à $-n(n+\alpha)$. Vérifions que, pour m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle p_m\,,\,p_n\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ n!\,\Gamma(\alpha+n+1) & \text{si } m = n \end{cases} \tag{4.89}$$

où

$$\langle p_m\,,\,p_n\rangle = \int_0^{\infty} p_m(x)p_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\int_0^{\infty} p_m(x)\,\mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha})\,\mathrm{d}x\,.$$

Supposons que $m \leqslant n$; en effectuant m intégrations par parties, on obtient

$$\langle p_m\,,\,p_n\rangle = (-1)^{n+m}\int_0^{\infty}\mathrm{D}^m\big(p_m(x)\big)\,\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha})\,\mathrm{d}x\,.$$

Si $m < n$, une intégration par parties supplémentaires montre que

$$\langle p_m , p_n \rangle = 0$$

car $\mathrm{D}^{m+1} p_m = 0$; si $m = n$, on a

$$\begin{aligned}\langle p_m , p_n \rangle &= \int_0^\infty \mathrm{D}^n\big(p_n(x)\big)\, \mathrm{e}^{-x} x^{n+\alpha}\, \mathrm{d}x \\ &= n! \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{n+\alpha}\, \mathrm{d}x = n!\, \Gamma(n+\alpha+1)\,.\end{aligned}$$

Ceci prouve (4.89).

Nous établissons maintenant la formule de récurrence et l'équation différentielle vérifiée par les $p_n = L_n^\alpha$.

Pour la formule de récurrence, on utilise la formule générale (4.74) ; on vérifie qu'ici

$$A_n = 1\,, \quad B_n = -(2n+\alpha+1)\,, \quad C_n = n(n+\alpha)$$

et la *formule de récurrence pour les L_n^α est*

$$L_{n+1}^\alpha(x) = \big(x - (2n+\alpha+1)\big) L_n^\alpha(x) - n(n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) \tag{4.90}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ avec $L_0^\alpha(x) = 1$.

Rappelons que cette formule de récurrence est basée sur la standardisation d'avoir le coefficient de x^n égal à 1 ; d'autres standardisations changeraient la formule. Nous démontrons maintenant que $y = L_n^\alpha(x)$ *vérifie l'équation de Laguerre*

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0\,. \tag{4.91}$$

Pour (4.91), les standardisations ne jouent aucun rôle.

DÉMONSTRATION

Nous procédons exactement comme pour (4.83) dans le cas des polynômes de Jacobi. On écrit (4.91) sous la forme

$$\mathrm{D}(\mathrm{e}^{-x} x^{\alpha+1} y') + n\, \mathrm{e}^{-x} x^\alpha y = 0\,.$$

Un petit calcul montre que

$$\mathrm{D}(\mathrm{e}^{-x} x^{\alpha+1} y') = \mathrm{e}^{-x} x^\alpha Z = \rho(x) Z$$

où Z est un polynôme réel de degré $\leqslant n$; nous démontrons que $Z \perp p$ pour tout polynôme réel p de degré $\leqslant n-1$, ce qui entraînera que $Z = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour établir que $Z \perp p$ (pour tout polynôme réel p de degré $\leqslant n-1$), on calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\langle Z\,,\,p\rangle &= \int_0^\infty \rho(x)Z(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{D}(\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha+1}y')p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha+1}y'p'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty y\,\mathrm{D}\big(\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha+1}p'(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha}r(x)\,\mathrm{d}x = \langle y\,,\,r\rangle = 0\end{aligned}$$

en faisant deux intégrations par parties et en observant que r est un polynôme réel de degré $\leqslant n-1$. On conclut que

$$\mathrm{D}(\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha+1}y') + \lambda\,\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha}y = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui correspond à avoir

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + \lambda y = 0\,.$$

Puisque $y = x^n + \cdots$, on obtient, en faisant un calcul du coefficient de x^n, que $\lambda = n$. Ceci établit (4.91). ♦

On démontre aisément que l'équation

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + \lambda x = 0$$

possède une solution non triviale polynomiale si et seulement si $\lambda = n \in \mathbb{N}$; dans ce cas, cette solution est un multiple de L_n^α ; pour $\alpha = 0$, ceci est démontré dans l'exercice 36 (sect. 2.8).

4.7.10 Polynômes d'Hermite

Pour ces polynômes, on peut procéder comme dans le cas des polynômes de Laguerre mais il est plus rapide de commencer par l'observation suivante : soit $G(x,z) = \exp(2xz - z^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$; alors

$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

où

$$H_n(x) = \big(-1\big)^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x^2}) = \sum_{k=0}^{[n/2]} n!\,\frac{\big(-1\big)^k}{k!}\,\frac{\big(2x\big)^{n-2k}}{(n-2k)!} \tag{4.92}$$

avec $[x]$ représentant le plus grand entier $\leqslant x$.

En effet, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $z \mapsto G(x,z)$ est une fonction entière ; donc son développement de Taylor autour de $z = 0$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et le coefficient $H_n(x)$ de $z^n/n!$ dans ce développement est donné par

$$H_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\,G(x,z)\bigg|_{z=0} = \mathrm{e}^{x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\,f(z-x)\bigg|_{z=0} = \mathrm{e}^{x^2}f^{(n)}(-x)$$

où $f(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2}$ (car $G(x,z) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-(z-x)^2}$) ; puisque $f(-\xi) = f(\xi)$, on a $f^{(n)}(-\xi) = (-1)^n f^{(n)}(\xi)$ d'où

$$H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2}(-1)^n f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x^2}).$$

Nous calculons maintenant $H_n(x)$ explicitement en utilisant les séries entières pour e^{2xz} et e^{-z^2} :

$$G(x,z) = \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{e}^{2xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$$

où

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

avec $a_j = (-1)^k/k!$ si $j = 2k$, $a_j = 0$ si $j = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ et $b_j = (2x)^j/j!$, $j \in \mathbb{N}$. Donc

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}$$

ce qui établit (4.92).

Notons que le coefficient de x^n dans $H_n(x)$ est 2^n, $n \in \mathbb{N}$. *Les polynômes* $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *forment le système de polynômes orthogonaux associés à* $X = \mathbb{R}$ *et à la fonction poids* ρ *donnée par* $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, *où la standardisation est effectuée en prenant* 2^n *pour coefficient de* x^n *dans* $H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, pour tout m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle H_m, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi^{1/2} 2^n n! & \text{si } m = n. \end{cases} \tag{4.93}$$

Il suffit d'établir (4.93) pour $m \leqslant n$; alors on a

$$\begin{aligned} \langle H_m, H_n \rangle &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\,\mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x^2})\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}^m H_m(x)\,\mathrm{D}^{n-m}(\mathrm{e}^{-x^2})\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

après m intégrations par parties. Si $m < n$, une intégration par partie supplémentaire montre que $\langle H_m, H_n \rangle = 0$ car $\mathrm{D}^{m+1} H_m(x) \equiv 0$, $H_m(x)$ étant un polynôme de degré m. Si $m = n$, le calcul montre que

$$\langle H_m, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}^n H_n(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^n \cdot n! \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}$$

car $\mathrm{D}^n H_n(x) = 2^n\,\mathrm{D}^n x^n = 2^n \cdot n!$ étant donné que $H_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le terme de degré n est $2^n x^n$. Ainsi (4.93) est démontrée.

Nous établissons maintenant la *formule de récurrence*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{4.94}$$

avec $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. En effet, à partir de

$$\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{e}^{-x^2}) = \mathrm{D}^n(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}) = (-2x)\,\mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x^2}) - 2n\,\mathrm{D}^{n-1}(\mathrm{e}^{-x^2})\,,$$

on obtient (4.94) immédiatement en multipliant par $\big(-1\big)^{n+1}\,\mathrm{e}^{x^2}$ les deux membres. On a ainsi

$$H_0(x) = 1\,,\ H_1(x) = 2x\,,\ H_2(x) = 4x^2 - 2\,,\ H_3(x) = 8x^3 - 12\,x\,,\ \ldots$$

Démontrons l'*équation différentielle* caractéristique vérifiée par $y = H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$; on a

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0\,. \tag{4.95}$$

En effet on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= \big(-1\big)^n\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{e}^{-x^2}) + \big(-1\big)^n 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x^2}) \\ &= -H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) \end{aligned} \tag{4.96}$$

d'où, en utilisant la formule de récurrence (4.94), on obtient

$$H_n'(x) = -2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) + 2xH_n(x)\,,$$

c'est-à-dire

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,, \tag{4.97}$$

une formule utile pour les calculs avec les H_n. En dérivant par rapport à x les deux membres de (4.96), on obtient

$$H_n''(x) = -H_{n+1}'(x) + 2H_n(x) + 2xH_n'(x)$$

d'où, en utilisant (4.97),

$$H_n''(x) = -2(n+1)H_n(x) + 2H_n(x) + 2xH_n'(x)$$

ce qui est (4.95) avec $y = H_n(x)$.

REMARQUE. On peut démontrer que l'équation

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

possède une solution non triviale polynomiale si et seulement si $\lambda = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, et alors la solution polynomiale est un multiple de $H_n(x)$ (Ex. 29, sect. 2.8).

4.7.11 Bases orthogonales dans $L^2(X)$

Les polynômes orthogonaux associés à X, ρ peuvent être considérés comme des bases orthogonales intéressantes des espaces $L^2(X;\rho)$; ils permettent également la construction des bases orthogonales de $L^2(X)$ qui nous seront utiles.

Le principe général simple est le suivant : *si* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthogonale pour* $L^2(X;\rho)$, *alors les fonctions* $\psi_n = \varphi_n\rho^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$, *forment une base orthogonale pour* $L^2(X)$. Pour cette affirmation X peut être une partie « arbitraire » de $\mathbb{R}^N$ et $\rho : X \to [\,0\,,\,\infty\,[$ une fonction poids au sens qu'elle est intégrable dans X avec $\rho(x) > 0$ p.p. $x \in X$. En effet, si m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, alors

$$\int_X \psi_m(x)\overline{\psi_n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \varphi_m(x)\overline{\varphi_n}(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,;$$

de plus, $f \in L^2(X)$ si et seulement si $f/\rho^{1/2} \in L^2(X;\rho)$ d'où la relation

$$\int_X f(x)\overline{\psi_n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_X \frac{f(x)}{\rho^{1/2}(x)}\,\overline{\varphi_n}(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

montre que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est complet dans $L^2(X)$ si et seulement si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est complet dans $L^2(X;\rho)$.

Donnons un exemple de ce procédé : si $\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthogonale de* $L^2(\mathbb{R})$ car $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R};\rho)$ avec $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Un autre procédé général, qui permet la construction de nouvelles bases orthogonales, c'est le changement de variable. Nous illustrons ce procédé lorsque X est un sous-intervalle de $\mathbb{R}$; supposons que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale pour $L^2(X;\rho)$, ρ étant une fonction poids dans X. Soit

$$\theta : Y \longrightarrow X$$

une application bijective de classe C^1, Y étant un intervalle de $\mathbb{R}$ et supposons que $\theta'(y) \geqslant 0$. Alors *les fonctions* ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, *définies par*

$$\psi_n(y) = \varphi_n\big(\theta(y)\big)\Big\{\theta'(y)\rho\big(\theta(y)\big)\Big\}^{1/2}\,, \quad y \in Y$$

forment une base orthogonale pour $L^2(Y)$.

En effet, si $m \neq n$, m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_Y \psi_m(x)\overline{\psi_n}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_Y \varphi_m\big(\theta(y)\big)\,\overline{\varphi_n}\big(\theta(y)\big)\,\rho\big(\theta(y)\big)\theta'(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_X \varphi_m(x)\overline{\varphi_n}(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,;\end{aligned}$$

de plus, si $f \in L^2(Y)$, on a, par un calcul analogue,

$$\int_Y f(y)\overline{\psi_n}(y)\,dy = \int_X \frac{f(\theta^{-1}x)}{\sqrt{\theta'(\theta^{-1}x)\rho(x)}}\,\overline{\varphi_n}(x)\rho(x)\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Notons que

$$\int_Y |f(y)|^2\,dy = \int_X \frac{|f(\theta^{-1}x)|^2}{\theta'(\theta^{-1}x)\rho(x)}\,\rho(x)\,dx$$

de sorte que $f \in L^2(Y)$ si et seulement si $g \in L^2(X;\rho)$ où

$$g(x) = \frac{f(\theta^{-1}x)}{\sqrt{\theta'(\theta^{-1}x)\rho(x)}}\,.$$

On constate que si $f \in L^2(Y)$ est tel que

$$\int_Y f(y)\overline{\psi_n}(y)\,dy = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

alors

$$\int_X g(x)\overline{\varphi_n}(x)\rho(x)\,dx = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ainsi, si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est complet dans $L^2(X;\rho)$, on a $g(x) = 0$ p.p. $x \in X$ d'où $f(\theta^{-1}x) = 0$ p.p. $x \in X$, ce qui équivaut à $f(y) = 0$ p.p. $y \in Y$. Notons que les conditions sur θ sont telles que $\theta'(y) > 0$ p.p.(y) et mesure$(A) = 0$ si et seulement si mesure$(\theta^{-1}A) = 0$, $A \subset X$; c'est une conséquence des formules

$$\text{mesure}(A) = \int_{\theta^{-1}A} \theta'(y)\,dy\,, \quad A \subset X$$

$$\text{mesure}(\theta B) = \int_B \theta'(y)\,dy\,, \quad B \subset Y$$

A, B étant des parties boréliennes de X, Y respectivement. Puisque ces considérations dépendent uniquement de la formule de changement de variable dans les intégrales (démontrées dans $\mathbb{R}^N$, vol. 1), elles sont appliquables aux parties de $\mathbb{R}^N$. (L'exercice 1 (sect. 7.8) illustre un cas particulier simple de la discussion précédente.)

Considérons maintenant la théorie de la convergence des développements orthogonaux lorsqu'on fait ces changements de base. Supposons qu'il s'agisse des bases orthogonales $\{\varphi_n\}$ dans $L^2(X;\rho)$ et $\{\psi_n\}$ dans $L^2(X)$ où $\psi_n = \varphi_n\rho^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^2(X)$, le développement orthogonal de f relatif aux $\{\psi_n\}$ est, en fait, le même que le développement orthogonal de $f/\rho^{1/2}$ relatif aux $\{\varphi_n\}$: on a

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n\,, \quad \frac{f}{\rho^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_X f(x)\overline{\psi_n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n}\int_X \frac{f(x)}{\sqrt{\rho(x)}}\,\overline{\varphi_n}(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lambda_n = \int_X \bigl|\psi_n(x)\bigr|^2\,\mathrm{d}x = \int_X \bigl|\varphi_n(x)\bigr|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

S'il s'agit des polynômes orthogonaux classiques, on peut alors utiliser les théorèmes cités dans le paragraphe 4.9.1, en ce qui concerne la convergence ponctuelle ; en ce qui concerne la convergence hilbertienne, il n'y a aucune difficulté : tous les développements orthogonaux convergent dans le sens des espaces hilbertiens dans la mesure où les fonctions concernées appartiennent aux espaces en question.

4.8 EXERCICES

1 Soit $\rho : X \to [\,0\,,\,\infty\,[$ une fonction poids dans un intervalle $X \subset \mathbb{R}$; si Y est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\theta : Y \to X$, $\theta(y) = \alpha y + \beta$ est une bijection, démontrer les affirmations suivantes :

(i) si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans $L^2(X;\rho)$, alors $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans $L^2(Y;\widetilde{\rho})$ où $\widetilde{\varphi}_n = \varphi_n \circ \theta$, $\widetilde{\rho} = \rho \circ \theta$;

(ii) si $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes orthogonaux associés à X, ρ, alors $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes orthogonaux associés à Y, $\widetilde{\rho}$; si $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes orthonornaux associés à X, ρ, alors $\{\sqrt{|\alpha|}(\operatorname{sgn}\alpha)^n\widetilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes orthonormaux associés à Y, $\widetilde{\rho}$.

2 Démontrer que les polynômes orthogonaux associés à $L^2\bigl([\,a\,,\,b\,]\bigr)$ sont donnés par $P_n\bigl((2x-1)/(b-a)\bigr)$, $n \in \mathbb{N}$, où les P_n sont les polynômes de Legendre dans $[\,-1\,,\,1\,]$.

3 Démontrer que les polynômes orthogonaux associés à $L^2(\mathbb{R}\,;\rho)$, $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, sont donnés par $H_n(x/\sqrt{2})$, $x \in \mathbb{N}$, où les H_n sont les polynômes d'Hermite comme définis dans le paragraphe 4.7.10. Si $\bigl(He\bigr)_n(x) = 2^{-n/2}H_n(x/\sqrt{2})$, alors vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigl(He\bigr)_n(x) = \bigl(-1\bigr)^n\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{D}^n(\mathrm{e}^{-x^2/2})\,.$$

(Dans la théorie des probabilités et statistiques, on utilise généralement les $\bigl(He\bigr)_n(x)$ au lieu des $H_n(x)$.)

4 Soient X un intervalle symétrique par rapport à 0 dans $\mathbb{R}$ ($x \in X \Rightarrow -x \in X$), $\rho : X \to [\,0\,,\,\infty\,[$ une fonction poids dans X telle que $\rho(-x) = \rho(x)$, $x \in X$ et $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ les polynômes orthogonaux associés à X, ρ. Démontrer

que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x)$, $x \in X$, c'est-à-dire pour n pair le polynôme $\varphi_n(x)$ contient seulement les puissances paires de x et pour n impair le polynôme $\varphi_n(x)$ contient seulement les puissances impaires de x. (Ceci se déduit de l'égalité

$$\int_X \varphi_n(-x) x^k \rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

d'où $\varphi_n(-x) = c\varphi_n(x)$ avec $c = (-1)^n$, en comparant les coefficients de x^n.)

5 Vérifier que l'exercice 4 est appliquable aux polynômes de Legendre, de Chebyshev et d'Hermite.

6 Démontrer que, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$P_{2n+1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}$$

les P_n étant les polynômes de Legendre (utiliser la formule de récurrence). En déduire la formule

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = P_n(0)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

7 Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x)\,,$$

les P_n étant les polynômes de Legendre. (Voir que, avec $c_n = 1/2^n n!$,

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) &= \left\{ c_{n+1} \,\mathrm{D}^{n+1} (x^2-1)^{n+1} - c_{n-1} \,\mathrm{D}^{n-1} (x^2-1)^{n-1} \right\}' \\ &= \left\{ c_{n+1} \,\mathrm{D}^2 (x^2-1)^{n+1} - c_{n-1} (x^2-1)^{n-1} \right\}^{(n)} \\ &= \frac{2n+1}{2^n n!} \,\mathrm{D}^n (x^2-1)^n\,.) \end{aligned}$$

8 (Continuation de l'exercice 7) Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n+1) \int_{-1}^{x} P_n(t)\,\mathrm{d}t = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

En déduire la formule d'intégration par partie suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n+1} \int_{-1}^{1} f'(x) \{ P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) \}\,\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec f une fonction C^1 par morceaux.

9 (Continuation de l'exercice 8) Soit $f \in L^2([-1,1])$; vérifier que le développement en série de f relatif aux $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

où $a_n = (2n+1)/2 \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$. En conclure que

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|a_n|^2}{2n+1}\,.$$

10 (Continuation de l'exercice 9) Soit $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$; vérifier que : $a_n = 0$ si n est impair, $a_0 = 1/2$, $a_2 = 5/8$ et, pour n pair > 2,

$$a_n = -\frac{(2n+1)}{(n-1)(n+2)}\,P_n(0)\,.$$

11 Vérifier

$$x^2 = \frac{2}{3}\,P_2(x) + \frac{1}{3}\,P_0(x)$$

où les P_n sont les polynômes de Legendre. En conclure que

$$\inf_{a,\,b\in\mathbb{C}} \int_{-1}^{1} |x^2 - (ax+b)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} \left|x^2 - \frac{1}{3}\right|^2 dx = \left\|\frac{2}{3}\,P_2\right\|^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{45}\,.$$

12 (Continuation de l'exercice 11) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j(x)$ où $a_j = \langle x^n\,,\, P_j(x)\rangle / \|P_j\|^2$, $0 \leqslant j \leqslant n$ avec $a_n = 2^n/\binom{2n}{n}$. En conclure que

$$d_n^2 = \inf_{c_0,\,c_1,\,\ldots,\,c_{n-1}\,\in\mathbb{C}} \int_{-1}^{1} \left|x^n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j\right|^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left|x^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j P_j(x)\right|^2 dx = \|a_n P_n\|^2 = \left\{2^n/\binom{2n}{n}\right\}^2 \frac{2}{2n+1}\,.$$

Démontrer que $\lim_{n\to\infty} d_n^2 = 0$. (Noter que la formule de Stirling donne $\binom{2n}{n} \sim 2^{2n}/\sqrt{n\pi}$ d'où $d_n^2 \sim \pi/2^{2n}$.)

13 Etablir les formules suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xH_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \sqrt{\pi} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0,\, 2 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} & \text{si } n = 0 \\ 2\sqrt{\pi} & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

où les H_n sont les polynômes d'Hermite (§ 4.7.10).

14 En posant $u = \ln x - (n+1)/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ dans les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = 0\,,$$

vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \exp \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\int_0^{\infty} x^n \sin(2\pi \ln x)\,\mathrm{e}^{-(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Conclure que pour la fonction poids ρ dans $X = \,]\,0\,,\,\infty\,[$ donnée par $\rho(x) = \mathrm{e}^{-(\ln x)^2}$, $x \in X$, la fonction $f \in L^2(X;\rho)$ avec $f(x) = \sin(2\pi \ln x)$ est telle que

$$\langle x^n\,,\, f\rangle = \int_0^{\infty} f(x) x^n \rho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

sans que $f = 0$ p.p. $x \in X$.

REMARQUE. Ceci donne un exemple de X, ρ tels que les polynômes ne forment pas un ensemble total dans $L^2(X;\rho)$ même si chaque polynôme est dans $L^2(X;\rho)$.

4.9 COMPLÉMENTS ET REMARQUES

4.9.1 Convergence ponctuelle des développements orthogonaux

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions orthogonales dans un espace hilbertien $L^2(X, \Sigma, \mu)$ (§ 3.2.4), on a vu dans la proposition 3.5.7 que la série $\sum_n f_n$ converge (dans le sens de $L^2(X, \Sigma, \mu)$), donnant une somme $f \in L^2(X, \Sigma, \mu)$), si et seulement si $\sum_n \|f_n\|^2 < \infty$ (et alors $\|f\|^2 = \sum_n \|f_n\|^2$). On peut se poser aussi la question de la convergence ponctuelle de $\sum_n f_n(x)$ (partout dans X ou

μ-p.p. dans X). Sans entrer dans les détails subtils de cette question, donnons une réponse générale utile : (*théorème de Rademacher-Meshov*) *si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2 \ln^2 n < \infty ,$$

alors la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ *converge p.p.*(x).

Supposons que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthogonale dans $L^2(X;\rho)$ (où X est un intervalle de $\mathbb{R}$, ρ une fonction poids dans X ; la discussion peut être présentée aussi dans le cadre plus général précédent). Si $f \in L^2(X;\rho)$, la série $\sum_n a_n\varphi_n$ avec

$$a_n(f) = a_n = \frac{\langle f\,,\,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

s'appelle le *développement orthogonal* de f relatif aux $\{\varphi_n\}$ et on écrit

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\,.$$

Notons que (d'après la propoposition 3.5.7)

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n \in L^2(X;\rho)$$

existe toujours dans le sens de $L^2(X;\rho)$ car

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\varphi_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle|^2}{\|\varphi_n\|^2} \leqslant \|f\|^2 < \infty$$

selon l'inégalité de Bessel (corollaire 3.4.5 appliqué à $\varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|$, $\alpha \in \mathbb{N}$). De plus,

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2\,;$$

en effet, $f = g + (f-g)$ avec $(f-g) \perp g$ car

$$\langle g\,,\,\varphi_n\rangle = a_n\|\varphi_n\|^2 = \langle f\,,\,\varphi_n\rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

d'où

$$\langle f-g\,,\,\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f-g\,,\,a_n\varphi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n \{\langle f\,,\,\varphi_n\rangle - \langle g\,,\,\varphi_n\rangle\} = 0\,;$$

donc

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|f-g\|^2\,.$$

On conclut que $f = g$ (c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ p.p.(x)) si et seulement si $\|f\|^2 = \|g\|^2$ ce qui équivaut à

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \|\varphi_n\|^2 \ (= \|g\|^2) .$$

C'est le cas pour tout $f \in L^2(X;\rho)$ si et seulement si $\{\varphi_n\}$ est une suite orthogonale complète (chap. 3).

Ainsi si $\{\varphi_n\}$ est une suite orthogonale complète, alors $\sum_n a_n\varphi_n$ converge vers f au sens de $L^2(X;\rho)$, c'est-à-dire

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n \right\| = 0$$

et

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \|\varphi_n\|^2$$

d'après la théorie générale du chapitre 3. Ici aussi, on peut poser la question de la convergence ponctuelle de $\sum_n a_n\varphi_n(x)$; le théorème de Rademacher–Menshov cité entraîne immédiatement que *si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\varphi_n\|^2 \ln^2 n < \infty ,$$

alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ *converge p.p.* $x \in X$ (donnant une somme $g(x)$, où $f(x) = g(x)$ p.p.(x) si $\{\varphi_n\}$ est une suite orthogonale complète). On peut appliquer ce critère si on a des estimations précises sur les coefficients (dits de Fourier) a_n de f.

Ce qui est dit s'applique en particulier aux polynômes orthogonaux φ_n associés à X, ρ et le développement orthogonal de $f \in L^2(X;\rho)$ relatif aux φ_n. Sans entrer dans les détails, donnons un résultat général valable pour *tous les polynômes classiques* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée et* C^1 *par morceaux ; alors pour* $x \in \mathring{X}$, *le développement orthogonal de* f *relatif aux* $\{\varphi_n\}$ *converge vers* $\{f(x+) + f(x-)\}/2$. Autrement dit, si x est un point intérieur de X, alors

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}$$

où $a_n = \langle f , \varphi_n\rangle / \|\varphi_n\|^2$, $n \in \mathbb{N}$ et f est une fonction réelle bornée définie dans X qui est C^1 par morceaux (ce qui entraîne que f possède un nombre fini de discontinuités de première espèce dans chaque sous-intervalle compact contenu dans $\mathring{X}$).

On voit que le théorème énoncé est analogue à un théorème déjà vu pour la convergence ponctuelle des séries de Fourier ; en fait, la démonstration du théorème énoncé consiste en l'établissement d'une comparaison entre la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$ et la somme partielle d'une série de Fourier de f dans un voisinage ouvert $]\, x-\varepsilon\,,\ x+\varepsilon\,[$. On trouvera les indications bibliographiques dans le paragraphe 4.9.3.

La théorie de la convergence des séries de Fourier (étudiée dans la première partie de ce chapitre) sert de modèle pour la théorie de la convergence des séries orthogonales plus générales examinées ci-dessus. Même si beaucoup de résultats dans les deux théories sont similaires, la théorie générale des séries orthogonales est bien plus complexe et on sait que certains résultats valables pour les séries de Fourier (par exemple, la convergence presque partout des séries de Fourier de fonctions continues) ne sont pas exacts pour les développements orthogonaux généraux.

4.9.2 Problème des moments

Le problème général des moments dans $\mathbb{R}$ est le suivant : étant donné une suite de nombres réels $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe-t-il une mesure positive finie μ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \,\mathrm{d}\mu(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,?$$

Rappelons que si la mesure posible μ possède une densité ρ, ce qui veut dire que $\rho : \mathbb{R} \to [\,0\,,\,\infty\,[$ est tel que

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad A \text{ partie borélienne de } \mathbb{R}\,,$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \rho(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Une question annexe importante est de savoir si μ est uniquement déterminée par les a_n. Puisque a_n s'appelle le n-ième moment de la « distribution de masse » μ (ou de la « loi de probabilité » μ si $\mu(\mathbb{R}) = 1$), le problème posé s'appelle le *problème des moments* qui a, en fait, deux parties :

(i) l'existence d'une mesure μ étant donné les a_n ;
(ii) l'unicité d'une telle mesure μ si elle existe.

Si l'on exige que le support de la mesure μ soit contenu dans l'intervalle fermé $X \subset \mathbb{R}$ (ce qui veut dire que $\mu(A) = 0$ pour toute partie borélienne A de X^c), alors la densité ρ de μ (en supposant que μ a une densité) sera 0 dans X^c. Si $X = \mathbb{R}$, le problème des moments est dit problème des moments de Hamburger ; si $X = [\,0\,,\,\infty\,[$, on l'appelle problème des moments de Stieltjes et si $X = [\,0\,,\,1\,]$, on le nomme problème de Hausdorff. (Le support d'une mesure dans $\mathbb{R}$ est nécessairement un ensemble fermé dans $\mathbb{R}$.)

Dans le cas où le support de μ est restreint à un *intervalle* (ou un *ensemble*) *compact* X, le problème des moments possède une unique solution (*si une solution existe, elle est unique*). La démonstration, en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, est facile et elle est exactement semblable à celle donnée pour la proposition de complétude (prop. 4.7.2) pour les intervalles bornés. Pour le cas des intervalles fermés non bornés X, il existe des mesures positives μ à support dans X qui ne sont pas uniquement déterminées par leurs moments ; l'exercice 14 (sect. 4.8) permet de donner un tel exemple d'une mesure positive (ayant une densité) dans $[\,0\,,\,\infty\,[$. En effet, soit μ la mesure de densité $\rho(x) = \mathrm{e}^{-\ln^2 x}$, $x > 0$; posons

$$\rho_c(x) = \big\{1 + c\sin(2\pi \ln x)\big\}\rho(x)\,, \quad x > 0\,,$$

où $c \in \mathbb{R}$, $|c| < 1$. Alors $\rho_c(x) > 0$ pour $x > 0$; si μ_c est la mesure positive de densité ρ_c, dans $[\,0\,,\,\infty\,[$, alors on a vu dans l'exercice cité que

$$\int_0^\infty x^n \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_0^\infty x^n \,\mathrm{d}\mu_c(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

En fait, il y a une relation étroite entre la détermination de la mesure positive μ par ses moments et la complétude des polynômes orthogonaux associés à μ (on les définit exactement comme nous l'avons fait pour le cas où μ possède une densité ρ, appelée ici, fonction poids) ; la condition de complétude des polynômes orthogonaux associés à μ est équivalente à la condition que les polynômes forment une partie dense dans $L^2(\mu)$ (où $L^2(\mu)$ est formé des fonctions complexes f telles que $\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$).

Disons que la mesure positive μ dans $\mathbb{R}$ est *déterminée* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

et pour toute mesure positive ν dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \,\mathrm{d}\nu(x) < \infty\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^n \,\mathrm{d}\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \,\mathrm{d}\mu(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

on a $\mu = \nu$. Disons aussi que la mesure positive μ dans $\mathbb{R}$ est dite *polynôme-complète* si toute fonction $f \in L^2(\mu)$ est la limite d'une suite de polynôme (en supposant que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, ce qui équivaut à avoir tous les polynômes inclus dans $L^2(\mu)$) : cela signifie qu'il existe une suite de polynômes $\{p_n\}$ telle que

$$\big\|f - p_n\big\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x) - p_n(x)\big|^2 \mu(\mathrm{d}x) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant : *si μ est une mesure positive déterminée, alors μ est polynôme-complète ; si μ est une mesure positive telle que $\mu\big(\{x\}\big) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et μ est polynôme-complète, alors μ est déterminée.*

Ce théorème, transposé au cas qui nous intéresse dans ce chapitre où μ est une mesure positive, définie par une densité ρ (fonction poids dans un intervalle X), donne une analyse satisfaisante de la question de la complétude des polynômes orthogonaux associés à X, ρ : *il y a complétude si et seulement si ρ est déterminée par ses moments*. Cette affirmation explique aussi l'existence des exemples du type indiqué dans l'exercice 14 (sect. 4.8).

Le problème des moments a donné lieu à une vaste théorie avec des ramifications multiples. Le problème a été étudié (au siècle dernier) par Chebyshev et son école ; Stieltjes a donné (autour de 1894) une solution définitive à ce problème (dans l'intervalle $[\,0\,,\,\infty\,[\,$) en introduisant son intégrale (dite de Stieltjes, qui correspond à notre intégrale $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ par rapport à une mesure positive) et en associant le problème à la théorie des fractions continues et des fonctions analytiques (pour une description de certains résultats de Stieltjes et quelques références appropriées consulter le volume 2). Le problème de l'unicité a trouvé une solution définitive (en partie indiquée ci-dessus) dans les travaux de M. Riesz et R. Nevanlinna durant les années 1921 à 1923. Il est utile de citer le résultat élégant de M. Riesz : *μ est polynôme-complète si et seulement si la mesure ν suivante est déterminée : $\nu(A) = \int_A 1/(1+x^2)\,\mathrm{d}\mu(x)$, A borélien, $A \subset \mathbb{R}$* (μ étant une mesure positive finie dans $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} |x|^n\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$).

De la vaste littérature sur le sujet, nous citons seulement l'ouvrage de N. I. Akhiezer *The classical moment problem* (Oliver and Boyd, London, 1965). La théorie des polynômes orthogonaux étant intimement liée aux problèmes des moments, on trouvera d'autres références utiles au problème des moments dans les ouvrages cités ci-après.

4.9.3 Remarques bibliographiques sur les polynômes orthogonaux

Pour notre livre, comme nous l'avons déjà remarqué, l'intérêt principal des polynômes orthogonaux vient des équations différentielles vérifiées par ces derniers. Mais ces polynômes interviennent aussi dans l'analyse numérique, l'analyse complexe, la théorie des fractions continues, la théorie des probabilités et dans bien d'autres domaines. Donc, la littérature sur le sujet est vaste et variée. La monographie de G. Szegö (« Orthogonal polynomials », *American Mathematical Society*, 3$^{\mathrm{e}}$ édition 1967) est un ouvrage de référence complet. On peut aussi lire avec profit les livres introductifs de D. Jackson (« Fourier Series and orthogonal polynomials », *Mathematical Association of America*, 1941) et de F. G. Tricomi (*Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Springer-Verlag, 1955) ; nous les avons trouvés très utiles. Les théorèmes définitifs concernant la convergence ponctuelle des développements en polynômes orthogonaux classiques sont donnés dans la monographie de Szegö (et sont dus en partie à ce dernier). En ce qui concerne la convergence ponctuelle des développements en fonctions orthogonales générales, la théorie est assez compliquée et fractionnée ; un livre classique sur le sujet est celui de S. Kaczmarz et H. Steinhaus (*Theorie der*

Orthogonalreihen, Chelsea, N. Y., 1951 ; 1re édition 1935) ; une monographie récente est de B. S. Kashin et A. A. Saakyan (« Orthogonal series », *American Mathematical Society*, 1989).

4.9.4 Ondelettes

Depuis le début des années 1980, un nouveau type de bases orthogonales (appelées « les ondelettes ») pour les espaces $L^2(\mathbb{R}^N)$ commence à être utilisées, d'abord dans le traitement numérique des signaux (cette direction d'application reste toujours importante) mais ensuite, dans plusieurs autres domaines, y incluse la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires. Une introduction élémentaire à cette théorie serait parfaitement possible mais nous ne la ferons pas pour ne pas rendre notre ouvrage trop volumineux. Nous donnons deux références (en français), la première étant une introduction élémentaire (niveau comparable à notre livre) et le second étant une synthèse avancée (niveau troisième cycle) :

(i) G. Gasquet et P. Witorski, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris, 1990.

(ii) Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs* (trois volumes, le troisième en collaboration avec R. R. Coifman), Hermann, Paris (1990-1991).

4.9.5 Conclusion

Dans beaucoup de problèmes formulés dans le cadre d'un espace hilbertien, le choix d'une base orthogonale joue un rôle décisif. La situation est similaire à celle de l'algèbre linéaire élémentaire où l'analyse d'une application linéaire devient particulièrement transparente lorsqu'on peut choisir une bonne base pour l'espace vectoriel concerné ; c'est lié à la théorie de la diagonalisation des matrices associées aux applications linéaires. Cette diagonalisation est toujours possible lorsqu'il s'agit des applications linéaires hermitiennes dans les espaces hilbertiens de dimension finie ; ceci revient à la détermination d'une base orthogonale formée des vecteurs propres de l'application linéaire. Nous verrons qu'une situation analogue existe dans la théorie des équations aux dérivées partielles ; c'est pour cette théorie que nous avons développé les considérations du présent chapitre. Les fonctions trigonométriques et les polynômes orthogonaux (avec leurs variations indiquées dans le paragraphe 4.7.11) fournissent des bases orthogonales utiles pour les applications ; bien entendu, il y a d'autres bases orthogonales qui rendent également des services ; nous en verrons des exemples dans la suite.

CHAPITRE 5

Opérateurs dans les espaces hilbertiens

Ce chapitre est une présentation de la théorie des opérateurs dans un espace hilbertien en vue de l'étude des équations aux dérivées partielles. Pour les applications prévues, il nous faut connaître quelques propriétés élémentaires des opérateurs compacts autoadjoints qui seront développés dans les cinq premières sections ; la section 5.6 est courte ; elle introduit quelques notions spectrales pour les opérateurs bornés généraux. Les opérateurs compacts que nous allons rencontrer dans la suite de notre livre seront des inverses d'opérateurs non bornés ; les sections 5.8 et 5.9 sont consacrées donc à l'étude des opérateurs non bornés, généralement symétriques ou autoadjoint. Leur théorie est assez vaste et subtile ; nous en avons présenté juste la partie essentielle qui nous sera vraiment utile. La section 5.10 essaie d'illustrer l'importance de la théorie des opérateurs autoadjoints généraux dans la mécanique quantique. Le contenu de la théorie présentée dans les sections 5.8, 5.9 et 5.10 ne forment pas matière aux exercices présentés dans la section 5.7. Une dernière section donne quelques remarques historiques et bibliographiques.

5.1 NOTIONS FONDAMENTALES

5.1.1 Définitions générales

Soient E, F deux espaces préhilbertiens (dont les normes et produits scalaires seront notés par les mêmes symboles $\|\cdot\|$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, sauf mention contraire) ; comme indiqué au chapitre 3, tous nos espaces vectoriels sont pris sur le corps $\mathbb{C}$.

Rappelons qu'une application linéaire $u : E \to F$ s'appelle un ***opérateur linéaire*** (de E dans F) ; on a vu (prop. 3.1.6) que u est ***continu*** si et seulement si u est ***borné*** dans le sens que

$$\|u\| = \sup\{\|u(f)\| : \|f\| \leqslant 1\} < \infty \tag{5.1}$$

Ainsi, u est continu si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|u(f)\| \leqslant M\|f\|\,, \quad f \in E\,; \tag{5.2}$$

le plus petit nombre M tel que (5.2) soit valable est défini par (5.1) et il s'appelle la ***norme*** de u (notée $\|u\|$). L'ensemble des ***opérateurs linéaires continus*** de E dans F sera noté $\mathcal{L}(E,F)$. Si u et v sont deux opérateurs linéaires de E dans F et $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit les opérateurs linéaires $u+v$ et αu (de E dans F) par les formules

$$(u+v)(f) = u(f) + v(f)\,, \quad (\alpha u)(f) = \alpha u(f)\,, \quad f \in E\,.$$

On démontre que $\mathcal{L}(E,F)$ *est un espace vectoriel normé* avec $\|u\|$ défini par (5.1) pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$. En effet, on a que $u+v$ et αu sont dans $\mathcal{L}(E,F)$ si u, $v \in \mathcal{L}(E,F)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, avec

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|\,, \quad \|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\| \tag{5.3}$$

ce que l'on démontre aussitôt à partir de (5.1) ; de plus, $\|u\| = 0$ équivaut à $u = 0$ (*c'est-à-dire* $u(f) = 0$ pour tout $f \in E$).

Soit u un opérateur linéaire de E dans F ; de l'algèbre linéaire, on sait que u *est injectif si et seulement si*

$$u^{-1}(0) = \big\{f \in E : u(f) = 0\big\} = \{0\}\,;$$

de plus, $u^{-1}(0)$ est toujours un sous-espace vectoriel de E (appelé le ***noyau*** de u). De même, $u(E)$ est toujours un sous-espace vectoriel de F (appelé l'***image*** de u). Notons que *si* $u \in \mathcal{L}(E,F)$, *alors* $u^{-1}(0)$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E mais que $u(E)$ n'est pas nécessairement fermé dans F.

Soit u un opérateur linéaire injectif de E dans F ; si $F_1 = u(E)$, alors $u^{-1} : F_1 \to E$ est défini par la formule suivante : pour $g \in F_1$, $u^{-1}(g) = f \in E$ où f est l'unique élément de E tel que $u(f) = g$; on sait que u^{-1} est un opérateur linéaire de F_1 dans E. En général, même si u est continu et injectif, $u^{-1} : F_1 \to E$ n'est pas nécessairement continu ; nous dirons que l'opérateur linéaire *injectif* u de E dans F (non nécessairement continu) possède un ***inverse continu*** (en symboles, $u^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$) si $u(E) = F$ et $u^{-1} : F \to E$ est continu.

Si u et v sont deux opérateurs linéaires de E dans E, nous définissons $uv : E \to E$ par la formule

$$(uv)(f) = u\big(v(f)\big)\,, \quad f \in E\,;$$

il est évident que uv est un opérateur linéaire de E dans E. Nous écrivons $\mathcal{L}(E)$ pour $\mathcal{L}(E,E)$; donc $\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel normé de tous les opérateurs linéaires continus de E dans E. Muni de la multiplication des opérateurs linéaires indiquée ci-dessus, $\mathcal{L}(E)$ *est une algèbre normée*, ce qui veut dire que la norme $\|\cdot\|$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ vérifie l'inégalité

$$\|uv\| \leqslant \|u\|\,\|v\|\,. \tag{5.4}$$

En effet, on a

$$\big\|(uv)(f)\big\| = \big\|u\big(v(f)\big\|\big\| \leqslant \|u\|\,\big\|v(f)\big\| \leqslant \|u\|\,\|v\|\,\|f\|$$

d'où

$$\|uv\| = \sup\{\|(uv)(f)\| : \|f\| \leqslant 1\} \leqslant \|u\|\,\|v\|\,.$$

L'opérateur linéaire $\mathrm{id}_E : E \to E$ défini par

$$\mathrm{id}_E(f) = f\,, \quad f \in E$$

s'appelle (l'opérateur) ***identité*** dans E ; l'opérateur ***nul*** dans E, défini par $u(f) = 0$ pour tout $f \in E$, sera noté 0. Notons que id_E et 0 sont dans $\mathcal{L}(E)$ et

$$\|\,\mathrm{id}_E\,\| = 1\,, \quad \|0\| = 0\,.$$

L'algèbre $\mathcal{L}(E)$ est ***non commutative***, sauf si $\dim E = 1$, (selon nos conventions, $\dim E \geqslant 1$) dans le sens qu'il existe u, $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv \neq vu$; de plus, $\mathcal{L}(E)$ possède des *diviseurs de zéro*, sauf si $\dim E = 1$, dans le sens qu'il existe u, $v \in \mathcal{L}(E)$, non nuls, tels que $uv = 0$. Il suffit de considérer $\mathcal{L}(E)$ avec $E = \mathbb{C}^2$ pour se convaincre de ses deux affirmations.

Les opérateurs linéaires entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ (m, n entiers $\geqslant 1$) forment les objets d'étude des cours introductifs de l'algèbre linéaire ; on sait que chaque opérateur linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$ est continu (Ex. 9, § 3.2.6) et $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ s'identifie avec l'espace des matrices complexes $[a_{ij}]$ de type (m, n). Nous admettons comme connu le calcul matriciel élémentaire ainsi que les notions fondamentales de l'algèbre linéaire enseignées dans les cours introductifs de cette matière. Pour une grande partie de la discussion dans ce chapitre, les opérateurs linéaires entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ forment un modèle de base ; néanmoins, des phénomènes nouveaux, essentiels pour les applications aux équations aux dérivées partielles, apparaissent dans l'étude des opérateurs linéaires entre les espaces préhilbertiens de dimension infinie.

Si u est un opérateur linéaire de E dans F, nous écrivons souvent uf au lieu de $u(f)$ (avec $f \in E$, $uf \in F$) si cette écriture ne cause pas d'ambiguïté. Si $u : E \to E$ est un opérateur linéaire, on dira que u est un opérateur linéaire dans E et même, pour abréger, que u est un *opérateur dans* E. Puisque nous ne discuterons que des opérateurs linéaires, cette abréviation ne doit pas causer de confusion. Ainsi, si $u \in \mathcal{L}(E)$, nous dirons que u est un *opérateur continu* (ou *borné*) dans E ; de même, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, nous dirons que u est un opérateur continu (ou borné) de E dans F.

Pour le moment, les opérateurs u dans E sont définis partout dans E ; dans la suite, on devra généraliser cette notion pour considérer les opérateurs $u : \mathcal{D} \to E$, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de E.

5.1.2 Opérateur adjoint

Soit E un espace *hilbertien*. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, nous définissons un *opérateur continu* u^* (appelé *opérateur adjoint* de u) par la formule suivante : pour f, $g \in E$,

$$\langle uf\,,\, g\rangle = \langle f\,,\, u^*g\rangle\,. \tag{5.5}$$

En effet, pour g fixe, $f \mapsto \langle uf, g\rangle$ est une forme linéaire continue dans E car

$$\left|\langle uf\,,\,g\rangle\right| \leqslant \|uf\|\,\|g\| \leqslant \|u\|\,\|f\|\,\|g\| = M\|f\|$$

avec $M = \|u\|\,\|g\|$. Selon le théorème de Fréchet–Riesz (prop. 3.7.12), il existe un unique élément $g^* \in E$ tel que

$$\langle uf\,,\,g\rangle = \langle f\,,\,g^*\rangle\,, \quad f \in E\,;$$

posons $g^* = u^*g$. Alors $g \mapsto u^*g$ est linéaire car si $g_1,\ g_2 \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle f\,,\,u^*(g_1+g_2)\rangle &= \langle uf\,,\,g_1+g_2\rangle = \langle uf\,,\,g_1\rangle + \langle uf\,,\,g_2\rangle \\ &= \langle f\,,\,u^*g_1\rangle + \langle f\,,\,u^*g_2\rangle = \langle f\,,\,u^*g_1 + u^*g_2\rangle\end{aligned}$$

pour tout $f \in E$, ce qui entraîne que

$$u^*(g_1+g_2) = u^*g_1 + u^*g_2$$

et on démontre $u^*(\alpha g) = \alpha u^*(g)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $g \in E$, de la même manière. Pour la continuité de u^*, nous démontrons, plus précisément que

$$\|u^*\| = \|u\|\,. \tag{5.6}$$

Il suffit d'observer que si $\xi \in E$, alors

$$\|\xi\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\langle f\,,\,\xi\rangle| = \sup_{\|g\|\leqslant 1} |\langle \xi\,,\,g\rangle|$$

d'où

$$\begin{aligned}\|u^*\| &= \sup_{\|g\|\leqslant 1} \|u^*g\| = \sup_{\|g\|\leqslant 1}\ \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\langle f\,,\,u^*g\rangle| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1}\ \sup_{\|g\|\leqslant 1} |\langle uf\,,\,g\rangle| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|uf\| = \|u\|\,.\end{aligned}$$

L'application $u \mapsto u^*$ dans $\mathcal{L}(E)$ possède les propriétés suivantes : pour $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

(i) $(u+v)^* = u^* + v^*$;
(ii) $(\alpha u)^* = \overline{\alpha} u^*$;
(iii) $(u^*)^* = u$;
(iv) $\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E$;
(v) $(uv)^* = v^*u^*$.

La vérification de ces propriétés est assez directe ; pour *(v)*, à titre d'exemple, on a, pour $f,\ g \in E$,

$$\langle uvf\,,\,g\rangle = \langle vf\,,\,u^*g\rangle = \langle f\,,\,v^*u^*g\rangle$$

d'où $\langle f\,,\,(uv)^*g\rangle = \langle f\,,\,v^*u^*g\rangle$, $f \in E$ entraînant

$$(uv)^*g = v^*u^*g\,,\quad g \in E\,,$$

c'est-à-dire $(uv)^* = v^*u^*$; de même, pour *(iii)*, on a

$$\langle uf\,,\,g\rangle = \langle f\,,\,u^*g\rangle = \overline{\langle u^*g\,,\,f\rangle} = \overline{\langle g\,,\,(u^*)^*f\rangle} = \langle (u^*)^*f\,,\,g\rangle\,,\quad g \in E$$

pour chaque $f \in E$ d'où $uf = (u^*)^*f$, $f \in E$, c'est-à-dire $(u^*)^* = u$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, alors $(u^*)^{-1}$ existe et

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*\,.$$

Ceci est immédiat de *(iv)* et *(v)* car $u^{-1}u = uu^{-1} = \mathrm{id}_E$. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a*

$$\|u^*u\| = \|uu^*\| = \|u\|^2 = \|u^*\|^2\,. \tag{5.7}$$

En effet, de (5.6) on a $\|u\| = \|u^*\|$; alors de (5.4), on a

$$\|u^*u\| \leqslant \|u^*\|\,\|u\| = \|u\|^2\,;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \sup_{\|f\|\leqslant 1}\|uf\|^2 = \sup_{\|f\|\leqslant 1}\langle uf\,,\,uf\rangle\\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1}\langle u^*uf\,,\,f\rangle \leqslant \sup_{\|f\|\leqslant 1}\|u^*uf\| = \|u^*u\|\end{aligned}$$

d'où $\|u^*u\| = \|u\|^2 = \|u^*\|^2$; remplaçant u par u^*, on a (grâce à *(iii)*)

$$\|uu^*\| = \|u^*\|^2 = \|u\|^2\,.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; u est dit ***autoadjoint*** (ou ***hermitien***) si $u^* = u$; u est dit ***normal*** si $u^*u = uu^*$; u est dit ***unitaire*** si $u^*u = uu^* = \mathrm{id}_E$. Ainsi, un opérateur autoadjoint ou unitaire est normal.

Pour notre livre, ce sont les opérateurs autoadjoints qui sont les plus importants ; leur théorie (ainsi que celle des opérateurs normaux) est assez complète, mais nous ne présenterons seulement qu'une petite partie de celle-ci.

Les opérateurs autoadjoints $u \in \mathcal{L}(E)$ sont caractérisés par la formule suivante : on a

$$\langle uf\,,\,g\rangle = \langle f\,,\,ug\rangle\,,\quad f\,,\,g \in E\,. \tag{5.8}$$

Ceci est évident en comparant avec (5.5). A cause de (5.8), on dit aussi qu'*un opérateur autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et inversement, si u est symétrique (c'est-à-dire vérifie (5.8)) et $u \in \mathcal{L}(E)$ (E étant hilbertien), alors u est autoadjoint.*

Dans la suite, on définira, pour certains opérateurs non continus, une notion d'autoadjoint qui est plus subtile que la notion de symétrie.

Nous ne définirons pas u^* lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ et E est un espace préhilbertien ; si l'on considère la définition de u^* donnée dans (5.5), on s'aperçoit que cette définition est possible pour un opérateur quelconque $u \in \mathcal{L}(E)$ à cause de la validité du théorème de Fréchet–Riesz dans un espace hilbertien. Si E est seulement préhilbertien, certains opérateurs $u \in \mathcal{L}(E)$ possèdent un adjoint u^* et certains n'en possèdent pas ; nous n'entrerons pas dans cette discussion. Néanmoins, nous disons qu'un opérateur u dans E est *symétrique* si u vérifie (5.8), même si E est seulement préhilbertien et u n'est pas nécessairement continu. Si E est hilbertien et $u \in \mathcal{L}(E)$, $u = u^*$, nous dirons que u est *autoadjoint* ; si E est hilbertien ou préhilbertien et u est un opérateur qui vérifie (5.8), alors nous dirons que u est ***symétrique*** (que u soit continu ou non).

5.1.3 Spectre d'un opérateur

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E étant un espace préhilbertien. L'ensemble ***résolvant*** de u (noté $\rho(u)$) est formé des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(u-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$; ici et dans la suite, une expression comme $u - \lambda$ représente l'opérateur $u - \lambda \mathrm{id}_E$; rappelons que $(u-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ signifie que $(u-\lambda) : E \to E$ est *bijectif* et $(u-\lambda)^{-1} : E \to E$ est continu. Le ***spectre*** de u (noté $\sigma(u)$) est par définition

$$\sigma(u) = \mathbb{C} \setminus \rho(u) = \rho^c(u)\,.$$

Un point $\lambda \in \sigma(u)$ doit avoir une des trois propriétés négatives suivantes :

(i) $u - \lambda$ n'est pas injectif ;

(ii) $u - \lambda$ est injectif mais $(u-\lambda)(E) \neq E$ (c'est-à-dire $u - \lambda$ n'est pas surjectif) ;

(iii) $u - \lambda$ est bijectif mais $(u-\lambda)^{-1}$ n'est pas continu.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $(u-\lambda)$ n'est pas injectif, alors on dit que λ est une ***valeur propre*** de u et on écrit $\lambda \in \sigma_p(u)$; donc $\lambda \in \sigma_p(u)$ si et seulement s'il existe $\varphi \in E$, $\varphi \neq 0$, tel que $(u-\lambda)\varphi = 0$, c'est-à-dire

$$u\varphi = \lambda\varphi\ ;$$

φ s'appelle un ***vecteur propre*** associé à la valeur propre λ. Le sous-espace vectoriel $(u-\lambda)^{-1}(0)$ s'appelle le ***sous-espace propre*** de u associé à la valeur propre λ ; rappellons que

$$(u-\lambda)^{-1}(0) = \{f \in E : uf = \lambda f\}$$

et que φ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $\varphi \in (u-\lambda)^{-1}(0)$ et $\varphi \neq 0$. La dimension $n(\lambda)$ de l'espace vectoriel $(u-\lambda)^{-1}(0)$ s'appelle la ***multiplicité*** de la valeur propre λ ; si λ est une valeur propre, $1 \leqslant n(\lambda) \leqslant \infty$;

si $n(\lambda) = 1$, λ s'appelle une valeur propre ***simple***. Notons que, contrairement au cas des espaces de dimension finie, en général, $\sigma_p(u) \neq \sigma(u)$; on peut même avoir $\sigma_p(u) = \emptyset$ (u n'a aucune valeur propre), alors que l'on peut démontrer que $\sigma(u)$ *est toujours une partie compacte non vide de* $\mathbb{C}$ *si* E *est un espace hilbertien et* $u \in \mathcal{L}(E)$.

Nous dirons que $\sigma_p(u)$ est le ***spectre ponctuel*** de u. Notons que les notions de valeur propre et de vecteur propre sont purement algébriques ; donc on peut parler des valeurs propres, des vecteurs propres et la multiplicité des valeurs propres pour tout opérateur $u : E \to E$ dès que E est un espace vectoriel.

Si E est un espace hilbertien, il y a un théorème important qui est utile de connaître : *si* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* u *est bijectif, alors* $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Nous ne démontrerons pas ce théorème dans ce livre mais sa connaissance est utile ; nous l'appellerons *théorème de l'inverse continu*. Ce théorème est en défaut pour les espaces préhilbertiens non complets.

Grâce au théorème de l'inverse continu, on constate que *si* $u \in \mathcal{L}(E)$, E *étant hilbertien, alors* $\lambda \in \rho(u)$ *dès que* $(u - \lambda)$ *est bijectif* (autrement dit, la possibilité (iii) mentionnée ci-dessus pour $\lambda \in \sigma(u)$ ne peut pas se présenter si E est hilbertien).

5.2 EXEMPLES

5.2.1 Cas $E = \mathbb{C}^N$

Soit $E = \mathbb{C}^N$ muni de son produit scalaire canonique (§ 3.2.1). Tout opérateur linéaire u dans E est continu, donc dans $\mathcal{L}(E)$, même si le calcul précis de $\|u\|$ est généralement fastidieux. Si $\{e_1, \ldots, e_N\}$ est la base canonique de E, alors

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_N) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}x_j \right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{\alpha j}x_j \right) e_\alpha$$

où $x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j$, $u(e_j) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_{\alpha j} e_\alpha$ avec $a_{\alpha j} \in \mathbb{C}$ car

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{\alpha=1}^{N} a_{\alpha j} e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{\alpha j} x_j \right) e_\alpha \ ;$$

on fait correspondre la matrice $A = [a_{ij}]$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$, à u et alors si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ est considéré comme une matrice colonne, on a $u(x)$ donné par Ax, suivant la règle usuelle de la multiplication des matrices (ligne par colonne). Nous dirons que A est la matrice *associée* à u ; avec cette notation,

on a

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right|^2 \right\}^{1/2}$$

Puisque

$$\left| \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2$$

si $\|x\|^2 = \sum_j |x_j|^2 \leqslant 1$ (selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on a

$$\|u\| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \tag{5.9}$$

La borne supérieure pour $\|u\|$ donnée par (5.9) est généralement trop grande ; par exemple si $u = \mathrm{id}_E$, $\|u\| = 1$, alors que la borne supérieure de (5.9) est $N^{1/2}$ car la matrice A *associée* à id_E est la matrice identité $I = [\delta_{ij}]$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (consulter aussi Ex. 1, sect. 5.7). La matrice A associée à u est obtenue en fixant la base de E comme la base canonique ; de l'algèbre linéaire, on sait que chaque opérateur u dans E a des bases *préférées* dans le sens que la représentation matricielle de u par rapport à ces bases préférées peut être beaucoup plus simple (par exemple, si u est diagonalisable, il existe une base de E telle que la matrice de A dans cette base sera une matrice diagonale). C'est la théorie des *formes canoniques* des opérateurs dans E que nous développerons pas ici.

On vérifie aisément que *si A est la matrice associée à u* (comme expliqué ci-dessus), *alors la matrice associée à u^* est A^** définie comme suit : si $A = [a_{ij}]$, alors $A^* = [b_{ij}]$ où $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$. En effet, si $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ sont dans E, on a

$$\langle Ax\,,\, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right) \overline{y_i} = \sum_{j=1}^{N} \overline{\left(\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_{ij} y_i \right)} x_j = \langle x\,,\, A^* y \rangle\,.$$

De l'algèbre linéaire on sait que si K est le noyau de u ($K = u^{-1}(0)$) et si R est l'image de u ($R = u(E)$), u étant un opérateur linéaire quelconque dans E, alors

$$\dim K + \dim R = N\,. \tag{5.10}$$

On en déduit une propriété particulière des opérateurs linéaires u dans un espace de dimension finie : u est injectif si et seulement si u est surjectif ; autrement dit, pour un opérateur linéaire u dans un espace de dimension finie, *injectivité, surjectivité et bijectivité sont des propriétés équivalentes*. En effet, de (5.10), on a

$$u \text{ injectif} \iff \dim K = 0 \iff \dim R = N \iff u \text{ surjectif}\,.$$

Une conséquence immédiate de cette propriété est que pour tout opérateur linéaire u dans $E = \mathbb{C}^N$, on a $\sigma(u) = \sigma_p(u)$; dans ce cas, $\lambda \in \sigma(u)$ si et seulement si $u - \lambda$ n'est pas injectif, ce qui équivaut à la condition (bien connue de l'algèbre linéaire)

$$\det(u - \lambda) = \det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Ainsi, la détermination exacte de $\sigma(u)$ revient à la détermination des racines d'une équation polynomiale $P_u(\lambda) = 0$ où

$$P_u(\lambda) = \det(u - \lambda) = \det(A - \lambda I)\ ;$$

$P_u(\lambda)$ s'appelle le ***polynôme caractéristique*** de u. On sait de l'algèbre linéaire que $P_u(\lambda)$ est indépendant du choix de la base utilisée pour représenter u comme une matrice. De ce qui précède, on voit que $\sigma(u)$ est un ensemble fini non vide de $\mathbb{C}$ de cardinalité $\leqslant N$.

5.2.2 Cas $E = \ell^2$

Soit $E = \ell^2$ muni de son produit scalaire canonique (§ 3.2.2). Dans ce cas, il existe des opérateurs linéaires u dans E qui ne sont pas continus mais la construction explicite d'un tel opérateur $u : E \to E$ ne peut être faite que par une utilisation d'une base *algébrique* de ℓ^2 ; l'existence de telles bases algébriques (également pour tout espace vectoriel) dépend de « l'axiome de choix » de la théorie des ensembles. Cette remarque est faite, non pas parce que nous devons avoir quelques scrupules pour nous servir de l'axiome de choix mais pour indiquer que l'existence des opérateurs linéaires non continus définis partout dans E est assez platonique (voir aussi les remarques analogues sur la condition de continuité des distributions dans le paragraphe 4.5.3) ; par contre, il existe beaucoup d'opérateurs linéaires simples $u : \mathcal{D} \to E$ ($\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel de E) qui sont discontinus. Leur théorie est utile et importante ; nous en discuterons plus loin.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; si $\{e_0, e_1, \ldots\}$ est la base canonique de E, on peut associer une matrice $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \mathbb{N}$, de taille infinie, à u (exactement comme dans le cas $E = \mathbb{C}^N$). En effet, si $x = (x_0, x_1, \ldots)$, $u(e_j) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_{\alpha j} e_\alpha = (a_{0j}, a_{1j}, \ldots)$, alors

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j u(e_j) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_{\alpha j} e_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{\alpha j} x_j \right) e_\alpha\ ;$$

ainsi, $u(x)$ est « donné » par Ax, suivant la règle usuelle de la multiplication des matrices (en l'occurence, de taille infinie, x étant considéré comme une matrice colonne infinie). Nous dirons que A est la matrice *associée* à u ; avec cette notation, on a

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x_j \right|^2 \right\}^{1/2}$$

mais dans ce cas la finitude de $\|u\|$ est une hypothèse. L'analogue de l'inégalité (5.9) est vraie mais banale car très souvent

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_{ij}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}|a_{ij}|^2 = \infty$$

comme on peut le voir avec $u = \mathrm{id}_E$ où la matrice associée est $A = I = [\delta_{ij}]$ avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j \in \mathbb{N}$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par contre, puisque $u(e_j) \in \ell^2$, $j \in \mathbb{N}$, on a toujours

$$\|u(e_j)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}|a_{ij}|^2 < \infty\,, \quad j \in \mathbb{N}$$

de sorte que les colonnes de la matrice associée A sont des vecteurs dans $E = \ell^2$.

Si $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \mathbb{N}$, est une matrice telle que

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}}|a_{ij}|^2 < \infty\,,$$

alors

$$u(x_0, x_1, \ldots) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{0j}x_j, \sum_{j=0}^{\infty}a_{1j}x_j, \ldots\right) \tag{5.11}$$

définit bien un opérateur linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\|u\| \leqslant \left\{\sum_{i,j\in\mathbb{N}}|a_{ij}|^2\right\}^{1/2}$$

Les opérateurs linéaires u du type (5.11) sont importants mais forment une classe très restreinte dans $\mathcal{L}(E)$; ils sont appelés les *opérateurs de Hilbert-Schmidt*.

On vérifie (exactement comme dans le cas $E = \mathbb{C}^N$) que *si* $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \mathbb{N}$, *est la matrice associée à* $u \in \mathcal{L}(E)$, *alors la matrice associée à* u^* *est* $A^* = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Ainsi, $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si sa matrice associée $A = [a_{ij}]$ est telle que

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}\,, \quad i\,, j \in \mathbb{N}\,;$$

notons que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$a_{ij} = \langle u(e_j)\,, e_i\rangle = \langle e_j\,, u^*(e_i)\rangle = \bar{b}_{ji}$$

où $A = [a_{ij}]$ et $A^* = [b_{ij}]$ sont les matrices associées à A et A^* respectivement.

Les exercices 2, 6 et 7 (sect. 5.7) montrent que même pour les opérateurs linéaires $u \in \mathcal{L}(E)$ très simples $\sigma_p(u) \neq \sigma(u)$ et que $\sigma_p(u)$ peut être vide.

5.2.3 Cas $E = C([a, b])$

Soit $E = C([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$, l'espace préhilbertien muni de son produit scalaire L^2 (§ 3.2.3)

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f, g \in E.$$

Ici, il est très facile de donner des exemples d'opérateur linéaire $u : E \to E$ discontinu ; ainsi, si

$$uf(x) \equiv f(a), \quad f \in E,$$

alors u est évidemment linéaire mais discontinu (cf. Ex. 11, § 3.7.14) ; l'image de u est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dans E.

Une classe importante d'exemples de $u \in \mathcal{L}(E)$ est fournie par la formule suivante : pour $f \in E$, $a \leqslant x \leqslant b$,

$$(uf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)\,dy \tag{5.12}$$

où $k : [a, b]\times[a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue (appelée souvent la *fonction noyau* de u). On vérifie aisément que u défini par (5.12) est dans $\mathcal{L}(E)$ avec

$$|uf(x)| \leqslant M\int_a^b |f(y)|\,dy \leqslant M(b-a)^{1/2}\|f\|, \quad M = \sup_{a\leqslant x,\, y\leqslant b} |k(x, y)|$$

d'où

$$\|uf\| = \left(\int_a^b |uf(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant M(b-a)\,\|f\|$$

ce qui montre que $\|u\| \leqslant M(b-a)$.

Si $k(x, y) = \overline{k}(y, x)$ pour tout x, $y \in [a, b] \times [a, b]$, alors l'opérateur linéaire u défini par (5.12) est symétrique ; en particulier, si $k(x, y)$ est réel et symétrique ($k(x, y) = k(y, x)$), alors u est symétrique. En effet, si f, $g \in E$ et $k(x, y) = \overline{k}(y, x)$,

$$\begin{aligned}\langle uf, g\rangle &= \int_a^b uf(x)\overline{g}(x)\,dx = \int_a^b \overline{g}(x)\left(\int_a^b k(x, y)f(y)\,dy\right)dx\\ &= \int_a^b f(y)\left(\int_a^b k(x, y)\overline{g}(x)\,dx\right)dy\\ &= \int_a^b f(y)\left(\overline{\int_a^b k(y, x)g(x)\,dx}\right)dy = \langle f, ug\rangle.\end{aligned}$$

On observe l'analogie entre les calculs effectués ici et ceux des exemples 5.2.1 et 5.2.2 avec la fonction noyau $(x, y) \mapsto k(x, y)$ remplaçant la matrice $A = [a_{ij}]$ et l'intégrale remplaçant la somme.

Le spectre de l'opérateur u défini par (5.12) sera discuté dans la suite comme un cas particulier d'une théorie générale.

5.2.4 Cas $E = L^2$

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$ (§ 3.2.4) l'espace hilbertien formé des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue μ dans $\mathbb{R}$. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction borélienne *bornée*, la formule

$$(uf)(x) = \varphi(x)f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

définit un opérateur linéaire continu $u : E \to E$ (appelé l'*opérateur de multiplication* par φ). En effet, la linéarité de $f \mapsto uf$ est évidente et si $|\varphi(x)| \leqslant M$, $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\|uf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant M^2 \|f\|^2\,, \quad f \in E\,,$$

d'où $\|u\| \leqslant M$; si

$$N_\infty(\varphi) = \inf\{M > 0 : |\varphi(x)| \leqslant M \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}\}\,, \tag{5.13}$$

on constate que $|\varphi(x)| \leqslant N_\infty(\varphi)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$ et

$$\|uf\| \leqslant N_\infty(\varphi)\|f\|\,, \quad f \in E\,,$$

d'où $\|u\| \leqslant N_\infty(\varphi)$. En fait, $\|u\| = N_\infty(\varphi)$; en effet, si $0 < c < N_\infty(\varphi)$, on a $\mu(A) > 0$ où $A = \{x \in \mathbb{R} : |\varphi(x)| > c\}$, par la définition même de $N_\infty(\varphi)$ dans (5.13) ; si $B \subset A$, $0 < \mu(B) < \infty$, et $f = 1_B$, alors

$$\|uf\|^2 = \int_B |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geqslant c^2 \mu(B) = c^2 \|f\|^2$$

d'où $\|uf\| \geqslant c\|f\|$ si $f = 1_B$. On conclut que $\|u\| \geqslant c$ dès que $0 < c < N_\infty(\varphi)$, ce qui entraîne que $\|u\| \geqslant N_\infty(\varphi)$. Notons que $N_\infty(\varphi) = 0$ correspond à avoir une fonction φ qui est 0-p.p. $x \in \mathbb{R}$ et alors $u = 0$, $\|u\| = 0$, en se rappelant que pour l'espace $L^2(\mathbb{R})$ une fonction qui est 0-p.p. est considérée comme l'élément 0.

Si u est l'opérateur de multiplication par φ avec $N_\infty(\varphi) < \infty$, on vérifie aisément que u^* est l'opérateur de multiplication par $\overline{\varphi}$; en effet si $f, g \in E = L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\langle uf\,,\, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\overline{\varphi}(x)g(x)}\,\mathrm{d}x = \langle f\,,\, u^*g\rangle\,.$$

En particulier, l'opérateur de multiplication par φ est autoadjoint borné si et seulement si φ est une fonction réelle et $N_\infty(\varphi) < \infty$.

On décrit la condition $N_\infty(\varphi) < \infty$ en disant que φ est *essentiellement bornée* ; elle équivaut à la condition $\sup_{x \in N_0^c} |\varphi(x)| < \infty$ où N_0 est une partie négligeable de $\mathbb{R}$ ($\mu(N_0) = 0$) ; on dit aussi que $N_\infty(\varphi)$ est la norme définie par le ***supremum essentiel*** de φ.

Soit $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction de carré intégrable dans $\mathbb{R}^2$; posons, pour $f \in E$,

$$uf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f(y)\, dy\,. \tag{5.14}$$

Du théorème de Fubini de la théorie de l'intégration (vol. 1, chap. 5) et du fait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2\, dx\, dy < \infty$$

on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2\, dy < \infty \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}\,;$$

ainsi, pour p.p. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto k(x,y)$ est dans E d'où l'intégrabilité de $y \mapsto k(x,y)f(y)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$. Donc $uf(x)$ est défini p.p. $x \in \mathbb{R}$; de plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \|uf\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f(y)\, dy \right|^2 dx \\ &\leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2\, dx\, dy \right\} \|f\|^2\,, \quad f \in E\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\|u\| \leqslant \|k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |k(x,y)|^2\, dx\, dy \right\}^{1/2} \tag{5.15}$$

Ainsi, l'opérateur linéaire u défini par (5.14) est continu ; on dit que u est défini par la fonction noyau $(x,y) \mapsto k(x,y)$. C'est aussi un exemple d'*opérateur de Hilbert-Schmidt* ; l'analogie avec (5.11) doit être évidente : la matrice $[a_{ij}]$ de (5.11) est remplacée par la fonction noyau $(x,y) \mapsto k(x,y)$. On vérifie aisément que si u est défini par (5.14), alors u^* est défini par la fonction noyau $(x,y) \mapsto \overline{k}(y,x)$; en particulier, u est autoadjoint si et seulement si $k(x,y) = \overline{k}(y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A fortiori, si k est réel et symétrique ($k(x,y) \in \mathbb{R}$, $k(x,y) = k(y,x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), alors u défini par (5.14) est toujours autoadjoint.

REMARQUE. La discussion ici se généralise facilement au cas où $E = L^2(X, \Sigma, \mu)$ (§ 3.2.4) ; en particulier, le cas où X est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$ (par exemple, X ouvert ou fermé) dont la mesure de Lebesgue $\mu(X)$ est > 0 donne des exemples importants analogues à ceux discutés ici. Le cas où X est une sous-variété de dimension n dans $\mathbb{R}^N$ muni de sa mesure natu-

relle μ (vol. 1, chap. 7) fournit des exemples utiles dans certains problèmes de mécanique.

Nous abrègerons $L^2(X, \Sigma, \mu)$ par $L^2(\mu)$ ou par $L^2(X)$ ou encore par $L^2(X, \mu)$; X sera généralement une partie de $\mathbb{R}^N$ et alors la tribu Σ sera celle des parties boréliennes de X.

5.2.5 Projections orthogonales

Soit E un espace hilbertien. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors $u = P_F$, la projection orthogonale sur F, est un opérateur linéaire continu dans E et il est autoadjoint (prop. 3.7.8) ; on a vu que ces opérateurs u (appelés les ***projecteurs*** dans E) sont caractérisés par les propriétés suivantes : $u \in \mathcal{L}(E)$, u est autoadjoint et idempotent ($u^2 = u$).

On vérifie aisément (en utilisant § 5.1.2(i)-(iii)) qu'*une combinaison linéaire réelle des opérateurs autoadjoints est encore autoadjointe*. En particulier si $F_1, \ldots, F_m$ sont m sous-espaces vectoriels fermés de E, alors

$$v = \sum_{j=1}^{m} a_j P_{F_j}$$

est un opérateur autoadjoint $v \in \mathcal{L}(E)$ si les $a_j \in \mathbb{R}$. Un théorème fondamental de la théorie des espaces hilbertiens est que *tout opérateur autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$ peut être « approché » par une suite d'opérateur $\{v_n\}$*, chaque v_n étant de la forme v ci-dessus où l'on peut même choisir les $F_1, \ldots, F_m$ comme deux à deux orthogonaux ; le sens exact de cette approximation est que, pour tout $f \in E$,

$$uf = \lim_{n \to \infty} v_n f .$$

Le théorème fondamental énoncé s'appelle le ***théorème spectral*** pour les opétateurs autoadjoints bornés. Nous ne démontrerons pas ce théorème ; Nous établirons une forme plus précise de ce théorème pour une classe restreinte d'opérateurs autoadjoints bornés.

Un opérateur autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit ***positif*** si $\langle uf\,,\, f\rangle \geqslant 0$ pour tout $f \in E$. Notons que les projecteurs sont des opérateurs positifs ; toute combinaison linéaire à coefficients positifs des opérateurs linéaires positifs est un opérateur linéaire positif.

Dans l'exercice 9 (sect. 5.7), on démontre que si F est un sous-espace vectoriel fermé de E avec $F \neq \{0\}$, E, alors

$$\sigma(P_F) = \sigma_p(P_F) = \{0, 1\} .$$

5.3 OPÉRATEURS COMPACTS

5.3.1 Définition

Soit E un espace préhilbertien. Un opérateur u dans E est dit ***compact*** si pour toute suite bornée $\{f_n\}$ dans E, $n \in \mathbb{N}$, la suite $\{uf_n\}$ possède une sous-suite convergente dans E.

Notons qu'*un opérateur compact u est continu* ; en effet, on a

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} \|uf\| < \infty$$

car sinon, on aurait une suite $\{f_n\}$ avec $\|f_n\| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, telle que $\|uf_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$, ce qui exclut l'existence d'une sous-suite convergente de $\{uf_n\}$.

La terminologie « opérateur compact » (qui remplace une ancienne terminologie « opérateur complètement continu ») est motivée par la remarque suivante : *l'opérateur $u : E \to E$ est compact si et seulement si $\overline{u(B)}$ est compact dans E où B est la boule unité fermée de E ($B = \{f \in E : \|f\| \leqslant 1\}$).* La démonstration de cette affirmation utilise simplement la caractérisation suivante des ensembles compacts de E (caractérisation valable pour tout espace métrique) : *une partie K de E est compacte si et seulement si de toute suite dans K on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément de K.* (On dit : dans un espace métrique, la compacité d'une partie K équivaut à sa fermeture et la validité du théorème de Bolzano–Weierstrass dans K.) Nous n'aurons pas besoin de cette caractérisation.

5.3.2 Exemples d'opérateurs compacts

Soit E un espace préhilbertien.

(1) Soit u un opérateur borné dans E tel que $u(E)$ soit de dimension finie ; alors u est compact. (Un opérateur u dans E tel que $u(E)$ est de dimension finie s'appelle un opérateur de ***rang fini*** ; ainsi, tout opérateur borné de rang fini est compact. La dimension de $u(E)$ s'appelle le *rang* de u.)

DÉMONSTRATION

Puisque $u(E)$ est de dimension finie, toute partie bornée dans $u(E)$ possède la propriété de Bolzano–Weierstrass ; puisque u est borné, la suite $\{uf_n\}$ est bornée dans $u(E)$ si $\{f_n\}$ est bornée dans E ; on en déduit l'existence d'une sous-suite de $\{uf_n\}$ qui converge vers un élément de $u(E) \subset E$. ♦

(2) Une combinaison linéaire finie d'opérateurs compacts est compacte.

DÉMONSTRATION

Soit $u = \sum_{j=1}^{m} a_j u_j$, $a_j \in \mathbb{C}$, u_j opérateur compact $1 \leqslant j \leqslant m$; si $\{f_n\}$ est une suite bornée dans E, il existe une sous-suite de $\{f_n\}$, notée $\{f_n^{(1)}\}$,

telle $\{u_1 f_n^{(1)}\}$ est une suite convergente dans E ; puisque $\{f_n^{(1)}\}$ est une suite bornée, il existe une sous-suite de $\{f_n^{(1)}\}$, notée $\{f_n^{(2)}\}$, telle que $\{u_2 f_n^{(2)}\}$ est une suite convergente dans E ; continuant ainsi, on aura à la m-ième étape une sous-suite $\{f_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_m f_n^{(m)}$ existe dans E ; puisque $\{f_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite des suites précédentes $\{f_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, avec $\lim_{n\to\infty} u_j f_n^{(j)}$ convergente dans E, on aura que

$$\lim_{n\to\infty} u_j f_n^{(m)}$$

existant dans E pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} u f_n^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j u_j f_n^{(m)}$$

existe dans E. ♦

(3) Si u est un opérateur compact et v est un opérateur borné, alors uv et vu sont des opérateurs compacts.

DÉMONSTRATION

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E ; v étant borné, $\{vf_n\}$ est aussi une suite bornée dans E d'où, par la compacité de u, l'existence d'une sous-suite convergente dans la suite $\{u(vf_n)\} = \{uv(f_n)\}$; donc uv est compact.

La compacité de vu est démontrée de manière analogue. ♦

Comme *corollaire* de (3) notons que *si* $\dim E = \infty$, *alors un opérateur compact u dans E ne peut jamais avoir un inverse continu ; autrement dit,* $0 \in \sigma(u)$ *pour tout opérateur compact u dans E si* $\dim E = \infty$. En effet, si $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, alors $u^{-1}u = \mathrm{id}_E$ serait un opérateur compact dans E, selon (3) ; ceci est une impossibilité car si $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale dans E (ce qui existe car $\dim E = \infty$) aucune sous-suite de $\{\psi_n\}$ ne peut converger car

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \sqrt{2} \quad \text{si } m \neq n\,.$$

Notons pour la suite ce qui vient d'être établi : *si* $\dim E = \infty$, *alors* id_E *n'est pas un opérateur compact dans E.*

(4) Soit E un espace hilbertien ; si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs compacts dans E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0\,,$$

alors u est un opérateur compact dans E. (Brièvement, une limite en norme d'une suite d'opérateurs compacts est un opérateur compact (dans l'espace hilbertien).)

DÉMONSTRATION

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E ; par le procédé diagonal, on peut choisir une sous-suite de $\{f_n\}$, notée $\{g_n\}$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_m g_n$$

existe dans E pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Explicitons ce « procédé diagonal » ; en procédant comme dans la démonstration de (2), on choisit à la m-ième étape, $m = 0, 1, 2, \ldots$, une sous-suite de $\{f_n\}$, notée $\{f_n^{(m)}\}$, telle que $\{f_n^{(m)}\}$ est une sous-suite de $\{f_n^{(j)}\}$, $0 \leqslant j < m$, et que

$$\lim_{n\to\infty} u_j f_n^{(j)}$$

existe dans E pour $j = 0, 1, \ldots$ Posons $g_n = f_n^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$; alors $\{g_n\}$ est une sous-suite de chaque suite $\{f_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'où l'existence de

$$\lim_{n\to\infty} u_m g_n$$

dans E pour $m = 0, 1, \ldots$

Démontrons que $\lim_{n\to\infty} u g_n$ existe dans E ; pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\|ug_n - ug_m\| \leqslant \|ug_n - u_j g_n\| + \|u_j g_n - u_j g_m\| + \|u_j g_m - ug_m\|$$

d'où

$$\begin{aligned}\|ug_n - ug_m\| &\leqslant \|u - u_j\|(\|g_n\| + \|g_m\|) + \|u_j g_n - u_j g_m\| \\ &\leqslant 2M\|u - u_j\| + \|u_j g_n - u_j g_m\|\end{aligned}$$

si $M = \sup_n \|f_n\| \geqslant \sup_n \|g_n\|$; si $\varepsilon > 0$, choisissons j tel que

$$2M\|u - u_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et ensuite n_0 tel que pour m, $n \geqslant n_0$

$$\|u_j g_n - u_j g_m\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors, pour m, $n \geqslant n_0$, on aura

$$\|ug_n - ug_m\| < \varepsilon$$

de sorte que $\{ug_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E ; E étant complet, $\lim_{n\to\infty} ug_n$ existe. ♦

Comme conséquence de (1) et (4), on a l'exemple suivant d'une classe importante d'opérateurs compacts dans $E = L^2(X, \Sigma, \mu)$ (§ 3.2.4), μ étant une mesure $\geqslant 0$, σ-finie ; les cas où X est une partie ouverte ou fermée dans $\mathbb{R}^N$ et μ est la mesure de Lebesgue dans X sont particulièrement importants.

(5) Soit $k : X \times X \to \mathbb{C}$ une fonction de carré intégrable par rapport à $\mu \otimes \mu$ (vol. 1, sect. 5.4) ; posons

$$(uf)(x) = \int_X k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)\,.$$

Alors $u : E \to E$ est un opérateur compact où $E = L^2(X, \Sigma, \mu)$.

DÉMONSTRATION

Par hypothèse

$$\int_X \int_X \left|k(x,y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\mu(y) < \infty\,.$$

Le fait que $u : E \to E$ est un opérateur borné a été étudié dans le paragraphe 5.2.4 pour le cas $X = \mathbb{R}$ et la démonstration est la même dans le cas général. Pour démontrer que u est compact, on doit utiliser le théorème suivant de la théorie de l'intégration : il existe une suite $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$k_n(x,y) = \sum_{j=1}^{r_n} a_j^{(n)}(x) b_j^{(n)}(y)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

avec $a_j^{(n)}$, $b_j^{(n)}$ dans $L^2(X, \Sigma, \mu)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \int_X \left|k(x,y) - k_n(x,y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\mu(y) = 0\,. \tag{5.16}$$

Posons, pour $f \in E$,

$$u_n f(x) = \int_X k_n(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

puisque

$$u_n f(x) = \sum_{j=1}^{r_n} a_j^{(n)}(x) \int_X b_j^{(n)}(y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

l'opérateur u_n est de rang fini ; en fait, $u_n(E)$ est le sous-espace linéaire engendré par $a_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant r_n$. Le raisonnement au paragraphe 5.2.4 aboutissant à (5.15) montre que

$$\left\|u - u_n\right\| \leqslant \int_X \int_X \left|k(x,y) - k_n(x,y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\mu(y) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

A l'aide du (4), on conclut que u est compact. ♦

REMARQUE. Une façon explicite de démontrer l'existence des k_n vérifiant (5.16) est la suivante (en supposant que $E = L^2(X, \Sigma, \mu)$ est séparable).

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale pour E ; alors les fonctions données par $\varphi_n(x)\varphi_n(y)$, m, $n \in \mathbb{N}$, forment une base orthonormale pour $L^2(X \times X, \Sigma \otimes \Sigma, \mu \otimes \mu)$ (§ 4.4.4). On a donc

$$k(x,y) \sim \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

au sens du développement orthogonal de k dans $L^2(X \times X)$; posons

$$k_n(x,y) = \sum_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y)\,,$$

alors les k_n vérifient (5.16).

Ce raisonnement reste valable pour E non séparable quitte à falloir introduire des bases orthonormales dans les espaces hilbertiens non séparables ; les seuls cas qui nous intéressent proviennent de $X \subset \mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue μ et on a déjà vu que dans ces cas là, E est séparable (§ 3.3.3).

(6) *Exemples concrets*

En spécialisant X, μ dans (5), on obtient différents exemples d'opérateurs compacts qui nous seront utiles. Soit $X = [a, b]$ ($a < b$ réels) muni de la mesure de Lebesgue μ ; si $k : X \times X \to \mathbb{C}$ est de carré intégrable, alors l'opérateur u donné par

$$uf(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \tag{5.17}$$

est un opérateur compact dans l'espace hilbertien $L^2(X)$.

Il est important d'observer que si k *est continue, alors (5.17) définit aussi un opérateur compact dans l'espace préhilbertien* $C(X)$ *muni de sa norme* L^2. Puisque ceci n'est pas une conséquence immédiate de la compacité de u dans $L^2(X)$, nous esquissons une preuve. Si $h \in C(X)$, nous écrivons

$$\|h\|_\infty = \sup_{x\in X}|h(x)|\ ;$$

notons que

$$\|h\|^2 = \int_a^b |h(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\|h\|_\infty^2\,.$$

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $C(X)$ (avec la norme L^2) ; puisque u est compact dans $L^2(X) \supset C(X)$, on peut supposer, en passant à une sous-suite appropriée, que $\{f_n\}$ est telle qu'il existe $g \in L^2(X)$ avec

$$\lim_{n\to\infty}\|uf_n - g\| = 0\,.$$

Il faut établir qu'il existe $h \in C(X)$ tel que $h(x) = g(x)$ p.p. $x \in X$. Pour ce faire, on observe que

$$\begin{aligned}\big|(uf_n)(x_1) - (uf_n)x_2\big| &\leqslant \int_a^b \big|k(x_1,y) - k(x_2,y)\big|\big|f_n(y)\big|\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \left(\int_a^b \big|k(x_1,y) - k(x_2,y)\big|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \|f_n\|\,.\end{aligned}$$

Puisque k est uniformément continu dans $X \times X$ et $\{\|f_n\|\}$ est une suite bornée, on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|(uf_n)(x_1) - (uf_n)x_2\big| < \varepsilon$$

dès que $|x_1 - x_2| < \delta$, x_1, $x_2 \in X$. On dit que la suite de fonctions continues $\{uf_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est *équicontinue* dans X ; de plus, $\{uf_n\}$ est une suite *uniformément bornée* dans $C(X)$, c'est-à-dire

$$\sup_n \|uf_n\|_\infty < \infty$$

car

$$|uf_n(x)| \leqslant \int_a^b |k(x,y)||f_n(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_a^b |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \|f_n\|$$

d'où

$$\|uf_n\|_\infty \leqslant \sup_{x\in X}\left(\int_a^b |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \cdot \sup_n \|f_n\| \leqslant M \sup_n \|f_n\| < \infty$$

si $M = \sup_{x,\,y\in X}|k(x,y)|$. Un théorème classique d'Arzelà–Ascoli garantit alors l'existence d'une sous-suite $\{uf_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{j\to\infty}(uf_{n_j})(x) = h(x)$$

existe uniformément pour $x \in X$, de sorte que $h \in C(X)$. On en conclut que

$$\|uf_{n_j} - h\| \leqslant (b-a)\|uf_{n_j} - h\|_\infty \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

de sorte que la fonction $g(x) = h(x)$ p.p. $x \in X$. Ceci établit la compacité de u dans l'espace préhilbertien $C(X)$. Pour être complet, nous donnons une version précise du théorème de Arzelà–Ascoli.

5.3.3 Proposition (*théorème d'Arzelà-Ascoli*)

Soit X une partie compacte de $\mathbb{R}^N$. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues complexes définies dans X qui est équicontinue et uniformément bornée, alors il existe une sous-suite $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ et une fonction continue complexe g définie dans X telles que $f_{n_j}(x) \to g(x)$, $j \to \infty$, uniformément en $x \in X$.

DÉMONSTRATION

En reprenant les notations du paragraphe 5.3.2(6), on a $f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$ avec $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ (condition : $\{f_n\}$ uniformément bornée) ; de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

dès que $|x - y| < \delta$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ (condition : $\{f_n\}$ équicontinue ; si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, on écrit $|x| = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |x_j|$). Soit $D = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ une partie dénombrable dense dans X ; puisque $\sup_n |f_n(\xi_k)| < \infty$ pour $k \geqslant 0$, on peut extraire une sous-suite $\{f_{n_j}\}$, $n_0 < n_1 < \ldots$, telle que

$$\lim_{j \to \infty} f_{n_j}(\xi_k) = g(\xi_k)$$

existe pour $k = 0, 1, 2, \ldots$; c'est le procédé diagonal expliqué dans le paragraphe 5.3.2(4) qui permet l'extraction d'une telle sous-suite. Si $\xi \in X$ et $\delta > 0$, il existe $\xi_k \in X$ avec $|\xi_k - \xi| < \delta$; si ε, δ sont comme ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned} |f_{n_i}(\xi) - f_{n_j}(\xi)| &\leqslant |f_{n_i}(\xi) - f_{n_i}(\xi_k)| + |f_{n_i}(\xi_k) - f_{n_j}(\xi_k)| + |f_{n_j}(\xi_k) - f_{n_j}(\xi)| \\ &< 2\varepsilon + |f_{n_i}(\xi_k) - f_{n_j}(\xi_k)| \end{aligned}$$

d'où, pour $i, j \geqslant \nu$, on aura

$$|f_{n_i}(\xi) - f_{n_j}(\xi)| < 3\varepsilon$$

car $\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(\xi_k)$ existe. Ainsi $\{f_{n_i}(\xi)\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout $\xi \in X$ d'où l'existence de

$$\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in X.$$

Or de l'inégalité précédente, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\nu \in \mathbb{N}$ tel que

$$|g(\xi) - f_{n_j}(\xi)| < 3\varepsilon, \quad \xi \in X, \ j \geqslant \nu,$$

ce qui montre que $f_{n_j}(\xi) \to g(\xi)$ $(j \to \infty)$ uniformément en $\xi \in X$. Ceci entraîne que $g \in C(X)$. ♦

5.4 THÉORIE SPECTRALE POUR LES OPÉRATEURS COMPACTS SYMÉTRIQUES

5.4.1 Introduction

Par théorie spectrale on entend l'étude du spectre des opérateurs. Pour les opérateurs bornés u dans un espace préhilbertien E, il s'agit d'abord de la détermination de $\rho(u)$ (ensemble résolvant de u) et $\sigma(u)$ (spectre de u) ; ensuite, il faut analyser $\sigma(u)$ pour dégager $\sigma_p(u)$, la partie de $\sigma(u)$ qui correspond aux

valeurs propres de u et découvrir les propriétés de $\lambda \in \sigma(u) \setminus \sigma_p(u)$; finalement, pour $\lambda \in \rho(u)$, on étudie l'***opérateur résolvant*** de u

$$R(\lambda, u) = (\lambda - u)^{-1}$$

qui est un opérateur borné dans E. (Certains auteurs utilisent $(u - \lambda)^{-1}$ et dans les écrits anciens on considérait souvent $(1 - u/\lambda)^{-1}$; on peut évidemment passer d'une expression à l'autre assez aisément.)

Pour un opérateur borné u quelconque, on est aujourd'hui très loin d'avoir des méthodes générales pour aborder complètement les problèmes indiqués ci-dessus, même lorsque E est un espace hilbertien. La théorie est très développée pour les opérateurs autoadjoints et plus généralement pour les opérateurs normaux (et, en particulier, pour les opérateurs unitaires). Ici nous proposons de donner des réponses assez détaillées pour les opérateurs symétriques et compacts, même dans le cadre général des espaces préhilbertiens ; la considération des opérateurs dans les espaces préhilbertiens s'avère utile pour les applications aux équations différentielles.

Nous résumons les propriétés principales des opérateurs symétriques compacts dans un espace préhilbertien dans la proposition suivante.

5.4.2 Proposition (*théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints*)

Soient E un espace préhilbertien, u un opérateur symétrique compact non nul dans E.

Il existe une suite orthonormale (finie ou infinie) $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ dans E et une suite (finie ou infinie) de nombres réels non nuls $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ avec $|\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant \ldots > 0$, ayant les propriétés suivantes :

(i) chaque λ_n est une valeur propre de u et φ_n est un vecteur propre associé ; toutes les valeurs propres non nulles sont contenues parmi les λ_n ; le sous-espace propre E_λ de u associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ est de dimension finie $\nu(\lambda)$ où $\nu(\lambda)$ est le nombre de fois que λ apparaît dans la suite $\{\lambda_n\}$; si λ, λ' sont deux valeurs propres non nulles, $\lambda \neq \lambda'$, alors $E_\lambda \perp E_{\lambda'}$;

(ii) $|\lambda_0| = \|u\|$; s'il y a une infinité de λ_n alors $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

(iii) les φ_n forment une base orthonormale pour $u(E)$; plus précisément, si $f \in E$, on a

$$uf = \sum_{n\geqslant 0} \langle uf\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n = \sum_{n\geqslant 0} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n \;; \tag{5.18}$$

(iv) si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n, n \geqslant 0, 0\}$, alors $\lambda \in \rho(u)$ et, pour $f \in E$,

$$R(\lambda, u)f = (\lambda - u)^{-1} f = \frac{1}{\lambda} f + \frac{1}{\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \lambda_n \frac{\langle f\,,\, \varphi_n\rangle}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n \tag{5.19}$$

avec

$$\|R(\lambda, u)\| \leqslant \frac{M+1}{|\lambda|}, \quad M = \sup_{n \geqslant 0} \frac{|\lambda_n|}{|\lambda - \lambda_n|} ;$$

(v) soit $R = \overline{u(E)}$ *; alors* R *est le sous-espace linéaire fermé engendré par* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ *et* $R^{\perp} = u^{-1}(0)$ *; donc,* 0 *est une valeur propre de* u *si et seulement si* $u(E)^{\perp} \neq \{0\}$ *; la suite orthonormale* $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est complète (mais non nécessairement totale si* E *n'est pas hilbertien, cf. § 3.7.13) si et seulement si* 0 *n'est pas une valeur propre de* u.

REMARQUES. Nous commenterons le contenu de cette proposition après l'avoir démontré (§ 5.4.5) ; en particulier, nous expliquerons quelques simplifications qui se produisent si E est hilbertien ou si E est de dimension finie. La démonstration est précédée de deux lemmes importants ; c'est le lemme 5.4.4 qui contient l'essentiel de la démonstration.

5.4.3 Lemme

Soit u *un opérateur dans un espace préhilbertien* E *; posons*

$$\|u\| = \sup\{\|uf\| : \|f\| \leqslant 1\}$$

avec $0 \leqslant \|u\| \leqslant \infty$ *;* $u \in \mathcal{L}(E)$ *si et seulement si* $\|u\| < \infty$.

(i) On a

$$\|u\| = \sup\{\|uf\| : \|f\| = 1\} = \sup\left\{\left|\langle uf, g\rangle\right| : \|f\| = \|g\| = 1\right\}.$$

(ii) Supposons que u *est symétrique (c'est-à-dire* u *vérifie (5.8)) ; alors* $\langle uf, f\rangle \in \mathbb{R}$ *pour* $f \in E$ *; posons*

$$m(u) = \inf\{\langle uf, f\rangle : \|f\| = 1\}, \quad M(u) = \sup\{\langle uf, f\rangle : \|f\| = 1\}.$$

Alors $\|u\| < \infty$ *si et seulement si les deux quantités* $m(u)$ *et* $M(u)$ *sont finies ; si* $\|u\| < \infty$, *alors* $\|u\| = \max\big(|m(u)|, |M(u)|\big)$.

(iii) Soit u *symétrique ; si* λ *est une valeur propre de* u, *alors* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $m(u) \leqslant \lambda \leqslant M(u)$. *Si* λ, μ *sont deux valeurs propres distinctes, alors les vecteurs propres correspondants à* λ *sont orthogonaux aux vecteurs propres correspondants à* μ.

DÉMONSTRATION

(i) Nous laissons cette démonstration en exercice ; il suffit d'utiliser l'homogénéité de u ($u(\alpha f) = \alpha u(f)$, $\alpha \in \mathbb{C}$) et la relation

$$\|\xi\| = \sup_{\|g\|=1} \left|\langle \xi, g\rangle\right|, \quad \xi \in E.$$

(ii) Puisque u est symétrique, on a

$$\langle uf\,,\,f\rangle = \langle f\,,\,uf\rangle = \overline{\langle uf\,,\,f\rangle}\,, \quad f \in E$$

d'où $\langle uf\,,\,f\rangle \in \mathbb{R}$. Posons

$$M = \max\Big(\big|m(u)\big|\,,\,\big|M(u)\big|\Big) \leqslant \infty\,;$$

alors

$$M = \sup\Big\{\big|\langle uf\,,\,f\rangle\big| : \|f\| = 1\Big\}\,.$$

Si $\|u\| < \infty$, on a alors de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, pour $f \in E$ avec $\|f\| = 1$,

$$\big|\langle uf\,,\,f\rangle\big| \leqslant \|uf\|\,\|f\| \leqslant \|u\|\,\|f\|^2 \leqslant \|u\|$$

d'où on déduit que $M \leqslant \|u\| < \infty$.

Supposons que $M < \infty$; nous démontrons que $\|u\| \leqslant M$. Posons

$$F(f,g) = \langle uf\,,\,g\rangle\,, \quad Q(f) = F(f,f) = \langle uf\,,\,f\rangle\,;$$

on constate que, pour $f \in E$,

$$\big|Q(f)\big| \leqslant M\|f\|^2$$

car, pour $f \neq 0$, $Q(f) = \|f\|^2 Q\big(f/\|f\|\big)$ et $M = \sup_{\|g\|=1}\big|Q(g)\big|$. Puisque u est linéaire et symétrique, $(f,g) \mapsto F(f,g)$ est une forme hermitienne (§ 3.1.1) ; de la formule de polarisation (3.5), on déduit que, pour f, $g \in E$,

$$4\,\mathrm{Re}\,F(f,g) = Q(f+g) + Q(f-g)$$

d'où

$$\big|\mathrm{Re}\,F(f,g)\big| \leqslant \frac{M}{4}\Big\{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\Big\} = \frac{M}{2}\Big\{\|f\|^2 + \|g\|^2\Big\} \qquad (5.20)$$

en utilisant l'identité du parallélogramme (3.9).

Pour f, g fixés dans E, on choisit $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que

$$F(\alpha f, g) = \big|F(f,g)\big|\,;$$

ceci est possible car $F(\alpha f, g) = \alpha F(f,g)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ avec $\alpha z = |z|$. Avec f, g et α fixés comme ci-dessus, on a d'après (5.20)

$$\big|F(f,g)\big| = F(\alpha f, g) = \big|\mathrm{Re}\,F(\alpha f, g)\big| \leqslant \frac{M}{2}\Big\{\|f\|^2 + \|g\|^2\Big\}$$

car $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\| = \|f\|$; de la dernière inégalité et de (i), on a

$$\|u\| = \sup\big\{\big|F(f,g)\big| : \|f\| = \|g\| = 1\big\} \leqslant \frac{M}{2}\cdot 2 = M$$

d'où $\|u\| = M$.

(iii) Supposons que $u\varphi = \lambda\varphi$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}$, avec un $\varphi \in E$, $\varphi \neq 0$; alors, on a d'une part

$$\langle u\varphi\,,\,\varphi\rangle = \langle \lambda\varphi\,,\,\varphi\rangle = \lambda\|\varphi\|^2$$

et, d'autre part, par la symétrie de u

$$\langle u\varphi\,,\,\varphi\rangle = \langle \varphi\,,\,u\varphi\rangle = \langle \varphi\,,\,\lambda\varphi\rangle = \overline{\lambda}\|\varphi\|^2$$

d'où $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$. En choisissant φ tel que $\|\varphi\| = 1$ et $u\varphi = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, des calculs qui précèdent,

$$m(u) \leqslant \lambda = \langle u\varphi\,,\,\varphi\rangle \leqslant M(u)\,.$$

Supposons que $u\varphi = \lambda\varphi$, $u\psi = \lambda\psi$, φ, ψ non nuls dans E ; on sait que λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\langle u\varphi\,,\,\psi\rangle = \langle \lambda\varphi\,,\,\psi\rangle = \lambda\langle \varphi\,,\,\psi\rangle$$

et, par la symétrie de u,

$$\langle u\varphi\,,\,\psi\rangle = \langle \varphi\,,\,u\psi\rangle = \langle \varphi\,,\,\mu\psi\rangle = \mu\langle \varphi\,,\,\psi\rangle$$

d'où $(\lambda - \mu)\langle \varphi\,,\,\psi\rangle = 0$, ce qui donne $\langle \varphi\,,\,\psi\rangle = 0$ car $\lambda - \mu \neq 0$. ♦

5.4.4 Lemme

Soit u un opérateur compact symétrique non nul dans un espace préhilbertien E. Alors il existe une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \|u\|$ et il existe un vecteur propre correspondant φ tel que $\|\varphi\| = 1$ avec $u\varphi = \lambda\varphi$ et

$$\|u\| = \Big|\langle u\varphi\,,\,\varphi\rangle\Big| = \sup\Big\{\Big|\langle uf\,,\,f\rangle\Big| : \|f\| = 1\Big\}\,.$$

DÉMONSTRATION

L'égalité

$$\|u\| = \sup\Big\{\Big|\langle uf\,,\,f\rangle\Big| : \|f\| = 1\Big\}$$

a été vue dans le lemme précédent ; il existe donc une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que $\|f_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, avec

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\langle uf_n\,,\,f_n\rangle\Big| = \|u\| > 0\,.$$

En passant à une sous-suite, si nécessaire, on aura $\{f_n\}$ dans E telle que $\|f_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, avec

$$\lim_{n\to\infty}\langle uf_n\,,\,f_n\rangle = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $|\lambda| = \|u\|$. On a alors

$$0 \leqslant \|uf_n - \lambda f_n\|^2 = \|uf_n\|^2 - 2\lambda\langle uf_n\,,\, f_n\rangle + \lambda^2\|f_n\|^2$$
$$\leqslant \|u\|^2 - 2\lambda\langle uf_n\,,\, f_n\rangle + \lambda^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty}(uf_n - \lambda f_n) = 0$. Puisque u est compact, il existe une sous-suite $\{uf_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge ; on conclut que $f_{n_j} \to \varphi$ $(j \to \infty)$ avec $\|\varphi\| = 1$ et

$$\lim_{j\to\infty} uf_{n_j} = u\varphi = \lambda\varphi\,. \qquad \blacklozenge$$

DÉMONTRATION DE LA PROPOSITION 5.4.2

Posons $E_0 = E$, $u_0 = u$ et λ_0, φ_0 pour la valeur propre λ et le vecteur propre φ de u fourni par le lemme 5.4.4 ; donc

$$0 < |\lambda_0| = \|u\|\,, \quad \|\varphi_0\| = 1\,.$$

Posons

$$E_1 = \{f \in E : \langle f\,,\, \varphi_0\rangle = 0\} = \{\varphi_0\}^\perp\,;$$

notons que $u(E_1) \subset E_1$ car $f \in E_1$ implique

$$\langle uf\,,\, \varphi_0\rangle = \langle f\,,\, u\varphi_0\rangle = \lambda_0\langle f\,,\, \varphi_0\rangle = 0$$

d'où $uf \in E_1$. Ecrivons $u_1 = u\big|_{E_1}$ pour la restriction de u au sous-espace vectoriel (fermé) E_1 ; alors u_1 est un opérateur symétrique compact dans E_1. Si $u_1 = 0$ (ce qui veut dire que $uf_1 = 0$ pour tout $f_1 \in E_1$), alors $u(E)$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par φ_0 (*u est alors de rang* 1) car si $f \in E$,

$$f = \langle f\,,\, \varphi_0\rangle\varphi_0 + f_1$$

avec $f_1 \in E_1$ d'où

$$uf = \langle f\,,\, \varphi_0\rangle u\varphi_0 = \lambda_0\langle f\,,\, \varphi_0\rangle\varphi_0$$

étant donné que $uf_1 = 0$. Si $u_1 \neq 0$, on obtient du lemme 5.4.4 l'existence de λ_1, $\varphi_1 \in E_1$, tels que

$$0 < |\lambda_1| = \|u_1\| = \sup\Big\{\Big|\langle uf\,,\, f\rangle\Big| : f \in E_1\,,\ \|f\| = 1\Big\} \leqslant |\lambda_0| = \|u\|$$

et $\|\varphi_1\| = 1$, $\varphi_1 \perp \varphi_0$. Posons

$$E_2 = \{f \in E : \langle f\,,\, \varphi_j\rangle = 0\,,\ j = 0,\, 1\} = \{\varphi_0, \varphi_1\}^\perp$$

et $u_2 = u_1\big|_{E_2}$ en observant que $u(E_2) \subset E_2$, E_2 un sous-espace vectoriel (fermé) de E ; u_2 est alors un opérateur symétrique compact dans E_2 et si $u_2 \neq 0$, on peut procéder comme précédemment. Supposons que l'on a obtenu,

par récurrence, une suite de nombres réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ et une suite de vecteurs orthonormaux $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ avec

$$\|u\| = |\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_{n-1}| > 0\,, \quad u\varphi_j = \lambda_j \varphi_j\,,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1$$

(n entier $\geqslant 1$) ; posons

$$E_n = \{f \in E : \langle f\,,\, \varphi_j\rangle = 0\,,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1\} = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}^{\perp}\,.$$

Vérifions que $u(E_n) \subset E_n$; en effet, si $f \in E_n$ et $j = 0, \ldots, n-1$,

$$\langle uf\,,\, \varphi_j\rangle = \langle f\,,\, u\varphi_j\rangle = \lambda_j \langle f\,,\, \varphi_j\rangle = 0$$

d'où $\langle uf\,,\, \varphi_j\rangle = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, et $uf \in E_n$. Posons $u_n = u\big|_{E_n}$; E_n est un sous-espace vectoriel (fermé) de E et u_n est un opérateur compact symétrique dans E_n ; si $u_n = 0$ (ce qui veut dire que $ug = 0$ pour tout $g \in E_n$), alors $u(E)$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par les φ_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ (*u est alors de rang n*) car si $f \in E$,

$$f = \sum_{j=0}^{n-1} \langle f\,,\, \varphi_j\rangle \varphi_j + f_n \tag{5.21}$$

avec $f_n \in E_n$ d'où

$$uf = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \langle f\,,\, \varphi_j\rangle \varphi_j = \sum_{j=0}^{n-1} \langle uf\,,\, \varphi_j\rangle \varphi_j \tag{5.22}$$

(car $uf_n = 0$, étant donné qu'on a supposé $ug = 0$ pour tout $g \in E_n$). Ainsi si $u_n = 0$, on aura un opérateur compact symétrique u de rang fini n et les suites λ_j, φ_j de la proposition seront de longueur n et (5.18) devient (5.22). Si $u_n \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, alors on aura par récurrence une suite infinie de nombres réels non nuls $\{\lambda_j\}$ et une suite de vecteurs orthonormaux $\{\varphi_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, avec

$$\|u\| = |\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant \ldots > 0\,, \qquad u\varphi_j = \lambda_j \varphi_j\,, \quad j \geqslant 0\,,\ |\lambda_n| = \|u_n\|\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

où $u_n = u\big|_{E_n}$, $E_n = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}^{\perp}$.

Démontrons que $\lambda_n \to 0$ ($n \to \infty$) : sinon, puisque $\{|\lambda_n|\}$ est une suite décroissante, on aurait $\varepsilon > 0$ tel que $|\lambda_n| > \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ et la suite de vecteurs $\{(1/\lambda_n)\varphi_n\}$ serait bornée ($\|(1/\lambda_n)\varphi_n\| < 1/\varepsilon$) ; or la compacité de l'opérateur u veut que la suite $\{u(\varphi_n/\lambda_n) = \varphi_n\}$ ait une sous-suite convergente, ce qui est impossible car

$$\|\varphi_m - \varphi_n\| = \sqrt{2}\,, \quad m \neq n\,,$$

à cause de l'orthonormalité des φ_n.

Etablissons maintenant (5.18). Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, écrivons f sous la forme (5.21) où $f_n \in E_n$; puisque

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left|\langle f\,,\,\varphi_j\rangle\right| + \|f_n\|^2\,,$$

on a $\|f_n\| \leqslant \|f\|$; de plus, de la définition de u_n,

$$\|uf_n\| \leqslant \|u_n\|\,\|f_n\| = |\lambda_n|\,\|f_n\| \leqslant |\lambda_n|\,\|f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

On conclut d'après (5.21) que

$$uf = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \langle f\,,\,\varphi_j\rangle\varphi_j + uf_n$$

d'où, en faisant $n \to \infty$,

$$uf = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \langle f\,,\,\varphi_j\rangle\varphi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \langle uf\,,\,\varphi_j\rangle\varphi_j$$

car $uf_n \to 0$ $(n \to \infty)$ et $\langle uf\,,\,\varphi_j\rangle = \langle f\,,\,u\varphi_j\rangle = \lambda_j\langle f\,,\,\varphi_j\rangle$. Ceci donne (5.18).

Démontrons que toutes les valeurs propres non nulles se trouvent parmi les λ_n. En effet, si $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq 0$ et $u\varphi = \lambda\varphi$ pour un $\varphi \in E$, $\varphi \neq 0$, alors $\varphi \perp \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$ (lemme 5.4.3(iii)) et on aurait d'après (5.18) que $u\varphi = 0$, ce qui contredirait $u\varphi = \lambda\varphi$, $\lambda \neq 0$, $\varphi \neq 0$.

Puisque $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$, chaque valeur propre non nulle λ_j n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans la suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si λ est une valeur propre non nulle, soit $\nu(\lambda)$ le nombre d'indices $j \geqslant 0$ tel que $\lambda_j = \lambda$; alors, évidemment, $\dim E_\lambda \geqslant \nu(\lambda)$ où E_λ est le sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ ; en fait, $\dim E_\lambda = \nu(\lambda)$ car sinon on aurait $\varphi \in E$, $\varphi \neq 0$, avec $u\varphi = \lambda\varphi$ et $\varphi \perp \varphi_j$, $j \geqslant 0$, ce qui donnerait $u\varphi = 0$ d'après (5.18) et contredirait $u\varphi = \lambda\varphi \neq 0$.

On a ainsi démontré (i), (ii) et (iii) de la proposition 5.4.2.

(iv) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, \lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$; alors $(\lambda - u) : E \to E$ est certainement injectif ; il faut démontrer que $(\lambda - u)(E) = E$ et que $(\lambda - u)^{-1} : E \to E$ est continu.

La convergence de la série qui apparaît dans (5.19) serait immédiate si E était hilbertien car

$$\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 \left|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\right|^2 \leqslant M^2 \sum_{n\geqslant 0} \left|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\right|^2 \leqslant M^2\|f\|^2 < \infty$$

en utilisant l'inégalité de Bessel. Sinon, il faut avoir recours à une démonstration plus élaborée : on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle f\,,\, \varphi_k\rangle \varphi_k\,, \quad h_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f\,,\, \varphi_k\rangle}{\lambda - \lambda_k}\, \varphi_k\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,;$$

on voit que $uh_n = s_n$, $n \in \mathbb{N}$, et si $m < n$,

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \left|\frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}\right|^2 \left|\langle f\,,\, \varphi_k\rangle\right|^2 \leqslant M^2 \sum_{k>m} \left|\langle f\,,\, \varphi_k\rangle\right|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

de sorte que $\{s_n\}$ est une suite de Cauchy. De même,

$$\|h_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}\right|^2 \left|\langle f\,,\, \varphi_k\rangle\right|^2 \leqslant M_1^2 \|f\|^2\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $M_1 = \sup_{k\geqslant 0} |1/(\lambda - \lambda_k)|$, de sorte que $\{h_n\}$ est une suite bornée dans E ; la compacité de u entraîne qu'une sous-suite de $\{s_n = uh_n\}$ converge ; puisque $\{s_n\}$ est une suite de Cauchy, ceci entraîne que $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, ce qui montre la convergence de la série dans (5.19).

Posons g pour le membre de droite dans (5.19) ; un petit calcul montre que

$$(\lambda - u)g = \lambda g - ug = f\,.$$

En effet,

$$\lambda g = f + \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n$$

$$ug = \frac{1}{\lambda}\, uf + \frac{1}{\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda_n^2}{\lambda - \lambda_n} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n\,;$$

d'après (5.18), on a $uf = \sum_{n\geqslant 0} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n$ d'où

$$ug = \sum_{n\geqslant 0} \left\{ \frac{\lambda_n}{\lambda} + \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda - \lambda_n)} \right\} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n$$

ce qui donne $\lambda g = f + ug$, c'est-à-dire $(\lambda - u)g = f$. De plus, d'après (5.19)

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, u)f\| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|f\| + \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|f\| + \frac{1}{|\lambda|} \left\{ \sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 \left|\langle f\,,\, \varphi_n\rangle\right|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|f\| + \frac{M}{|\lambda|} \left\{ \sum_{n\geqslant 0} \left|\langle f\,,\, \varphi_n\rangle\right|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \frac{M+1}{|\lambda|} \|f\| \end{aligned}$$

car $\sum_{n\geqslant 0}\left|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\right|^2 \leqslant \|f\|^2$ selon l'inégalité de Bessel. Ceci établit que $\|R(\lambda,u)\|\leqslant (M+1)/|\lambda|$ et que $\lambda\in\rho(u)$.

(v) Soit S le sous-espace linéaire fermé engendré par les φ_n ; puisque $\varphi_n \in u(E)$, $n\in\mathbb{N}$, on a $S\subset R=\overline{u(E)}$; d'après (5.18), on a $u(E)\subset S$ d'où $\overline{u(E)}\subset S$; au total, $S=\overline{u(E)}=R$.

Notons que si $A\subset E$, alors $A^\perp=\left(\overline{A}\right)^\perp$; donc

$$u(E)^\perp = R^\perp$$

car $R=\overline{u(E)}$. Démontrons que $u^{-1}(0)=u(E)^\perp$; il suffit pour cela de constater les équivalences simples suivantes (où l'on se sert de la symétrie de u) :

$$f\in u^{-1}(0) \Longleftrightarrow uf=0 \Longleftrightarrow \langle uf\,,\,g\rangle = 0 \text{ pour tout } g\in E$$
$$\Longleftrightarrow \langle f\,,\,ug\rangle = 0 \text{ pour tout } g\in E \Longleftrightarrow f\in u(E)^\perp .$$

Puisque $\lambda=0$ est une valeur propre de u si et seulement si $u^{-1}(0)\neq\{0\}$, la seconde affirmation de (v) est maintenant immédiate.

La suite orthonormale $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est complète si et seulement si le sous-espace fermé S engendré par les φ_n est tel que $S^\perp=\{0\}$; puisque $S=R=\overline{u(E)}$ et $S^\perp=R^\perp=u^{-1}(0)$, il en résulte que la complétude de $\{\varphi_n\}$ équivaut à la relation $R^\perp=\{0\}$; on conclut en utilisant la seconde affirmation de (v). ♦

5.4.5 Remarques

Les notations sont celles de la proposition 5.4.2.

(1) De la démonstration de la proposition 5.4.2, on constate que *les suites* $\{\lambda_n\}$ *et* $\{\varphi_n\}$ *sont de longueurs finies* N *si et seulement si* u *est un opérateur de rang* N (c'est-à-dire $\dim u(E)=N$) ; dans ce cas,

$$uf=\sum_{n=0}^{N-1}\lambda_n\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\varphi_n\,,\quad f\in E$$

et $u(E)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\varphi_0,\ldots,\varphi_{N-1}$. Dans ce cas, $u(E)=\overline{u(E)}=R$ et

$$E=u(E)\oplus u^{-1}(0)\ ;$$

en effet, si $f \in E$, $f = g + (f - g)$, où

$$g = \sum_{n=0}^{N-1} \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n \in u(E)$$

et $(f - g) \in u^{-1}(0)$ car

$$ug = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n = uf\ ;$$

de plus, $u(E) \cap u^{-1}(0) = \{0\}$ car avec la proposition 5.4.2(v) on a

$$u(E) \cap u^{-1}(0) = R \cap R^{\perp} = \{0\}\,.$$

Ces remarques sont, en particulier, applicables au cas où $\dim E = N < \infty$; mais lorsque $\dim E = \infty$, il y a aussi beaucoup d'opérateurs compacts symétriques de rang fini. Par exemple, si $E = C[\,0\,,\,1\,]$, muni de sa norme L^2, alors

$$(uf)(x) = \int_0^1 (x + y) f(y)\,\mathrm{d}y = x \cdot \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + 1 \cdot \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y$$

définit un opérateur symétrique compact dans E de rang 2, $u(E)$ étant engendré par les deux fonctions données par 1 et x (§ 5.3.2(6)).

(2) *Supposons que E est hilbertien.* Alors

$$E = u^{-1}(0) \oplus R \tag{5.23}$$

où $R = \overline{u(E)}$; c'est une conséquence du fait (prop. 5.4.2(v)) que

$$R^{\perp} = u^{-1}(0)$$

et de la proposition 3.7.8. En général, $u(E)$ ne sera pas fermé (mais c'est toujours un sous-espace vectoriel de E) ; par exemple, si $\dim E = \infty$ et $u^{-1}(0) = \{0\}$ (ce qui veut dire que 0 n'est pas une valeur propre de u), alors $u(E) \neq E$ mais $\overline{u(E)} = E$ et $0 \in \sigma(u)$ sans que 0 soit une valeur propre de u (§ 5.3.2(3)).

(3) *Soit E préhilbertien de dimension infinie.* Alors

$$\sigma(u) = D \cup \{0\}\,, \quad D = \{\mu_0, \mu_1, \ldots\} \subset \mathbb{R}$$

où D est un ensemble fini ou dénombrable (formé des nombres distincts parmi les λ_n) avec

$$\|u\| = |\mu_0| > |\mu_1| > \ldots > 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0 \text{ si } D \text{ est dénombrable}\,,$$

chaque μ_j étant une valeur propre de multiplicité finie ; donc, $\sigma(u)$ est compact ; 0 est une valeur propre si et seulement si la suite orthonormale $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (formée des vecteurs propres de u comme dans la proposition 5.4.2) n'est pas complète ; en tout cas, $0 \in \sigma(u)$ (§ 5.3.2(3)). L'ensemble D est fini ($D = \{\mu_0, \ldots, \mu_d\}$) si et seulement si u est de rang fini ($\dim u(E) < \infty$), le rang de u (égal à $\dim u(E)$) étant égal à la somme des multiplicités des $\mu_0, \ldots, \mu_d$.

Toutes ces affirmations sont contenues dans la proposition 5.4.2 ou dans sa démonstration.

L'écriture (5.23) n'est pas valable en général si E n'est pas complet (§ 3.7.13).

(4) *Soit* $\dim E = N < \infty$; alors $\sigma(u) = \{\mu_0, \ldots, \mu_d\} \subset \mathbb{R}$, les μ_j étant les valeurs propres distinctes de E avec $\|u\| = |\mu_0| > |\mu_1| > \ldots |\mu_d| > 0$. Soit E_j le sous-espace propre associé à μ_j, $0 \leqslant j \leqslant d$; alors

$$E = E_0 \oplus \cdots \oplus E_d$$

avec $N = \sum_{j=0}^{d} \dim E_j$, $E_j \perp E_k$ si $j \neq k$, $\dim E_j \geqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant d$ et $f \in E_j$ si et seulement si $uf = \mu_j f$. Soit $N_j = \dim E_j$; soit $\{\psi_1^j, \ldots, \psi_{N_j}^j\}$ une base orthonormale quelconque de E_j ; alors $B = \{\psi_i^j,\ 1 \leqslant i \leqslant N_j,\ 0 \leqslant j \leqslant d\}$ forme une base orthonormale de E. On dit que la base orthonormale B *diagonalise* u ; cette terminologie s'explique par le fait que dans cette base B, l'opérateur u est représenté par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}[\mu_0, \ldots, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_d, \ldots, \mu_d]$$

chaque μ_j étant répété N_j fois.

Soit $P_j = P_{E_j}$, la projection orthogonale sur E_j ; alors

$$u = \sum_{j=0}^{d} \mu_j P_j \,. \tag{5.24}$$

Nous conseillons le lecteur débutant de vérifier que (5.24) est équivalente à (5.22) ou (5.18) (se reporter au (5) qui suit). La formule (5.24) s'appelle le *théorème spectral* pour les opérateurs symétriques dans un espace hilbertien de dimension finie. (Rappelons que dans ce cas, tous les opérateurs sont compacts et que, pour les espaces de dimension finie, il y a aucune distinction entre espaces hilbertiens et espaces préhilbertiens.)

(5) *Soit E un espace hilbertien de dimension infinie.* Notre objectif est d'écrire l'analogue de (5.24) dans ce cas ; nous gardons les notations de (3). Soit E_j le sous-espace propre associé à $\mu_j \in D$, $j \geqslant 0$ et posons $Z = u^{-1}(0)$ et $N_j = \dim E_j$; on sait que $1 \leqslant N_j < \infty$ et que les sous-espaces fermés

E_0, E_1, ... et Z sont deux à deux orthogonaux. Posons $P_j = P_{E_j}$, $j \geqslant 0$; alors

$$u = \sum_{j \geqslant 0} \mu_j P_j \tag{5.25}$$

dans le sens que $uf = \sum_{j \geqslant 0} \mu_j P_j f$, $f \in E$.

La somme dans (5.25) est une somme finie des termes si D est de cardinalité fini et autrement elle est une somme d'une série dénombrable. La formule (5.25) est simplement une autre écriture de (5.18) ; en effet, pour $f \in E$,

$$P_j f = \sum_{i=1}^{N_j} \langle f \, , \, \psi_i^j \rangle \psi_i^j$$

où $\{\psi_1^j, \ldots, \psi_{N_j}^j\}$ est une base orhtonormale quelconque de E_j ; d'après (5.18), pour $f \in E$,

$$uf = \sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \langle f \, , \, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{j \geqslant 0} \mu_j \left(\sum_{n : \lambda_n = \mu_j} \langle f \, , \, \varphi_n \rangle \varphi_n \right) = \sum_{j \geqslant 0} \mu_j P_j f$$

car les φ_n correspondants à $\lambda_n = \mu_j$ forment une base orthonormale de E_j. Le regroupement des termes est justifié par le fait que la convergence de la série de (5.18) équivaut à la convergence de

$$\sum_{n \geqslant 0} |\lambda_n|^2 \left| \langle f \, , \, \varphi_n \rangle \right|^2 \leqslant \text{Cte} \sum_{n \geqslant 0} \left| \langle f \, , \, \varphi_n \rangle \right|^2 \leqslant \text{Cte} \|f\|^2 < \infty$$

car E est hilbertien (prop. 3.5.7).

On peut écrire (5.25) dans une forme différente. On a la *décomposition orthogonale*

$$E = Z \oplus E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \tag{5.26}$$

dans le sens que tout $f \in E$ s'écrit comme

$$f = g + f_0 + f_1 + \cdots \tag{5.27}$$

où g, f_0, f_1, ... est une suite orthogonale avec $g \in Z$, $f_j \in E_j$, $j \geqslant 0$, et

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|f_0\|^2 + \|f_1\|^2 + \cdots$$

En admettant (5.27), on a

$$uf = ug + uf_0 + uf_1 + \cdots = \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \cdots = \sum_{j \geqslant 0} \mu_j P_j f$$

(car $ug = 0$ et $f_j = P_j f$) ce qui n'est autre que (5.25). Pour établir (5.26), on utilise d'abord (5.23), d'où

$$f = g + h$$

où $g \in Z = u^{-1}(0)$ et $h \in R = \overline{u(E)}$; démontrons que

$$h = \sum_{n \geqslant 0} \langle h\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n\,. \tag{5.28}$$

Posons h' pour la somme de la série dans (5.28) (h' existe dans E car E est hilbertien et $\sum_{n \geqslant 0} \left| \langle h\,,\, \varphi_n \rangle \right|^2 \leqslant \|h\|^2 < \infty$) ; alors

$$u(h - h') = 0$$

car $\langle h - h'\,,\, \varphi_n \rangle = 0$, $n \geqslant 0$, et d'après (5.18)

$$u(h - h') = \sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \langle h - h'\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n = 0\,.$$

Puisque h, $h' \in R$ ($h' \in R$ car chaque $\varphi_n \in u(E)$, étant donné que $u\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, $n \geqslant 0$), on a $(h - h') \in Z \cap R$ d'où $h - h' = 0$ (d'après (5.23)) ; ceci prouve (5.28). En regroupant les termes dans (5.28), on a

$$h = \sum_{j \geqslant 0} \mu_j \left(\sum_{n : \varphi_n \in E_j} \langle h\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n \right) = \sum_{j \geqslant 0} f_j$$

ce qui donne (5.27).

Dans le cas *hilbertien*, on peut décrire exactement le sous-espace vectoriel (non nécessairement fermé) $u(E)$. *Un élément de* $h \in u(E)$ *si et seulement si*

$$h = \sum_{n \geqslant 0} c_n \varphi_n$$

où les c_n *sont des nombres complexes vérifiant* $\sum_{n \geqslant 0} \left| c_n / \lambda_n \right|^2 < \infty$. En effet, si $\sum_n \left| c_n / \lambda_n \right|^2 < \infty$, on peut poser

$$\psi = \sum_{n \geqslant 0} \frac{c_n}{\lambda_n} \varphi_n\ ;$$

alors $\psi \in E$ et

$$u\psi = \sum_{n \geqslant 0} c_n \varphi_n = h$$

(car $u\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $n \geqslant 0$) d'où $h \in u(E)$. D'autre part, si $h \in u(E)$, on a $h = u\psi$ pour un $\psi \in E$; avec (5.18), on a

$$h = u\psi = \sum_{n\geqslant 0} \lambda_n \langle \psi\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n = \sum_{n\geqslant 0} c_n\varphi_n$$

avec $c_n = \lambda_n\langle \psi\,,\, \varphi_n\rangle$ et

$$\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{c_n}{\lambda_n}\right|^2 = \sum_{n\geqslant 0} \left|\langle \psi\,,\, \varphi_n\rangle\right|^2 \leqslant \|\psi\|^2 < \infty\,.$$

Les formules équivalentes (5.25) et (5.26) s'appellent le ***théorème spectral*** pour les opérateurs compacts autoadjoints dans un espace hilbertien. Leur généralisation au cas des opérateurs autoadjoints non nécessairement compacts donne lieu à des *intégrales spectrales* au lieu des sommes discrètes que nous avons dans (5.25) et (5.26) ; cette généralisation est importante pour différentes théories, y incluses celles des équations aux dérivées partielles. Nous ne développerons pas cette généralisation ; les références ci-après peuvent être consultées pour cela.

5.4.6 Solution des équations

Soit u un opérateur compact autoadjoint non nul dans un espace ***hilbertien*** E. Nous reformulons une partie des résultats précédents en terme de solutions des équations

$$uf = \lambda f + g \tag{5.29}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in E$ sont donnés et $f \in E$ est à déterminer. Introduisons une notation un peu différente de celle utilisée dans la proposition 5.4.2. Posons

$$\sigma(u) = \{\mu_0, \mu_1, \ldots\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

avec $\|u\| = |\mu_0| > |\mu_1| > \ldots > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ si $\{\mu_0, \mu_1, \ldots\}$ est une suite infinie ; chaque μ_j est une valeur propre non nulle de u de multiplicité N_j avec un sous-espace propre associé E_j ; posons $Z = u^{-1}(0)$. On choisit une base orthonormale (arbitraire) dans chaque sous-espace vectoriel E_j et Z, obtenant ainsi une base orthonormale $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de E, formée exclusivement des vecteurs propres de u ; c'est (5.26) qui permet cette construction. Posons, pour $j = 0, 1, \ldots$,

$$J_j = \{\alpha \in J : u\psi_\alpha = \mu_j\psi_\alpha\} \quad \text{et} \quad J_\infty = \{\alpha \in J : u\psi_\alpha = 0\}$$

avec $\widetilde{\mu}_\alpha = \mu_j$ si $\alpha \in J_j$, $\widetilde{\mu}_\alpha = 0$ si $\alpha \in J_\infty$; alors

$$J = J_\infty \cup J_0 \cup J_1 \cup \cdots$$

Notons que, pour $j = 0, 1, \ldots$, J_j a exactement N_j éléments de sorte que $J \setminus J_\infty$ est au plus dénonbrable ; si E est séparable, J_∞ sera aussi au plus

dénombrable mais J_∞ peut aussi être vide (c'est le cas si $Z = \{0\}$) ; de toute façon, la séparabilité ou non de l'espace E n'affecte aucun des résultats suivants (ni aucun de ceux qui précèdent dans ce chapitre), bien que notre intérêt soit exclusivement centré sur le cas séparable. Nous appellerons $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ une base orthonormale ***u-adaptée*** ; son existence est garantie par (5.26).

Ces notations étant fixées, nous avons, pour tout $f \in E$,

$$f = \sum_{\alpha\in J} c_\alpha \psi_\alpha\,, \quad uf = \sum_{\alpha\in J} c_\alpha \tilde{\mu}_\alpha \psi_\alpha = \sum_{\alpha\notin J_\infty} c_\alpha \tilde{\mu}_\alpha \psi_\alpha \tag{5.30}$$

où $c_\alpha = \langle f\,,\, \psi_\alpha\rangle$, $\alpha \in J$.

Nous passons maintenant à la résolution de (5.29). Soit

$$g = \sum_{\alpha\in J} a_\alpha \psi_\alpha\,, \quad a_\alpha = \langle g\,,\, \psi_\alpha\rangle\,,\ \alpha \in J\ ;$$

les a_α sont connus (en principe) car g est donné. Substituant les expressions pour f, uf de (5.30) dans (5.29), on a

$$\sum_{\alpha\in J} c_\alpha \tilde{\mu}_\alpha \psi_\alpha = \sum_{\alpha\in J} \lambda c_\alpha \psi_\alpha + \sum_{\alpha\in J} a_\alpha \psi_\alpha$$

d'où

$$c_\alpha \tilde{\mu}_\alpha = \lambda c_\alpha + a_\alpha$$

ou

$$c_\alpha(\tilde{\mu}_\alpha - \lambda) = a_\alpha\,, \quad \alpha \in J\,. \tag{5.31}$$

Suivant la valeur de λ, différents cas se présentent pour (5.31). Si $\lambda \notin \sigma(u)$, alors (5.31) donne

$$c_\alpha = \frac{a_\alpha}{\tilde{\mu}_\alpha - \lambda}\,, \quad \alpha \in J$$

avec

$$f = \sum_{\alpha\in J} \frac{a_\alpha}{\tilde{\mu}_\alpha - \lambda}\,\psi_\alpha = \sum_{\alpha\in J} \frac{\langle g\,,\, \psi_\alpha\rangle}{\tilde{\mu}_\alpha - \lambda}\,\psi_\alpha \tag{5.32}$$

qui est l'unique solution de (5.29) si $\lambda \notin \sigma(u)$; en fait si $\lambda \notin \sigma(u)$,

$$f = (u - \lambda)^{-1} g = -(\lambda - u)^{-1} g = -R(\lambda, u) g\,.$$

Si $\lambda = \mu_j$, une des valeurs propres non nulles de u, alors (5.31) détermine c_α pour $\alpha \notin J_j$ par $c_\alpha = a_\alpha/(\tilde{\mu}_\alpha - \lambda)$; or, dans ce cas, lorsque $\alpha \in J_j$, $\tilde{\mu}_\alpha = \lambda = \mu_j$ et (5.31) montre que, d'une part, les c_α, $\alpha \in J_j$, ne sont pas déterminés par cette relation et, d'autre part, *une solution* f *ne peut exister que si* g *est tel que* $a_\alpha = 0$, $\alpha \in J_j$, c'est-à-dire si

$$\langle g\,,\, \psi_\alpha\rangle = 0\,, \quad \alpha \in J_j\,,$$

ce qui équivaut à avoir $g \in E_j^{\perp}$. Donc, *si* $\lambda = \mu_j$ *et* $g \in E_j^{\perp}$, *alors les solutions* f *de (5.29) sont données par*

$$f = \sum_{\alpha \in J \setminus J_j} \frac{a_\alpha}{\widetilde{\mu}_\alpha - \lambda} \psi_\alpha + \sum_{\alpha \in J_j} b_\alpha \psi_\alpha \tag{5.33}$$

où les N_j *constantes* b_α, $\alpha \in J_j$, *sont des nombres complexes arbitraires.*

Finalement, *soit* $\lambda = 0$; alors (5.31) détermine c_α pour $\alpha \notin J_\infty$ par $c_\alpha = a_\alpha / \widetilde{\mu}_\alpha$ (rappelons que $\widetilde{\mu}_\alpha \neq 0$ si $\alpha \notin J_\infty$) ; si $\alpha \in J_\infty$, $\lambda = 0$, (5.31) montre qu'il est nécessaire que $a_\alpha = 0$, $\alpha \in J_\infty$, pour qu'une solution f de (5.29) existe dans ce cas, c'est-à-dire g doit vérifier la condition suivante :

$$\langle g \,,\, \psi_\alpha \rangle = 0 \,, \quad \alpha \in J_\infty$$

ce qui équivaut à avoir $g \in Z^{\perp}$. Donc, *si* $\lambda = 0$ *et* $g \in Z^{\perp}$, *alors les solutions* f *de (5.29) sont données par*

$$f = \sum_{\alpha \notin J_\infty} \frac{a_\alpha}{\widetilde{\mu}_\alpha} \psi_\alpha + \sum_{\alpha \in J_\infty} b_\alpha \psi_\alpha \tag{5.34}$$

où les $b_\alpha \in \mathbb{C}$ *sont arbitraires mais vérifient la condition*

$$\sum_{\alpha \in J_\infty} |b_\alpha|^2 < \infty \,,$$

ceci à condition que g *soit tel que* $g \in Z^{\perp}$ *et vérifie*

$$\sum_{\alpha \notin J_\infty} \frac{\left| \langle g \,,\, \psi_\alpha \rangle \right|^2}{\widetilde{\mu}_\alpha^2} = \sum_{\alpha \in J_\infty} \left| \frac{a_\alpha}{\widetilde{\mu}_\alpha} \right|^2 < \infty \,. \tag{5.35}$$

Notons que sans (5.35) l'expression (5.34) n'a pas de sens.

Ainsi (5.32), (5.33) et (5.34) donnent une description complète des solutions de (5.29). Si g ne vérifie pas la condition $g \in E_j^{\perp}$ dans le cas $\lambda = \mu_j$ ou la condition $g \in Z^{\perp}$ dans le cas $\lambda = 0$ avec (5.35), alors (5.29) n'a pas de solution dans ces cas ; par contre, si $\lambda \notin \sigma(u)$, (5.32) donne l'unique solution f de (5.29) pour tout $g \in E$.

Un petit calcul permet de vérifier que (5.32) est équivalente à la formule (5.19) pour $R(\lambda, u)$ et que la condition (5.35) est exactement celle qui décrit l'appartenance d'un vecteur $g = h \in u(E)$ dans le paragraphe 5.4.5(5).

La discussion est parfaitement analogue pour le cas d'un espace *préhilbertien* E sauf qu'il faut, en plus, vérifier séparément la convergence des séries infinies dans E ; cette remarque concerne surtout les deux séries de (5.34) (cas $\lambda = 0$), les deux autres séries (5.32) et (5.33) ne posant aucun problème comme cela a été démontré dans la preuve de la proposition 5.4.2.

Une affirmation qui découle immédiatement de nos considérations s'appelle « *alternative de Fredholm* » ; elle dit que *si u est un opérateur compact symétrique dans un espace préhilbertien, alors, pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$, ou bien $uf = \lambda f$ possède une solution non nulle $f \in E$, ou bien $uf = \lambda f + g$ possède une unique solution $f \in E$ pour tout $g \in E$ donné.*

La preuve de cette affirmation est immédiate ; puisque $\lambda \neq 0$, il n'y a que deux cas : ou bien λ est une valeur propre (non nulle) de u (et alors $uf = \lambda f$ possède une solution $f \in E$, $f \neq 0$) ou bien λ n'est pas une valeur propre de u d'où $\lambda \in \rho(u)$ (car $\lambda \neq 0$) à cause de notre connaissance exacte de la nature du spectre de u et dans ce cas $(u - \lambda)$ est bijectif dans E.

Pour $\lambda \neq 0$, le comportement de $(u - \lambda)$ est comme celui de tous les opérateurs dans un espace vectoriel de dimension finie : $(u - \lambda)$ est surjectif si et seulement si $(u - \lambda)$ est injectif. Le cas $\lambda = 0$, par contre, peut être d'une nature différente.

5.5 ÉQUATIONS INTÉGRALES

5.5.1 Préliminaires

On a vu dans les paragraphes 5.3.2(5) et 5.3.2(6) que certains opérateurs compacts u sont définis par des formules de la forme

$$uf(x) = \int_X k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)\,.$$

On dit que u est un *opérateur intégral défini par la fonction noyau* k (par rapport à la mesure μ). Si k est *symétrique* (k réel, $k(x, y) = k(y, x)$) ou *hermitien* (k complexe, $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$), alors u sera autoadjoint (on dit aussi symétrique ou hermitien). Dans ce cas, on peut appliquer notre discussion du paragraphe 5.4.6 à la solution des *équations intégrales* $uf = \lambda f + g$ qui prennent la forme

$$\int_X k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = \lambda f(x) + g(x) \tag{5.36}$$

ou

$$\int_X k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = g(x) \tag{5.37}$$

si $\lambda = 0$; ici, μ peut être une mesure $\geqslant 0$ (σ-finie) quelconque définie sur une tribu Σ dans un ensemble X, même si les applications en vue concernent $X \subset \mathbb{R}^N$, Σ étant la tribu borélienne de X, et μ une mesure naturelle dans X (comme la mesure de Lebesgue ou mesure de Lebesgue multipliée par une densité, c'est-à-dire $\mathrm{d}\mu(y) = r(y)\, \mathrm{d}y$, $r(y) \geqslant 0$) ; dans (5.36) et (5.37), g est une fonction donnée, λ est un paramètre et f est la fonction à déterminer. Une hypothèse agréable et utile est que f, g soient dans $L^2(\mu) = L^2(X, \Sigma, \mu)$ mais d'autres hypothèses sont possibles (ou peuvent être exigées par certaines applications).

On dit que (5.36) est une *équation intégrale* (linéaire) *de Fredholm de seconde espèce* et (5.37) est une *équation intégrale* (linéaire) *de Fredholm de première espèce* ; cette terminologie est traditionnelle et bien établie. Du point de vue de la théorie de opérateurs, (5.36) et (5.37) concernent le même problème : trouver f tel que $uf = \lambda f + g$ (λ, g donnés). Le cas $\lambda = 0$ qui donne lieu à (5.37) a une théorie un peu différente du cas $\lambda \neq 0$, comme on l'a déjà vu dans le paragraphe 5.4.6 ; du point de vue de la théorie spectrale, ce qui est essentiel c'est de savoir si $\lambda \in \sigma(u)$ ou $\lambda \notin \sigma(u)$. Dans le second cas (qui concerne généralement (5.36), car assez souvent $0 \in \sigma(u)$), on a en principe une unique solution f pour chaque g donné. Dans le premier cas ($\lambda \in \sigma(u)$), la situation est plus compliquée comme on a pu le voir précisément lorsque u est compact et symétrique (ou autoadjoint) dans la section précédente. En tout cas, si $\lambda = 0$ (c'est alors l'équation (5.37)), l'*existence* d'une solution f équivaut à ce que g appartient à l'espace image de u et son unicité équivaut à ce que 0 n'est pas une valeur propre de u. Ces remarques sont un peu imprécises car l'on n'a pas encore fixé l'espace E dans lequel u est sensé opérer ; *pour la suite, nous supposons que* $E = L^2(\mu)$ *et* k *est tel que*

$$\int_X \int_X |k(x,y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) < \infty$$

comme dans le paragraphe 5.3.2(5) de sorte que l'opérateur u défini par

$$uf(x) = \int_X k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

pour $f \in E$ est un opérateur compact dans l'espace hilbertien E. Nous dirons que u est l'*opérateur (de Hilbert-Schmidt) défini par la fonction noyau* $k \in L^2(\mu \otimes \mu)$. Si $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$, $(x,y) \in X \times X$, alors on a vu dans la section précédente que u est aussi autoadjoint ; c'est le cas, en particulier, si k est symétrique et réelle.

Après ces précisions, il est évident que l'on peut traduire les résultats du paragraphe 5.4.6 pour obtenir les affirmations utiles concernant les solutions f de (5.36) et (5.37).

Nous supposerons pour la suite que $\dim L^2(\mu) = \infty$; l'autre cas, où $\dim L^2(\mu) < \infty$, est élémentaire et est une simple application de l'algèbre linéaire.

5.5.2 Opérateurs de rang finis

Supposons que k est de la forme suivante

$$k(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(y) \tag{5.38}$$

où a_j, $b_j \in E = L^2(\mu)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors l'opérateur u défini par la fonction noyau k est de rang fini ; en fait, $u(E)$ est contenu dans le sous-espace vectoriel

engendré par les n fonctions $a_1, \ldots, a_n$ de sorte que le rang de $u \leqslant n$. En effet, si $f \in E$,

$$uf(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \int_X b_j(y) f(y)\, d\mu(y) \tag{5.39}$$

de sorte que uf est une combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_n$. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est un système linéairement indépendant ainsi que $\{b_1, \ldots, b_n\}$, alors le rang de u (égal à $\dim u(E)$) est exactement n ; si les a_j (ou les b_j) sont linéairement dépendants, on peut trouver $\{\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m\}$, $\{\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_m\}$, $1 \leqslant m < n$, tels que les $\widetilde{a}_j$ sont linéairement indépendants ainsi que les $\widetilde{b}_j$ (Ex. 17, sect. 5.7) avec

$$k(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{a}_j(x)\widetilde{b}_j(y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(y)\,, \quad (x, y) \in X \times X\,.$$

On peut donc supposer que *les* a_j eux-mêmes (*ainsi que les* b_j) *sont linéairement indépendants*. Avec *cette hypothèse*, et *l'hypothèse que* $\dim E = \infty$ (ce qui exclut seulement les cas élémentaires), nous constaterons ce qui suit :

(1) l'ensemble $\sigma(u)$, u *étant défini dans* $E = L^2(\mu)$ *par (5.39), est égal à la réunion de* $\lambda = 0$ *et des valeurs propres (dans* $\mathbb{C}$*) de la matrice* $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \langle \alpha_j\,,\, \beta_i \rangle$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *où* $\alpha_j = a_j$, $\beta_i = \bar{b}_i$.

En particulier, $\sigma(u)$ est un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{C}$ contenant au plus $(n + 1)$ points et $0 \in \sigma(u)$; nous donnons, en fait, une méthode explicite pour résoudre (5.36) et (5.37) dans le cas où u est donné par (5.39).

Il est commode de procéder dans un cadre abstrait ; soit E un *espace hilbertien* quelconque *de dimension infinie* ; si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ sont deux systèmes de vecteurs linéairements indépendants dans n, posons

$$uf = \sum_{i=1}^{n} \langle f\,,\, \beta_i \rangle \alpha_i\,, \quad f \in E\,. \tag{5.40}$$

Alors u est un opérateur dans E de rang $n < \infty$ (Ex. 18, sect. 5.7) ; pour résoudre l'équation $uf = \lambda f + g$ ($g \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ donnés), on observe qu'une solution f doit être nécessairement telle que

$$\lambda f + g = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j \tag{5.41}$$

où les c_j sont des constantes complexes à déterminer. De (5.41), on a

$$\lambda \langle f\,,\, \beta_i \rangle + \langle g\,,\, \beta_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle \alpha_j\,,\, \beta_i \rangle$$

d'où

$$uf = \sum_{i=1}^{n} \langle f\,,\, \beta_i \rangle \alpha_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \langle \alpha_j\,,\, \beta_i \rangle \right) \alpha_i - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \langle g\,,\, \beta_i \rangle \alpha_i\,.$$

Pour avoir $uf = \lambda f + g$, on doit alors exiger que

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\langle\alpha_j\,,\,\beta_i\rangle\right)\alpha_i - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\langle g\,,\,\beta_i\rangle\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$$

ce qui donne (à cause de l'indépendance linéaire des α_i) le système d'équations linéaire dans $\mathbb{C}^n$ suivant :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\langle\alpha_j\,,\,\beta_i\rangle - \lambda c_i = \langle g\,,\,\beta_i\rangle\,,\quad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{5.42}$$

Avec $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \langle\alpha_j\,,\,\beta_i\rangle$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $I =$ matrice unité d'ordre n, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i = \langle g\,,\,\beta_i\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, (5.42) s'écrit comme

$$(A - \lambda I)c = d \tag{5.43}$$

(selon nos conventions, c et d sont des vecteurs colonnes). L'équation (5.43) possède une unique solution $c \in \mathbb{C}^n$ si et seulement si λ est tel que

$$\det(A - \lambda I) \neq 0\,.$$

On peut en conclure que si $\lambda \neq 0$ et λ n'est pas une valeur propre de A, alors $\lambda \in \rho(u) = \sigma(u)^c$ et l'unique solution de $uf = \lambda f + g$ est donnée par (5.41) :

$$f = -\frac{1}{\lambda}\,g + \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j$$

où $c = (c_1, \ldots, c_n) = (A - \lambda I)^{-1}d$; notons que les c_j sont des fonctions rationnelles de λ. Si $\lambda \neq 0$ et λ est une valeur propre de A, alors (5.43) avec $d = 0$ (qui est le cas si $g = 0$) montre qu'il existe $c \neq 0$ tel que

$$f = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j$$

vérifie $uf = \lambda f$; autrement dit, si $\lambda \neq 0$ et λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \sigma(u)$ et λ est une valeur propre (de multiplicité finie) de u. Puisque $0 \in \sigma(u)$ pour tous les opérateurs compacts u dans un espace hilbertien de dimension infinie (§ 5.3.2(3)), on a établi notre affirmation (1).

Disons un mot pour la solution de l'équation $uf = g$, $g \in E$ étant donné ; une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution $f \in E$ est (évidemment) que $g \in u(E)$ et alors il y a une infinité de solutions de la forme $f + \varphi$ où $u(\varphi) = 0$ (c'est-à-dire $\varphi \in u^{-1}(0)$). En écrivant $g = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, on aura $uf = g$ (pour u défini par (5.40)) si et seulement si $f \in E$ est tel que

$$\langle f\,,\,\beta_i\rangle = a_i\,,\quad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

On peut déterminer un tel f immédiatement si les β_i sont orthonormaux (alors $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i$), sinon on peut procéder (en principe) par une orthonormalisation à la Gram-Schmidt.

Si u est défini par (5.40), on vérifie sans peine (Ex. 19, sect. 5.7) que u^* est donné par

$$u^*f = \sum_{i=1}^{n} \langle f\,,\, \alpha_i\rangle \beta_i\,, \quad f \in E\,. \tag{5.44}$$

(Notons que u est autoadjoint si $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, mais ce n'est pas une condition nécessaire ; Ex. 20, sect. 5.7.) En appliquant l'affirmation (1) sur u^*, on obtient ce qui suit :

(2) $\lambda \in \sigma(u^*)$ *si et seulement si* $\overline{\lambda} \in \sigma(u)$.

En effet, d'après *(1)* et (5.44), $\lambda \in \sigma(u^*)$ avec $\lambda \neq 0$ si et seulement si λ est une valeur propre de la matrice $B = [b_{ij}]$ où $b_{ij} = \langle \beta_j\,,\, \alpha_i\rangle$, $1 < i, j \leqslant n$; or on observe que

$$b_{ij} = \overline{a}_{ji}\,, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n\,,$$

c'est-à-dire $B = A^*$. Si

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n\{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\} = p(\lambda)\,,$$

alors

$$\det(A^* - \lambda I) = \overline{p(\overline{\lambda})}$$

car

$$\overline{\det(A^* - \lambda I)} = \det({}^tA - \overline{\lambda} I) = \det(A - \overline{\lambda} I) = p(\overline{\lambda})\ ;$$

donc $\det(A^* - \lambda I) = 0$ si et seulement si $p(\overline{\lambda}) = 0$, ce qui prouve notre affirmation.

Notons que la matrice $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \langle \alpha_j\,,\, \beta_i\rangle$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, peut être non inversible même si les $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ainsi que les $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ sont linéairement indépendants. En effet, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont $2n$ vecteurs d'une suite orthonormale dans E, alors $a_{ij} = 0$ pour tout couple i, j et A est la matrice zéro. Mais si $\alpha_i = \beta_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (et dans ce cas, u donné par (5.40) est symétrique), alors A est la matrice de Gram associée à $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ et A est inversible si et seulement si les α_i sont linéairement indépendants (Ex. 3, § 3.2.6).

Cette discussion pour les opérateurs compacts de rang fini, non nécessairement autoadjoints, montre que certain résultats spectraux démontrés pour les opérateurs compacts autoadjoints pourraient être valables pour tous les opérateurs compacts, autoadjoints ou non. C'est effectivement juste ; on a le théorème suivant sur le spectre d'un *opérateur compact quelconque* u dans un espace hilbertien E :

(3) l'ensemble $\sigma(u)$ est au plus dénombrable ; $0 \in \sigma(u)$ si $\dim E = \infty$; si $\sigma(u)$ est dénombrable, alors 0 est le seul point d'accumulation de $\sigma(u)$; si $\lambda \in \sigma(u)$, $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de multiplicité finie. De plus, $\sigma(u^*) = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(u)\}$ et u^* est également un opérateur compact.

Cet énoncé reste également valable pour E préhilbertien, à l'exception de sa dernière phrase ; pour E préhilbertien (non complet), on peut avoir des opérateurs compacts u qui n'ont pas d'ajoint u^* (d'ailleurs, nous n'avons pas défini u^* dans le cas préhilbertien).

Nous ne démontrerons pas cet énoncé concernant les spectres d'un opérateur compact général non nécessairement autoadjoint car les applications que nous visons concernent les opérateurs compacts symétriques (ou autoadjoints), surtout ceux qui sont donnés comme des opérateurs intégraux définis par des fonctions noyaux symétriques.

5.5.3 Opérateurs intégraux symétriques

Soit u un opérateur de Hilbert–Schmidt dans $L^2(\mu)$ défini par une fonction noyau $k \in L^2(\mu \otimes \mu)$ telle que

$$k(x, y) = \overline{k(y, x)}\,, \quad (x, y) \in X \times X\,;$$

alors u est un opérateur compact autoadjoint dans $L^2(\mu)$. Ces notations et cette terminologie sont expliquées dans le paragraphe 5.5.1. De la théorie générale des opérateurs compacts autoadjoints dans un espace hilbertien (sect. 5.4), nous savons qu'il existe une suite de nombres réels non nuls (suite finie ou infinie) $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ et une suite correspondante de fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ dans $L^2(\mu)$ telles que

$$|\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant \ldots > 0\,, \qquad u\varphi_n = \lambda_n \varphi_n\,, \quad n \geqslant 0\,,$$

avec $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ si la suite des λ_n est une suite infinie ; les λ_n sont les valeurs propres (avec répétitions) de u et les φ_n sont les *fonctions propres* correspondantes ; de plus, si $f \in L^2(\mu)$, on a (selon (5.18))

$$uf = \sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n \tag{5.45}$$

en se rappelant qu'ici

$$uf(x) = \int_X k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

$$\langle f\,,\, \varphi_n \rangle = \int_X f(x) \overline{\varphi}_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

la série pour uf étant convergente au sens de $L^2(\mu)$.

Dans ce paragraphe nous démontrons que, sous certaines conditions assez générales sur la fonction noyau k, on peut affirmer que la série pour uf converge absolument et uniformément en $x \in X$ (affirmation qui n'a pas de sens dans le cadre général de la proposition 5.4.2). *Les notations et les hypothèses sont comme ci-dessus avec* $k \in L^2(\mu \otimes \mu)$ *où* (X, Σ, μ) *est un espace mesuré,* $\mu \geqslant 0$, σ*-finie,* $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$.

(1) Théorème de Hilbert–Schmidt

Supposons que

$$\sup_{x \in X} \int_X |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(y) = M < \infty \, ; \tag{5.46}$$

alors, pour chaque $f \in L^2(\mu)$, *la série*

$$\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \langle f \, , \, \varphi_n \rangle \varphi_n(x) \tag{5.47}$$

converge absolument uniformément pour $x \in X$, *la somme étant égale à* $uf(x)$, μ*-p.p.* $x \in X$.

REMARQUE. Nous dirons qu'une série $\sum_{n \geqslant 0} h_n(x)$ $(h_n : X \to \mathbb{C})$ *converge absolument uniformément* pour $x \in X$ (ou dans X) si :

(i) $\sum_{n \geqslant 0} |h_n(x)| < \infty$, $x \in X$ et

(ii) $\sup_{x \in X} \sum_{n \geqslant N} |h_n(x)| \xrightarrow{N \to \infty} 0$.

DÉMONSTRATION

Posons k_x pour la fonction $y \mapsto k(x, y)$ $(y \in X)$; alors, pour tout $x \in X$, $k_x \in L^2(\mu)$; on a

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int_X k(x, y) \varphi_n(y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \langle k_x \, , \, \overline{\varphi}_n \rangle \, , \quad n \geqslant 0 \, ,$$

d'où, selon l'inégalité de Bessel (noter que $\{\overline{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions orthonormées dans $L^2(\mu)$ car $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a cette propriété), on a

$$\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n^2 |\varphi_n(x)|^2 \leqslant \|k_x\|^2 \leqslant M$$

à cause de la condition (5.46). De plus,

$$\sum_{n \geqslant 0} \left| \langle f \, , \, \varphi_n \rangle \right|^2 \leqslant \|f\|^2 \, ,$$

toujours selon l'inégalité de Bessel. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans ℓ^2, on a, pour $x \in X$,

$$\sum_{n\geqslant 0}\left|\lambda_n\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)\right| \leqslant \left\{\sum_{n\geqslant 0}\left|\lambda_n\varphi_n(x)\right|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n\geqslant 0}\left|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\right|^2\right\}^{1/2}$$
$$\leqslant \sqrt{M}\|f\| < \infty$$

ce qui prouve la convergence absolue de (5.47) pour tout $x \in X$. Le même raisonnement donne, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in X$,

$$\sum_{n\geqslant N}\left|\lambda_n\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)\right| \leqslant \left\{\sum_{n\geqslant N}\left|\lambda_n\varphi_n(x)\right|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n\geqslant N}\left|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\right|^2\right\}^{1/2}$$
$$\leqslant \sqrt{M}\left\{\sum_{n\geqslant N}\left|\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\right|^2\right\}^{1/2} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

ce qui montre la convergence absolue uniforme de (5.47) pour $x \in X$. Le fait que la somme donnée par (5.47) est égale à $uf(x)$, μ-p.p. $x \in X$, est une conséquence de (5.45) et du résultat général suivant : *si* $\{g_n\}_{n\geqslant 0}$ *est une suite de fonctions dans* $L^2(\mu)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\| = 0$$

où $g \in L^2(\mu)$ *et si de plus, en même temps,* $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = h(x)$ μ*-p.p.* $x \in X$, *alors* $g(x) = h(x)$ μ*-p.p.* $x \in X$. En effet, on sait (d'après la démonstration de la complétude de $L^2(X, \Sigma, \mu)$ (§ 3.2.4)) qu'il existe une sous-suite $\{g_{n_j}\}$ telle que $\lim_{j\to\infty} g_{n_j}(x) = g(x)$ μ-p.p. $x \in X$, d'où $g = h$ μ-p.p. Il suffit d'appliquer ce résultat avec

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\langle f\,,\,\varphi_j\rangle\varphi_j(x)\,, \quad x \in X$$

et

$$g = uf\,, \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\langle f\,,\,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)\,, \quad x \in X\,. \qquad \blacklozenge$$

REMARQUE. Notons que la condition (5.46) est vérifiée si $\mu(X) < \infty$ et k est une fonction bornée (mesurable) dans $X \times X$. Rappelons que $k \in L^2(\mu \otimes \mu)$ entraîne que

$$\int_X |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(y) < \infty$$

μ-p.p. $x \in X$.

En supposant que X *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^N$, μ *est une mesure* $\geqslant 0$ *finie définie pour les parties boréliennes de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *dès que*

A est une partie ouverte non vide dans X, on peut préciser *(1)* de manière suivante.

(2) Supposons que $k \in C(X \times X)$, $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$, $(x,y) \in X \times X$; *alors, pour tout* $f \in L^2(\mu)$, $uf \in C(x)$ *et*

$$uf(x) = \sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n(x)\,, \quad x \in X\,,$$

la convergence étant absolument uniforme dans X.

REMARQUE. $C(X)$ est l'ensemble des fonctions réelles complexes continues définies dans X ; de même, $C(X \times X)$ est l'ensemble des fonctions complexes continues définies dans $X \times X$.

DÉMONSTRATION

Si $\sup_{x,y} |k(x,y)| = C$, alors $C < \infty$ car $X \times X$ est compact ; donc

$$\sup_x \int_X |k(x,y)|^2 \, \mathrm{d}\mu(y) \leqslant C^2 \mu(X) < \infty$$

de sorte que la condition (5.46) est vérifiée. De la proposition *(1)*, on conclut que la série (5.47) converge absolument uniformément dans X. Observons que si $f \in L^2(\mu)$, alors $uf \in C(X)$ car si $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ dans X, alors

$$\lim_{n\to\infty} uf(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X k(x_n, y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_X k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y) = uf(x)\,,$$

l'échange de la limite et de l'intégrale étant justifié par le théorème de Lebesgue. Puisque les $\lambda_n \neq 0$ et

$$u\varphi_n = \lambda_n \varphi_n\,,$$

on a que les fonctions propres $\varphi_n \in C(X)$; la convergence uniforme de la série (5.47) entraîne alors que sa somme définit une fonction continue $h \in C(X)$. Ainsi, d'après (1), $h(x) = uf(x)$ μ-p.p. $x \in X$; or h et uf sont, toutes les deux, des fonctions continues. Donc $h(x) = uf(x)$, pour tout $x \in X$; en effet, $\{x \in X : h(x) \neq uf(x)\} = A$ est une partie ouverte dans X telle que $\mu(A) = 0$; alors, $A = \emptyset$, d'après l'hypothèse faite sur μ. ♦

5.5.4 Remarques et compléments

Supposons que X est une partie compacte de $\mathbb{R}^N$ munie d'une mesure positive μ, $\mu(X) < \infty$, avec $\mu(A) > 0$ dès que A est une partie non vide de X ouverte dans X ; soit $k : X \times X \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* avec $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ pour $(x,y) \in X \times X$. Alors on sait (§ 5.5.3) que

$$uf(x) = \int_X k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y)\,, \quad x \in X$$

définit un opérateur compact autoadjoint dans $L^2(\mu)$ avec $uf \in C(X)$ pour tout $f \in L^2(\mu)$. Soient $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots\}$ les valeurs propres non nulles (avec répétitions) de u et $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ les fonctions propres correspondantes, étant entendu que ces suites peuvent être de longueur finie ou infinie ; on suppose que les φ_j forment une suite orthonormale ; puisque $u\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}^*$, on sait que les φ_j sont continues. En adjoignant d'autres fonctions $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ formant une base orthonormale de $u^{-1}(0)$, on aura une base orthonomale pour $L^2(\mu)$ formée des ψ_α et des φ_j ; ainsi, $\{\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\psi}_\alpha, \alpha \in J\}$ sera aussi une base orthonormale de $L^2(\mu)$. Posons $k_x(y) = k(x, y)$; alors

$$\langle k_x, \overline{\psi}_\alpha\rangle = \int_X k(x,y)\psi_\alpha(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = u\psi_\alpha(x) = 0\,, \quad x \in X$$

$$\langle k_x, \overline{\varphi}_j\rangle = \int_X k(x,y)\varphi_j(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = u\varphi_j(x) = \lambda_j\varphi_j(x)\,, \quad x \in X\,.$$

Donc, pour $x \in X$,

$$k_x = \sum_{j\geqslant 0}\langle k_x, \overline{\varphi}_j\rangle\overline{\varphi}_j = \sum_{j\geqslant 0}\lambda_j\varphi_j(x)\overline{\varphi}_j$$

où la série converge au sens de $L^2(X)$, ce que nous indiquons par l'écriture suivante : pour tout $x \in X$,

$$k(x,y) \sim \sum_{j\geqslant 0}\lambda_j\varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)\,. \tag{5.48}$$

On peut peut-être tenté de dire qu'il y a égalité dans (5.48) ; en fait, il est facile de voir que pour beaucoup de k la série dans (5.48) peut être divergente en certains points $(x, y) \in X\times X$ (Ex. 21, sect. 5.7). Néanmoins, *si l'on suppose que les $\lambda_j > 0$, alors la série dans (5.48) est absolument uniformément convergente dans $X \times X$, la somme étant égale à $k(x, y)$ pour tout $(x, y) \in X \times X$*. Cette proposition s'appelle le *théorème de Mercer*. La condition $\lambda_j > 0$, $j \geqslant 0$, équivaut à la condition que l'opérateur intégral u défini par la fonction noyau k soit positif :

$$\langle uf, f\rangle \geqslant 0\,, \quad f \in L^2(\mu)\,.$$

L'importance du théorème de Mercer provient du fait que dans un certain nombre d'applications, la fonction noyau k est telle que l'opérateur u est positif. Une telle fonction k s'appelle un *noyau de type positif*.

Nous esquissons une démonstration du théorème de Mercer, les notations et les hypothèses sur X, μ et k étant celles données ci-dessus et en considérant le seul cas non banal où la suite $\lambda_n > 0$ est de longueur infinie. On démontre d'abord que si $\langle uf, f\rangle \geqslant 0$ pour tout $f \in L^2(\mu)$ (ou même pour tout $f \in C(X)$), alors $k(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X$. En effet, si $\operatorname{Re} k(x_0, x_0) < 0$ pour un $x_0 \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\operatorname{Re} k(x,y) \leqslant -\varepsilon < 0\,, \quad (x,y) \in (V\times V)\cap(X\times X)$$

à cause de la continuité de k ; si $\varphi \in C(X)$ est tel que $\varphi(x_0) = 1$, $\varphi(x) = 0$ si $x \in X \setminus V$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ (donc φ est réel), alors on aura la contradiction

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle u\varphi\,,\,\varphi\rangle &= \operatorname{Re}\int_X \varphi(x)\left\{\int_X k(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right\}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \varphi(x)\left\{\int_{V\cap X} \operatorname{Re} k(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right\}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\leqslant -\varepsilon\mu(X)\mu(V\cap X) < 0\,. \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire montre que $\operatorname{Im} k(x,x) = 0$ pour tout $x \in X$. Nous démontrons maintenant que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \left|\varphi_j(x)\right|^2 \leqslant k(x,x)\,, \quad x \in X\,. \tag{5.49}$$

Pour ce faire posons, pour $n = 0, 1, \ldots,$

$$k_n(x,y) = k(x,y) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)\,, \quad (x,y) \in X \times X\,,$$

$$u_n f(x) = \int_X k_n(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,, \quad x \in X\,,\ f \in L^2(\mu)\,.$$

Alors u_n est un opérateur compact autoadjoint dans $L^2(\mu)$ et u_n est positif car, pour $f \in L^2(\mu)$,

$$\langle u_n f\,,\,f\rangle = \langle uf\,,\,f\rangle - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left|\langle f\,,\,\varphi_j\rangle\right|^2 = \langle ug\,,\,g\rangle \geqslant 0$$

où

$$g = f - \sum_{j=0}^{n} \langle f\,,\,\varphi_j\rangle\varphi_j\,,$$

ce que l'on vérifie avec un petit calcul. D'après ce qui est déjà établi pour un noyau de type positif, on conclut que

$$k_n(x,x) \geqslant 0\,, \quad x \in X\,,\ n \in \mathbb{N}$$

d'où l'on tire de la définition de $k_n(x,x)$

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left|\varphi_j(x)\right|^2 \leqslant k(x,x)\,, \quad x \in X\,,\ n \in \mathbb{N}$$

ce qui donne (5.49) en faisant $n \to \infty$. Posons

$$M = \sup_{x\in X} k(x,x)\,;$$

alors $M < \infty$ car k est continue et X est compact. De l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a, pour $x, y \in X$,

$$\sum_{j\geqslant 1} \lambda_j |\varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)| \leqslant \left\{ \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j |\varphi_j(y)|^2 \right\}^{1/2} \leqslant M$$

d'après (5.49) et la définition de M, ce qui montre que la série dans (5.48) est absolument convergente dans $X \times X$, la somme étant une fonction bornée h avec

$$h(x,y) = \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)\,, \quad (x,y) \in X \times X\,.$$

A nouveau, de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on conclut que, pour $N_0 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j |\varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)| &\leqslant \left\{ \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j |\varphi_j(y)|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{M} \left\{ \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{5.50}$$

d'où

$$\sup_{y\in X} \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j |\varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)| \leqslant \sqrt{M} \left\{ \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j |\varphi_j(x)|^2 \right\}^{1/2} \xrightarrow{N_0\to\infty} 0$$

établissant que, pour tout $x \in X$, la série définissant $h(x,y)$ converge absolument uniformément en $y \in X$. Les φ_n étant continues, on conclut que, pour $x \in X$ fixé, $y \mapsto h(x,y)$ est continue et que pour tout $x \in X$

$$\int_X |k(x,y)-h(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\mu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_X \left| k(x,y) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y) \right|^2 \mathrm{d}\mu(y) = 0$$

à cause de (5.48) et du fait que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y) = h(x,y)$$

uniformément en $y \in X$ (pour chaque $x \in X$ fixé). Puisque $y \mapsto k(x,y)$ et $y \mapsto h(x,y)$ sont continues et $\mu(A) > 0$ pour $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, A ouvert dans X, on conclut (avec un raisonnement déjà utilisé pour la démonstration du paragraphe 5.5.3(2)) que

$$k(x,y) = h(x,y)\,, \quad y \in X$$

pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $h = k$.

On a donc établi que

$$k(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(y)\,, \quad (x,y) \in X \times X\,. \tag{5.51}$$

La série étant absolument convergente dans $X \times X$ et uniformément convergente en $y \in X$ pour chaque x fixé dans X. Il reste à voir que la série de (5.51) est absolument uniformément convergente dans $X \times X$; pour cela, on utilise un théorème élémentaire (appelé *théorème de Dini*) : *si* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = g(x)$ *est une série de termes* $\geqslant 0$ *telle que* g_n, $g \in C(X)$, $n \geqslant 0$, X *étant une partie compacte de* $\mathbb{R}^N$, *alors la série converge uniformément dans* X. En admettant ce théorème, on a la convergence uniforme dans X de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \big|\varphi_n(x)\big|^2 = k(x,x)$$

ce qui donne

$$\sup_{x\in X} \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j \big|\varphi_j(x)\big|^2 \xrightarrow{N_0\to\infty} 0\,;$$

de (5.50), on conclut que

$$\sup_{\substack{x\in X\\ y\in X}} \sum_{j\geqslant N_0} \lambda_j \big|\varphi_j(x)\overline{\varphi}_j(y)\big| \xrightarrow{N_0\to\infty} 0$$

établissant la convergence absolue uniforme dans $X \times X$ de (5.51). Le théorème de Mercer est ainsi complètement démontré.

Esquissons une démonstration du théorème de Dini. Pour ce faire, posons

$$h_n(x) = \sum_{j\geqslant n} g_j(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\ x \in X\,;$$

alors $h_n = g - (g_0 + \cdots + g_{n-1}) \in C(X)$, $n \geqslant 1$ et

$$g(x) = h_0(x) \geqslant h_1(x) \geqslant \ldots\,, \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0\,,\ x \in X\,.$$

Si $\varepsilon > 0$, $x \in X$, il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $h_{n(x)}(x) < \varepsilon$ d'où l'existence d'un voisinage ouvert V_x de x tel que

$$h_{n(x)}(y) < \varepsilon\,, \quad y \in V_x \cap X$$

à cause de la continuité des h_n ; on en déduit que

$$h_n(y) < \varepsilon\,, \quad y \in V_x \cap X\,,\ n \geqslant n(x)$$

car $h_n \leqslant h_m$ si $n \geqslant m$. Evidemment,

$$X \subset \bigcup_{x\in X} V_x\,;$$

à cause de la compacité de X, il existe un recouvrement ouvert fini avec

$$X \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_r} .$$

Si $n_0 \geqslant \max\{n(x_1), \ldots, n(x_r)\}$, alors, pour $y \in X$,

$$\sum_{j \geqslant n} g_n(y) = h_n(y) < \varepsilon , \quad n \geqslant n_0$$

ce qui prouve la convergence uniforme dans le théorème de Dini.

Pour compléter la discussion, nous donnons explicitement quelques conditions équivalentes pour qu'une fonction noyau *continue*

$$k : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

soit un noyau de type positif ; nous supposons que X est une partie compacte dans $\mathbb{R}^N$ (la discussion est applicable aux espaces topologiques compacts quelconques, mais dans notre ouvrage, nous nous sommes bornés aux parties de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$) munie d'une mesure $\mu \geqslant 0$, finie (dite mesure de Radon dans X) dont le « support » est X (ce qui veut dire que $\mu(A) > 0$ dès que $\emptyset \neq A \subset X$, A ouvert dans X). Soit u l'opérateur compact autoadjoint dans $L^2(\mu)$ associé à k est défini par

$$uf(x) = \int_X k(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y) , \quad x \in X .$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout choix de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x_1, \ldots, x_n$ dans X, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans $\mathbb{C}$, on a

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} k(x_i, x_j) \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0 ;$$

(on peut se restreindre aux choix des $x_1, \ldots, x_n$ distincts)

(ii) l'opérateur u associé à k est positif

$$\langle uf , f \rangle \geqslant 0 , \quad f \in L^2(\mu)$$

(on peut se restreindre aux $f \in C(X) \subset L^2(\mu)$).

Notons d'abord que la condition (ii) entraîne que

$$\langle uf , g \rangle = \langle f , ug \rangle , \quad f , g \in L^2(\mu) .$$

En effet, si

$$F_1(f,g) = \langle uf\,,\, g\rangle\,, \quad F_2(f,g) = \frac{1}{2}\left\{\langle uf\,,\, g\rangle + \langle f\,,\, ug\rangle\right\}$$

pour $f,\ g \in L^2(\mu)$, alors F_1 et F_2 sont deux formes sesquilinéaires sur $L^2(\mu)$ telles que

$$F_1(f,f) = F_2(f,f) \in \mathbb{R}\,, \quad f \in L^2(\mu)$$

car $\langle uf\,,\, f\rangle = \langle f\,,\, uf\rangle$ puisque $\langle uf\,,\, f\rangle$ est réel ; on a vu (§ 3.1.1) qu'alors

$$F_1(f,g) = F_2(f,g)\,, \quad f\,,\ g \in L^2(\mu)$$

ce qui donne $\langle uf\,,\, g\rangle = \langle f\,,\, ug\rangle$ pour tous $f,\ g \in L^2(\mu)$. Ainsi, sous condition (ii) u est autoadjoint (et compact) et (§ 5.2.4)

$$k(x,y) = \overline{k(y,x)}\,, \quad (x,y) \in X \times X\,.$$

De plus, si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de u et $u\varphi = \lambda\varphi$, $\|\varphi\| > 0$, alors de la relation

$$0 \leqslant \langle u\varphi\,,\, \varphi\rangle = \langle \lambda\varphi\,,\, \varphi\rangle = \lambda\|\varphi\|^2$$

on voit que $\lambda > 0$. D'autre part, si u est un opérateur autoadjoint compact dans $L^2(\mu)$ tel que toutes ses valeurs propres non nulles sont > 0, alors u est positif car, d'après (5.18), pour $f \in L^2(\mu)$, on a

$$\langle uf\,,\, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n\,,\, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left|\langle f\,,\, \varphi_n\rangle\right|^2 \geqslant 0\,.$$

Pour établir que (i) et (ii) sont équivalentes, on peut raisonner comme suit.

(i)⇒(ii) Si $f \in C(X)$, alors on obtient de (i),

$$\begin{aligned}\langle uf\,,\, f\rangle &= \int_X \overline{f}(x)\left\{\int_X k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right\}\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \iint_{X\times X} k(x,y)\overline{f}(x)f(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} k(x_i,x_j)\overline{f}(x_i)f(x_j)\mu(A_i)\mu(A_j) \geqslant 0\end{aligned}$$

où les A_j sont des ensembles boréliens deux à deux disjoints avec $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $x_j \in A_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, avec diamètre$(A_j) < \varepsilon$ (consulter par exemple vol. 1, prop. 5.2.14). Puisque $C(X)$ est dense dans $L^2(\mu)$, on a la même inégalité pour $f \in L^2(\mu)$, ce qui établit (ii).

(ii)⇒(i) On peut procéder rapidement en utilisant le fait que (ii) entraîne (5.51) (théorème de Mercer) ; si k vérifie (5.51), un petit calcul montre que

$$\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} k(x_i,x_j)\xi_i\overline{\xi}_j = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\varphi_k(x_i)\overline{\varphi}_k(x_j)\xi_i\overline{\xi}_j\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_k(x_i)\right|^2 \geqslant 0$$

ce qui établit (i). (On peut démontrer (i) directement de (ii) mais c'est un peu plus laborieux.)

La caractéristique (i) des noyaux de type positif montre la nature algébrique de la condition. Il y a une théorie intéressante que l'on peut développer pour un noyau $k : X \times X \to \mathbb{C}$ vérifiant la condition (i), lorsque X est un *ensemble non vide quelconque*. Un théorème important du sujet (dit *théorème de factorisation*) est le suivant : *il existe un espace hilbertien H et une fonction $\xi : X \to H$ telle que*

$$\langle \xi(x)\,,\,\xi(y)\rangle = k(x,y)\,,\quad (x,y)\in X\times X\,. \tag{5.52}$$

On peut interpréter (5.51) comme un cas particulier de (5.52) ; on prend $H = \ell^2_\lambda$ où le produit scalaire entre $a = (a_0, a_1, \ldots)$, $b = (b_0, b_1, \ldots)$, est défini par

$$\langle a\,,\,b\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a_j\overline{b}_j$$

avec $H = \ell^2_\lambda = \{a : \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j|a_j|^2 < \infty\}$; on pose

$$\xi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots) \in \ell^2_\lambda$$

ce qui permet d'identifier (5.51) comme un cas particulier de (5.52).

On peut aussi associer un *espace hilbertien* E_k à un noyau de type positif $k : X \times X \to \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) $E_k \subset \mathbb{C}^X$, l'espace de toutes les fonctions complexes définies dans X ;
(b) $k_x \in E_k$ pour tout $x \in X$ où $k_x(y) = k(x,y)$;
(c) le produit scalaire dans E_k est défini de telle manière que, pour $f \in E_k$, on a

$$\langle f\,,\,k_x\rangle = f(x)\,,\quad x\in X$$

La propriété (c) fait que l'on parle de l'espace hilbertien E_k comme l'espace hilbertien associé au *noyau reproduisant* k ; d'après (c), on a, pout x, $y \in X$,

$$\langle k_x\,,\,k_y\rangle = k_x(y) = k(x,y)\,.$$

L'existence de E_k n'est pas immédiate (dans Dieudonné [6, problème 8, VI. 3] ; il y a des démonstrations moins élémentaires mais plus rapides en utilisant la théorie de probabilités) mais le théorème de factorisation (5.52) en devient une conséquence immédiate en prenant $H = E_k$ et $\xi(x) = k_x$.

La théorie des noyaux positifs joue un rôle important dans la théorie des processus stochastiques (où on les appelle *fonction de covariance*), la théorie des fonctions holomorphes et les équations aux dérivées partielles.

Notons que le théorème de Mercer dans le cas où X est un ensemble fini équivaut au théorème suivant concernant les matrices : *si* $A = [a_{ij}]$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *est une matrice autoadjointe positive* ($\langle Ax\,,\, x\rangle \geqslant 0$, $x \in \mathbb{C}^n$), *alors* A *est de la forme* $A = B^*B$. Le lecteur ne doit pas avoir de difficulté pour démontrer cet énoncé en utilisant les considérations de ce chapitre.

Le théorème de Mercer se généralise aisément au cas où un nombre fini (au plus) des λ_n dans (5.51) sont < 0.

5.6 SPECTRE D'UN OPÉRATEUR BORNÉ

5.6.1 Proposition (*série de Neumann*)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E *un espace hilbertien. Si* $\|u\| < 1$, *alors* $(1-u)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ *avec*

$$(1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \cdots, \quad \left\|(1-u)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|u\|}.$$

DÉMONSTRATION

Le sens à attribuer à $1 + u + u^2 + \cdots$ est le suivant : si $f \in E$, alors

$$vf = (1 + u + u^2 + \cdots)f = f + uf + u(uf) + \cdots$$

la série à droite étant convergente dans E car

$$\sum_{n\geqslant 0} \|u^n f\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \|u\|^n \|f\| \leqslant \frac{1}{1-\|u\|}\,\|f\| < \infty.$$

Un calcul simple donne que

$$(1-u)vf = (1-u)(f + uf + u^2 f + \cdots) = f = v(1-u)f$$

d'où $v = (1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \cdots$; puisque

$$\left\|(1-u)^{-1} f\right\| = \|f + uf + u^2 f + \cdots\| \leqslant \frac{1}{1-\|u\|}\,\|f\|,$$

on conclut que $\left\|(1-u)^{-1}\right\| \leqslant 1/(1-\|u\|)$. ♦

REMARQUE. De même,

$$(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots \in \mathcal{L}(u)\,, \quad \left\|(1+u)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|u\|}$$

si $\|u\| < 1$, en appliquant ce qui précède à $-u$.

5.6.2 Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E un espace hilbertien. Alors $\rho(u)$ est une partie ouverte de $\mathbb{C}$ et $\sigma(u)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$ contenue dans $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|u\|\}$.

DÉMONSTRATION

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|u\|$; alors, en utilisant la proposition 5.6.1, on a

$$(\lambda - u)^{-1} = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\,u\right)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

car $\left\|(1/\lambda)\,u\right\| = (1/|\lambda|)\,\|u\| < 1$; donc $\lambda \in \rho(u)$ si $|\lambda| > \|u\|$ d'où

$$\sigma(u) = \rho^c(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|u\|\}\,.$$

Démontrons que $\rho(u)$ est ouvert ; si $\lambda \in \rho(u)$, on a, pour $h \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda + h - u) = (\lambda - u)\left\{1 + h(\lambda - u)^{-1}\right\}\,;$$

puisque

$$\left\|h(\lambda - u)^{-1}\right\| = |h|\left\|(\lambda - u)^{-1}\right\| < 1$$

si $|h| < \varepsilon = \left\|(\lambda - u)^{-1}\right\|^{-1}$, on a

$$\left\{1 + h(\lambda - u)^{-1}\right\}^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

d'où $(\lambda + h - u)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ si $|h| < \varepsilon$ car

$$(\lambda + h - u)^{-1} = \left\{1 + h(\lambda - u)^{-1}\right\}^{-1}(\lambda - u)^{-1}\,.$$

Ainsi, si $\lambda \in \rho(u)$, alors $(\lambda + h) \in \rho(u)$ si $|h| < \varepsilon$, ce qui établit que $\rho(u)$ est ouvert. ♦

REMARQUE. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut démontrer que $\sigma(u)$ est non vide ; nous ne démontrerons pas ici cette propriété.

5.6.3 Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E un espace hilbertien. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe $\varphi_n \in E$, $\|\varphi_n\| = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, avec

$$\lim_{n\to\infty} \|u\varphi_n - \lambda\varphi_n\| = 0\,,$$

alors $\lambda \in \sigma(u)$. Nous dirons que λ est une quasi-valeur propre.

DÉMONSTRATION

Il suffit de voir que $(u-\lambda)^{-1}$ ne peut pas exister comme opérateur borné dans E car sinon on aurait $M > 0$ tel que

$$1 = \|\varphi_n\| = \left\|(u-\lambda)^{-1}(u-\lambda)\varphi_n\right\| \leqslant M\|u\varphi_n - \lambda\varphi_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ce qui est une contradiction. ♦

REMARQUE. Si $\lambda \in \sigma_p$, alors $u\varphi = \lambda\varphi$ pour un $\varphi \in E$ avec $\|\varphi\| = 1$; alors on peut prendre $\varphi_n = \varphi$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\|u\varphi_n - \lambda\varphi_n\| = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Donc une valeur propre est une quasi-valeur propre. Pour u autoadjoint dans $\mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \sigma(u)$ si et seulement si λ est une quasi-valeur propre (prop. 5.6.5).

5.6.4 Remarque

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E un espace hilbertien ; supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|uf\| \geqslant c\|f\|\,, \quad f \in E\,. \tag{5.53}$$

Alors u est injectif et l'application $u^{-1} : u(E) \to E$ est un opérateur borné avec $\|u^{-1}\| \leqslant 1/c$ et $u(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé dans E. En effet, $uf = 0$ entraîne que $f = 0$ et la relation

$$\|f\| = \|u^{-1}uf\| \leqslant \frac{1}{c}\,\|uf\|\,, \quad f \in E$$

montre que

$$\|u^{-1}g\| \leqslant \frac{1}{c}\,\|g\|\,, \quad g \in u(E)$$

d'où $\|u^{-1}\| \leqslant 1/c$. Démontrons que $u(E)$ est fermé ; soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $u(E)$ avec $g_n \to g \in E$ lorsque $n \to \infty$. Alors $g_n = uf_n$, $f_n \in E$ et

$$\|f_n - f_m\| = \|u^{-1}g_n - u^{-1}g_m\| \leqslant \frac{1}{c}\,\|g_n - g_m\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

d'où $f_n \to f \in E$ lorsque $n \to \infty$; on en conclut que $uf = g$ car

$$uf = \lim_{n\to\infty} uf_n = \lim_{n\to\infty} g_n = g$$

d'où $g \in u(E)$; donc $u(E)$ est fermé.

On conclut que si $u \in \mathcal{L}(E)$, E un espace hilbertien, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ *si et seulement si* u *vérifie (5.53) et* $u(E)$ *est dense dans* E. En effet, on a alors $u(E) = E$ car (5.53) entraîne que $u(E)$ est fermé d'où $u : E \to E$ est bijectif avec $\|u^{-1}\| \leqslant 1/c$.

5.6.5 Proposition

Soit u *un opérateur autoadjoint borné dans un espace hilbertien* E. *Alors* $\lambda \in \sigma(u)$ *si et seulement si* λ *est une quasi-valeur propre de* u *(prop. 5.6.3) ; de plus* $\sigma(u) \subset \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

On a déjà vu qu'une quasi-valeur propre $\lambda \in \sigma(u)$ pour tout opérateur $u \in \mathcal{L}(E)$ (prop. 5.6.3) ; il suffit de prouver que chaque $\lambda \in \sigma(u)$ est une quasi-valeur propre. Pour cela, il suffit d'établir que si λ n'est pas une quasi-valeur propre pour $u = u^* \in \mathcal{L}(E)$, alors $\lambda \in \rho(u)$. Puisque λ n'est pas une quasi-valeur propre de u, on a

$$\inf\{\|uf - \lambda f\| : \|f\| = 1\} = \varepsilon > 0$$

d'où on obtient

$$\|uf - \lambda f\| \geqslant \varepsilon \|f\|, \quad f \in E.$$

Démontrons que l'espace image de l'opérateur $(u - \lambda)$ est dense dans E (ce qui démontre, d'après le paragraphe 5.6.4, que $(u - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$) ; ceci équivaut à avoir (corollaire 3.7.11) $g = 0$ dès que $\langle uf - \lambda f , g\rangle = 0$ pour tout $f \in E$. Or si

$$\langle uf - \lambda f , g\rangle = 0 = \langle f , ug - \overline{\lambda} g\rangle$$

pour tout $f \in E$, on aura $ug - \overline{\lambda} g = 0$; un calcul montre que

$$\|ug - \overline{\lambda} g\|^2 = \|ug\|^2 + |\lambda| \, \|g\|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda \langle ug , g\rangle = \|ug - \lambda g\|^2$$

où l'on a utilisé $u = u^*$ pour avoir $\langle ug , g\rangle \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \overline{\lambda}$. Donc $ug - \overline{\lambda} g = 0$ entraîne que $ug - \lambda g = 0$, ce qui donne $g = 0$ car

$$0 = \|ug - \lambda g\| \geqslant \varepsilon \|g\| .$$

Ainsi $(u - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \rho(E)$ si λ n'est pas une quasi-valeur propre.

Démontrons que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (c'est-à-dire si $\lambda - \overline{\lambda} \neq 0$), alors $\lambda \in \rho(u)$; pour ce faire, on observe que, pour $f \in E$,

$$\langle (u - \lambda) f , f\rangle = \langle uf , f\rangle - \lambda \|f\|^2$$

$$\langle (u - \overline{\lambda}) f , f\rangle = \langle uf , f\rangle - \overline{\lambda} \|f\|^2 = \langle f , (u - \lambda) f\rangle$$

d'où

$$0 < |\lambda - \overline{\lambda}| \, \|f\|^2 = \left| \langle (u-\lambda)f \, , \, f \rangle - \langle f \, , \, (u-\lambda)f \rangle \right|$$
$$\leqslant 2 \|uf - \lambda f\| \, \|f\|$$

ce qui donne

$$\|uf - \lambda f\| \geqslant \frac{1}{2} |\lambda - \overline{\lambda}| \, \|f\| \, , \quad f \in E \, .$$

Ceci montre que si $\lambda - \overline{\lambda} \neq 0$, alors λ n'est pas une quasi-valeur propre de u ; d'après ce qui précède, $\lambda \in \rho(u)$ si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ce qui équivaut à $\sigma(u) \subset \mathbb{R}$. ♦

5.6.6 Proposition

Soit u un opérateur unitaire dans un espace hilbertien E. Alors $\sigma(u) \subset C = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

DÉMONSTRATION

Rappelons que $uu^* = u^*u = \mathrm{id}_E$ de sorte que $u^{-1} = u^* \in \mathcal{L}(E)$; de plus, pour tout $f \in E$,

$$\|uf\|^2 = \langle uf \, , \, uf \rangle = \langle f \, , \, u^*uf \rangle = \|f\|^2$$

et, de même, $\|u^*f\|^2 = \|f\|^2$ de sorte que

$$\|u\| = \|u^{-1}\| = 1 \, .$$

Donc si $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, alors selon la proposition 5.6.2

$$\sigma(u) \subset \overline{D} \, .$$

On a, pour $|\lambda| < 1$,

$$u - \lambda = u(1 - \lambda u^{-1}) \, , \quad (u-\lambda)^{-1} = (1 - \lambda u^{-1})^{-1} u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

car $\|\lambda u^{-1}\| = |\lambda| \, \|u^{-1}\| = |\lambda| < 1$ et $(1 - \lambda u^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, selon la proposition 5.6.1 ; donc

$$D \subset \rho(u) \, , \quad D^c \supset \rho(u)^c = \sigma(u)$$

d'où

$$\sigma(u) \subset \overline{D} \cap D^c = C = \{\lambda : |\lambda| = 1\} \, .$$ ♦

REMARQUE. Pour les opérateurs autoadjoints (ou normaux) $u \in \mathcal{L}(E)$, E hilbertien, il est traditionnel d'appeler $\sigma(u) \setminus \sigma_p(u)$ le *spectre continu* de u ($\sigma_p(u)$ étant le *spectre ponctuel* de u). On peut démontrer que $\sigma(u)$ est formé des quasi-valeurs propres si u est normal ; ceci est démontré dans la proposition 5.6.5 lorsque u est autoadjoint.

5.7 EXERCICES

1 Soit $u(x_1, \ldots, x_N) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_N x_N)$ où $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$, $\mathbb{C}^N$ étant muni de son produit scalaire canonique avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$. Vérifier que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ avec $\|u\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |\lambda_j|$, $\sigma(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$.

2 Soit $u(x_0, x_1, \ldots) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots)$ où $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2$, ℓ^2 étant muni de son produit scalaire canonique avec les $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Vérifier que $ux \in \ell^2$ pour tout $x \in \ell^2$ si et seulement si $\sup_{j \geqslant 0} |\lambda_j| = M < \infty$ et alors $u \in \mathcal{L}(\ell^2)$ avec $\|u\| = M$, $\sigma_p(u) = A$, $\sigma(u) = \overline{A}$ où A est la partie de $\mathbb{C}$ formée par les λ_j. (Voir que si $\lambda \notin \overline{A}$, alors $(u - \lambda)(x_0, x_1, \ldots) = (y_0, y_1, \ldots)$ donne $x_j = y_j/(\lambda_j - \lambda)$ de sorte que $(u-\lambda)^{-1}(y_0, y_1, \ldots) = (y_0/(\lambda_0 - \lambda), y_1/(\lambda_1 - \lambda), \ldots)$ avec $(u - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$. Si $\lambda \in \overline{A} \setminus A$, alors voir qu'il existe $\varphi_j \in \ell^2$, $\|\varphi_j\| = 1$ $j = 1, 2, \ldots$ tels que $\|u\varphi_j - \lambda\varphi_j\| \to 0$ $(j \to \infty)$ ce qui montre que $\lambda \in \sigma(u)$.)

3 Posons $u(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$, $v(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ avec $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2$, ℓ^2 étant muni de son produit scalaire canonique. Vérifier que $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$, $v = u^*$ (c'est-à-dire que $\langle ux, y\rangle = \langle x, vy\rangle$, $x, y \in \ell^2$) mais, u, v ne sont pas unitaires car u n'est pas injectif (mais u est surjectif) et v n'est pas surjectif (mais v est injectif).

4 (Continuation de l'exercice 2) Vérifier (en supposant que $\sup_j |\lambda_j| < \infty$) les formules suivantes : pour $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2$,

$$u^*x = (\overline{\lambda}_0 x_0, \overline{\lambda}_1 x_1, \ldots), \quad u^*ux = uu^*x = \left(|\lambda_0|^2 x_0, |\lambda_1|^2 x_1, \ldots\right).$$

Conclure que u est normal et que u est autoadjoint si et seulement si les λ_j sont réels.

5 Soit u un opérateur compact dans un espace préhilbertien E ; démontrer que u ne peut pas avoir une valeur propre non nulle de multiplicité infinie.

6 (Continuation de l'exercice 3) Démontrer que u n'est pas normal en vérifiant que $uu^*x = u^*ux$ pour $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \ell^2$ si et seulement si $x_0 = 0$. Démontrer que $\sigma_p(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ en vérifiant que $u\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, $\varphi_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$, si $|\lambda| < 1$, et que si $|\lambda| = 1$, alors $(\lambda - u)$ est injectif. Conclure que $\sigma(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}$ en utilisant la proposition 5.6.2.

7 Si $u \in \mathcal{L}(E)$, E hilbertien, démontrer que

$$\sigma(u^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(u)\}.$$

En conclure (en utilisant l'exercice 6) que pour l'opérateur v de l'exercice 3,

$$\sigma(v) = \sigma(v^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\} ;$$

démontrer, par contre, que $\sigma_p(v) = \emptyset$. (Utiliser les formules $(u - \lambda)^* = u^* - \overline{\lambda}$, $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$, valables pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ (§ 5.1.2).)

8 Soient $E = L^2([0,1])$, $uf(x) = xf(x)$, $f \in E$; vérifier que u est un opérateur positif borné dans E avec $\|u\| = 1$, $\sigma_p(u) = \emptyset$, $\sigma(u) = [0,1]$.

9 Soit $u = P_F$, la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé F contenu dans un espace hilbertien E. Si $F \neq \{0\}$, E, démontrer $\sigma(u) = \sigma_p(u) = \{0,1\}$ en vérifiant que si $\lambda \neq 0$, 1,

$$(\lambda - u)^{-1} f = \lambda^{-1} \left(f + \frac{1}{\lambda - 1} uf \right), \quad f \in E.$$

10 Soit $E = C([0,1])$, l'espace préhilbertien muni de son produit scalaire L^2 ; posons, pour $f \in E$,

$$uf(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $(\lambda - u)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ en vérifiant que

$$(\lambda - u)^{-1} f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x f(t) e^{-t/\lambda}\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Démontrer que u est injectif mais non surjectif en vérifiant que

$$u(E) = \left\{ g \in C^1([0,1]) : g(0) = 0 \right\}.$$

Conclure que $\sigma(u) = \{0\}$ et que u n'a aucune valeur propre. (Une méthode formelle pour découvrir la formule pour $(\lambda - u)^{-1} f$ est la suivante :

$$(\lambda - u)^{-1} f = \lambda^{-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda} u\right)^{-1} f = \lambda^{-1} \left(f + \frac{1}{\lambda} uf + \frac{1}{\lambda^2} u^2 f + \cdots \right)$$

avec

$$u^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots)$$

11 Soit $E = L^2([0,1])$; on définit uf pour $f \in E$ comme dans l'exercice 10. A l'aide du paragraphe 5.3.2(5), déduire que u est un opérateur compact dans E. Vérifier que u^* est donné par

$$u^* f(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

(Les raisonnements de l'exercice 10 sont en gros ici aussi valables et donnent un opérateur compact (non autoadjoint) u dans l'espace hilbertien $L^2([0,1])$ tel que $\sigma(u) = \{0\}$ et que u n'a aucune valeur propre. Comparer avec la proposition 5.4.2.)

12 Pour u de l'exercice 10, démontrer que u est un opérateur compact dans l'espace préhilbertien $C([0,1])$ en suivant le raisonnement donné dans le paragraphe 5.3.2(6).

13 Soit $uf = \int_0^1 f(y)y^2\,dy$ avec $f \in E$ où $E = L^2([0,1])$ ou $C([0,1])$ (munis de la norme L^2). Démontrer que :

(i) $\sigma(u) = \sigma_p(u) = \{0, 1/3\}$;

(ii) $\lambda = 1/3$ est une valeur propre simple ayant une fonction propre $f = 1$ et $\lambda = 0$ est une valeur propre de multiplicité ∞, les fonctions propres correspondantes étant les $f \in \{x^2\}^\perp$;

(iii) si $\lambda \neq 0, 1/3$, on a, pour $f \in E$,

$$(\lambda - u)^{-1} f = \frac{1}{\lambda} f + \frac{3}{\lambda(3\lambda - 1)} \int_0^1 f(y)y^2\,dy$$

(utiliser la méthode donnée dans le paragraphe 5.5.2).

14 Soit $uf(x) = \int_0^1 (x - y)f(y)\,dy$ avec $f \in E$, E comme dans l'exercice 13. Démontrer que :

(i) $\sigma(u) = \sigma_p(u) = \{0, i/\sqrt{12}, -i/\sqrt{12}\}$;

(ii) les valeurs propres $\lambda = \pm i/\sqrt{12}$ sont simples ayant une fonction propre $f(x) = x + (\lambda - 1/2)$;

(iii) $\lambda = 0$ est une valeur propre de multiplicité ∞, les fonctions propres correspondantes étant les $f \in \{1, x\}^\perp$.

15 Soit $uf(x) = \int_0^1 (x + y)f(y)\,dy$ avec $f \in E$, E comme dans l'exercice 13. Démontrer que :

(i) $\sigma(u) = \sigma_p(u) = \{0, 1/2 + 1/\sqrt{3}, 1/2 - 1/\sqrt{3}\}$;

(ii) les valeurs propres $\lambda = 1/2 \pm 1/\sqrt{3}$ sont simples ayant une fonction propre $f(x) = x + (\lambda - 1/2)$;

(iii) $\lambda = 0$ est une valeur propre de multiplicité ∞, les fonctions propres correspondantes étant les $f \in \{1, x\}^\perp$.

16 (Continuation de l'exercice 15) Démontrer que le noyau $k(x, y) = x + y$, $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, n'est pas de type positif en utilisant les différents critères donnés (§ 5.5.4).

17 Soit u un opérateur de rang $n < \infty$ dans un espace hilbertien E. Démontrer que

$$uf = \sum_{j=1}^{n} \langle f\,,\, \beta_j \rangle \alpha_j\,, \quad f \in E$$

où $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est une base orthonormale de $u(E)$ et $\beta_j = u^*\alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Vérifier que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement indépendants

18 Soient $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ deux familles finies de vecteurs dans un espaces préhilbertien E, chacune étant formée des vecteurs linéairement indépendants. Si

$$uf = \sum_{j=1}^{n} \langle f\,,\, \beta_j \rangle \alpha_j\,, \quad f \in E$$

démontrer que $u(E)$ est le sous-espace vectoriel engendré par les α_j de sorte que $\dim u(E) = n$. (Si $Tf = \big(\langle f\,,\, \beta_1\rangle, \ldots \langle f\,,\, \beta_n\rangle\big)$, voir que $T : F \to \mathbb{C}^n$ est injectif où F est le sous-espace vectoriel engendré par les β_j ; conclure que $T(F) = \mathbb{C}^n = T(E)$; donc si $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe $f \in F$ tel que $\langle f\,,\, \beta_j \rangle = c_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, et $uf = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j$.)

19 Soit E un espace hilbertien ; si α_j, $\beta_j \in E$, $1 \leqslant j \leqslant n$, posons $uf = \sum_{j=1}^{n} \langle f\,,\, \beta_j \rangle \alpha_j$, $f \in E$. Vérifier que

$$u^*f = \sum_{j=1}^{n} \langle f\,,\, \alpha_j \rangle \beta_j\,, \quad f \in E$$

de sorte que u est autoadjoint si $\alpha_j = \beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

20 Supposons que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ainsi que $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ sont linéairement indépendants dans un espace hilbertien E ; on a

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f\,,\, \beta_i \rangle \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f\,,\, \alpha_i \rangle \beta_i$$

pour tout $f \in E$ si et seulement si $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\alpha_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $c_{ij} = \overline{c}_{ji}$. (On vérifie que $\big\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\big\}^{\perp} = \big\{\beta_1, \ldots, \beta_n\big\}^{\perp}$ d'où l'égalité des sous-espaces engendrés par les α_j et par les β_j.)

21 Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique et paire ($h(-x) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$) ; posons $k(x, y) = h(x - y)$, x, $y \in [\,-\pi\,,\, \pi\,]$. Soit

$$uf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y\,, \quad f \in L^2\big([\,-\pi\,,\, \pi\,]\big) = E\,.$$

On sait que u est un opérateur compact autoadjoint dans E (car $k(x, y) = k(y, x) \in \mathbb{R}$). Vérifier que $u\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, où $\varphi_n(x) = (1/\sqrt{2\pi})\, \mathrm{e}^{inx}$,

$\lambda_n = 2\pi c_n(h)$, $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(h)$ étant le n-ième coeffient de Fourier complexe de h. En déduire que si h est une fonction continue telle que sa série de Fourier ne converge pas partout, alors la formule (5.51) du théorème de Mercer est en défaut car ici (5.51) devient

$$k(x,y) = h(x-y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(h)\, \mathrm{e}^{in(x-y)}\,.$$

22 Soient u_1 et u_2 deux opérateurs compacts de Hilbert–Schmidt dans $L^2(\mu)$ ayant des fonctions noyaux k_1, k_2 respectivement (k_1, $k_2 \in L^2(\mu \otimes \mu)$). Vérifier que l'opérateur $u = u_1 u_2$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt dont la fonction noyau k est donnée par

$$k(x,y) = \int_X k_1(x,t) k_2(t,y)\, \mathrm{d}\mu(t)$$

avec

$$|k(x,y)| \leqslant a_1(x) b_1(y)\,,$$

$$a_1(x) = \left\{ \int_X |k_1(x,t)|^2\, \mathrm{d}\mu(t) \right\}^{1/2}, \quad b_1(y) = \left\{ \int_X |k_2(t,y)|^2\, \mathrm{d}\mu(t) \right\}^{1/2}$$

23 Soit u un opérateur de Hilbert–Schmidt dans $L^2(\mu)$ donné par la fonction noyau k. Démontrer que si $|\lambda| > \|u\|$, alors $(\lambda - u)^{-1} f$, $f \in L^2(\mu)$, est défini par

$$(\lambda - u)^{-1} f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \int_X h_\lambda(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

où

$$h_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} k_n(x,y)\,,$$

k_n étant la fonction noyau de u^n, $n = 1, 2, \ldots$ (On a (prop. 5.6.1)

$$\begin{aligned}(\lambda - u)^{-1} f(x) &= \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \frac{1}{\lambda} u f(x) + \frac{1}{\lambda^2} u^2 f(x) + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_X k_n(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \frac{1}{\lambda} f(x) + \int_X h_\lambda(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)\end{aligned}$$

l'échange de l'intégrale et de la somme étant justifié par les inégalités

$$|k_n(x,y)| \leqslant a(x) b(y) \|u\|^{n-2}, \quad n \geqslant 2 \text{ (se reporter à l'exercice 22)}$$

$$\sum_{n=2}^{N} |k_n(x,y)| / |\lambda|^{n+1} \leqslant C a(x) b(y)\,, \quad C = \sum_{n=2}^{\infty} \|u\|^{n-2} / |\lambda|^{n+1}\,.)$$

24 Soit X une partie compacte de $\mathbb{R}^N$ munie d'une mesure positive finie μ ; soit $k : X \times X \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Posons, pour $f \in C(X)$,

$$uf(x) = \int_X k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)\,,$$

$$\|k\|_\infty = \sup_{(x,y)\in X\times X} |k(x,y)|\,, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |k(x)|\,.$$

Vérifier que $u : C(X) \to C(X)$ est linéaire avec

$$\|uf\|_\infty \leqslant \mu(X)\|k\|_\infty \|f\|_\infty\,.$$

Démontrer que si $|\lambda| > \mu(X)\|k\|_\infty$, alors l'équation intégrale

$$\lambda g(x) - \int_X k(x,y) g(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = f(x)$$

($f \in C(X)$ donné, $g \in C(X)$ à déterminer) possède une unique solution

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \int_X h_\lambda(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)\,, \quad x \in X$$

où $h_\lambda(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda^{n+1}) k_n(x,y)$, $k_n \in C(X\times X)$ étant défini comme dans l'exercice 23. (Ici, $g = (\lambda - u)^{-1} f$ est calculé dans « l'espace de Banach » $C(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$; la proposition 5.6.1 reste valable dans ce cadre et les calculs indiqués dans l'exercice 23 sont applicables sans changement sauf que toutes les fonctions sont continues, un cadre donc plus simple ; de plus, la série pour h_λ converge absolument uniformément car $\|k_n\|_\infty \leqslant \|k\|_\infty^n \mu(X)^{n-1}$, $|\lambda| > \mu(X)\|k\|_\infty$.)

5.8 OPÉRATEURS NON BORNÉS

5.8.1 Introduction

Les opérateurs qui interviennent dans la théorie des équations différentielles ne sont jamais définis partout dans un espace hilbertien de type $L^2(X,\mu)$. Considérons, par exemple, l'*opérateur différentiel* important L défini par

$$Lf = f'' + qf$$

où q est une fonction continue réelle dans un intervalle $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$. Si la linéarité de L est parfaitement évidente, il n'est pas, a priori, de même en ce qui concerne le domaine de définition de L ; un certain choix est souvent imposé par la nature du problème à étudier. Ainsi, un problème fréquemment rencontré est la résolution de l'équation différentielle

$$Lf = g\,,$$

g étant une fonction réelle donnée ($g \in C([a, b])$) et f est à déterminer de telle manière qu'elle vérifie aussi aux *conditions limites* (dites *de Dirichlet*) *homogènes*

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0.$$

Nous étudierons ce type de problème plus en détails dans la suite ; ici, nous l'utiliserons seulement pour motiver certaines considérations abstraites que nous développerons dans cette section. Un domaine de définition naturel pour L (pour l'étude du problème mentionné) serait

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in C^2([a, b]) : f(a) = f(b) = 0 \right\}.$$

On peut considérer $\mathcal{D}$ comme un sous-espace vectoriel de l'espace hilbertien $L^2([a, b]) = E$ mais alors l'application linéaire $L : \mathcal{D} \to E$ ne serait pas continue car $f \mapsto f''$ n'est pas continue. (Considérer $a = 0$, $b = \pi$, $f_n(x) = \sin nx$, $f_n''(x) = -n^2 \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, $\|f_n\| = \sqrt{\pi/2}$, $\|f_n'\| = n^2 \|f_n\|$, de sorte qu'une inégalité de type

$$\|f''\| \leqslant C\|f\|$$

valable pour $f \in \mathcal{D}$, avec $C < \infty$, est exclue.)

On dit que L est un opérateur *non borné* dans l'espace hilbertien E, son domaine étant un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ de E ; notons que $\mathcal{D}$ est *dense* dans E et que L est *symétrique* dans le sens que

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

si $f, g \in \mathcal{D}$. En effet,

$$\langle Lf, g \rangle = \int_a^b (f'' + qf)\overline{g}\, dx = \int_a^b f(\overline{g'' + qg})\, dx = \langle f, Lg \rangle$$

car q est une fonction réelle et

$$\int_a^b f''\overline{g}\, dx = f'\overline{g}\Big|_a^b - \int_a^b f'\overline{g}'\, dx = -\int_a^b f'\overline{g}'\, dx$$
$$= -f\overline{g}'\Big|_a^b + \int_a^b f\overline{g}''\, dx = \int_a^b f\overline{g''}\, dx$$

à cause du fait que $f(a) = f(b) = 0$, $g(a) = g(b) = 0$, $\overline{g}' = \overline{g'}$; $\overline{g}'' = \overline{g''}$.

La théorie que nous développons ici concerne, en premier lieu, les opérateurs symétriques $L : \mathcal{D} \to E$, L étant une application linéaire définie dans un sous-espace vectoriel D dense dans l'espace hilbertien E.

5.8.2 Définitions fondamentales

Soit E un espace hilbertien que nous supposerons toujours séparable. Si $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de E et $T : \mathcal{D} \to E$ est une application linéaire, nous dirons que T est un *opérateur de domaine $\mathcal{D}$ dans E* ou simplement T est un opérateur de domaine $\mathcal{D}$, si E n'a pas besoin d'être précisé. Si $\widetilde{T} : \widetilde{\mathcal{D}} \to E$ est un opérateur de domaine $\widetilde{\mathcal{D}}$, nous dirons que $\widetilde{T}$ est un ***prolongement*** de T si $\widetilde{\mathcal{D}} \supset \mathcal{D}$ et $\widetilde{T}f = Tf$ si $f \in \mathcal{D}$. Un opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ est dit ***symétrique*** si

$$\langle Tf\,,\, g\rangle = \langle f\,,\, Tg\rangle\,, \quad f\,,\, g \in \mathcal{D}\,.$$

Un opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ est *continu* (prop. 3.1.6) si et seulement si T est *borné* dans le sens qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Tf\| \leqslant M\|f\|\,, \quad f \in \mathcal{D}\,.$$

Le plus petit nombre M s'écrit $\|T\|$.

Si T est borné, on peut prolonger T sur $\overline{\mathcal{D}}$; formellement, on aura $\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}} \to E$ défini pour $f \in \overline{\mathcal{D}}$ par la formule

$$\widetilde{T}f = \lim_{n\to\infty} Tf_n$$

où $f_n \in \mathcal{D}$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. On vérifie aisément que $\widetilde{T}$ est bien défini, que $\widetilde{T}$ est un prolongement de T et que $\widetilde{T}$ est borné avec $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

Notre intérêt ici se concentre aux opérateurs T *non bornés* de domaine $\mathcal{D}$ dense dans E ; si $\mathcal{D}$ est dense dans E et T de domaine $\mathcal{D}$ est borné, alors l'étude de T revient à l'étude de l'opérateur borné $\widetilde{T}$ dans E.

Lorsqu'un opérateur T de domaine dense $\mathcal{D}$ n'est pas continu (c'est-à-dire n'est pas borné), il y a une autre propriété qui remplace utilement la propriété de continuité ; c'est la propriété de ***fermeture***. On dit que l'opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ est ***fermé*** si pour toute suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \varphi \in E\,, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = \psi \in E\,,$$

on a que $\varphi \in \mathcal{D}$ et $T\varphi = \psi$. L'appellation « fermé » vient de l'observation que le *graphe* de T, comme sous-ensemble de $\mathcal{D} \oplus E$, est fermé si et seulement si l'opérateur T est fermé où

$$\text{graphe}(T) = \big\{(f, Tf) : f \in \mathcal{D}\big\} \subset \mathcal{D} \oplus E\,,$$

$\mathcal{D}\oplus E$ ayant la structure préhilbertienne définie dans l'exercice 4 (§ 3.2.6) ; nous n'utiliserons pas cette observation simple. Il est clair qu'*un opérateur borné T de domaine $\mathcal{D}$ est fermé si et seulement si $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel fermé.* Si T est borné de domaine $\mathcal{D}$, T possède alors un prolongement borné (donc fermé) en $\overline{\mathcal{D}}$.

Il y a des opérateurs importants non fermés qui possèdent néanmoins un prolongement fermé. Nous disons qu'un opérateur est ***fermable*** s'il possède un prolongement fermé. *Si l'opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ est fermable, il possède un prolongement (noté $\overline{T}$) de domaine $\widetilde{\mathcal{D}}$ qui est le plus petit possible.* En effet, posons

$$\widetilde{D} = \left\{ \varphi \in E : \exists\, f_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N},\ \exists \psi \in E \text{ tels que } \lim_{n\to\infty} f_n = \varphi,\ \lim_{n\to\infty} Tf_n = \psi \right\} \tag{5.54}$$

Si l'opérateur S de domaine $\mathcal{D}_S$ est un opérateur fermé qui est un prolongement de T (S existe car T est fermable), il est clair que $\varphi \in \mathcal{D}_S$ et $S\varphi = \psi$ où φ, ψ sont comme dans la définition (5.54) de $\widetilde{\mathcal{D}}$; en posant $\overline{T}\varphi = \psi$, on voit que l'opérateur $\overline{T}$ de domaine $\widetilde{\mathcal{D}}$ est un prolongement fermé de T et $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_S$. Nous dirons que $\overline{T}$ (de domaine $\widetilde{D}$) est la ***fermeture*** de l'opérateur T.

Pour comprendre pourquoi un opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ peut être non fermable, considérons l'exemple simple suivant. Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $L^2([0\,,\,1])$ formé des fonctions du type $p(x) + \alpha \sin x$, où p est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$; si $f(x) = p(x) + \alpha \sin x$, posons

$$Tf(x) = \alpha \sin x\,.$$

Notons que la représentation de $f(x)$ comme somme de $p(x)$ et $\alpha \sin x$ est unique de sorte que T est bien défini comme opérateur de domaine $\mathcal{D}$ dans $E = L^2([0\,,\,1])$; notons aussi que $\mathcal{D}$ est dense dans E car les polynômes forment une partie dense dans E. Soit $\varphi(x) = \sin x$; alors $\varphi \in \mathcal{D}$ et $T\varphi = \varphi$; d'autre part, si $\{p_n\}$ est une suite de polynômes telle que $p_n \to \varphi$, dans E, lorsque $n \to \infty$, alors $Tp_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\varphi \in \mathcal{D}$, $T\varphi \neq 0$, ce qui montre non seulement que T n'est pas un opérateur fermé mais que T n'est pas fermable.

Par contre, les opérateurs symétriques de domaine dense sont fermables.

5.8.3 Proposition

Soit T un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$ dans un espace hilbertien E. Si $\mathcal{D}$ est dense dans E, alors T est fermable et $\overline{T}$ est symétrique.

DÉMONSTRATION

Soit $\widetilde{\mathcal{D}}$ défini par (5.54) ; pour φ, ψ comme dans (5.54), nous posons $\overline{T}\varphi = \psi$. Vérifions que $\overline{T}$ est un prolongement bien défini de T.

On vérifie d'abord aisément que $\widetilde{\mathcal{D}}$ est un sous-espace vectoriel de E et $\widetilde{\mathcal{D}} \supset \mathcal{D}$ (car si $\varphi \in \mathcal{D}$, on prend $f_n = \varphi$, $n \in \mathbb{N}$, dans (5.54)). Pour voir que $\overline{T}$ est bien défini, il faut établir ce qui suit : soient $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, deux suites dans $\mathcal{D}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \varphi \in E\,, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = \psi \in E\,, \quad \lim_{n\to\infty} Tg_n = \psi_1 \in E\,;$$

alors $\psi = \psi_1$; autrement dit, le vecteur φ de (5.54) détermine ψ uniquement dans notre cas. Pour ce faire, on observe que, pour $f \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \langle f\,,\,\psi\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle f\,,\,Tf_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tf\,,\,f_n\rangle = \langle Tf\,,\,\varphi\rangle \\ \langle f\,,\,\psi_1\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle f\,,\,Tg_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tf\,,\,g_n\rangle = \langle Tf\,,\,\varphi\rangle \end{aligned} \tag{5.55}$$

(en utilisant la symétrie de T) de sorte que

$$\langle f\,,\,\psi\rangle = \langle f\,,\,\psi_1\rangle\,, \quad f \in \mathcal{D}$$

d'où $\psi = \psi_1$ car $\mathcal{D}$ est dense dans E. On a établi donc que $\overline{T}\varphi = \psi$ définit bien un opérateur $\overline{T}$ de domaine $\widetilde{\mathcal{D}}$ qui prolonge T ; on a déjà vu ci-dessus que $\overline{T}$ est fermé. Pour établir la symétrie de $\overline{T}$, on observe que (5.55) donne déjà que si $f \in \mathcal{D}$, alors

$$\langle f\,,\,\overline{T}\varphi\rangle = \langle \overline{T}f\,,\,\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}\,.$$

Si $f \in \widetilde{\mathcal{D}}$, on prend une suite $\{f_n\}$ dans $\mathcal{D}$ telle que $f_n \to f$ et $Tf_n \to \overline{T}f = \psi$ lorsque $n \to \infty$; alors, de ce qui précède, on a

$$\langle f\,,\,\overline{T}\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n\,,\,\overline{T}\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tf_n\,,\,\varphi\rangle = \langle \overline{T}f\,,\,\varphi\rangle$$

pour $f \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $\varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}$, ce qui est la symétrie de $\overline{T}$. ♦

5.8.4 Opérateurs autoadjoints non bornés

Soit T un opérateur de domaine $\mathcal{D}$ dans un espace hilbertien E ; nous supposons que $\mathcal{D}$ est *dense* dans E. Alors, on définit un opérateur T^* de domaine $\mathcal{D}^*$ (appelé l'***adjoint*** de T) comme suit : on pose

$$\mathcal{D}^* = \Big\{ f \in E : g \mapsto \langle Tg\,,\,f\rangle\,,\ g \in \mathcal{D}\,,\ \text{est continue} \Big\}\,. \tag{5.56}$$

En écrivant $\theta_f(g) = \langle Tg\,,\,f\rangle$, on voit que $f \in \mathcal{D}^*$ si et seulement si la forme linéaire θ_f, définie dans $\mathcal{D}$, est continue ; puisque $\mathcal{D}$ est dense dans E, θ_f se prolonge uniquement en une forme linéaire continue définie dans E d'où l'on a l'existence d'un unique vecteur $f^* \in E$ (noté T^*f) tel que

$$\theta_f(g) = \langle Tg\,,\,f\rangle = \langle g\,,\,T^*f\rangle\,, \quad g \in \mathcal{D}$$

si $f \in \mathcal{D}^*$; ici, on a utilisé le théorème de Fréchet–Riesz (prop. 3.7.12). On vérifie aisément que $\mathcal{D}^*$ est un sous-espace linéaire de E et que $f \mapsto T^*f$ est linéaire pour $f \in \mathcal{D}^*$; ainsi, les formules

$$\langle Tg\,,\,\alpha f\rangle = \langle T\overline{\alpha}g\,,\,f\rangle = \langle \overline{\alpha}g\,,\,T^*f\rangle = \langle g\,,\,\alpha T^*f\rangle$$

valables pour $g \in \mathcal{D}$, $f \in \mathcal{D}^*$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, montrent que si $f \in \mathcal{D}^*$ alors $\alpha f \in \mathcal{D}^*$ et

$$\alpha(T^*f) = T^*(\alpha f)\,.$$

En général, $\mathcal{D}^*$ peut se réduire à $\{0\}$; néanmoins, de la définition de T^*, on a

$$\langle T\varphi\,,\,\psi\rangle = \langle \varphi\,,\,T^*\psi\rangle \tag{5.57}$$

lorsque $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}^*$. Il est important de comprendre que dans la formule (5.57), les domaines des opérateurs T, T^* sont en général distincts, $\mathcal{D}$ étant le domaine de T et $\mathcal{D}^*$ celui de T^*, et que T^*, $\mathcal{D}^*$ ne sont définis que si le domaine $\mathcal{D}$ de T est dense. Notons que $\mathcal{D}^*$ peut être caractérisé de deux autres manières.

$$\mathcal{D}^* = \left\{f \in E : \exists\, M_f > 0 \text{ tel que } \left|\langle Tg\,,\,f\rangle\right| \leqslant M_f\|g\|\,,\ g \in \mathcal{D}\right\} \tag{5.58}$$

$$\mathcal{D}^* = \left\{f \in E : \exists\, f^* \in E \text{ tel que } \langle Tg\,,\,f\rangle = \langle g\,,\,f^*\rangle\,,\ g \in \mathcal{D}\right\}. \tag{5.59}$$

Un opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ dense dans E est dit ***autoadjoint*** si $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$ et $T^* = T$; nous écrivons alors simplement que $T = T^*$ mais il ne faut pas perdre de vue que cette affirmation contient celle concernant l'égalité des domaines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$.

Il est évident que *si T est un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$ dense dans E, alors T^* est un prolongement de T*. En effet, d'après (5.57) on a

$$\langle \varphi\,,\,T^*\psi\rangle = \langle \varphi\,,\,T\psi\rangle = \langle T\varphi\,,\,\psi\rangle$$

pour φ, $\psi \in \mathcal{D}$ (à cause de la symétrie de T) d'où $T^*\psi = T\psi$ si $\psi \in \mathcal{D}$ (à cause de la densité de $\mathcal{D}$ dans E).

Il existe beaucoup d'opérateurs symétriques qui ne sont pas autoadjoints et qui ne possèdent pas de prolongements autoadjoints. La différence entre les opérateurs symétriques et les opérateurs autoadjoints est souvent subtile à saisir pour les débutants mais cette différence est d'importance capitale, aussi bien pour les mathématiques que pour ses applications à la mécanique quantique. C'est seulement pour les opérateurs autoadjoints que l'on peut faire une théorie complète.

Notons qu'*un opérateur autoadjoint est fermé*. En effet, soit $T = T^*$ un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$ dense dans l'espace hilbertien E ; si $\{f_n\}$ est une suite dans $\mathcal{D}$ telle que $f_n \to \varphi \in E$, $Tf_n \to \psi \in E$, lorsque $n \to \infty$, la relation suivante

$$\langle Tg\,,\,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tg\,,\,f_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle g\,,\,Tf_n\rangle = \langle g\,,\,\psi\rangle\,,\quad g \in \mathcal{D}\,,$$

montre que $\varphi \in \mathcal{D}^* = \mathcal{D}$ avec $\psi = T^*\varphi = T\varphi$. Donc T est fermé. Ainsi, une condition nécessaire pour qu'un opérateur symétrique de domaine dense soit autoadjoint est qu'il soit fermé ; d'autre part, la fermeture d'un opérateur symétrique est aussi symétrique (prop. 5.8.3).

Avant de passer aux exemples, notons, en vue de ce qui précède, la classification suivante des opérateurs *symétriques T à domaine dense $\mathcal{D}$* dans un

espace hilbertien E (se rappeler que si un tel T est symétrique, alors $\overline{T}$ est symétrique, § 5.8.3) :

(i) T est autoadjoint, c'est-à-dire $T = T^*$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$;
(ii) $\overline{T}$ est autoadjoint, c'est-à-dire $(\overline{T})^* = \overline{T}$;
(iii) T possède au moins un prolongement autoadjoint ;
(iv) T ne possède pas de prolongement autoadjoint.

Les opérateurs vérifiant (ii) sont dits ***essentiellement autoadjoints*** ; ces opérateurs T ne sont pas autoadjoints seulement parce que leurs domaines $\mathcal{D}$ ne sont pas assez grands ; il suffit de les prolonger en $\overline{T}$ de domaine $\widetilde{\mathcal{D}}$ (5.54) pour avoir un opérateur autoadjoint, ce prolongement étant uniquement déterminé par T. Un opérateur essentiellement autoadjoint T défini dans un domaine (dense) $\mathcal{D}$ est particulièrement intéressant car, d'une part, il détermine un *unique* opérateur autoadjoint $\overline{T}$ de domaine $\widetilde{\mathcal{D}}$ prolongeant T et, d'autre part, la détermination de $\widetilde{\mathcal{D}}$ étant une tâche souvent compliquée, on peut alors ignorer $\overline{T}$ et se borner à étudier T seul.

On constatera dans la suite que les opérateurs T dans la classe (iii) sont constitués de deux sous-classes distinctes ; il y a ceux qui sont déjà autoadjoints ou essentiellement autoadjoints (donc vérifiant (i) ou (ii)) et il y en a d'autres qui ont une *infinité* de prolongements autoadjoints. Le choix de l'un ou de l'autre prolongement dépend du problème mathématique ou physique étudié.

La grande majorité (dans un sens que nous ne spécifions pas) des opérateurs symétriques est constituée de ceux qui sont de classe (iv). Nous en donnerons un exemple.

5.8.5 Prolongements symétriques des opérateurs symétriques

Soit T un opérateur de domaine $\mathcal{D}$ dense dans un espace hilbertien E.

(1) Si S est un prolongement quelconque de T, alors T^* est un prolongement de S^*. Nous écrivons cet énoncé dans les symboles suivants :

$$S \supset T \Longrightarrow S^* \subset T^* .$$

DÉMONSTRATION

Soit $\mathcal{D}_S$ le domaine de S ; alors $\mathcal{D}_S \supset \mathcal{D}$ et $Sg = Tg$, $g \in \mathcal{D}$. Si $f \in \mathcal{D}_S^*$, alors, pour tout $g \in \mathcal{D}$, on a

$$\langle g\,,\, S^* f\rangle = \langle Sg\,,\, f\rangle = \langle Tg\,,\, f\rangle$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{D}^*$, $T^* f = S^* f$ (cf. (5.59)). Ainsi, $D_S^* \subset \mathcal{D}^*$ et T^* est un prolongement de S^*. ♦

(2) T^* est fermé.

DÉMONSTRATION

Soit $\{f_n\}$ une suite dans $\mathcal{D}^*$ telle que $f_n \to f \in E$ et $T^* f_n \to h \in E$ lorsque $n \to \infty$. Alors, pour tout $g \in \mathcal{D}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tg\,,\, f_n\rangle = \langle Tg\,,\, f\rangle\,, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g\,,\, T^* f_n\rangle = \langle g\,,\, h\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tg\,,\, f_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g\,,\, T^* f_n\rangle$$

ce qui montre que $\langle Tg\,,\, f\rangle = \langle g\,,\, h\rangle$, $g \in \mathcal{D}$ d'où (d'après (5.59)) $f \in \mathcal{D}^*$ et $h = T^* f$. Donc T^* est fermé. ♦

Nous *supposons* pour le reste de ce paragraphe que T *est un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$ dense dans l'espace hilbertien E*. En spécialisant *(1)*, on obtient ce qui suit.

(3) Si S est un prolongement symétrique quelconque de T, alors

$$T \subset S \subset S^* \subset T^*\,. \tag{5.60}$$

DÉMONSTRATION

Puisque S est symétrique, on a $S \subset S^*$; puisque $S \supset T$, on obtient de *(1)* que $S^* \subset T^*$. Ceci donne (5.60). ♦

REMARQUE. L'intérêt de (5.60) réside dans la conclusion suivante : *tout prolongement symétrique de T provient d'une restriction du domaine de définition de T^**. Lorsque T est donné comme un opérateur différentiel, les prolongements symétriques (en particulier, les prolongements autoadjoints, s'il en existent) se déduisent des restrictions de T^* obtenues par l'imposition des « conditions aux limites ».

Notons que T^* n'est pas un opérateur symétrique en général. En fait, on a la caractérisation suivante.

(4) T^* est symétrique si et seulement si T^* est autoadjoint.

DÉMONSTRATION

Supposons que T^* est symétrique, c'est-à-dire $T^* \subset T^{**}$. En prenant $S = \overline{T}$ dans (5.60) (rappelons que $\overline{T}$ est symétrique, prop. 5.8.3), on a

$$T \subset \overline{T} \subset (\overline{T})^* \subset T^*$$

d'où, de *(1)*,

$$T^* \supset (\overline{T})^* \supset (\overline{T})^{**} \supset T^{**}\,;$$

si $T^* \subset T^{**}$, on obtient alors

$$T^* = (\overline{T})^* = (\overline{T})^{**} = T^{**},$$

c'est-à-dire la symétrie de T^* entraîne que T^* est autoadjoint ($T^* = T^{**}$). La réciproque est banale. ♦

(5) Si T est essentiellement autoadjoint, alors l'unique prolongement autoadjoint de T est donné par $\overline{T}$.

DÉMONSTRATION

Rappelons que, par définition, T est essentiellement autoadjoint si $(\overline{T})^* = \overline{T}$; supposons que $S \supset T$ et $S = S^*$ (c'est-à-dire S est un prolongement autoadjoint de T). De la relation

$$T \subset \overline{T} \subset S$$

($\overline{T}$ est le prolongement fermé minimal de T et S est fermé, étant autoadjoint), on a, d'après *(1)*,

$$T^* \supset (\overline{T})^* = \overline{T} \supset S^* = S$$

ce qui donne $\overline{T} \supset S$ d'où $\overline{T} = S$. ♦

REMARQUE. On peut démontrer que, réciproquement, si un opérateur symétrique T (toujours avec domaine dense) possède un unique prolongement autoadjoint, alors T est essentiellement autoadjoint ; dans ce cas,

$$\overline{T} = (\overline{T})^* = T^*.$$

Nous ne démontrons pas ces affirmations.

Nous donnons maintenant une méthode générale simple pour la construction des opérateurs autoadjoints ; elle nous sera très utile.

5.8.6 Proposition

Soit E un espace hilbertien. Supposons que $E_0, E_1, \ldots$ est une suite infinie de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots$ dans le sens suivant :

(i) pour $j \neq k$, $E_j \perp E_k$ (c'est-à-dire si $f \in E_j$, $g \in E_k$, alors $\langle f, g \rangle = 0$) ;
(ii) si $f \in E$, alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f$ où $P_n f$ est la projection orthogonale de f sur E_n.

Pour chaque $n = 0, 1, \ldots$, soit $u_n : E_n \to E_n$, un opérateur autoadjoint borné (donc, $u_n \in \mathcal{L}(E_n)$, $\langle u_n f, g \rangle = \langle f, u_n g \rangle$ pour $f, g \in E_n$). Soit

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in E : \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n P_n f\|^2 < \infty \right\} ;$$

pour $f \in \mathcal{D}$, posons $Tf = \sum_{n=0}^{\infty} u_n P_n f$. Alors T est un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$ dense dans E. T est unique dans le sens que si S est un opérateur autoadjoint quelconque dont le domaine contient tous les E_j et $S|_{E_j} = u_j$, $j \geqslant 0$, alors $S = T$.

DÉMONSTRATION

Si $f \in E$, nous écrivons $f_n = P_n f$; notons que $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ est une suite orthogonale dans E avec $f_n \in E_n$; de plus, $f_0 + \cdots + f_n$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel fermé $E_0 \oplus \cdots \oplus E_n$ (formé des vecteurs de la forme $h_0 + \cdots + h_n$, $h_j \in E_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$) d'où

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} f_j \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \|f_j\|^2 \leqslant \|f\|^2, \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2$$

la seconde égalité venant de la condition (ii). Ces remarques montrent que le sous-espace vectoriel

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (E_0 \oplus \cdots \oplus E_n) = F$$

est dense dans E ; puisque $\mathcal{D} \supset F$ (car $f \in F$ entraîne que $P_n f = 0$ pour n suffisamment grand), on a que $\mathcal{D}$ est dense dans E. Si $f, g \in \mathcal{D}$, alors $(f+g) \in \mathcal{D}$ car

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n P_n (f+g)\|^2 &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\|u_n P_n f\| + \|u_n P_n g\| \right)^2 \\ &\leqslant 2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n P_n f\|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n P_n g\|^2 \right\} < \infty ; \end{aligned}$$

aussi $\alpha f \in \mathcal{D}$ si $f \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel dense dans E ; la linéarité de T est évidente. Démontrons que T est symétrique. Si $f, g \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n P_n f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \langle u_n P_n f, P_m g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n P_n f, P_n g \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n f, u_n P_n g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \langle P_m f, u_n P_n g \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, u_n P_n g \rangle = \langle f, Tg \rangle \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les faits suivants :

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} P_m f, \qquad g = \sum_{m=0}^{\infty} P_m g, \qquad \langle u_n P_n f, P_m g \rangle = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

en observant que $u_n P_n f \in E_n$, $P_m g \in E_m$.

Démontrons que $\mathcal{D}^*$ (voir (5.59)) est tel que $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$; si $f \in \mathcal{D}^*$, alors il existe $f^* \in E$ tel que

$$\langle Tg\,,\, f\rangle = \langle g\,,\, f^*\rangle\,, \quad g \in \mathcal{D}$$

ce qui donne (avec un calcul similaire à ce qui précède)

$$\langle Tg\,,\, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle u_n P_n g\,,\, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle u_n P_n g\,,\, P_n f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n g\,,\, u_n P_n f\rangle$$

$$= \langle g\,,\, f^*\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n g\,,\, P_n f^*\rangle$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n g\,,\, u_n P_n f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n g\,,\, P_n f^*\rangle \tag{5.61}$$

pour tout $g \in \mathcal{D}$. En prenant $g \in E_j$ dans (5.61), on obtient

$$\langle g\,,\, u_j P_j f\rangle = \langle g\,,\, P_j f^*\rangle\,, \quad g \in E_j$$

ce qui donne

$$u_j P_j f = P_j f^*\,, \quad j = 0,\, 1,\, \ldots$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|u_j P_j f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\|P_j f^*\|^2 = \|f^*\|^2 < \infty\,;$$

ainsi, $f \in \mathcal{D}$ et

$$Tf = \sum_{j=0}^{\infty} u_j P_j f = \sum_{j=0}^{\infty} P_j f^* = f^* = T^* f\,.$$

Ceci établit que $T^* \subset T$ d'où $T = T^*$ (car $T \subset T^*$ à cause de la symétrie de T déjà établie).

Pour l'unicité de T, on observe d'abord que

$$SP_n f = u_n P_n f\,, \quad f \in E\,,\ n \geqslant 0$$

car $P_n f \in E_n$ et $S\big|_{E_n} = u_n$. Donc si $f \in \mathcal{D}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} SP_n f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n P_n f = Tf\,; \tag{5.62}$$

si $\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} P_n f$, alors on a $\varphi_N \in \mathcal{D}_S \supset F$, $\mathcal{D}_S$ étant le domaine de définition de S et

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N = f\,, \quad \lim_{N\to\infty} S\varphi_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} SP_n f = Tf\,.$$

Puisque S est un opérateur fermé car S est autoadjoint, on conclut que $f \in \mathcal{D}_S$ et $Sf = Tf$, ce qui montre que

$$T \subset S .$$

Puisque T aussi est autoadjoint, on a $T = S$ car, par exemple, d'après *(1)* du paragraphe 5.8.5,

$$T \subset S \Longrightarrow T^* \supset S^* \Longrightarrow T \supset S \Longrightarrow T = S$$

étant donné que $T = T^*$, $S = S^*$.

5.8.7 Corollaire

Soit T_0 un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}_0$ dense dans un espace hilbertien E ; supposons qu'il existe une suite de vecteurs $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de nombres réels $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

(i) $\varphi_n \in \mathcal{D}_0$ et $T_0\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormale pour E.

Alors T_0 est essentiellement autoadjoint ; l'opérateur autoadjoint $T = \overline{T_0}$ associé à T_0 est de domaine

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in E : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \langle f , \varphi_n \rangle \right|^2 < \infty \right\}$$

et

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f , \varphi_n \rangle \varphi_n , \quad f \in \mathcal{D} .$$

DÉMONSTRATION

Dans la proposition 5.8.6, on prend E_n comme le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par φ_n, $n \geqslant 0$; ici, $P_n f = \langle f , \varphi_n \rangle \varphi_n$, $n \geqslant 0$; prenons $u_n \in \mathcal{L}(E_n)$ défini par $u_n\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. Alors l'opérateur T du corollaire est un cas particulier de l'opérateur autoadjoint T de la proposition 5.8.6. De plus, $T_0 f = Tf$ si $f \in F$, F étant le sous-espace vectoriel formé des combinaisons linéaires finies des φ_n. Démontrons que $\overline{T_0} = T$.

Si $f \in \mathcal{D}$, posons

$$f_n = \sum_{j=0}^{n} \langle f , \varphi_j \rangle \varphi_j \in F ;$$

alors, $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ et

$$T_0 f_n = T f_n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \langle f , \varphi_j \rangle \varphi_j \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \langle f , \varphi_j \rangle \varphi_j = Tf .$$

Ceci montre que $f \in \overline{\mathcal{D}_0}$ et $\overline{T_0} f = Tf$; autrement dit,

$$T \subset \overline{T_0}\,.$$

D'autre part, $T_0 \subset T$; en effet, si $f \in \mathcal{D}_0$, on a

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

et

$$T_0 f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_0 f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f\,,\, T_0 \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \varphi_n = Tf\ ;$$

ceci entraîne que $f \in \mathcal{D}$ et $Tf = T_0 f$ en observant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \langle f\,,\, \varphi_n \rangle \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \langle T_0 f\,,\, \varphi_n \rangle \right|^2 = \left\| T_0 f \right\|^2 < \infty\,.$$

Puisque T est fermé, on conclut que $\overline{T_0} \subset T$ ce qui donne, avec $T \subset \overline{T_0}$, que $\overline{T_0} = T$. Ceci établit aussi que T_0 est essentiellement autoadjoint. ♦

REMARQUES. Tous les opérateurs autoadjoints (non bornés) que nous rencontrerons dans la partie consacrée aux équations aux dérivées partielles de ce volume seront du type de l'opérateur T décrit dans le corollaire 5.8.7. Il est intéressant de noter que la proposition 5.8.6 fournit la forme générale d'un opérateur autoadjoint T dans un espace hilbertien E ; ainsi, cette proposition permet de déduire, en principe tous les théorèmes concernant les opérateurs autoadjoints non bornés T en partant des théorèmes valables pour les opérateurs autoadjoints bornés $\{u_n\}$ qui définissent T. Ce procédé (dû à Lerch et Riesz (1936)) est développé en détail dans le livre de Riesz et Nagy [19].

Dans la proposition 5.8.6 ainsi que dans le corollaire 5.8.7, on a utilisé l'ensemble $\mathbb{N}$ pour cataloguer certains sous-espaces vectoriels E_n ; dans les applications, on aura souvent à considérer les sous-espaces vectoriels repérés par d'autres ensembles d'indices dénombrables (comme $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^d$).

5.8.8 Exemples

Exemple 1

Soit $Tf(x) = if'(x)$; nous considérons T comme un opérateur de domaine $\mathcal{D}$ dans $E = L^2([0\,,\,1])$ où

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in C^1([0\,,\,1]) : f(0) = f(1) = 0 \right\}\,.$$

Vérifions que T *est un opérateur symétrique non autoadjoint.* Noter que $\mathcal{D}$ est dense dans E ; pour établir la symétrie de T, il faut voir que, pour f, $g \in \mathcal{D}$,

$$\langle Tg\,,\, f\rangle = \langle g\,,\, Tf\rangle$$

ce qui vient d'un calcul direct en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\langle Tg\,,\, f\rangle &= \int_0^1 ig'(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= ig(x)\overline{f}(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - i\int_0^1 g(x)\overline{f}'(x)\,\mathrm{d}x = \langle g\,,\, Tf\rangle\end{aligned} \tag{5.63}$$

Pour établir que T n'est pas autoadjoint, il suffit de voir que le domaine $\mathcal{D}^*$ de T^* est strictement plus grand que $\mathcal{D}$; démontrons que

$$\mathcal{D}^* \supset C^1\big([\,0\,,\,1\,]\big)\,.$$

Pour ce faire, il faut établir (d'après (5.59)) que si $f \in C^1\big([\,0\,,\,1\,]\big)$, il existe $f^* \in E$ tel que

$$\langle Tg\,,\, f\rangle = \langle g\,,\, f^*\rangle\,, \quad g \in \mathcal{D}\,;$$

or le calcul (5.63) donne immédiatement que cette dernière relation est valable si $f^* = if'$ (démontrant que T^* est un prolongement de T avec $T^* \neq T$).

Exemple 2

Posons, pour $0 \leqslant \theta < 2\pi$,

$$\mathcal{D}_\theta = \Big\{ f \in C^1\big([\,0\,,\,1\,]\big) : f(1) = \mathrm{e}^{i\theta} f(0) \Big\}\,.$$

$\mathcal{D}_\theta$ est un sous-espace dense dans $E = L^2\big([\,0\,,\,1\,]\big)$. *Si* $T_\theta f = if'$, $f \in \mathcal{D}_\theta$, *alors* T_θ *est un opérateur essentiellement autoadjoint.* C'est une conséquence immédiate du corollaire 5.8.7 ; en effet, si

$$\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{ix(\theta+2n\pi)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

alors $\varphi_n \in \mathcal{D}_\theta$ et $T_\theta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $\lambda_n = \theta + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; de plus, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale complète dans E, ce que l'on démontre aisément en partant de la complétude des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{2n\pi xi}$ (vue dans le chapitre 4) dans E ; la symétrie de T_θ est immédiate en utilisant le calcul (5.63).

Notons que, pour chaque $\theta \in [\,0\,,\,2\pi\,[$, $\overline{T_\theta}$ donne un prolongement autoadjoint de l'opérateur symétrique T de l'exemple 1 ; comme prévu par la théorie du paragraphe 5.8.5, chaque $\overline{T_\theta}$ est une restriction de T^* obtenue par une condition aux limites restreignant le domaine de T^*. On peut démontrer que tous les prolongements autoadjoints de T sont donnés par les $\overline{T_\theta}$.

Exemple 3

Soit $E = L^2([0, \infty[)$; posons

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in C^1([0, \infty[) : f(0) = 0 \text{ et } f' \in E \right\}$$

et $Tf = if'$. On observe que $\mathcal{D}$ est dense dans E et que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$ dès que $f \in C^1([0, \infty[)$ avec $f' \in E$; on établit alors aisément (comme dans l'exemple 1) que T est un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$. Mais *T n'est pas autoadjoint et T ne possède pas de prolongement autoadjoint.* En effet,

$$\mathcal{D}^* \supset D_1 = \left\{ f \in C^1([0, \infty[) : f' \in E \right\}, \quad \mathcal{D}_1 \supsetneq \mathcal{D}$$

ce que l'on vérifie comme dans l'exemple 1. Démontrons qu'un prolongement autoadjoint S de T est impossible ; si $\mathcal{D}_S$ est le domaine de S, on vérifie d'abord que

$$\mathcal{D}_S \supset \mathcal{D}_1 .$$

En effet, si $g \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_S$ et $f \in \mathcal{D}_1$, on a

$$\langle Sg, f \rangle = \langle Tg, f \rangle = \langle g, if' \rangle = \langle g, Sf \rangle$$

établissant que $f \in \mathcal{D}_S^* = \mathcal{D}_S$ et $Sf = if'$. Donc, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_S$ tel que $\varphi(0) \neq 0$ avec $\varphi \in C^1([0, \infty[)$, $\varphi' \in E$; mais, alors

$$\begin{aligned} \langle S\varphi, \varphi \rangle &= i \int_0^\infty \varphi'(x)\overline{\varphi(x)}\, dx = -i|\varphi(0)|^2 - \int_0^\infty i\varphi(x)\overline{\varphi'}(x)\, dx \\ &= -i|\varphi(0)|^2 + \langle \varphi, S\varphi \rangle \neq \langle \varphi, S\varphi \rangle \end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $\varphi(x) \to 0$, $x \to \infty$), ce qui contredit la symétrie de S.

Exemple 4

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$. Nous dirons qu'une fonction *continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *localement absolument continue avec* $f' \in E$ si $f'(x)$ existe p.p. $x \in \mathbb{R}$ et $f' \in E$ avec

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

pour tout choix de a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Posons $\mathcal{D}$ pour l'ensemble formé dans E par les fonctions f localement absolument continues avec $f' \in E$ et écrivons $Tf = if'$ pour $f \in \mathcal{D}$. Il est clair que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel dans E ; de plus $\mathcal{D}$ est dense dans E car $\mathcal{D}$ contient toutes les fonctions de $C_0^1(\mathbb{R})$ ($C_0^1(\mathbb{R})$ étant constitué des fonctions complexes de classe C^1 dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en dehors d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$). Alors T *est un opérateur autoadjoint de domaine* $\mathcal{D}$. La démonstration de cette affirmation dépend de certaines propriétés fondamentales (formellement évidentes) de l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

(a) *Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral*

Si f est localement intégrable dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}\,.$$

(Rappelons que si $f \in E$, alors f est localement intégrable dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et on a la convention habituelle $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.)

(b) *Intégration par parties*

Si f, g sont dans $\mathcal{D}$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Les affirmations (a) et (b) sont élémentaires si les fonctions concernées sont continues ; leurs démonstrations générales sont plus subtiles (consulter Riesz et Nagy [19, pp. 48 et 54] ; on peut aussi consulter E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press (1939), chap. XI et XII). Démontrons d'abord que si $f \in \mathcal{D}$, alors $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. En effet, en prenant $f = g$ dans (b), on a

$$f^2(b) - f^2(a) = 2\int_a^b f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où on déduit que $\lim f^2(x)$ existe lorsque $x \to \pm\infty$ car

$$\left|\int_a^b f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{a,b\to\pm\infty} 0$$

(étant donné que f, $f' \in E$) ; puisque f est de carré intégrable, $\lim f^2(x)$ $(x \to \pm\infty)$ est 0 (étant donné que ces deux limites existent). Démontrons que T est symétrique ; en effet, si f, $g \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\langle Tf\,,\, g\rangle &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b if'(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \left\{ f(x)\overline{g}(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b if(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x \right\} = \langle f\,,\, Tg\rangle\end{aligned}$$

en utilisant (b) et le fait que $f(x)$, $g(x)$ tendent vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. Il reste à vérifier que $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$; rappelons que $f \in E$ est dans $\mathcal{D}^*$ si et seulement si

(d'après 5.59) il existe un $f^* \in E$ tel que $\langle f\,,\, Tg\rangle = \langle f^*\,,\, g\rangle$ pour tout $g \in \mathcal{D}$, ce qui donne l'équation

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5.64}$$

valable pour tout $g \in \mathcal{D}$. Pour $\varepsilon > 0$, prenons $g = g_\varepsilon$ dans (5.64) où

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) & \text{si } a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{-1}{\varepsilon}(x - b - \varepsilon) & \text{si } b \leqslant x \leqslant b + \varepsilon \\ 0 & \text{si } x > b + \varepsilon \text{ ou } x < a - \varepsilon \end{cases}$$

avec a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On obtient

$$\begin{aligned} &-i\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon}\int_{b}^{b+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\right\} \\ &\quad = \int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a}(x - a + \varepsilon)f^*(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_b^{b+\varepsilon}(x - b - \varepsilon)f^*(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{5.65}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ dans (5.65), on obtient, pour presque tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$-i\big\{f(a) - f(b)\big\} = \int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.66}$$

Pour obtenir (5.66) à partir de (5.65), on utilise le théorème fondamental (a) ; par exemple,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}\int_b^{b+\varepsilon}(x - b - \varepsilon)f^*(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad = \frac{1}{\varepsilon}\int_b^{b+\varepsilon} xf^*(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b}{\varepsilon}\int_b^{b+\varepsilon} f^*(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^{b+\varepsilon} f^*(x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \xrightarrow{\varepsilon\to 0} bf^*(b) - bf^*(b) - 0 = 0\,, \quad \text{p.p. } b \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite de (5.66) est continu en tant que fonction de a, b, on conclut que f peut être choisi continue et que (5.66) est valable pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ainsi, avec ce choix continu de f, on a

$$\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x = i\big\{f(b) - f(a)\big\} \tag{5.67}$$

pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$; de (a) et (5.67), on conclut que f est dans $\mathcal{D}$ et $if'(x) = f^*(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$. Ceci établit que $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$ et $T^*f = f^* = if'$ pour tout $f \in \mathcal{D}^*$; puisque $\mathcal{D}^* \supset \mathcal{D}$ à cause de la symétrie de T (déjà établie), on a complètement démontré que $T = T^*$, c'est-à-dire que T est autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$.

REMARQUES. Le domaine $\mathcal{D}$ de T peut être décrit d'une manière différente : $\mathcal{D} = \{f \in E : f' \in E\}$ où f' est pris au sens des distribution (sect. 4.5). Une autre possibilité est de considérer $\mathcal{D}_0 = C_0^\infty(\mathbb{R})$ (l'espace noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans la section 4.5) et de poser $T_0 = T|_{\mathcal{D}_0}$; alors $\overline{T_0} = T$; autrement dit, T_0 est essentiellement autoadjoint. Ces affirmations ne sont pas immédiates ; en fait, l'opérateur T (qui joue un rôle essentiel dans la mécanique quantique, sect. 5.10) ne peut pas être décrit plus simplement. Comme expression différentielle ($Tf = if'$) c'est un opérateur très simple mais une description précise de son domaine de définition exige quelques subtilités.

Notons que l'opérateur autoadjoint T de cet exemple ne correspond pas aux opérateurs envisagés dans le corollaire 5.8.7. En effet, un petit calcul (laissé en exercice) montre que toute solution (non triviale) de l'équation $if' = \lambda f$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) donne une fonction f qui n'est pas de carré intégrable dans $\mathbb{R}$.

L'exemple suivant donne une classe importante d'opérateurs autoadjoints ; le cas particulier où $Qf(x) = xf(x)$ donne un opérateur (appelé *opérateur de position*) important dans la mécanique quantique.

Exemple 5

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$. Si $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque (borélienne, une condition générale qui sera admise tacitement partout dans la suite), nous posons

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in E : \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x) f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\} = \{ f \in E : \alpha f \in E \}$$

et $Q_\alpha f(x) = \alpha(x) f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in \mathcal{D}_\alpha$. Observons que $\mathcal{D}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel dense dans E ; en effet, si

$$A_n = \{ x \in \mathbb{R} : |\alpha(x)| \leqslant n \}$$

alors $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n = \mathbb{R}$; si $\varepsilon > 0$ et $f \in E$, il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\| f - f 1_{A_n} \| < \varepsilon \, ;$$

il suffit d'observer maintenant que $f 1_{A_n} \in \mathcal{D}_\alpha$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour conclure que $\mathcal{D}_\alpha$ est dense dans E. Le fait que $\mathcal{D}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel est immédiat. *L'opérateur Q_α de domaine $\mathcal{D}_\alpha$ est autoadjoint.* La linéarité et la symétrie de Q_α sont évidentes ; vérifions que $\mathcal{D}_\alpha^* = \mathcal{D}_\alpha$. La vérification est similaire à celle de l'exemple 4 mais plus simple. Supposons que $f \in \mathcal{D}_\alpha^*$; alors, d'après (5.59), il existe $f^* \in E$ tel que

$$\langle f \, , \, Q_\alpha g \rangle = \langle f^* \, , \, g \rangle \, , \quad g \in \mathcal{D}_\alpha$$

ce qui donne l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5.68}$$

valable pour tout $g \in \mathcal{D}_\alpha$. En prenant $g = f\alpha\, 1_{A_n}$ dans (5.68), on a

$$\int_{A_n} \alpha^2(x)|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{A_n} f^*(x)\overline{f}(x)\alpha(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.69}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ (où A_n est défini ci-dessus). Puisque

$$\left|\int_{A_n} f^*(x)\overline{f}(x)\alpha(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f^*\| \left\{\int_{A_n} |f(x)|^2\alpha^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

(selon l'inégalité de Cauchy–Schwarz), on obtient de (5.69) que

$$\left\{\int_{A_n} \alpha^2(x)|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \leqslant \|f^*\|$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ d'où, en laissant $n \to \infty$, on conclut que $\alpha f \in E$ et $f \in \mathcal{D}_\alpha$. De plus, de (5.68), on a $(f\alpha - f^*) \perp \mathcal{D}_\alpha$; $\mathcal{D}_\alpha$ étant dense dans E, on conclut que $f\alpha = f^*$ (corollaire 3.7.11). Ainsi, $\mathcal{D}_\alpha^* \subset \mathcal{D}_\alpha$ et $Q_\alpha^* f = f^* = \alpha f = Q_\alpha f$ si $f \in \mathcal{D}_\alpha^*$. Puisque $Q_\alpha^* \supset Q_\alpha$ à cause de la symétrie de Q_α, on conclut que Q_α est autoadjoint.

REMARQUE. L'opérateur Q_α s'appelle l'*opérateur de multiplication* par la fonction α. Notons que si α est bornée (ou essentiellement bornée, c'est-à-dire $|\alpha(x)| < M$ p.p. $x \in \mathbb{R}$, pour $M > 0$, fini), alors $\mathcal{D}_\alpha = E$ et $Q_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ avec $Q_\alpha^* = Q_\alpha$.

L'opérateur Q_α possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble $B_\lambda = \{x : \alpha(x) = \lambda\}$ est de mesure > 0 ; en particulier, l'opérateur de position (Q_α avec $\alpha(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$) ne possède aucune valeur propre. La notion de spectre pour un opérateur non borné sera discutée dans la section 5.9.

On peut généraliser la définition de Q_α en considérant $E = L^2(X, \Sigma, \mu)$ où μ est une mesure $\geqslant 0$ quelconque dans un espace mesurable (X, Σ), $\alpha : X \to \mathbb{R}$, une fonction réelle mesurable et $Q_\alpha f(x) = \alpha(x)f(x)$ pour $f \in \mathcal{D}_\alpha$ où $\mathcal{D}_\alpha = \{f \in E : \alpha f \in E\}$. Chaque tel Q_α est un opérateur autoadjoint ; la discussion précédente donnée pour $X = \mathbb{R}$ n'a besoin d'aucune modification. Ces opérateurs Q_α servent de modèle pour ***tous les opérateurs*** autoadjoints au sens expliqué dans le paragraphe 5.9.6. Nous appellerons aussi ces Q_α les opérateurs de multiplication. Il est utile de généraliser la notion d'opérateurs de multiplication où α est une fonction complexe ; alors Q_α sera un opérateur *normal* si α est complexe, autoadjoint si α est réel.

Exemple 6

Soit $E = L^2([a\,,b])$, $-\infty < a < b < \infty$. Posons

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ f \in C^2([a\,,b]) : f(a) = f(b) = 0 \right\}, \quad T_0 f(x) = f''(x), \quad x \in [a\,,b].$$

Alors, T_0 *est un opérateur (de domaine* $\mathcal{D}_0$*) essentiellement autoadjoint.* En effet, $\mathcal{D}_0$ est un sous-espace vectoriel dense dans E et T_0 est symétrique (§ 5.8.1) ; de plus, si

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

alors $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormale pour E (chap. 4) avec $\varphi_n \in \mathcal{D}_0$, $T_0\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $n \geqslant 1$. Le corollaire 5.8.7 permet alors de conclure directement que T_0 est autoadjoint.

REMARQUE. On démontrera dans la suite (chap. 7) que l'opérateur différentiel $Lf = f'' + qf$ (introduit dans le paragraphe 5.8.1) de domaine $\mathcal{D}_0$ est aussi essentiellement autoadjoint (q étant réelle et continue dans $[a\,,b]$).

5.9 SPECTRE DES OPÉRATEURS NON BORNÉS

5.9.1 Préliminaires

Dans cette section, nous généralisons les définitions données dans le paragraphe 5.1.3 pour qu'elles soient applicables aux opérateurs non bornés ; nous donnons ensuite un bref résumé de certains résultats concernant ces spectres, sans nécessairement entrer dans les démonstrations détaillées.

Soit E un espace hilbertien et T un opérateur (linéaire) de domaine $\mathcal{D}$ dans E ; rappelons que $\mathcal{D}$ doit être un sous-espace vectoriel de E (souvent supposé être dense dans E, une hypothèse qui sera explicitement mentionnée lorsqu'elle est nécessaire). L'***ensemble résolvant*** de T est

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \right\} ;$$

plus explicitement, un nombre complexe $\lambda \in \rho(T)$ si et seulement si $(\lambda - T) : \mathcal{D} \to E$ est bijective et $(\lambda - T)^{-1} : E \to \mathcal{D}$ est un opérateur (linéaire) borné. On écrit $R(\lambda, T)$ pour $(\lambda - T)^{-1}$ lorsque $\lambda \in \rho(T)$; $R(\lambda, T)$ s'appelle l'***opérateur résolvant*** (ou simplement le ***résolvant***) de T ; $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ est une fonction définie pour $\lambda \in \rho(T)$ à valeur dans $\mathcal{L}(E)$. Le ***spectre*** de T, noté $\sigma(T)$, est défini par

$$\sigma(T) = \rho(T)^c = \mathbb{C} \setminus \rho(T) ;$$

la partie $\sigma_p(T)$ de $\sigma(T)$ formée des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $(\lambda - T)$ n'est pas injectif s'appelle le ***spectre ponctuel*** de T ; $\lambda \in \sigma_p(T)$ si et seulement si

$$(\lambda - T)^{-1}(0) = \{ f \in \mathcal{D} : Tf = \lambda f \}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$. On dit que $(\lambda - T)^{-1}(0)$ est l'***espace propre*** associé à la ***valeur propre*** $\lambda \in \sigma_p(T)$; la dimension de $(\lambda - T)^{-1}(0)$ s'appelle la ***multiplicité*** de la valeur propre λ, celle-ci étant ***simple*** si la dimension concernée est égale à 1.

5.9.2 Proposition

Soit T un opérateur de domaine $\mathcal{D}$ dans un espace hilbertien E.

(i) Si $\rho(T) \neq \emptyset$, alors T est fermé.
(ii) $\sigma(T)$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
(iii) On a, pour λ_1, $\lambda_2 \in \rho(T)$,

$$\begin{aligned} R(\lambda_1, T) - R(\lambda_2, T) &= -(\lambda_1 - \lambda_2) R(\lambda_1, T) R(\lambda_2, T) \\ R(\lambda_1, T) R(\lambda_2, T) &= R(\lambda_2, T) R(\lambda_1, T) . \end{aligned} \tag{5.70}$$

DÉMONSTRATION

(i) Supposons que $\lambda \in \rho(T)$; soit $\{f_n\}$ une suite dans $\mathcal{D}$ telle que $f_n \to \varphi \in E$ et $Tf_n \to \psi \in E$ lorsque $n \to \infty$ et posons $(\lambda - T)f_n = g_n$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n - T f_n) = \lambda\varphi - \psi$$

d'où

$$R(\lambda, T)(\lambda\varphi - \psi) = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, T) g_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \varphi$$

ce qui entraîne que $\varphi \in \mathcal{D}$ et $T\varphi = \psi$ (car $(\lambda - T)\varphi = \lambda\varphi - \psi$). Donc T est fermé.

(ii) Il faut vérifier que $\rho(T)$ est ouvert ; si $\lambda \in \rho(T)$, soit

$$M = \left\| R(\lambda, T) \right\|, \quad B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < M^{-1} \right\}$$

(en notant que $0 < M < \infty$). Si $z \in B$, alors $z = \lambda + h$, $|h| < M^{-1}$ et l'expression

$$\begin{aligned} (z - T)^{-1} = (\lambda + h - T)^{-1} &= (\lambda - T)^{-1} \left\{ 1 - (-h)(\lambda - T)^{-1} \right\}^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-h)^n (\lambda - T)^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-h)^n \big(R(\lambda, T)\big)^{n+1} \end{aligned}$$

(manipulation aisément justifiable comme dans la preuve de la proposition 5.6.1) montre que

$$\left\| (z - T)^{-1} \right\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |h|^n M^{n+1} = M \sum_{n\geqslant 0} \big(M|h|\big)^n = \frac{M}{1 - M|h|} < \infty$$

avec $(z - T)^{-1} : E \to \mathcal{D}$; donc $B \subset \rho(T)$ et $\rho(T)$ est ouvert.

(iii) On a

$$\begin{aligned} R(\lambda_1, T) &= R(\lambda_1, T)(\lambda_2 - T)R(\lambda_2, T) \\ &= R(\lambda_1, T)\big\{(\lambda_2 - \lambda_1) + (\lambda_1 - T)\big\}R(\lambda_2, T) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1, T)R(\lambda_2, T) + R(\lambda_2, T) \end{aligned}$$

ce qui donne (5.70) ; la formule suivante est une conséquence immédiate de (5.70). ♦

5.9.3 Remarques

Une conséquence de (5.70) est que *si* $R(\lambda, T)$ *est compact pour un* $\lambda \in \rho(T)$, *alors* $R(z, T)$ *est compact pour tout* $z \in \rho(T)$. En effet, de (5.70) (avec $\lambda_1 = z$, $\lambda_2 = \lambda$)

$$R(z, T) = R(\lambda, T) - (z - \lambda)R(z, T)R(\lambda, T)$$

et le côté droit représente un opérateur compact si $R(\lambda, T)$ est compact (§ 5.3.2(2) et 5.3.2(3)).

Nous dirons que T est un opérateur à ***résolvant compact*** si $R(\lambda, T)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(T)$ (donc pour tout $\lambda \in \rho(T)$). Pour les équations aux dérivées partielles, nous utiliserons en général les opérateurs autoadjoints de résolvants compacts ; leur théorie spectrale est facilement obtenue à partir de la théorie des opérateurs compacts autoadjoints que nous avons dévelopée dans la section 5.4 (prop. 5.9.4). Certains auteurs définissent l'ensemble résolvant d'un opérateur T de domaine $\mathcal{D}$ un peu différemment ; disons que $\lambda \in \widetilde{\rho}(T)$ si $(\lambda - T) : \mathcal{D} \to E$ est injectif avec $(\lambda - T)(\mathcal{D}) = E_\lambda$ *dense* dans E et $(\lambda - T)^{-1} : E_\lambda \to \mathcal{D}$ continue. Dans notre définition de $\rho(T)$, on exige que $\lambda \in \widetilde{\rho}(T)$ et $(\lambda - T)(\mathcal{D}) = E$; donc $\rho(T) \subset \widetilde{\rho}(T)$. *Si* T *est un opérateur fermé, alors* $\rho(T) = \widetilde{\rho}(T)$. Il suffit de démontrer que si T est fermé et $\lambda \in \widetilde{\rho}(T)$, $(\lambda - T)(\mathcal{D}) = E_\lambda = E$; pour ce faire, on observe que la continuité de $(\lambda - T)^{-1} : E_\lambda \to \mathcal{D}$ entraîne que

$$\big\|(\lambda - T)f\big\| \geqslant c\|f\|\,, \quad f \in \mathcal{D}$$

pour un $c > 0$. Puisque $\overline{E}_\lambda = E$, pour tout $f \in E$, il existe une suite $\{f_n\}$ dans $\mathcal{D}$ telle que $(\lambda - T)f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ d'où l'inégalité

$$\big\|(\lambda - T)f_m - (\lambda - T)f_n\big\| \geqslant c\big\|f_m - f_n\big\|$$

permet de déduire que $\lim_n f_n = g$ existe ; puisque T est fermé et

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g\,, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = \lambda g - f$$

(car $Tf_n = Tf_n - \lambda f_n + \lambda f_n \to -f + \lambda g$, $n \to \infty$), on conclut que $g \in \mathcal{D}$ et

$$Tg = \lambda g - f\,,$$

c'est-à-dire $(\lambda - T)g = f$; f étant un élément arbitraire de E, on a établi que $(\lambda - T)(\mathcal{D}) = E$.

Notre intérêt principal dans ce livre réside dans l'étude des opérateurs symétriques ; d'après la proposition 5.8.3, on peut se borner, en principe, aux opérateurs symétriques fermés (car tout opérateur symétrique peut être prolongé en un opérateur symétrique fermé). C'est ce que nous ferons pour l'étude du spectre des opérateurs symétriques ; on peut démontrer que pour un opérateur T quelconque, on a $\widetilde{\rho}(T) = \rho(\overline{T})$.

5.9.4 Proposition

Soit T un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$ dans un espace hilbertien E de dimension infinie tel que T^{-1} existe et est un opérateur compact ($T^{-1} : E \to \mathcal{D}$). Alors T^{-1} est un opérateur symétrique ; soient $\{\lambda_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, les suites de valeurs propres non nulles et vecteurs propres orthonormaux correspondants associés à l'opérateur symétrique compact T^{-1} (prop. 5.4.2). Alors :

(i) la suite $\{\lambda_n\}$ est une suite infinie et la suite $\{\varphi_n\}$ est une suite orthonormale complète dans E ;

(ii) $\sigma(T) = \sigma_p(T)$; $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $\lambda = 1/\lambda_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$; $T\varphi_n = \lambda_n^{-1}\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$;

(iii) si $\lambda \in \rho(T)$, alors

$$R(\lambda, T)f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f\,,\, \varphi_n\rangle}{\lambda - \lambda_n^{-1}}\,\varphi_n\,, \quad f \in E\,.$$

(iv) T est un opérateur à résolvant compact.

REMARQUE. Notons que $\lim_{n\to\infty} |1/\lambda_n| = \infty$ (car $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$).

DÉMONSTRATION

Puisque $T : \mathcal{D} \to E$ est bijectif, pour tous f, $g \in E$, on a φ, $\psi \in \mathcal{D}$ (uniquement déterminés) tels que $T\varphi = f$, $T\psi = g$; en utilisant la symétrie de T, on a alors

$$\langle T^{-1}f\,,\, g\rangle = \langle \varphi\,,\, T\psi\rangle = \langle T\varphi\,,\, \psi\rangle = \langle f\,,\, T^{-1}g\rangle$$

ce qui est la symétrie de T^{-1}. Puisque 0 n'est pas une valeur propre de T^{-1} (car T et donc T^{-1} sont injectifs), on conclut d'après la proposition 5.4.2(v) que $\{\varphi_n\}$ est une suite orthonormale complète dans E ; puisque E est de dimension infinie, la suite $\{\varphi_n\}$ (et donc la suite $\{\lambda_n\}$) est une suite infinie. Notons que $\sigma(T^{-1})$ est formé des λ_n et de 0.

Démontrons que si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la manipulation formelle suivante est justifiée :

$$(\lambda - T)^{-1} = \lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}T)^{-1} = \lambda^{-1}T^{-1}(T^{-1} - \lambda^{-1})^{-1}\,. \tag{5.71}$$

En effet, si $f \in \mathcal{D}$ et $(\lambda - T)f = g$, alors

$$\lambda T^{-1} f - f = T^{-1} g\,, \quad \big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big) f = \lambda^{-1} T^{-1} g$$

d'où

$$\big(\lambda - T\big)^{-1} g = f = \lambda^{-1}\big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)^{-1} T^{-1} g = \lambda^{-1} T^{-1}\big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)^{-1} g \tag{5.72}$$

car $\lambda^{-1} \in \rho(T^{-1})$ et T^{-1}, $\big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)^{-1}$ sont deux opérateurs bornés permutables (§ 5.9.3). D'autre part, si $g \in E$, alors

$$f = \lambda^{-1} T^{-1}\big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)^{-1} g \in \mathcal{D}$$

et un petit calcul montre que

$$(\lambda - T) f = \big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)\big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)^{-1} g = g$$

de sorte que (5.72) est vérifiée pour tout $g \in E$; ceci donne (5.71). On conclut de (5.71) que $\big(\lambda - T\big)^{-1}$ est compact si $\lambda \neq \lambda_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ (car T^{-1} est compact, § 5.3.2(3)). Puisque $T\varphi_n = \lambda_n^{-1}\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$ (car $T^{-1}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$), les nombres réels non nuls λ_n^{-1}, $n \in \mathbb{N}$, sont dans $\sigma_p(T)$ et, d'après ce qui précède, on a que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ est l'ensemble formé par les nombres λ_n^{-1}, $n \in \mathbb{N}$. Ceci achève les démonstrations de (i) et (ii).

Si $\lambda \in \rho(T)$ et $\lambda \neq 0$, en utilisant (5.19) (avec $u = T^{-1}$, et $1/\lambda$ en place de λ), on a, pour $f \in E$,

$$\begin{aligned}\big(\lambda^{-1} - T^{-1}\big)^{-1} f &= \lambda f + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda^{-1} - \lambda_n} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n \\ &= \lambda f + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{-1} - \lambda} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (5.71), on obtient

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) f = \big(\lambda - T\big)^{-1} f &= \lambda^{-1} T^{-1}\big(T^{-1} - \lambda^{-1}\big)^{-1} f \\ &= -T^{-1} f + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n\rangle}{\lambda - \lambda_n^{-1}}\, \varphi_n \end{aligned} \tag{5.73}$$

car $T^{-1}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$. Puisque $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormale pour E, on a

$$\begin{aligned} T^{-1} f &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T^{-1} f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f\,,\, T^{-1}\varphi_n\rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f\,,\, \varphi_n\rangle \varphi_n \end{aligned} \tag{5.74}$$

d'où, en utilisant (5.73), on obtient

$$R(\lambda,T)f = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f\,,\,\varphi_n\rangle\varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda\lambda_n\langle f\,,\,\varphi_n\rangle}{\lambda-\lambda_n^{-1}}\,\varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f\,,\,\varphi_n\rangle}{\lambda-\lambda_n^{-1}}\varphi_n$$

ce qui prouve (iii) lorsque $\lambda \neq 0$; lorsque $\lambda = 0$, (iii) devient (5.74). La validité de (iv) provient de la discussion donnée dans le paragraphe 5.9.3. ♦

REMARQUES. Notons que sous l'hypothèse de la proposition 5.9.4, *le domaine $\mathcal{D}$ de T est nécessairement dense dans E.* En effet, en appliquant la proposition 5.4.2(v) sur $u = T^{-1}$, on a $\overline{u(E)} = \overline{T^{-1}(E)} = \overline{\mathcal{D}} = E$ car $u^{-1}(0) = T(0) = \{0\}$, T étant injectif. On a vu que $T\varphi_n = \lambda_n^{-1}\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\varphi_n \in \mathcal{D}$ (car $T^{-1}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$), la suite $\{\varphi_n\}$ formant une base orthonormale de E ; du corollaire 5.8.7, on conclut que *l'opérateur symétrique T de domaine $\mathcal{D}$ est essentiellement autoadjoint dès que T^{-1} est compact ; le spectre $\sigma(T)$ est constitué d'une suite de nombres réels $\{\lambda_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, leurs valeurs absolues tendant vers ∞ lorsque $n \to \infty$ avec $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.*

Ce qui vient d'être dit se généralise immédiatement au cas des opérateurs symétriques T de domaine $\mathcal{D}$ tels que $(T-c)^{-1}$ est compact pour un c *réel*. Il suffit d'appliquer les considérations précédentes à l'opérateur $S = T - c$ pour conclure que S et donc T est alors essentiellement autoadjoint avec $\sigma(T) = \sigma(S) + c$, la description détaillée de $\sigma(S)$ étant fournie par ce qui précède.

5.9.5 Spectre des opérateurs symétriques

Soit T un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$ dense dans un espace hilbertien *séparable* E.

(1) $\sigma_p(T)$ est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$; si φ, ψ sont deux vecteurs propres de T correspondants à deux valeurs propres distinctes, alors $\varphi \perp \psi$.

La démonstration est identique à celle donnée pour le lemme 5.4.3(iii).

(2) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$, alors, pour $f \in \mathcal{D}$,

$$\|(\lambda - T)f\| \geqslant |\mathrm{Im}(\lambda)|\,\|f\| \,; \tag{5.75}$$

en particulier, $(\lambda - T) : \mathcal{D} \to E$ est injectif et $(\lambda - T)^{-1} : E_\lambda \to \mathcal{D}$ est continu où $E_\lambda = (\lambda - T)(\mathcal{D})$.

DÉMONSTRATION

Posons $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \neq 0$; alors

$$\begin{aligned}\big\|(\lambda - T)f\big\|^2 &= \big\langle \lambda f - Tf\,,\, \lambda f - Tf\big\rangle = \big\langle i\lambda_2 f + (\lambda_1 - T)f\,,\, i\lambda_2 f + (\lambda_1 - T)f\big\rangle \\ &= \lambda_2^2\big\|f\big\|^2 + \big\|(\lambda_1 - T)f\big\|^2 \geqslant \lambda_2^2\big\|f\big\|^2\end{aligned}$$

car $\big\langle i\lambda_2 f\,,\, (\lambda_1 - T)f\big\rangle + \big\langle (\lambda_1 - T)f\,,\, i\lambda_2 f\big\rangle = 0$. Ceci prouve (5.75). ♦

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il y a deux possibilités qui s'excluent l'une l'autre : ou bien $\overline{E}_\lambda = E$ ou bien $\overline{E}_\lambda \neq E$. Si $\overline{E}_\lambda \neq E$, alors il existe $f \neq 0$ tel que $f \in E_\lambda^\perp$ de sorte que, pour tout $g \in \mathcal{D}$,

$$\big\langle \lambda g - Tg\,,\, f\big\rangle = 0\,,$$

c'est-à-dire $\big\langle Tg\,,\, f\big\rangle = \big\langle g\,,\, \overline{\lambda} f\big\rangle$, $g \in \mathcal{D}$, ce qui donne $f \in \mathcal{D}^*$ et $T^* f = \overline{\lambda} f$. Rappelons que si T est fermé et (5.75) est vérifiée, alors $\overline{E}_\lambda = E$ équivaut à avoir $E_\lambda = E$ (§ 5.9.3). On peut énoncer le résultat suivant (en utilisant la notation de *(2)*).

(3) Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors on a un des cas suivants :

(i) $\overline{E}_\lambda = E$,

(ii) $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$;

le demi-plan $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *(resp.* $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$*) est constitué entièrement des points λ vérifiant $\overline{E}_\lambda = E$ ou constitué entièrement des points λ tels que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. T est essentiellement autoadjoint si et seulement si $\sigma(\overline{T}) \subset \mathbb{R}$ (ou, si et seulement si $\rho(\overline{T}) \supset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).*

Nous ne démontrons pas cette affirmation ni celle qui suit.

(4) Si T est autoadjoint, alors $\sigma(T)$ est une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$; si $\lambda \notin \mathbb{R}$, alors $\big\|R(\lambda, T)\big\| \leqslant \big|\mathrm{Im}\,\lambda\big|^{-1}$.

La dernière inégalité est immédiate de (5.75). Posons

$$D_T^+ = \big\{f \in \mathcal{D}^* : T^* f = if\big\} = \big\{f \in E : \big\langle Tg\,,\, f\big\rangle = -i\big\langle g\,,\, f\big\rangle\,,\ g \in \mathcal{D}\big\}$$

$$D_T^- = \big\{f \in \mathcal{D}^* : T^* f = -if\big\} = \big\{f \in E : \big\langle Tg\,,\, f\big\rangle = i\big\langle g\,,\, f\big\rangle\,,\ g \in \mathcal{D}\big\}$$

$$n_+ = \dim D_T^+\,, \quad n_- = \dim D_T^-\ ;$$

$n_\pm$ sont ou bien des nombres entiers $\geqslant 0$ ou bien ∞ ; n_+, n_- s'appellent les ***défauts*** de l'opérateur symétrique T. On peut démontrer ce qui suit mais nous ne le ferons pas.

(5) T est essentiellement autoadjoint si et seulement si $n_+ = n_- = 0$; T possède un prolongement autoadjoint si et seulement si $n_+ = n_-$.

Une conséquence immédiate de *(5)* est l'énoncé utile suivant.

(6) Soit $E = L^2(X)$, X étant une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$ munie de la mesure de Lebesgue. Soit T un opérateur symétrique de domaine $\mathcal{D}$ dense dans E ; supposons que $\overline{f} \in \mathcal{D}$ dès que $f \in \mathcal{D}$ et $\overline{T(f)} = T(\overline{f})$ (on dit que T est un ***opérateur réel***). *Alors T possède au moins un prolongement autoadjoint.*

En effet, l'application $f \mapsto \overline{f}$ donne une bijection linéaire entre D_T^+ et D_T^- si T est un opérateur réel d'où $n_+ = n_-$.

Tous les opérateurs différentiels que nous étudierons dans la suite entrent dans le cadre de l'énoncé *(6)*. On peut aussi généraliser *(6)* au cas où $E = L^2(X, \Sigma, \mu)$, μ étant une mesure positive quelconque dans un ensemble X munie de la tribu Σ.

Le choix des nombres $\pm i$ dans la définition des nombres $n_\pm$ est traditionnel et commode mais ceci n'est pas essentiel. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$, on a

$$\dim\{f \in \mathcal{D}^* : T^*f = \lambda f\} = n_+$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$, on a

$$\dim\{f \in \mathcal{D}^* : T^*f = \lambda f\} = n_- .$$

Beaucoup d'opérateurs symétriques T (de domaine $\mathcal{D}$) en physique mathématique sont *bornés inférieurement* (resp. *bornés supérieurement*) dans le sens suivant : il existe un nombre réel c tel que $\langle Tf\,,\, f\rangle \geqslant c\|f\|^2$, $f \in \mathcal{D}$ (resp. $\langle Tf\,,\, f\rangle \leqslant c\|f\|^2$, $f \in \mathcal{D}$) ; le nombre c s'appelle alors une *borne inférieure* (resp. *borne supérieure*) pour T. Un opérateur symétrique T ayant une borne inférieure $c = 0$ s'appelle un *opérateur positif* qui vérifie donc la propriété

$$\langle Tf\,,\, f\rangle \geqslant 0\,, \quad f \in \mathcal{D}\,.$$

Les opérateurs symétriques bornés inférieurement ou supérieurement s'appellent les *opérateurs semi-bornés*.

(7) Un opérateur symétrique semi-borné (de domaine dense) possède un prolongement autoadjoint semi-borné sans changement de borne. Un opérateur autoadjoint borné inférieurement (resp. supérieurement) par c possède un spectre contenu dans $[\,c\,,\,\infty\,[$ (resp. $]\,-\infty\,,\,c\,]$).

Nous ne démontrons pas cette affirmation.

D'après *(4)*, un opérateur autoadjoint T possède un spectre $\sigma(T)$ qui est une partie *fermée non vide* de $\mathbb{R}$. Il est traditionnel et utile d'écrire

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$$

où $\sigma_p(T)$ est formé des valeurs propres de T et

$$\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)\ ;$$

si $\lambda \in \sigma_c(T)$, on dit que λ appartient au *spectre continu* de T et, par analogie, on dit que les valeurs propres (les λ qui sont dans $\sigma_p(T)$) forment le *spectre discret* de T. Soulignons encore une fois que $\sigma_p(T)$ peut bien être vide ; de même, $\sigma_c(T)$ peut être vide. La caractérisation suivante de $\sigma(T)$ (pour T autoadjoint) montre que les éléments de $\sigma_c(T)$ sont des « valeurs propres approximatives », c'est-à-dire les *quasi-valeurs propres* de T.

(8) Soit T un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$ dense dans un espace hilbertien séparable E. Alors $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement s'il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}$ telle que $\|f_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, et $(Tf_n - \lambda f_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, on peut prendre $f_n = f$, $n \in \mathbb{N}$, avec $f \in \mathcal{D}$, $\|f\| = 1$ et $Tf_n = \lambda f$. La distinction entre le spectre continu et le spectre discret d'un opérateur autoadjoint est importante dans les applications. Si T est un opérateur autoadjoint *compact*, alors $\sigma(T)$ est entièrement discret sauf éventuellement le point $\lambda = 0$ qui est toujours dans $\sigma(T)$ mais peut être ou non dans $\sigma_c(T)$.

5.9.6 Théorème spectral

Soit T un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$ dense dans un espace hilbertien séparable E. On peut associer à T un espace mesuré (X, Σ, μ), μ étant une mesure positive finie, un isomorphisme unitaire (§ 3.6.4) $U : E \to L^2(X, \mu)$ et une fonction réelle mesurable $\alpha : X \to \mathbb{R}$, tels que

$$f \in \mathcal{D} \iff \alpha U f \in L^2(X, \mu) \quad \text{et} \quad UTU^{-1} = Q_\alpha \tag{5.76}$$

où Q_α est l'opérateur de multiplication par α dans $L^2(X, \mu)$ (ex. 5, § 5.8.8). Ainsi, si $\varphi \in L^2(X, \mu)$ et $\alpha\varphi \in L^2(X, \mu)$, alors

$$U^{-1}\varphi \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad UTU^{-1}\varphi = \alpha\varphi\,. \tag{5.77}$$

L'affirmation contenue dans (5.76) est une formulation possible du théorème spectral ; on peut l'exprimer brièvement comme suit : *à un isomorphisme unitaire près, tout opérateur autoadjoint est un opérateur de multiplication (par une fonction réelle).*

Les formules (5.76) ou (5.77) permettent la définition d'un opérateur $h(T)$ dans E dès que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction borélienne ; on pose $h_\alpha = h \circ \alpha$ et

$$h(T) = U^{-1} Q_{h_\alpha} U\,.$$

Plus explicitement, le domaine de $h(T)$ est formé des vecteurs $f = U^{-1}\varphi$ où $\varphi \in L^2(X, \mu)$ et $h_\alpha\varphi \in L^2(X, \mu)$ et

$$h(T)f = U^{-1}(h_\alpha\varphi)\,.$$

Cette définition de $h(T)$ donne une bonne correspondance entre les fonctions mesurables $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et les opérateurs associés $h(T)$. Si h est borné, alors $h(T)$ est borné et

$$(h_1 + h_2)(T) = h_1(T) + h_2(T), \quad (h_1 h_2)(T) = h_1(T)h_2(T)$$

pour les fonctions h_1 et h_2 bornées (boréliennes). Si h est réel, $h(T)$ est autoadjoint ; si h est un polynôme, $h(T)$ est le polynôme en T correspondant (avec un domaine approprié).

Les formules (5.76) et (5.77) doivent être comparées avec le théorème de l'algèbre linéaire qui garantit la diagonalisation d'une matrice autoadjointe A ; A est considérée comme un opérateur dans l'espace hilbertien $E = \mathbb{C}^N$ avec $A^* = A$. Le théorème de l'algèbre linéaire mentionné dit qu'il existe une matrice unitaire U ($U^*U = UU^* = I$, I étant la matrice identité de type (N, N)) et une matrice diagonale réelle $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ telles que

$$UAU^{-1} = D. \tag{5.78}$$

Pour mettre (5.78) en relation avec (5.77), on prend $X = \{1, \ldots, N\}$, μ la mesure de comptage dans X et $\alpha : X \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha(j) = \lambda_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$; chaque $\xi \in L^2(X, \mu)$ est un vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N$ avec $\xi(j) = \xi_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$ de sorte que $L^2(X, \mu) = \mathbb{C}^N$. L'application

$$U : E = \mathbb{C}^N \longrightarrow L^2(X, \mu) = \mathbb{C}^N$$

donnée par la matrice unitaire est un isomorphisme unitaire et (5.78) équivaut à

$$UAU^{-1}\xi = (\lambda_1 \xi_1, \ldots, \lambda_N \xi_N)$$

pour $\xi \in L^2(X, \mu) = \mathbb{C}^N$, ce qui s'écrit sous la forme (5.77) comme

$$(UAU^{-1}\xi)(j) = \lambda_j \xi_j = (\alpha\xi)(j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N$$

où $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $\xi(j) = \xi_j$.

Le calcul avec les opérateurs $h(T)$ formés avec les « fonctions des opérateurs autoadjoints T » est dit *calcul fonctionnel* (ou *opérationnel*) ; il est essentiel pour les applications de la théorie des opérateurs autoadjoints. La formulation usuelle du théorème spectral pour un opérateur autoadjoint T de domaine $\mathcal{D}$ (dense dans un espace hilbertien E) se déduit de la possibilité de la construction des fonctions $h(T)$. Nous esquissons le procédé. Si B est une partie borélienne de $\mathbb{R}$, l'opérateur $1_B(T)$ est un opérateur autoadjoint borné qui est idempotent (car $1_B^2 = 1_B$; se rappeler que $1_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $1_B(x) = 1$ si $x \in B$ et $1_B(x) = 0$ si $x \in B^c$) ; donc $1_B(T)$ est une projection orthogonale de E sur un sous-espace vectoriel. On vérifie aisément (en partant des propriétés de la correspondance $h \mapsto h(T)$ données ci-desssus) que si $B_1, B_2, \ldots$ est une suite de parties boréliennes deux à deux disjointes dans $\mathbb{R}$, alors

$$1_{B_j}(T)\, 1_{B_k}(T) = 1_{B_k}(T)\, 1_{B_j}(T) = 0$$

$$1_B(T) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{B_j}(T)\,, \quad B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

dans le sens que, pour tout $f \in E$,

$$1_B(T)f = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{B_j}(T)f\,.$$

Ainsi, si $f \in E$, la formule

$$\nu_f^T(B) = \langle 1_B(T)f\,,\, f\rangle\,, \quad B \subset \mathbb{R}\,,\ B \text{ borélien}$$

définit une mesure positive finie dans la tribu borélienne de $\mathbb{R}$; noter que

$$\nu_f^T(B) = \|1_B(T)f\|^2 \leqslant \|f\|^2\,.$$

On établit, alors que, pour $f \in \mathcal{D}$,

$$\langle Tf\,,\, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) \tag{5.79}$$

On exprime (5.79) souvent par une écriture différente ; posons $E^T(B) = 1_B(T)$; alors on écrit

$$Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}E^T(\lambda)\,, \quad f \in \mathcal{D} \tag{5.80}$$

en considérant l'intégrale dans (5.80) comme une intégrale de la fonction réelle $\lambda \mapsto \lambda$ par rapport à la mesure dite *spectrale* de T, $B \mapsto E^T(B)$, $B \subset \mathbb{R}$, B borélien ; on peut interpréter l'intégrale (5.80) comme une forme abstraite de (5.79). Les formules (5.79), (5.80), s'appellent la *représentation spectrale* de T. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\langle h(T)f\,,\, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,\mathrm{d}\nu_f^T(\lambda)$$

ou encore

$$h(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,\mathrm{d}E^T(\lambda)\,,$$

pourvu que f appartienne au domaine de $h(T)$, ce qui veut dire que $f \in E$ est tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) < \infty\,.$$

La mesure spectrale $B \mapsto E^T(B)$ contient toute l'information concernant T. Dans le cadre de notre livre nous ne pouvons pas analyser les relations entre T et $E^T(B)$ de manière plus approfondie ; le langage de la mécanique quantique que nous indiquons dans la section suivante donnera une interprétation physique pour les expressions $E^T(B)$ et $\nu_f^T(B)$.

5.10 LE LANGAGE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

5.10.1 Préliminaires

On associe un espace hilbertien séparable E à chaque *système* physique ; les vecteurs $f \in E$ tels que $\|f\| = 1$ s'appellent les *états* (dits *purs*) du système. Les grandeurs physiques, appelées les *observables* du système, sont représentées par des opérateurs autoadjoints dans E. Si T est une observable (un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}_T$ dense dans E), la *valeur moyenne* de l'observable lorsque le système est dans l'état $f \in \mathcal{D}_T$ est définie par

$$\mathcal{E}_f(T) = \langle Tf\,,\, f\rangle$$

De (5.79), on sait que

$$\mathcal{E}_f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) \tag{5.81}$$

où $\nu_f^T(B) = \langle E^T(B)f\,,\, f\rangle$, $B \subset \mathbb{R}$, B borélien ; rappelons du paragraphe 5.9.6 que $E^T(B) = 1_B(T)$. $E^T(B)$ est interprété comme l'observable dont la valeur est 1 lorsque l'observable T a ses valeurs dans B et la valeur 0 autrement ; on interprète

$$\nu_f^T(B) = \langle E^T(B)f\,,\, f\rangle$$

comme la probabilité que l'observable T ait ses valeurs dans B lorsque le système est dans l'état f. Puisque $\|f\| = 1$, $B \mapsto \nu_f^T(B)$ est une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}$ car

$$\nu_f^T(\mathbb{R}) = \langle E^T(\mathbb{R})f\,,\, f\rangle = \langle f\,,\, f\rangle = \|f\|^2 = 1\,.$$

Notons aussi que la définition de $\mathcal{E}_f(T)$ correspond à celle de la valeur moyenne (ou l'espérance mathématique) d'une variable aléatoire réelle dont la loi est donnée par ν_f^T ; nous appellerons ν_f^T la *loi de T sous l'état de f*. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne, l'observable $h(T)$ (de domaine $\mathcal{D}_{h(T)}$), définie dans le paragraphe 5.9.6, aura la loi $\nu_f^{h(T)}$ sous l'état f où

$$\nu_f^{h(T)}(B) = \nu_f^T\big(h^{-1}(B)\big)\,, \quad B \subset \mathbb{R}\,,\ B \text{ borélien} \tag{5.82}$$

exactement comme dans la théorie des probabilités usuelles où la relation entre la loi ν d'une variable aléatoire réelle ξ et la loi ν^h de la variable aléatoire $h \circ \xi$ est donnée par

$$\nu^h(B) = \mathbb{P}\big\{h \circ \xi \in B\big\} = \mathbb{P}\big\{\xi \in h^{-1}(B)\big\} = \nu\big(h^{-1}(B)\big)\,,$$

$\mathbb{P}$ étant la mesure de probabilité sous-jacente. Le calcul pour établir (5.82) est analogue ; on a

$$\nu_f^{h(T)}(B) = \langle E^{h(T)}(B)f\,,\, f\rangle = \Big\langle E^T\big(h^{-1}(B)\big)f\,,\, f\Big\rangle = \nu_f^T\big(h^{-1}(B)\big)$$

en observant que

$$E^{h(T)}(B) = 1_B\big(h(T)\big) = (1_B \circ h)(T) = 1_{h^{-1}(B)}(T) = E^T\big(h^{-1}(B)\big)\,.$$

De (5.81) et (5.82), on établit que, pour $f \in \mathcal{D}_{h(T)}$,

$$\mathcal{E}_f\big(h(T)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\nu_f^{h(T)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,\mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) = \big\langle h(T)f\,,\,f\big\rangle \tag{5.83}$$

comme prévu par le théorème de changement des variables dans les intégrales (vol. 1, § 5.7.4). La restriction, $f \in \mathcal{D}_{h(T)}$, est nécessaire exactement comme dans la théorie des probabilités usuelles ; une variable aléatoire ξ possède une espérance mathématique seulement lorsque la mesure de probabilité sous-jacente $\mathbb{P}$ le permet dans le sens que

$$\int |\xi|\,\mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$$

et alors

$$\int \xi\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathcal{E}_{\mathbb{P}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d}\nu_{\mathbb{P}}^{\xi}(\lambda)$$

où $\nu_{\mathbb{P}}^{\xi}(B) = \mathbb{P}\big(\xi^{-1}(B)\big) = \mathbb{P}\{\xi \in B\}$.

5.10.2 Observables discrètes

Supposons que l'observable T correspond à un opérateur autoadjoint compact. De la section 5.4, on sait qu'il existe une famille orthonormale complète $\{\psi_\alpha\}$ et des nombres réels λ_α tels que $T\psi_\alpha = \lambda_\alpha\psi_\alpha$, $\alpha \in J$, J au plus dénombrable (car nous opérons dans un espace hilbertien séparable E) ; chaque $\lambda_\alpha \neq 0$ est une valeur propre de T de multiplicité finie et le seul point d'accumulation des nombres λ_α est 0.

Démontrons que

$$\nu_f^T(B) = \sum_{\alpha:\lambda_\alpha \in B} \big|\big\langle f\,,\,\psi_\alpha\big\rangle\big|^2 \tag{5.84}$$

où f est un état et $B \subset \mathbb{R}$, B borélien.

DÉMONSTRATION

On a

$$f = \sum_\alpha \big\langle f\,,\,\psi_\alpha\big\rangle\psi_\alpha\,, \quad Tf = \sum_\alpha \lambda_\alpha\big\langle f\,,\,\psi_\alpha\big\rangle\psi_\alpha\,.$$

Notons que

$$1 = \|f\|^2 = \sum_\alpha \big|\langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle\big|^2$$

et

$$\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^n \big|\langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle\big|^2 < \infty\,, \quad n = 1,\,2,\,\ldots$$

car $\sup_\alpha |\lambda_\alpha| < \infty$. On vérifie aisément que

$$T^k f = \sum_\alpha \lambda_\alpha^k \langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle \psi_\alpha\,, \quad k = 1,\,2,\,\ldots$$

$$\langle T^k f\,,\,f\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha^k \big|\langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle\big|^2$$

d'où

$$\langle p(T) f\,,\,f\rangle = \sum_\alpha p(\lambda_\alpha) \big|\langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle\big|^2$$

où p est un polynôme quelconque (avec $T^0 f = f$). En comparant avec (5.83), on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\,\mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) = \sum_\alpha p(\lambda_\alpha) \big|\langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle\big|^2$$

pour tout polynôme p. Ecrivons $\nu = \nu_f^T$ et μ pour la mesure de probabilité discrète définie par le côté droit de (5.84) ; alors on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\,\mathrm{d}\nu(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

pour tout polynôme p. Nous devons en déduire que $\nu = \mu$. Si $M = \sup_\alpha |\lambda_\alpha|$, alors on sait que le support de μ est contenu dans $[\,-M\,,\,M\,]$, c'est-à-dire

$$\mu\{\lambda : |\lambda| > M\} = 0$$

Nous déduisons d'abord que

$$\nu\{\lambda : |\lambda| > M\} = 0\,.$$

Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\nu\{\lambda : |\lambda| > M + \varepsilon\} > 0\,;$$

puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2k}\,\mathrm{d}\nu(\lambda) \geqslant \int_{|\lambda| > M+\varepsilon} \lambda^{2k}\,\mathrm{d}\nu(\lambda) \geqslant \big(M+\varepsilon\big)^{2k} \nu\{\lambda : |\lambda| > M + \varepsilon\}\,,$$

on aura

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2k}\,\mathrm{d}\nu(\lambda)\right)^{1/2k} \geqslant (M+\varepsilon) > M$$

ce qui contredit

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{2k}\,\mathrm{d}\nu(\lambda)\right)^{1/2k}=\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{2k}\,\mathrm{d}\mu(\lambda)\right)^{1/2k}\leqslant M\,.$$

Donc (5.85) s'écrit comme

$$\int_{-M}^{M}p(\lambda)\,\mathrm{d}\nu(\lambda)=\int_{-M}^{M}p(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

où μ, ν sont deux mesures de probabilité dans $[\,-M\,,\,M\,]$ et p est un polynôme quelconque. Puisque les polynômes peuvent approcher toute fonction continue h dans $[\,-M\,,\,M\,]$ uniformément (théorème de Weierstrass), on en déduit que

$$\int_{-M}^{M}h(\lambda)\,\mathrm{d}\nu(\lambda)=\int_{-M}^{M}h(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\,\mathrm{d}\nu(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda)\tag{5.85}$$

pour toute fonction continue bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. En utilisant le lemme du paragraphe 4.5.2, on obtient la validité de (5.85) pour toute fonction borélienne bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. En prenant $h=1_B$ dans (5.85), on obtient

$$\nu(B)=\mu(B)$$

pour tout ensemble borélien $B\subset\mathbb{R}$, ce qui établit (5.84). ♦

REMARQUE. Si μ est une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{R}$, alors on peut démontrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\lambda\right|^{n}\mathrm{d}\mu(\lambda)\right\}^{1/n}=L$$

existe ; L est le plus petit nombre $\geqslant 0$ tel que $\mu\big([\,-L\,,\,L\,]\big)=1$. Nous laissons la preuve à titre d'exercice.

L'interprétation de (5.84) est la suivante : *l'observable T ne prend que les valeurs $\lambda\in\sigma(T)$* (où $\sigma(T)$ est ici constitué des nombres λ_α) ; *dans l'état f, la probabilité que T prend la valeur λ est égale à*

$$q_\lambda^f=\sum_{\alpha:\lambda_\alpha=\lambda}\left|\langle f\,,\,\psi_\alpha\rangle\right|^2.$$

Une observable qui ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs est appelée une *observable discrète*. Donc un opérateur autoadjoint compact fournit une observable discrète ; notons que si l'état f est un des vecteurs propres ψ_β, alors

$$q_\lambda^{\psi_\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \lambda_\beta \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \lambda_\beta \, ; \end{cases}$$

dans un état qui correspond à un vecteur propre de T, l'observable concernée prend une valeur fixe.

Soit F un sous-espace vectoriel fermé dans E ; posons $T = P_F$, projection orthogonale sur F. *La loi de l'observable T sous l'état f est donnée par*

$$\nu_f^T = (1 - \theta_f)\delta_0 + \theta_f \delta_1 \tag{5.86}$$

où $\theta_f = \|P_F f\|^2$ et où δ_a est la mesure de Dirac concentrée au point a ; autrement dit

$$\nu_f^T(B) = \begin{cases} \theta_f & \text{si } 1 \in B,\ 0 \notin B \\ 1 - \theta_f & \text{si } 0 \in B,\ 1 \notin B \\ 1 & \text{si } 0,\ 1 \in B \\ 0 & \text{si } 0,\ 1 \notin B \end{cases}$$

et l'observable T ne prend que des valeurs 1 et 0. En effet,

$$\langle Tf\,,\, f\rangle = \|P_F f\|^2\,, \qquad \langle T^k f\,,\, f\rangle = \langle Tf\,,\, f\rangle = \|P_F f\|^2\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

d'où l'on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)\, \mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) = \theta_f p(1) + (1 - \theta_f)p(0)$$

pour tout polynôme p. Le raisonnement précédent donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, \mathrm{d}\nu_f^T(\lambda) = \theta_f h(1) + (1 - \theta_f)h(0)$$

pour toute fonction borélienne bornée $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ce qui donne (5.86). Ainsi, l'observable $T = P_F$ correspond à une variable aléatoire (comme dans un jeu de pile ou face) dont les valeurs sont 1 ou 0 avec probabilité θ_f ou $1 - \theta_f$, f étant l'état sous lequel les probabilités sont calculées ; si $F = \{0\}$ ou E l'observable est constamment égale à 0 ou 1 donc constante. Notons que $T = 1_F$ n'est compact que si F est de dimension finie.

On obtient d'autres observables discrètes en prenant les combinaisons linéaires finies des projections orthogonales. Soit $\{F_j\}_{0 \leqslant j \leqslant N}$ une suite de sous-espaces vectoriels distincts, deux à deux orthogonaux et $\{a_j\}_{0 \leqslant j \leqslant N}$, $(N+1)$ nombres réels distincts ; supposons que $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_N$ et posons

$$T = \sum_{j=0}^{N} a_j P_{F_j}\,.$$

Alors l'observable T prend les valeurs $a_0, \ldots, a_N$ avec probabilités $\|P_{F_j} f\|^2$, $j = 0, \ldots, N$, respectivement, si l'état du système est donné par f ; aussi

$$\mathcal{E}_f(T) = \sum_{j=0}^{N} a_j \|P_{F_j} f\|^2 .$$

Par définition, une observable discrète T possède un spectre $\sigma(T)$ qui est une partie fermée non vide au plus dénombrable de $\mathbb{R}$; ainsi, tout opérateur autoadjoint T avec $\sigma(T)$ au plus dénombrable donne une observable discrète. Les opérateurs autoadjoints compacts ou les opérateurs avec résolvants compacts sont des exemples d'observables discrètes.

5.10.3 Observables générales

Généralisant les considérations du paragraphe précédent, on interprète le spectre $\sigma(T)$ d'une observable T (T étant un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$ dans un espace hilbertien séparable E) comme l'ensemble des valeurs possibles de l'observable. On démontre que la loi de T sous un état quelconque f est concentrée dans $\sigma(T)$:

$$\nu_f^T(B) = \nu_f^T\big(B \cap \sigma(T)\big)$$

pour tout ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}$. Si f est un vecteur propre de T ($Tf = \lambda f$, λ réel) de norme 1, alors sous l'état f, la loi de T est concentrée au point λ, c'est-à-dire $\nu_f^T = \delta_\lambda$. T ne peut avoir qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs propres ; T est une observable, discrète si et seulement si les vecteurs propres, distincts et normalisés de T forment une base orthonormale de E. Il est facile de donner des exemples d'observables qui ne sont pas discrètes.

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$; si $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne ***bornée***, soit $T = Q_\alpha$, l'opérateur de multiplication par α (ex. 5, § 5.8.8). On peut alors démontrer que la loi de T sous l'état f est donnée par

$$\nu_f^T(B) = \int_{\alpha^{-1}(B)} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \mu_f(B)\,, \tag{5.87}$$

B étant une partie borélienne de $\mathbb{R}$. Ceci est visible en comparant avec (5.83) et les formules

$$\langle Tf\,,\, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\mu_f(\lambda)$$

$$\langle T^k f\,,\, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k(x)\big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \,\mathrm{d}\mu_f(\lambda)\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\langle p(T)f\,,\, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p\big(\alpha(x)\big)\big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) \,\mathrm{d}\mu_f(\lambda)\,,$$

p étant un polynôme quelconque. La validité de ces formules vient de la formule de changement des variables dans les intégrales de la forme suivante (vol. 1, § 5.7.4) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\big(\alpha(x)\big)\big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_f(\lambda)$$

où μ_f est défini dans (5.87) et h est une fonction borélienne bornée (ou $\geqslant 0$). Un raisonnement du type indiqué dans le paragraphe 5.10.2 permet de conclure la validité de (5.87).

De (5.87), on constate que si la mesure de Lebesgue de $\alpha^{-1}\big(\{\lambda\}\big)$ est égale à 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors T ne prend aucune valeur λ sous aucun état f avec une probabilité > 0 car alors

$$\nu_f^T\big(\{\lambda\}\big) = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Dans ce cas, $T = Q_\alpha$ ne possède aucune valeur propre. Soit

$$S_\alpha = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{mesure}\Big(\alpha^{-1}\big([\,\lambda-\varepsilon\,,\,\lambda+\varepsilon\,]\big)\Big) > 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\Big\}\ ;$$

S_α s'appelle l'*image essentielle* de $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; puisque α est bornée, $S_\alpha \subset [\,-M\,,\,M\,]$, $M = \sup_x|\alpha(x)| < \infty$, car si $|\lambda| > M$, alors

$$\alpha^{-1}\big([\,\lambda-\varepsilon\,,\,\lambda+\varepsilon\,]\big) = \emptyset$$

si $\varepsilon > 0$ est petit. De (5.87), on constate que

$$\nu_f^T(B) = \nu_f^T(B \cap S_\alpha)\,.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que $\sigma(T) = S_\alpha$.

5.10.4 Relations d'incertitude

Nous nous limitons d'abord à considérer les observables T *bornées* ; ainsi, T est défini partout dans l'espace hilbertien séparable E avec $T = T^*$, $\|T\| < \infty$. (On peut démontrer que si T est défini partout dans E et T est symétrique, alors $\|T\| < \infty$.) La *variance* de T dans l'état f est définie par

$$V_f(T) = \mathcal{E}_f(T^2) - \big(\mathcal{E}_f(T)\big)^2\,.$$

On vérifie aisément que si $\alpha = \langle Tf\,,\,f\rangle = \mathcal{E}_f(T)$, alors

$$V_f(T) = \langle T^2 f\,,\,f\rangle - \alpha^2 = \Big\langle (T-\alpha)^2 f\,,\,f\Big\rangle = \mathcal{E}_f\big((T-\alpha)^2\big)$$

et

$$\langle T^2 f\,,\,f\rangle = \langle Tf\,,\,Tf\rangle = \|Tf\|^2\,, \quad \mathcal{E}_f\big((T-\alpha)^2\big) = \|Tf - \alpha f\|^2\,.$$

On en déduit que $V_f(T) = 0$ *pour un état f si et seulement si f est un vecteur propre de T*. En particulier, $V_f(T) = 0$ *pour tout état f si et seulement si*

$T = \alpha\,\mathrm{id}_E$ *où* α *est un nombre réel* (c'est-à-dire l'observable T est une constante α). En effet, si

$$Tf = \alpha(f)f\,, \quad f \in E\,,\ \|f\| = 1\,,$$

alors $\alpha(f) = \alpha$ indépendant de f car si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de E, on a (pour $f \in E$, $\|f\| = 1$)

$$f = \sum_n \langle f\,,\,\varphi_n\rangle\varphi_n\,,$$

$$\alpha(f)f = Tf = \sum_n \langle f\,,\,\varphi_n\rangle\alpha(\varphi_n)\,\varphi_n = \sum_n \langle f\,,\,\varphi_n\rangle\alpha(f)\,\varphi_n$$

d'où $\alpha(f) = \alpha(\varphi_n) = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$.

Si A, B sont deux opérateurs bornés dans E, nous posons

$$[\,A\,,\,B\,] = AB - BA\,;$$

$[\,A\,,\,B\,]$ s'appelle le *crochet* de A et B (on dit aussi *commutateur* de A et B). Le crochet est nul si et seulement si A et B sont permutables ; si A et B sont autoadjoints, leur crochet est *antisymétrique* (ou *anti-autoadjoint*) au sens que

$$[\,A\,,\,B\,]^* = B^*A^* - A^*B^* = BA - AB = -[\,A\,,\,B\,]\,.$$

En posant $[\,A\,,\,B\,] = iC$, on obtient un opérateur autoadjoint $C = -i[\,A\,,\,B\,]$, si A, B sont autoadjoints. Une formulation de la ***relation d'incertitude*** (dite de Heisenberg) est la suivante : *si A et B sont des observables bornées et C est l'observable définie par $[\,A\,,\,B\,] = iC$, alors, pour tout état f,*

$$V_f(A)V_f(B) \geqslant \frac{1}{4}\left\{\mathcal{E}_f(C)\right\}^2. \tag{5.87}$$

DÉMONSTRATION

Pour l'état f fixé, posons

$$a = \mathcal{E}_f(A)\,, \quad b = \mathcal{E}_f(B)\,, \quad c = \mathcal{E}_f(C)\,, \qquad A_0 = A - a\,, \quad B_0 = B - b\,.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, considérons $T = A_0 + i\lambda B_0$; alors

$$T^* = A_0 - i\lambda B_0$$

et

$$T^*T = A_0^2 + i\lambda(A_0B_0 - B_0A_0) + \lambda^2 B_0^2 = A_0^2 - \lambda C + \lambda^2 B_0^2$$

car

$$[\,A_0\,,\,B_0\,] = [\,A\,,\,B\,] = iC\,.$$

D'autre part,

$$\langle T^*Tf\,,\,f\rangle = \langle Tf\,,\,Tf\rangle = \|Tf\|^2 \geqslant 0$$

d'où

$$0 \leqslant \langle A_0^2 f\,,\, f\rangle - \lambda\langle Cf\,,\, f\rangle + \lambda^2\langle B_0^2 f\,,\, f\rangle = V_f(A) - \lambda c + \lambda^2 V_f(B) \quad (5.88)$$

car $V_f(A_0) = V_f(A)$, $V_f(B_0) = V_f(B)$. Puisque (5.88) est vérifiée pour tout choix de $\lambda \in \mathbb{R}$, on conclut que

$$c^2 - 4V_f(A)V_f(B) \leqslant 0$$

ce qui est (5.87). ♦

REMARQUE. L'inégalité (5.87) se généralise directement au cas des opérateurs autoadjoints A, B, C non bornés *pourvu* que l'on fasse attention à leurs domaines ; nous n'approfondirons pas cette remarque mais passons à un exemple célèbre de (5.87) où les opérateurs concernés sont non bornés. En écrivant $\delta_f(T) = \{V_f(T)\}^{1/2}$, (5.87) devient

$$\delta_f(A)\delta_f(B) \geqslant \frac{1}{2}\left|\mathcal{E}_f(C)\right|. \quad (5.89)$$

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$; posons

$$Qf(x) = xf(x)\,, \quad Pf(x) = \frac{\hbar}{i}f'(x)\,;$$

où $\hbar$ est une constante > 0 (que nous commenterons ci-après, § 5.10.6). Les exemples 4 et 5 du paragraphe 5.8.8 donnent les domaines exacts de P et Q pour qu'ils soient autoadjoints ; notons que nous avons $f \mapsto (\hbar/i)f'$ au lieu de $f \mapsto if'$, notre choix étant dicté par l'usage de la mécanique quantique. Un calcul simple donne que si f est dérivable

$$(QP)f(x) = \frac{\hbar}{i}xf'(x)\,, \quad (PQ)f(x) = \frac{\hbar}{i}\left\{xf'(x) + f(x)\right\}$$

d'où

$$[Q\,,\, P]f(x) = -\frac{\hbar}{i}f(x) = \hbar i f(x)$$

ce que l'on écrit comme $[Q\,,\, P] = i\hbar I$ ou, plus exactement,

$$[Q\,,\, P] \subset i\hbar I$$

où $I = \mathrm{id}_E$. En utilisant (5.89), on a

$$\delta_f(Q)\,\delta_f(P) \geqslant \frac{1}{2}\hbar\,. \quad (5.90)$$

L'opérateur Q s'appelle l'opérateur de *position*, P s'appelle l'opérateur de *quantité de mouvement* (en anglais, *momentum operator*). On interprète (5.90) souvent en disant que, dans un état quelconque f, on ne peut pas observer simultanément la position ou la quantité de mouvement avec précision absolue ; $\hbar/2$

est une mesure d'incertitude associée inévitablement avec toute observation concernant l'observation *simultanée* de Q et de P ; si $\delta_f(Q) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), alors $\delta_f(P) > \hbar/2\varepsilon$. Ici, on interprète $\delta_f(T)$ comme une mesure de dispersion des valeurs de l'observable T dans l'état f. Une inégalité de type (5.90) a été avancée par Heisenberg en 1927 sur la base des considérations physiques. Pour nous, (5.89) et (5.90) sont des conséquences mathématiques découlant du formalisme de la mécanique quantique ; la démonstration donnée pour (5.87) est due à von Neumann (1932). Elle montre qu'une *relation d'incertitude est inhérente à toute considération d'observables non permutables*. La non-commutativité des observables est une des caractéristiques saillantes de la mécanique quantique ; elle n'existe pas dans la mécanique classique. Cette non-commutativité est liée à des questions d'*observabilité simultanée* de certaines grandeurs que nous ne discuterons pas ici.

5.10.5 Equation de Schrödinger

Supposons que f_t est l'état du système à temps $t \in \mathbb{R}$. Un des principes de la mécanique quantique entraîne que

$$f_t = U_t f_0\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.91}$$

où $\{U_t\}$ est une famille d'opérateurs unitaires telle que

$$U_s U_t = U_{s+t}\,, \quad s, t \in \mathbb{R} \tag{5.92}$$

avec $U_0 = I$. En supposant que $t \mapsto U_t f$ est continue pour tout f dans l'espace hilbertien séparable E, on démontre que

$$Hf = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (U_t - I) f$$

existe pour $f \in \mathcal{D} \subset E$, où $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel dense de E et H est un opérateur autoadjoint de domaine $\mathcal{D}$; H s'appelle l'*opérateur hamiltonien* du système ; H détermine la dynamique du système.

En utilisant le calcul fonctionnel des opérateurs autoadjoints (§ 5.9.6), on obtient

$$U_t = \mathrm{e}^{-itH}\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.93}$$

et

$$f_t = \mathrm{e}^{-itH} f_0\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.94}$$

avec

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = -iH f_t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{5.95}$$

L'équation (5.95) est la forme abstraite de l'équation de Schrödinger ; elle est équivalente à (5.94) ou à (5.91) et (5.92) dans le sens que les solutions de (5.95) sont données par (5.94) ou par (5.91) et (5.92). Une solution de (5.95), $t \mapsto f_t$, est déterminée par (5.94) dès que l'on a fixée la *condition initiale* f_0.

Si le système physique consiste en une particule quantique de masse $m > 0$ (par exemple, un électron) dans un espace euclidien de dimension 1, alors on prend $E = L^2(\mathbb{R})$ et

$$Hf(x) = \frac{-\hbar}{2m} f''(x) + \frac{V(x)}{\hbar} f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.96}$$

où V est le champ potentiel régissant le mouvement. Le choix de H dans (5.96) est suggéré par une considération que nous commenterons dans le paragraphe 5.10.6. Pour un système formé d'une particule de masse $m > 0$ dans $\mathbb{R}^3$, on prend $E = L^2(\mathbb{R}^3)$ et

$$Hf(x) = -\frac{\hbar}{2m} \triangle f(x) + \frac{V(x)}{\hbar} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{5.97}$$

où V est une fonction réelle appropriée. L'équation (5.95) devient alors une équation aux dérivées partielles de la forme

$$i\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \triangle f(t,x) + \frac{V(x)}{\hbar} f(t,x)$$

$\triangle$ opérant sur la variable x de $f(t,x)$, $\triangle$ étant l'opérateur laplacien

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

La fonction V doit être telle que l'opérateur différentiel (5.97) soit autoadjoint dans un domaine approprié. Nous ne discutons pas ici cette question importante. Pour la plupart des problèmes physiques importants, on a des règles bien établies pour associer un espace hilbertien E et un opérateur hamiltonien H correspondant ; le problème mathématique devient alors celui de l'étude du spectre de H et des solutions de (5.95).

5.10.6 Commentaires

La constante $\hbar$ est égale à $h/2\pi$ où h est la constante de Planck, introduite par ce dernier durant les années 1900-1901, qui a des dimensions de

$$\text{masse} \times (\text{longueur})^2/\text{temps}$$

($h \sim 6,625 \times 10^{-34}$ joule sec dans les unités M.K.S.A.). C'est une constante naturelle à même titre que c, la vitesse de la lumière dans le vide, ou m_0, la masse d'un électron en repos, ou encore, $|e|$, la valeur absolue de la charge d'un électron, etc. En prenant $\hbar = 1$, on choisit une nouvelle unité de masse qui est très commode pour le développement théorique de la mécanique quantique. Pour écrire une équation de Schrödinger concernant une particule de masse m dans $\mathbb{R}^3$ (en unité M.K.S.A. par exemple), le procédé de « quantification » utilisé couramment est le suivant :

(i) écrire l'énergie « classique » de la particule dans les coordonnées rectangulaires $x = (x_1, x_2, x_3)$ et les quantités de mouvement p_1, p_2, p_3 ;

(ii) remplaçer les x_j par les opérateurs Q_j où $Q_j f(x) = x_j f(x)$ et les p_j par les opérateurs P_j où

$$P_j f(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) ;$$

(iii) diviser ensuite par $\hbar$ pour avoir l'opérateur H de (5.95).

Ainsi, l'énergie classique d'une particule de masse m dans un champ potentiel donné par $V(x)$ est

$$\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x) .$$

On vérifie aisément que le procédé indiqué donne l'opérateur H de (5.97).

Le formalisme de la mécanique quantique décrit ici paraît certainement comme quelque chose d'artificiel, en tous cas, dans une première lecture. En fait, les reflexions mathématiques depuis 1930, ont pu démontrer qu'une grande partie de ce formalisme se déduit d'un petit nombre de principes assez acceptables. Le monde ainsi construit n'est certes pas celui auquel nous sommes habitués par la physique classique mais le formalisme ainsi obtenu donne des résultats d'une rare précision (à l'intérieur de son domaine d'applicabilité). Le petit ouvrage de George W. Mackey, (*The mathematical foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, 1963) présente une discussion d'une clarté admirable. Néanmoins, les interprétations pratiques et les limites d'applicabilité de la mécanique quantique restent toujours un sujet de controverse et de débat. Par contre, pour apprécier les applications les plus remarquables à la science quotidienne (en l'occurence, la chimie), nous recommendons le livre de L. Pauling et E. B. Wilson (*Introduction to Quantum Mechanics*, sous-titre : « with applications to chemistry », McGraw-Hill, London, 1935) ; dans ce livre, les auteurs prennent l'équation de Schrödinger elle-même comme le point de départ axiomatique et en déduisent des résultats. Une précision sur la terminologie : dans les applications de la mécanique quantique, l'espace hilbertien est souvent (mais pas toujours) $L^2(\mathbb{R}^N)$; un élément $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ s'appelle alors une « fonction d'onde » et un état est alors une fonction d'onde de norme 1.

5.11 REMARQUES

5.11.1 Remarques historiques

Ces remarques prolongent celles données dans le paragraphe 3.8.2 où nous avons situé le développement de l'analyse fonctionnelle du début du XX^e siècle comme un épanouissement naturel de l'analyse de Fourier et de ses successeurs.

Les travaux de Hilbert auxquels nous nous sommes référés dans le paragraphe 3.8.2 sont à l'origine de l'immense théorie spectrale dont nous avons donné quelques aperçus dans ce chapitre. Il est intéressant de remarquer que tous les outils qui sont nécessaires pour un développement rigoureux de la mécanique quantique (dite *moderne*) dès 1925 sont en gestation dans les travaux de Hilbert et ses successeurs des années 1900 à 1910. Hilbert indroduit le terme « spectre » d'un opérateur borné en analogie avec le spectre lumineux mais à cette époque on ne savait pas que le spectre d'un opérateur autoadjoint correspondrait exactement aux spectres d'émission et d'absorption des atomes. En effet, après les succès initiaux de « l'hypothèse quantique » de Planck et d'Einstein, ce n'est seulement qu'en 1913 que N. Bohr introduit son modèle atomique (rappelons que c'est en 1911 que Rutherford découvre la « structure » d'un atome) qui permet d'expliquer les lignes spectrales de l'atome d'hydrogène, un pas considéré comme décisif pour les développements ultérieurs. Les historiens de la physique appellent la théorie quantique entre 1900 et 1920, la *théorie quantique ancienne* et ils associent les années 1920-1925 au déclin de cette dernière théorie. Les théories proposées par Heisenberg (1925), Schrödinger (1926) et d'autres mathématiciens (Born, Jordan, de Broglie, etc.) forment un départ radical pour toute la physique ; la mécanique quantique moderne (telle qu'elle est esquissée dans la section 5.10) est un résultat de l'alliance entre cette révolution de la théorie physique et l'analyse fonctionnelle développée par les mathématiciens. C'est le mérite de J. von Neumann d'avoir généralisé (en 1929) la théorie spectrale de Hilbert au cas des opérateurs autoadjoints non bornés et d'avoir donné une forme assez définitive à la structure mathématique de la mécanique quantique dans son livre (*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932, dont il existe des traductions en français et en anglais). Les théories quantiques successives ont continué à influencer le développement de l'analyse hilbertienne et, plus généralement, de toute l'analyse fonctionnelle.

5.11.2 Suggestions bibliographiques

Les suggestions faites dans le paragraphe 3.8.3 restent valables également pour ce chapitre. Un développement détaillé de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints généraux exige une bonne connaissance de la théorie de la mesure et de l'intégration (se reporter au chapitre 5 (vol.1) pour une introduction à cette théorie). Riesz et Nagy [19] donne une excellente introduction à la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints bornés et non bornés ; les quelques affirmations non démontrées dans les sections 5.9 et 5.10 sont démontrées dans cet ouvrage. Les volumes 1 et 2 de M. Reed et B. Simon (*Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, London, 1972-1975) présentent un grand nombre de théories (y incluses celles des opérateurs autoadjoints) en vue d'applications à la mécanique quantique.

CHAPITRE 6

Transformations de Fourier et de Laplace

Nous étudions d'abord les transformées de Fourier d'une fonction sommable $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$; nous généralisons ensuite cette notion à une certaine classe importante de distributions dans $\mathbb{R}^N$ (appelée : *distributions tempérées*), ce qui permet de définir et d'étudier la transformée de Fourier lorsque f est de carré intégrable. La théorie des transformées de Fourier de telles fonctions (dites dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$) est particulièrement simple et utile ; elle correspond à la théorie des séries de Fourier des fonctions périodiques, localement de carré intégrable. Ensuite, nous étudions les transformées de Laplace des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$; ces transformées jouent un rôle considérable dans des applications très variées. On généralise aussi leur théorie aux distributions et on indique leur application à la solution des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants. Les exercices sont concentrés dans les sections 6.6 et 6.12.

6.1 TRANSFORMATION DE FOURIER

6.1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable (en symboles : $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$). La ***transformée de Fourier*** de f, notée $\widehat{f}$, sera définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp(-ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x\,, \tag{6.1}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_N\xi_N$, $x, \xi \in \mathbb{R}^N$. Ainsi, la *transformation de Fourier* fait correspondre une fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ à chaque fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; dans la suite, nous généraliserons cette définition aux fonctions $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ et plus généralement aux distributions tempérées (définies ci-après).

Certains auteurs définissent $\widehat{f}$ un peu différemment et il n'y a pas d'usage universellement accepté ; parmi les variations souvent rencontrées, notons les suivantes :

$$(2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp(-ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x\,, \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp(-2\pi ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp(ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x\,.$$

6.1.2 Conventions

Nous supposerons que les intégrales considérées existent au sens de la théorie de l'intégration de Lebesgue (vol. 1, chap. 5) ; ainsi, dire $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est intégrable entraîne que

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x_1, \ldots, x_N)|\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N < \infty\,;$$

de plus,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\mathrm{d}x + i\int_{\mathbb{R}^N} v(x)\,\mathrm{d}x$$

où $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$; l'intégrabilité de f équivaut à celle des fonctions u, v. Rappelons qu'une fonction φ, définie seulement presque partout dans $\mathbb{R}^N$, définit une fonction f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ si en posant $f(x) = 0$ lorsque $\varphi(x)$ n'est pas définie et $f(x) = \varphi(x)$ lorsque $\varphi(x)$ est défini, on obtient une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ qui est intégrable. La plupart des fonctions que nous rencontrerons concrètement seront définies partout sauf à un nombre au plus dénombrable de points et souvent elles seront continues partout à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable. Donc les subtilités de la notion de mesurabilité ne jouent aucun rôle dans les calculs concrets que nous visons ; par contre, la théorie précise deviendrait trop encombrante si nous ne nous plaçons pas dans l'ambiance générale de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Deux fonctions $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ seront considérées comme *égales* si $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N$; nous écrivons ceci généralement comme $f = g$ p.p. ; en écrivant $f = g$, nous voulons affirmer que $f(x) = g(x)$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire f, g sont identiques.

Nous utiliserons les notations habituelles de la dérivation des fonctions de plusieurs variables (vol. 1, chap. 3). Ainsi, si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, on écrit $\mathrm{D}_j f(a)$ pour la dérivée partielle de f par rapport à x_j calculée au point a ; si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, alors

$$\mathrm{D}^\alpha f(a) = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathrm{D}_N^{\alpha_N} f(a)$$

où $\mathrm{D}_j^{\alpha_j}$ signifie dérivation α_j fois par rapport à la variable x_j ; si $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, alors $\mathrm{D}^\alpha f(a)$ est bien définie si f est de classe C^n avec $|\alpha| \leqslant n$; aussi $\mathrm{D}^\alpha f = \mathrm{D}^\alpha u + i\,\mathrm{D}^\alpha v$ ou $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$; α s'appelle un *multi-indice*.

Si $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, il est commode de poser

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}\,.$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, nous posons

$$|x| = \max\bigl(|x_1|, \ldots, |x_N|\bigr)\,.$$

Rappelons que

$$|x| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{N}\,|x|$$

où $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \iff \int_{\mathbb{R}^N} \|x\|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

dès que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est une fonction borélienne (ou mesurable).

6.1.3 Propriétés principales de la transformation de Fourier

Dans ce paragraphe nous énumérons les propriétés importantes de $\widehat{f}$ lorsque $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; les démonstrations établissant la validité de ces propriétés seront données par la suite.

(1) Continuité et bornitude

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est uniformément continue et bornée ; on a

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,, \xi \in \mathbb{R}^N\,. \tag{6.2}$$

L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire.

(2) Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0\,.$$

(3) Formules de translation et de dilatation

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, posons $\tau_h f(x) = f(x + h)$ où $h \in \mathbb{R}^N$ et $\sigma_t f(x) = f(tx)$ où $t \in \mathbb{R}^*$; nous dirons que $\tau_h f$ est la fonction obtenue de f par la translation $x \mapsto x + h$, $x \in \mathbb{R}^N$, et $\sigma_t f$ est la fonction obtenue de f par la dilatation $x \mapsto tx$, $x \in \mathbb{R}^N$. *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors*

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \mathrm{e}^{ih\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ h \in \mathbb{R}^N \tag{6.3}$$

$$\widehat{e_h f}(\xi) = \tau_{-h}\widehat{f}(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ h \in \mathbb{R}^N \tag{6.4}$$

où $e_h(x) = \mathrm{e}^{ix\cdot h}$;

$$\widehat{\sigma_t f}(\xi) = |t|^{-N}\widehat{f}(t^{-1}\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ t \in \mathbb{R}^*\,. \tag{6.5}$$

De plus, $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(4) Formule d'inversion de Fourier
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est tel que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi \cdot x)\, \mathrm{d}\xi \tag{6.6}$$

p.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Si, de plus, f est continue, alors (6.6) est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. (On écrit (6.6) souvent comme suit : $f(x) = (2\pi)^{-N} \widehat{\widehat{f}}(-x)$.)

(5) Unicité
Si f, g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telles que $\widehat{f} = \widehat{g}$, alors $f = g$ p.p. On a $f = g$ si f, g sont continues.

(6) Convolution
Soient f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; posons

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, \mathrm{d}y\,. \tag{6.7}$$

Alors (6.7) définit un élément $f * g$ de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (appelé la ***convolution*** *de f et de g). On a $f * g = g * f$ p.p. avec*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{6.8}$$

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g} \quad \textit{(formule de convolution)}. \tag{6.9}$$

(7) Dérivabilité de $\widehat{f}$
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x| |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$$

alors $\widehat{f}$ est de classe C^1 et, pour $1 \leqslant j \leqslant N$, $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathrm{D}_j \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} (-ix_j) f(x) \exp(-ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x \tag{6.10}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^n |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

où n est un entier $\geqslant 1$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^n et les dérivées partielles de $\widehat{f}$ (d'ordre $\leqslant n$) se calculent en effectuant les opérations de dérivation à l'intérieur de l'intégrale (6.1) définissant $\widehat{f}(\xi)$: si $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ sont dans $\mathbb{R}^N$, alors

$$\mathrm{D}^\alpha \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha f(x) \exp(-ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x \tag{6.11}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leqslant n$ et $(-ix)^\alpha = (-i)^{|\alpha|} x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$.

(8) Transformées des dérivées

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. *Si* f *est de classe* C^1, $\mathrm{D}_j f$ *est intégrable (pour un* j, $1 \leqslant j \leqslant N$*) et* $f(x) \to 0$ *lorsque* $|x| \to \infty$, *alors, pour* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, *on a*

$$\widehat{\mathrm{D}_j f}(\xi) = (i\xi_j)\, \widehat{f}(\xi)\,. \tag{6.12}$$

Si f *est de classe* C^n, $\mathrm{D}^\alpha f$ *est intégrable pour* $|\alpha| \leqslant n$ *(*$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$*) et* $f(x) \to 0$, $\mathrm{D}^\alpha f(x) \to 0$ *lorsque* $|x| \to \infty$, $|\alpha| \leqslant n$, *alors, pour* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, *on a*

$$\widehat{\mathrm{D}^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha\, \widehat{f}(\xi)\,. \tag{6.13}$$

où $(i\xi)^\alpha = i^{|\alpha|}\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_N^{\alpha_N}$, $\quad |\alpha| \leqslant n$.

6.1.4 Remarques sur les propriétés énumérées ci-avant

Les propriétés (1) et (2) de $\widehat{f}$ montrent que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est une fonction continue bornée, s'annulant à l'infini ; elle est même de classe C^n si f vérifie une condition supplémentaire (donnée dans (7)). Néanmoins, $\widehat{f}$ n'est pas intégrable en général comme on le constatera dans les exemples qui suivent ; ainsi, l'hypothèse de l'intégrabilité de $\widehat{f}$ dans (4) est essentielle.

La propriété d'unicité (5) est une conséquence immédiate de la formule d'inversion (4). En effet, si $h = f - g$, alors $\widehat{h} = 0$ si $\widehat{f} = \widehat{g}$ d'où $h = 0$ p.p. d'après la formule d'inversion.

Les formules de (3) sont très faciles à démontrer par un calcul direct utilisant de définition de $\widehat{f}(\xi)$ donnée par (6.1) ; nous les laissons en exercice ; elles seront souvent utiles.

Les propriétés (4), (6), (7) et (8) sont essentielles pour les calculs avec les transformées. La formule de convolution (6.9) montre, en particulier, que le produit de deux transformées est encore une transformée, celle qui correspond à la convolution de deux fonctions. Il est, en fait, assez difficile en général de savoir si une fonction donnée $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est la transformée d'une fonction intégrable. Les propriétés (1) et (2) fournissent des conditions nécessaires pour que g soit une transformée (c'est-à-dire $g = \widehat{f}$ pour un $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$) ; il faut que g soit continue, bornée avec $g(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. *Si, de plus,* g *est intégrable et* $\widehat{g}$ *est aussi intégrable, alors on conclut d'après la formule d'inversion (6.6) que* g *est la transformée de* f *où* $f(x) = (2\pi)^{-N}\widehat{g}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. En effet, $f = (2\pi)^{-N}\sigma_{-1}\widehat{g}$ d'où (avec (6.1) où l'on fait $t = -1$ et (6.6))

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N}\,\widehat{\widehat{g}}(-\xi) = g(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

La formule (6.13) concernant les transformées des dérivées joue un rôle central dans les applications de la transformation de Fourier aux équations différentielles. Elle est présentée ici sous des conditions très restrictives sur f ; en géné-

ralisant la transformation de Fourier aux objets plus généraux que les fonctions intégrables, on retrouve (6.13) dans un cadre plus utile pour les applications. Cette question sera reprise dans la suite.

6.1.5 Exemples

Sauf mention contraire, les exemples concernent $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (de sorte que $x, \xi \in \mathbb{R}$).

Exemple 1

Soit $f = 1_{[a,b]}$ où $-\infty < a < b < \infty$. Un calcul simple montre que

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{i}{\xi}(\mathrm{e}^{-ib\xi} - \mathrm{e}^{-ia\xi}) & \text{si } \xi \in \mathbb{R}^* \\ (b-a) & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \tag{6.14}$$

Si $b = c$, $a = -c$, $c > 0$, alors (6.14) devient

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2}{\xi}\sin(c\xi) & \text{si } \xi \in \mathbb{R}^* \\ 2c & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \tag{6.15}$$

Notons que $\widehat{f}$ de (6.15) n'est pas intégrable car si $c \neq 0$ (vol. 1, § 5.2.15, Ex. 21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(c\xi)}{\xi} \right| \mathrm{d}\xi = \infty \, ;$$

on sait d'après l'exercice 3 (vol. 1, § 5.3.5) ou du paragraphe 4.3.4 (vol. 2) que, si $c > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\sin c\xi}{\xi} \, \mathrm{d}\xi = 2 \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \pi \, .$$

Evidemment, $\widehat{f}$ dans (6.14) ou (6.15) est continue et bornée avec $\widehat{f}(\xi) \to 0$ lorsque $|\xi| \to \infty$ comme prévu par les propriétés (1) et (2) du paragraphe 6.1.3. Observons que $\widehat{f}$ est réelle dans (6.15). On démontre sans peine que, plus généralement, *si* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *est intégrable et paire* ($f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$), *alors* $\widehat{f}(\xi)$ *est réel pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^N$; il suffit d'utiliser la propriété 6.1.3(3) dans ce cas pour déduire que $\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(\xi)$ (cf. Ex. 3, sect. 6.6).

Exemple 2

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a} & \text{si } |x| \leqslant a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

où $a > 0$. Un calcul simple montre que

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2(1-\cos a\xi)}{a\xi^2} = \dfrac{4\sin^2 a\xi/2}{a\xi^2} & \text{si } \xi \neq 0 \\ a & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \tag{6.16}$$

En effet, si $\xi \neq 0$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos(x\xi)\, \mathrm{d}x = 2\int_0^a \frac{\sin x\xi}{a\xi}\, \mathrm{d}x$$

après une intégration par parties, ce qui donne (6.16). Si $g = (1/a)f$, on aura

$$\widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin a\xi/2)}{a\xi/2}\right)^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^*$$

d'où en utilisant (6.15) et la propriété 6.1.3(6), on obtient que $g = h * h$ où $h = (1/a)1_{[-a/2,\, a/2]}$. On peut vérifier aussi par un calcul direct que $g(x) = (h*h)(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Notons que $\widehat{f}$ de (6.16) est intégrable ; en utilisant la formule d'inversion (§ 6.1.3(4)), on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1-\cos a\xi)}{a\xi^2}\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi = f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a} & \text{si } |x| \leqslant a \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases} \tag{6.17}$$

On peut aussi démontrer (6.17) par un calcul direct.

Exemple 3

Soit $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Un calcul simple montre que

$$\widehat{f_\alpha}(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\, \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+i\xi)x}\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\alpha-i\xi)x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha+i\xi} + \frac{1}{\alpha-i\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}\,; \end{aligned}$$

par exemple,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+i\xi)x}\, \mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+i\xi)x}}{-(\alpha+i\xi)}\bigg|_{x=0}^{x=T} = \frac{1}{\alpha+i\xi}$$

étant donné que $\lim_{T\to\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+i\xi)T} = 0$.

Notons que $\widehat{f_\alpha}$ est indéfiniment dérivable, comme annoncé par la propriété 6.1.3(7) ; de plus, $\widehat{f_\alpha}$ est intégrable, ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.19}$$

d'après la formule d'inversion (prop. 6.1.3(4)). On peut démontrer aussi (6.19) directement en utilisant le calcul des résidus (vol. 2, § 4.3.3).

Exemple 4

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Une formule importante (vue dans le volume 2, § 4.3.5 ou § 6.3.4) donne

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Une méthode rapide est de calculer

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}x$$

lorsque $s \in \mathbb{R}$ et d'observer que $\widehat{f}(\xi) = F(-i\xi)$, le raisonnement étant complété par la remarque que F est une fonction entière (vol. 2, § 6.3.4). Puisque, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \left\{ \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} \right\} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{s^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{s^2/4},$$

on obtient $F(-i\xi) = \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/4}$.

Posons $g_\alpha(x) = f(\alpha x) = \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2}$, $\alpha > 0$; de (6.5), on obtient

$$\widehat{g}_\alpha(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/4\alpha^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{6.20}$$

car $\widehat{g}_\alpha(\xi) = \alpha^{-1}\widehat{f}(\alpha^{-1}\xi)$.

Lorsque $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, nous posons, pour $\alpha > 0$,

$$G_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{N} g_\alpha(x_j) = \exp\left(-\alpha^2 \|x\|^2\right). \tag{6.21}$$

Alors

$$\widehat{G}_\alpha(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\,\|\xi\|^2\right) \tag{6.22}$$

où $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$. En effet, il est évident, d'après le théorème de Fubini, que

$$\widehat{G}_\alpha(\xi) = \prod_{j=1}^{N} \widehat{g}_\alpha(\xi_j) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^N \prod_{j=1}^{N} \exp\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\,\xi_j^2\right)$$

ce qui donne (6.22). L'applicabilité de la formule d'inversion est évidente ici, mais celle-ci ne donne pas une formule intégrale fondamentalement différente de celles contenues dans (6.20) ou (6.22). Nous appellerons G_α le *noyau de Gauss* de paramètre $\alpha > 0$. Notons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{G}_\alpha(0) = \frac{\pi^{N/2}}{\alpha^N}$$

d'où

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(\frac{-\|p\|^2}{2\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}p = 1\,,\quad \varepsilon > 0\,.$$

Ce dernier résultat est également immédiat en partant de la formule connue $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

REMARQUE. Il existe des tables étendues donnant des transformées de Fourier $\widehat{f}$ pour des fonctions f très variées. Une référence classique est *Tables of integral transforms* (2 vols, Ed. A. Erdélyi, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1954).

6.2 DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES

6.2.1 Préliminaires

Dans cette section nous fournissons les démonstrations des propriétés énumérées dans le paragraphe 6.1.3. Les démonstrations exigent la connaissance de différentes propriétés de l'intégrale de Lebesgue (vol. 1, chap. 5). Notons en particulier celle-ci : si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ($g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, indéfiniment dérivable à support compact, c'est-à-dire il existe $T > 0$ tel que $g(x) = 0$ si $|x| \geqslant T$) tel que

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

C'est la proposition 5.11.5 (vol. 1) lorsque f est réelle ; le cas où f est complexe est une conséquence immédiate (en considérant $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$).

6.2.2 Continuité et bornitude de $\widehat{f}$

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Si $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-ix\cdot\xi) f(x)\left\{1 - \exp\big(-ix\cdot(\eta-\xi)\big)\right\}\mathrm{d}x$$

d'où

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant \varphi(\eta - \xi)$$

avec

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)||1 - \exp(-ix\cdot\theta)|\,\mathrm{d}x\,,\quad \theta \in \mathbb{R}^N\,.$$

Puisque $\lim_{\theta\to 0}|f(x)||1-\exp(-ix\cdot\theta)| = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|f(x)||1 - \exp(-ix\cdot\theta)| \leqslant 2|f(x)|\,,\quad x \in \mathbb{R}^N\,;$$

on conclut du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{\theta \to 0} \varphi(\theta) = 0 .$$

Donc si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi(\theta) < \varepsilon$ dès que $|\theta| < \delta$, d'où

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leqslant \varphi(\eta - \xi) < \varepsilon$$

dès que $|\eta - \xi| < \delta$; ceci établit la continuité uniforme de $\widehat{f}$ dans $\mathbb{R}^N$. La linéarité de $f \mapsto \widehat{f}$ et le fait que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1 , \quad \xi \in \mathbb{R}^N ,$$

sont immédiats.

6.2.3 Lemme de Riemann–Lebesgue

Soit $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $g(x) = 0$ si $|x| \geqslant T$. Alors, pour $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{g}(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} g(x_1, \ldots, x_N) \exp\left(-i \sum_{j=1}^{N} x_j \xi_j \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N .$$

Une intégration par parties montre que si $\xi_N \neq 0$, alors

$$\int_{-T}^{T} g(x_1, \ldots, x_N)\, \mathrm{e}^{-ix_N\xi_N}\, \mathrm{d}x_N = \int_{-T}^{T} \mathrm{D}_N\, g(x_1, \ldots, x_N) \frac{\mathrm{e}^{-ix_N\xi_N}}{-i\xi_N}\, \mathrm{d}x_N \tag{6.23}$$

car $g(x_1, \ldots, \pm T) = 0$. Du théorème de Fubini on obtient que, si $\xi_1, \ldots, \xi_N \neq 0$,

$$\widehat{g}(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \frac{1}{(-i)^N \xi_1 \cdots \xi_N} \times \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \mathrm{D}_1 \cdots \mathrm{D}_N\, g(x_1, \ldots, x_N)\, \mathrm{e}^{-i \sum_{j=1}^{N} x_j \xi_j}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N$$

en utilisant un calcul du type (6.23) sur les N intégrales itérées définissant $\widehat{g}$; on en conclut que

$$|\widehat{g}(\xi_1, \ldots, \xi_N)| \leqslant \frac{1}{|\xi_1 \cdots \xi_N|} \|\mathrm{D}_1 \cdots \mathrm{D}_N\, g\|_1 \xrightarrow{|\xi| \to \infty} 0 .$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; pour $\varepsilon > 0$, soit $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Puisque

$$(f-g)^{\wedge}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)\,,$$

on a

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \leqslant \|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,,$$

au vu de (6.2). A l'aide de ce qui précède sur g, il existe $R > 0$ tel que $|\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$ dès que $|\xi| > R$; alors

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $|\xi| > R$. Ceci montre que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

6.2.4 Dérivabilité de $\widehat{f}$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; si $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_N = (0, \ldots, 0, 1)$ sont les N vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}^*$, alors, pour $j = 1, \ldots, N$, on a

$$\frac{1}{t}\left\{\widehat{f}(\xi + te_j) - \widehat{f}(\xi)\right\} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\frac{1}{t}\left\{\mathrm{e}^{-ix\cdot(\xi+te_j)} - \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\right\}\mathrm{d}x\,. \tag{6.24}$$

Notons que si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\left|\frac{1}{t}\left\{\mathrm{e}^{-ix\cdot(\xi+te_j)} - \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\right\}\right| = \left|\frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-itx_j} - 1\right)\right| \leqslant |x_j|$$

en utilisant l'inégalité $|\mathrm{e}^{-ih} - 1| \leqslant |h|$, pour $h \in \mathbb{R}$ (qui vient de la relation $\mathrm{e}^{ih} - 1 = \int_0^h i\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x$). Si $\int_{\mathbb{R}^N} |x_j||f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, alors on peut utiliser le théorème de convergence dominée dans (6.24), ce qui donne

$$\mathrm{D}_j\widehat{f}(\xi) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\widehat{f}(\xi + te_j) - \widehat{f}(\xi)\right\} = \int_{\mathbb{R}^N} -ix_j f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

car

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\mathrm{e}^{-ix\cdot(\xi+te_j)} - \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\right\} = -ix_j\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,.$$

Ceci démontre (6.10). La démonstration de (6.11) est similaire ; elle résulte de (6.10) par récurrence sur $n = |\alpha|$.

6.2.5 Transformée des dérivées

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Nous supposons que f est de classe C^1, $\mathrm{D}_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour un j, $1 \leqslant j \leqslant N$, et que $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. Si $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{\mathrm{D}_j f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}_j f(x_1, \ldots, x_N) \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-ix_k\xi_k} \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \,. \tag{6.25}$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_N)$, écrivons $x = (x'; x_j)$ où $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, x' étant formé des x_i avec $i \neq j$; puisque f et $\mathrm{D}_j f$ sont intégrables, on conclut du théorème de Fubini que

$$x_j \mapsto f(x'; x_j) \,, \quad x_j \mapsto \mathrm{D}_j f(x'; x_j)$$

sont intégrables pour p.p. $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Pour x' fixe tel que $x_j \mapsto f(x'; x_j)$, $x_j \mapsto \mathrm{D}_j f(x'; x_j)$ sont intégrables, on obtient, en faisant une intégration par parties, que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}_j f(x'; x_j) \, \mathrm{e}^{-ix_j\xi_j} \, \mathrm{d}x_j &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \mathrm{D}_j f(x'; x_j) \, \mathrm{e}^{-ix_j\xi_j} \, \mathrm{d}x_j \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x'; x_j)(i\xi_j) \, \mathrm{e}^{-ix_j\xi_j} \, \mathrm{d}x_j \qquad (6.26) \\ &= i\xi_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x'; x_j) \, \mathrm{e}^{-ix_j\xi_j} \, \mathrm{d}x_j \,, \end{aligned}$$

étant donné que

$$\lim_{T\to\infty} f(x_1, \ldots, \pm T, \ldots, x_N) = \lim_{T\to\infty} f(x'; \pm T) = 0 \,.$$

En utilisant (6.26) pour le calcul de l'intégrale dans (6.25), on obtient

$$\widehat{\mathrm{D}_j f}(\xi) = i\xi_j \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_N) \, \mathrm{e}^{-i\sum_{k=1}^{N} x_k\xi_k} \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N$$

ce qui est (6.12). Pour le calcul de l'intégrale dans (6.25), on a utilisé le théorème de Fubini qui permet de calculer cette intégrale par N intégrations successives, en commençant ici par l'intégrale par rapport à x_j.

La formule (6.13) se déduit de (6.12) par récurrence.

REMARQUE. Si $N = 1$, l'hypothèse que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, f de classe C^1 et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entraîne déjà que $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$; nous laissons la démonstration de cette affirmation comme exercice. Par contre, si $N \geqslant 2$, $f(x)$ ne tend pas nécessairement vers 0 lorsque $|x| \to \infty$ même si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, f de classe C^1 et $\mathrm{D}_1 f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, soit

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1 - x_2)\psi(x_2) \,, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

avec φ, ψ fonctions continûment dérivables dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi(0) \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

mais $\psi(t) \not\to 0$ lorsque $|t| \to \infty$. On vérifie aisément que f et $\mathrm{D}_1 f$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et que f est de classe C^1 mais que

$$f(t,t) = \varphi(0)\psi(t) \not\to 0$$

lorsque $|t| \to \infty$. Néanmoins, la formule (6.12) reste valable sous la seule hypothèse que f soit de classe C^1 avec f, $\mathrm{D}_j f$ intégrables (pour un j fixe) ; de même, (6.13) reste valable dès que f est de classe C^n et $\mathrm{D}^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $|\alpha| \leqslant n$. Mais les démonstrations de ces affirmations pour $N \geqslant 2$ exigent un raisonnement différent de celui donné ci-dessus ; nous le verrons dans la suite.

6.2.6 Convolutions

Soient f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; alors, en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty\,, \tag{6.27}$$

car, pour y fixe dans $\mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\,.$$

On conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y < \infty$$

p.p. $x \in \mathbb{R}^N$ de sorte que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y$$

est bien défini pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$. De plus, (6.27) entraîne que

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$$

ce qui est (6.8). De plus,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x) \exp(-ix \cdot \xi)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-iy\cdot\xi} g(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,\mathrm{e}^{-i(x-y)\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

ce qui donne (6.9) où l'on a utilisé à nouveau le théorème de Fubini et le fait que, pour $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,\mathrm{e}^{-i(x-y)\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi)\,.$$

Pour la suite, on aura besoin du lemme qui suit.

6.2.7 Lemme

Si f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et $x \in \mathbb{R}^N$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\,\widehat{g}(\xi-x)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{6.28}$$

DÉMONSTRATION

On a, grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} g(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi\cdot x}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,\mathrm{e}^{-iy\cdot\xi}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\left\{\int_{\mathbb{R}^N} g(\xi)\,\mathrm{e}^{-i\xi\cdot(y-x)}\,\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,\widehat{g}(y-x)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

ce qui prouve (6.28). ♦

6.2.8 Formule d'inversion de Fourier

Pour la démonstration de cette formule (prop. 6.1.3(4)), nous aurons besoin des propriétés suivantes de l'intégrale de Lebesgue.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; posons, pour $p \in \mathbb{R}^N$,

$$\alpha_f(p) = \int_{\mathbb{R}^N} \bigl|f(x+p) - f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x\,.$$

Alors $0 \leqslant \alpha_f(p) \leqslant 2\|f\|_1$ et $\lim_{p\to 0} \alpha_f(p) = 0$.

En effet, les inégalités concernant $\alpha_f(p)$ sont immédiates ; l'affirmation concernant la limite lorsque $p \to 0$ est élémentaire lorsque $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le cas général s'établit par l'approximation de f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ par un $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, comme indiqué dans le paragraphe 6.2.1 (se reporter au volume 1, § 5.11.3). En fait, $p \mapsto \alpha_f(p)$ est continue.

(b) Soient f, $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$; si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \, dx = 0 ,$$

alors il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} f_{\varepsilon_n}(x) = f(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N .$$

La démonstration de cette affirmation se fait comme la preuve de la complétude de $L^2(X)$ dans le paragraphe 3.2.4. Le seul usage de (b) que nous ferons sera dans la déduction de la propriété (c) suivante ; formellement, cette propriété est évidente mais sa démonstration exige un raisonnement un peu subtil.

(c) Soient f, $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$; si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \, dx = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = g(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N ,$$

alors $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N$.

On voit que (c) est une conséquence immédiate de (b).

On peut éviter l'usage des propriétés (a) et (b) si l'on suppose que non seulement f, $\widehat{f}$ sont intégrables mais qu'en plus f est continue (se reporter à la remarque (ii) à la fin de la démonstration suivante). L'hypothèse de la continuité de f n'est pas très contraignante car, après coup, on constate que si f, $\widehat{f}$ sont intégrables, alors f est forcément continue p.p. Curieusement, pour s'assurer de cette dernière conclusion, on doit faire un détour via les propriétés (a) et (b). Une autre démonstration de la formule d'inversion peut être donnée en utilisant les distributions tempérées (§ 6.4.10) ; mais cette démonstration aussi exige quelques considérations plus ou moins subtiles concernant les intégrales de Lebesgue.

Une version plus élémentaire de la formule d'inversion de Fourier dans $\mathbb{R}^N$ est donnée dans la section 6.5.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE D'INVERSION

Posons

$$\varphi_\varepsilon(x) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \|x\|^2\right) , \quad x \in \mathbb{R}^N , \ \varepsilon > 0 .$$

De (6.21) et (6.22), on a

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\varepsilon^N} \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2\varepsilon^2}\right) , \quad \xi \in \mathbb{R}^N .$$

Ecrivons, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$,

$$I_\varepsilon(f,x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\varphi_\varepsilon(\xi)\, \mathrm{e}^{i\xi\cdot x}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Supposons que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; puisque, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\varphi_\varepsilon(\xi) \to 1$ lorsque $\varepsilon \to 0$, on a du théorème de convergence dominée que, pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(f,x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{i\xi\cdot x}\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{6.29}$$

D'autre part, de (6.28), on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(f,x) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\widehat{\varphi}_\varepsilon(\xi - x)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) \exp\left(-\frac{\|\xi - x\|^2}{2\varepsilon^2}\right) \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x+p) \exp\left(-\frac{\|p\|^2}{2\varepsilon^2}\right) \mathrm{d}p\,. \end{aligned}$$

Puisque (exemple 4, § 6.1.5)

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{\|p\|^2}{2\varepsilon^2}\right) \mathrm{d}p = 1\,,$$

on obtient

$$I_\varepsilon(f,x) - f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \{f(x+p) - f(x)\} \exp\left(-\frac{\|p\|^2}{2\varepsilon^2}\right) \mathrm{d}p$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} |I_\varepsilon(f,x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_f(p) \exp\left(-\frac{\|p\|^2}{2\varepsilon^2}\right) \mathrm{d}p = J_\varepsilon$$

où $\alpha_f(p)$ est défini dans (a). Notons que

$$J_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_f(\varepsilon q) \exp\left(-\|q\|^2\right) \mathrm{d}q$$

(en posant $p = \varepsilon q$) ; puisque $\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_f(\varepsilon q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{R}^N$ et α_f est majoré par une constante (propriété (a)), on conclut du théorème de convergence dominée que $J_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |I_\varepsilon(f,x) - f(x)|\, \mathrm{d}x = 0\,. \tag{6.30}$$

A partir de la proposition (b), on conclut à l'aide de (6.30) qu'il existe $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} I_{\varepsilon_n}(f,x) = f(x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N . \tag{6.31}$$

Au vu de (6.29), on obtient

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi \cdot x)\, \mathrm{d}\xi \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N . \tag{6.32}$$

(On aurait pu déduire (6.32) directement à partir de (6.29) et de la propriété (c).) Ceci établit la formule d'inversion. Si de plus f est continue, (6.32) sera vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^N$; en effet, posons

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi \cdot x)\, \mathrm{d}\xi \ ;$$

alors on sait que g est continue et $g(x) = f(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N$; f étant aussi continue, $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ car

$$E = \{x \in \mathbb{R}^N : g(x) \neq f(x)\}$$

est ouvert dans $\mathbb{R}^N$ et de mesure de Lebesgue nulle d'où $E = \emptyset$. ♦

Remarques

(i) On voit que si f et $\widehat{f}$ sont intégrables dans $\mathbb{R}^N$, alors $f = g$ p.p. où g est la fonction continue définie ci-dessus : $g(x) = (2\pi)^N \widehat{\widehat{f}}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

(ii) Si f est supposée continue dès le départ (en plus de l'hypothèse que f et $\widehat{f}$ sont intégrables), alors on peut démontrer, de manière élémentaire et directe (c'est-à-dire sans utiliser les propriétés (a) et (b) de l'intégrale de Lebesgue) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(f,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N , \tag{6.33}$$

ce qui est plus précis que (6.31) et qui démontre très simplement la formule d'inversion dans ce cas. Pour établir (6.33), on écrit

$$\left|I_\varepsilon(f,x) - f(x)\right| \leqslant T_1 + T_2$$

où

$$T_1 = \int_{B_\delta} \left|f(x+p) - f(x)\right| \psi_\varepsilon(p)\, \mathrm{d}p$$

$$T_2 = \int_{B_\delta^c} \left|f(x+p) - f(x)\right| \psi_\varepsilon(p)\, \mathrm{d}p$$

$$\psi_\varepsilon(p) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\varepsilon^N} \exp\left(-\frac{\|p\|^2}{2\varepsilon^2}\right), \quad B_\delta = \{p \in \mathbb{R}^N : \|p\| < \delta\} .$$

Si $\eta > 0$ est donné et $x \in \mathbb{R}^N$ est fixé, on peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$\left|f(x+p) - f(x)\right| < \frac{1}{2}\eta$$

pour $p \in B_\delta$, ce qui est possible à cause de la continuité de f en x ; alors $T_1 < \eta/2$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour ce choix de δ, on a

$$T_2 \leqslant M(\varepsilon)\left\|f\right\|_1 + \left|f(x)\right| \int_{B_\delta^c} \psi_\varepsilon(p)\,\mathrm{d}p$$

où

$$M(\varepsilon) = \sup_{p \in B_\delta^c} \psi_\varepsilon(p)\,.$$

Pour δ fixe, $M(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$; de plus, en posant $(1/\varepsilon)p = q$, on a

$$\int_{B_\delta^c} \psi_\varepsilon(p)\,\mathrm{d}p = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\{q\,:\,\|q\| \geqslant \delta/\varepsilon\}} \mathrm{e}^{-\|q\|^2/2}\,\mathrm{d}q \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

ce qui montre que $T_2 < \eta/2$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$. Ainsi,

$$\left|I_\varepsilon(f,x) - f(x)\right| < \eta$$

si $\varepsilon < \varepsilon_0$, ce qui établit (6.33).

6.3 FORMULE DE STIRLING

6.3.1 Introduction

Nous démontrons dans cette section la formule de Stirling pour illustrer une des nombreuses applications de la formule d'inversion. La formule de Stirling dit que

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-n} n^{n+1/2}$$

quand n tend vers ∞ en parcourant les valeurs entières positives. Nous démontrerons, plus généralement, que

$$\Gamma(\alpha) \sim \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1/2} \tag{6.34}$$

lorsque $\alpha \to \infty$, α parcourant les nombres réels > 0. Rappelons que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x\,, \quad \alpha > 0$$

et que l'écriture $a(\alpha) \sim b(\alpha)$ $(\alpha \to \infty)$ signifie que $a(\alpha)/b(\alpha) \to 1$ lorsque $\alpha \to \infty$. Dans le volume 2, on a étudié la fonction $z \mapsto \Gamma(z)$ pour les valeurs

complexes de z et on a établi une généralisation de (6.34) pour α complexe. Puisque

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

on constate que la *formule asymptotique* (6.34) entraîne celle pour $n!$.

6.3.2 Démonstration de l'équation (6.34)

Soit

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

où $\alpha > 0$; posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$p_\alpha(x) = \sqrt{\alpha}\, f_\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha}\, x)\,, \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,.$$

Nous démontrons que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|p_\alpha(x) - p(x)\bigr| \xrightarrow{\alpha\to\infty} 0\,. \tag{6.35}$$

En prenant $x = 0$ dans (6.35), on a

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sqrt{\alpha}\, f_\alpha(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ce qui donne

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha)} = 1\,;$$

ceci établit (6.34).

Pour établir (6.35), nous calculons $\widehat{p}_\alpha$, $\widehat{p}$; on a, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{p}_\alpha(\xi) &= \exp\left\{ i\xi\sqrt{\alpha} - \alpha \ln\left(1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\} \\ \widehat{p}(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Le calcul de $\widehat{p}$ est indiqué dans l'exemple 4 (§ 6.1.5) et nous allons calculer $\widehat{p}_\alpha(\xi)$. En admettant (6.36), on a de la formule d'inversion

$$p_\alpha(x) - p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{\widehat{p}_\alpha(\xi) - \widehat{p}(\xi)\}\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\,;$$

notons que

$$\bigl|\widehat{p}_\alpha(\xi)\bigr| = \exp\left\{ -\alpha \ln\left|1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right|\right\} = \left(1 + \frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{-\alpha/2}$$

ce qui montre que $\widehat{p}_\alpha$ est intégrable si $\alpha > 1$. Ainsi,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |p_\alpha(x) - p(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{p}_\alpha(\xi) - \widehat{p}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \,. \tag{6.37}$$

Démontrons que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \widehat{p}_\alpha(\xi) = \widehat{p}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \,. \tag{6.38}$$

Puisque, pour $\alpha \geqslant 2$,

$$|\widehat{p}_\alpha(\xi)| = \left(1 + \frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{-\alpha/2} \leqslant \left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right)^{-1} \,, \quad \xi \in \mathbb{R} \,,$$

on obtient la validité de (6.35) à l'aide de (6.37) et (6.38), en utilisant le théorème de convergence dominée. Pour établir (6.38) on observe que, si $|z| < 1$,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$$

d'où

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} R(z) \,, \quad |z| < 1$$

avec $\lim_{z\to 0} R(z) = 0$. Ecrivons

$$\widehat{p}_\alpha(\xi) = \exp \psi_\alpha(\xi) \,, \quad \psi_\alpha(\xi) = i\xi\sqrt{\alpha} - \alpha \ln\left(1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right) \,;$$

si $\sqrt{\alpha} > |\xi|$, alors

$$\psi_\alpha(\xi) = i\xi\sqrt{\alpha} - \alpha\left\{\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\xi^2}{2\alpha} - \frac{\xi^2}{2\alpha} R\left(\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\} = -\frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^2}{2} R\left(\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

d'où

$$\lim_{\alpha\to\infty} \psi_\alpha(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}$$

ce qui donne (6.38).

Il reste à établir (6.36). Ceci est une conséquence immédiate de la définition de $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x \,, \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \,;$$

pour $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, on a

$$\beta^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x \,. \tag{6.39}$$

(Se reporter au volume 2 ; on pose $\beta^{-z} = \exp(-z \ln\beta)$, $\ln\beta$ étant la détermination principale de $\log\beta$; pour $\beta > 0$, β réel, (6.39) provient d'un changement

de variable dans l'intégrale concernée ; pour β complexe, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, la validité de (6.39) vient du fait que les deux membres de (6.39) sont des fonctions holmorphes de β, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, qui sont égales sur la demi-droite $\beta > 0$.) Donc, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\alpha(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi}\sqrt{\alpha} f_\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha}\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi((y-\alpha)/\sqrt{\alpha})} f_\alpha(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\xi\sqrt{\alpha}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi y/\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-y} y^{\alpha-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\xi\sqrt{\alpha}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)y\right\} y^{\alpha-1}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{i\xi\sqrt{\alpha}}\left(1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha}\end{aligned}$$

d'après (6.39) ; ceci donne (6.36) et complète la démonstration de (6.34). ♦

6.3.3 Remarques

On comprend mieux la démonstration précédente en l'interprétant du point de vue de la théorie des probabilités. Pour ce faire, observons d'abord que les f_α définies dans le paragraphe 6.3.2 sont les *densités de probabilité* dans $\mathbb{R}$ dans le sens que $f_\alpha \geqslant 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha = 1$; de plus,

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}\,, \quad \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,. \tag{6.40}$$

En effet,

$$\widehat{f}_\alpha(\xi) = (1 + i\xi)^{-\alpha}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,\ \alpha > 0\,, \tag{6.41}$$

car, d'après (6.39), si $\xi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, on a

$$\widehat{f}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(i\xi+1)x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = (1 + i\xi)^{-\alpha}\,.$$

De (6.41), on voit que $\widehat{f}_\alpha \widehat{f}_\beta = \widehat{f}_{\alpha+\beta}$; puisque

$$(f_\alpha * f_\beta)^{\wedge} = \widehat{f}_\alpha\, \widehat{f}_\beta\,,$$

on établit (6.40) à l'aide de l'unicité des transformées et la continuité des f_α partout, sauf éventuellement à $x = 0$. A une famille de densités de probabilité $\{f_\alpha\}_{\alpha>0}$ vérifiant (6.40), on peut associer une famille de variables aléatoires réelles $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ (une telle famille s'appelle un *processus stochastique*) ayant les propriétés suivantes :

(i) $X_0 = 0$ et la loi de $X_t - X_s$, pour $0 \leqslant s < t$, est donnée par la densité f_{t-s}, c'est-à-dire pour toute partie borélienne $B \subset \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Prob}\{(X_t - X_s) \in B\} = \int_B f_{t-s}(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

(ii) si $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, alors les variables aléatoires X_{t_1}, $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont (stochastiquement) indépendantes.

Notons que, pour $t > 0$, la loi de X_t est donnée par f_t et

$$\mathbb{E}\, X_t = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x)\, \mathrm{d}x = i\widehat{f}_t'(0) = t$$

$$\mathbb{E}\, X_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_t(x)\, \mathrm{d}x = -\widehat{f}_t''(0) = t(t+1)$$

d'où

$$\operatorname{var} X_t = \mathbb{E}\, X_t^2 - \big(\mathbb{E}\, X_t\big)^2 = t\,.$$

On démontre aisément (à l'aide des connaissances élémentaires du calcul des probabilités) que la loi de la variable aléatoire *standardisée*

$$Y_t = \frac{1}{\sqrt{t}}\,(X_t - t)\,, \quad t > 0$$

est donnée par la densité p_t définie dans le paragraphe 6.3.2. Ainsi, (6.35) est maintenant interprétable comme une forme du théorème limite central car p est simplement la densité d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. Il y a des théorèmes de la théorie des probabilités qui donnent (6.35) directement ; nous avons démontré (6.35) essentiellement en suivant une méthode connue du calcul des probabilités.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^N$; supposons que les lois de X, Y sont données par les densités de probabilité f, g respectivement (donc f, $g \geqslant 0$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}^N$ valent 1). Alors on démontre dans le calcul des probabilités que la loi de $X + Y$ est donnée par la densité de probabilité définie par $f * g$. Les fonctions $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ s'appellent les *fonctions caractéristiques* de X, Y respectivement (plus exactement, la fonction caractéristique de X est donnée par $\xi \mapsto \widehat{f}(-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}x$ et de même pour Y). La formule de convolution (6.9) signifie alors (dans cette terminologie) que la fonction caractéristique de $X+Y$ est donnée par le produit des fonctions caractéristiques de X et de Y.

Une grande partie du calcul des probabilités utilise les formules énumérées dans le paragraphe 6.1.3, celles-ci étant généralisées au cas où les fonctions intégrables sont remplacées par les mesures de probabilités. Par ailleurs, une démonstration rigoureuse d'une quelconque version générale du théorème limite central du calcul des probabilités est souvent fondée sur la théorie des transformées de Fourier (des mesures de probabilité dans $\mathbb{R}^N$).

La méthode de démonstration utilisée dans le paragraphe 6.3.2 est applicable dans plusieurs autres situations semblables et on peut en tirer d'autres formules asymptotiques.

6.4 DISTRIBUTIONS

6.4.1 Préliminaires

Les distributions dans $\mathbb{R}$ ont été définies dans la section 4.5 ; elles ont été utilisées pour généraliser convenablement l'étude des séries de Fourier dans $\mathbb{R}$. Dans cette section, nous introduisons les distributions dans $\mathbb{R}^N$ (ou plus généralement, dans les parties ouvertes de $\mathbb{R}^N$) ; la définition des distributions dans $\mathbb{R}^N$ est exactement analogue à celle des distribution dans $\mathbb{R}$. Pour pouvoir définir la transformée de Fourier, nous serons obligés de nous limiter à une classe restreinte des distributions appelées les *distributions tempérées* qui seront définies dans la suite. Les propriétés des transformées de Fourier énumérées dans le paragraphe 6.1.3 seront étendues aux transformées de Fourier des distributions tempérées. Cette généralisation donne un outil théorique puissant ; en particulier, elle nous permet d'obtenir une théorie des transformées pour les fonctions $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ telle que $|f|^2$ est intégrable dans $\mathbb{R}^N$). Cette théorie (aboutissant au *théorème de Plancherel*) est plus complète et symétrique que celle pour les transformées des $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

Rappelons qu'une fonction f dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas nécessairement dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Par exemple, si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

alors $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mais $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Donc, la définition de $\widehat{f}$ pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ ne peut pas être donnée par une formule comme (6.1) ; il y a plusieurs façons équivalentes de définir $\widehat{f}$, pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, telles que si f est aussi intégrable, alors la définition de $\widehat{f}$ généralise celle donnée par (6.1). La voie que nous avons choisie consiste à définir $\widehat{u}$ lorsque u est une distribution tempérée quelconque et ensuite utiliser le fait qu'une fonction $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ définit une (unique) distribution tempérée u_f.

6.4.2 Définition des distributions dans $\mathbb{R}^N$

Soit Ω une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^N$; par $\mathcal{D}(\Omega)$ nous notons l'espace vectoriel formé par les fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont *indéfiniment dérivables* et à *support compact* dans Ω (c'est-à-dire il existe une partie compacte K, dépendant de φ, telle que $K \subset \Omega$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \notin K$; rappelons que K compact équivaut à avoir K borné et fermé dans $\mathbb{R}^N$). L'espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$ est aussi noté quelquefois $C_0^\infty(\Omega)$. Par ***distribution*** dans Ω, nous entendons une *fonctionnelle* (ou *forme*) linéaire $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ qui est ***continue*** dans un sens que nous expliquerons dans la suite (§ 6.4.4) ; cette condition n'est pas très restrictive et nous l'ignorons presque toujours pour des raisons déjà expliquées dans la section 4.5. Voici d'abord quelques exemples importants des

distributions dans Ω ; ils sont les généralisations évidentes des exemples déjà vus dans le paragraphe 4.5.2. Si $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire, on écrira souvent

$$\langle u , \varphi \rangle = u(\varphi) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

6.4.3 Exemples des distributions

Dans la suite, Ω est toujours une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^N$.

Exemple 1

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction ***localement intégrable***, c'est-à-dire

$$\int_K |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$

pour toute partie compacte $K \subset \Omega$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, posons

$$\langle u_f , \varphi \rangle = u_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x .$$

Il est évident que $\varphi \mapsto u_f(\varphi)$ est linéaire ; u_f s'appelle la *distribution engendrée* par f. Comme dans le paragraphe 4.5.2, on démontre que *si* $u_f = u_g$, f, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *étant deux fonctions localement intégrables, alors* $f = g$ *p.p. et vice versa.*

Puisque toute fonction $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ (c'est-à-dire $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est telle que $|f|^2$ est intégrable dans Ω) est localement intégrable dans Ω, une telle f donne une distribution u_f dans Ω ; de même, si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire $|f|^p$ est intégrable dans Ω, où p est tel que $1 \leqslant p < \infty$), alors f est localement intégrable dans Ω et définit une distribution u_f dans Ω. Souvent on écrit $\langle f , \varphi \rangle$ au lieu de $\langle u_f , \varphi \rangle$ lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre.

Exemple 2

Soit $a \in \Omega$; posons

$$\langle \delta_a , \varphi \rangle = \delta_a(\varphi) = \varphi(a) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Il est évident que $\varphi \mapsto \langle \delta_a , \varphi \rangle$ est linéaire ; δ_a s'appelle la ***distribution de Dirac*** (concentrée) au point a.

Si D est un ensemble fini ou dénombrable dans Ω sans point d'accumulation dans Ω et $p : D \to \mathbb{C}$ est une fonction quelconque, on peut définir une distribution u dans Ω par la formule

$$\langle u , \varphi \rangle = \sum_{a \in D} p(a)\varphi(a) , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) ;$$

puisque $\varphi(x) = 0$ pour $x \notin K_\varphi \subset \Omega$, K_φ compact, $\varphi(a) \neq 0$ pour seulement un nombre fini de a dans D de sorte que $\langle u , \varphi \rangle$ est bien défini. On écrit

$$u = \sum_{a \in D} p(a)\delta_a .$$

Exemple 3

Soit $a \in \mathbb{R}$; posons

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \mathrm{D}^{\alpha}\varphi(a)\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice fixe mais arbitraire. Alors $\varphi \mapsto \langle u\,,\,\varphi\rangle$ est une distribution. Plus généralement, si $b_\alpha \in \mathbb{C}$ pour $|\alpha| \leqslant n$ et

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant n} b_\alpha\,\mathrm{D}^{\alpha}$$

est un opérateur différentiel à coefficients constants, alors la formule

$$\langle u_T\,,\,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant n} b_\alpha \mathrm{D}^{\alpha}\varphi(a)\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

définit une distribution dans Ω ; souvent on écrit T au lieu de u_T.

Nous noterons l'ensemble de distributions dans Ω par $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si u, $v \in D'(\Omega)$ nous définissons $u+v$, λu ($\lambda \in \mathbb{C}$) par

$$\langle u+v\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\varphi\rangle + \langle v\,,\,\varphi\rangle\,,\quad \langle \lambda u\,,\,\varphi\rangle = \lambda\langle u\,,\,\varphi\rangle\,,\qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ainsi, $u+v$, λu sont dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; donc $D'(\Omega)$ est un espace vectoriel, appelé l'***espace dual*** de $\mathcal{D}(\Omega)$.

6.4.4 Conditions de continuité

Soit $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire. Il existe deux définitions équivalentes pour la notion de *continuité* de u.

(i) On dit que u est ***continue*** si pour toute partie compacte $K \subset \Omega$, il existe une constante $c(K) \geqslant 0$ et un entier $m(K) \geqslant 0$ tels que

$$\left|\langle u\,,\,\varphi\rangle\right| \leqslant c(K) \sum_{|\alpha|\leqslant m(K)} \left\|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi\right\|_{\infty}\,,$$

dès que $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est telle que $\varphi(x) = 0$ pour $x \notin K$ où

$$\left\|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi\right\|_{\infty} = \sup_{x\in\Omega}\left|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi(x)\right|\,.$$

(ii) On dit que $\{\varphi_n\}$ est une suite dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

(a) il existe une partie compacte $K \subset \Omega$ telle que $\varphi_n(x) = 0$, $x \in K^c$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) pour tout multi-indice α

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi\right\|_{\infty} = 0\,.$$

On dit que u est ***continue*** si pour toute suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle u\,,\,\varphi_n\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$.

On démontre (comme dans § 4.5.3) que ces deux définitions de continuités de u sont équivalentes. Si u vérifie la condition (i) de telle manière que $m(K) \leqslant m$ (m étant un entier positif fixe) pour tout choix de la partie compacte K, alors on dit que u est une ***distribution d'ordre fini*** (d'ordre au plus m).

Ainsi, si u_f est la distribution engendrée par une fonction f localement intégrable dans Ω, alors u_f est une distribution d'ordre 0 ; en effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est tel que $\varphi(x) = 0$, $x \in K^c$, K compact, $K \subset \Omega$, alors

$$\left|\langle u_f\,,\,\varphi\rangle\right| \leqslant \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant c(K)\|\varphi\|_\infty$$

où $c(K) = \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

On peut démontrer qu'une distribution u est d'ordre 0 si et seulement si u est *engendrée par une mesure de Radon* ; ceci peut être pris comme une définition d'une mesure de Radon (complexe) :

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Le cas d'une fonction f localement intégrable dans Ω donne la mesure de Radon μ_f définie par

$$\mu_f(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour A une partie borélienne bornée telle que $\overline{A} \subset \Omega$; alors

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_f(x)\,.$$

En particulier, δ_a et la distribution $\sum_{a\in D} p(a)\delta_a$ définies dans l'exemple 2 (§ 6.4.3) sont des distributions d'ordre 0.

Nous ne développerons pas la théorie des mesures de Radon ; les remarques précédentes ont comme objectif d'indiquer que ces mesures (en particulier, les mesures de probabilité dans Ω) sont des exemples spéciaux des distributions dans Ω.

Pour des raisons présentées dans le paragraphe 4.5.3, il ne nous sera pas nécessaire d'insister sur la continuité des distributions ; dans la suite, nous ne vérifierons pas la continuité des différentes fonctionnelles linéaires $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ introduites. Disons seulement qu'elles seront toutes continues.

6.4.5 Opérations sur les distributions

On a déjà défini la somme de deux distributions et le produit d'une distribution par un nombre complexe. Nous définissons maintenant les ***dérivées*** d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω ouvert non vide dans $\mathbb{R}^N$. Si α est un multi-indice de $\mathbb{N}^N$ quelconque, on pose

$$\langle \mathrm{D}^\alpha u\,,\,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u\,,\,\mathrm{D}^\alpha\varphi\rangle\,,\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{6.42}$$

Comme expliqué dans le paragraphe 4.5.4, si $u = u_f$ et f est de classe C^1, alors

$$\mathrm{D}_j u_f = u_{(\mathcal{D}_j f)}\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

Plus généralement si $u = u_f$ et f est de classe C^n, alors

$$\mathrm{D}^\alpha u_f = u_{(\mathcal{D}^\alpha f)}$$

pour tout multi-indice α de $\mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leqslant n$. Selon (6.42), *toute distribution u est indéfiniment dérivable.*

On peut définir la ***limite*** d'une suite (ou d'une famille) de distributions ; si $u_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, on dit que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

On démontre que *si* $\lim_{n\to\infty}\langle u_n\,,\,\varphi\rangle$ *existe pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *alors*

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u_n\,,\,\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

définit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. C'est un énoncé important et utile (que nous ne démontrons pas, suivant en cela notre point de vue, à savoir que la linéarité de $\varphi \mapsto \langle u\,,\,\varphi\rangle$ est tout ce que nous vérifions à ce sujet).

Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on peut définir $fu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par la formule

$$\langle fu\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,f\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,;$$

notons que $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si $f \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Les autres définitions données dans le paragraphe 4.5.4 peuvent être adaptées sans difficulté aux distributions dans Ω (ou dans $\mathbb{R}^N$) ; nous les rappelons dans la suite lorsque nous en aurons besoin.

Les calculs avec les distributions sont souvent faciles à justifier car toute distribution est indéfiniment dérivable et *on peut toujours échanger la limite et les dérivations des distributions*. Plus précisément, supposons que $u_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^\alpha u_n = \mathrm{D}^\alpha u$ pour tout multi-indice α dans $\mathbb{N}^N$. De même, supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$$

où u_n, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (dans le sens que $\sum_{n=0}^{m} u_n \to u$ lorsque $m \to \infty$) ; alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{D}^\alpha u_n = \mathrm{D}^\alpha u$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Les démonstrations de ces affirmations sont immédiates ; par exemple si $u_n \to u$ lorsque $n \to \infty$, u_n, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \mathrm{D}^\alpha u_n \,,\, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_n \,,\, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle \xrightarrow{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \langle u \,,\, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle = \langle \mathrm{D}^\alpha u \,,\, \varphi \rangle$$

ce qui prouve que $\mathrm{D}^\alpha u_n \to \mathrm{D}^\alpha u$ lorsque $n \to \infty$.

6.4.6 Remarques

Une distribution u dans une partie ouverte non vide Ω de $\mathbb{R}^N$ est, par définition, une fonctionnelle linéaire $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ (vérifiant une condition de continuité) ; autrement dit, une distribution dans Ω est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Au lieu de considérer $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ comme point de départ, on peut commencer par un autre espace vectoriel de fonctions $\mathcal{A}(\Omega)$ et considérer $\mathcal{A}'(\Omega)$ formé des fonctionnelles linéaires $u : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathbb{C}$ (vérifiant une condition de continuité appropriée). Alors $\mathcal{A}'(\Omega)$ donne une autre classe de distributions dans Ω ; les éléments de $\mathcal{A}'(\Omega)$ s'appellent les *fonctions généralisées* associées aux *fonction tests* $\mathcal{A}(\Omega)$. Les fonctions généralisées associées aux fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ sont nos distributions dans Ω (appelées aussi *distributions de Schwartz*). Nous ne discuterons pas la théorie générale des fonctions généralisées obtenues par différents choix de $\mathcal{A}(\Omega)$; dans le paragraphe suivant, nous considérerons le cas particulier de $\Omega = \mathbb{R}^N$ et nous introduisons un espace spécial noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; les fonctionnelles linéaires $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ donnent les *distributions tempérées* dans $\mathbb{R}^N$ qui sont donc les fonctions généralisées dans $\mathbb{R}^N$ associées aux fonctions tests $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Les distributions tempérées s'avèrent particulièrement commodes pour une généralisation des transformées de Fourier.

6.4.7 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si φ est indéfiniment dérivable et si pour tous multi-indices α, $\beta \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| x^\beta \mathrm{D}^\alpha \varphi(x) \right| < \infty \,. \tag{6.43}$$

On peut exprimer cette dernière condition en disant que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k |\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)| = \lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^k |\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)| = 0 \,, \tag{6.44}$$

φ étant dans $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. L'équivalence entre (6.43) et (6.44) se démontre facilement en utilisant les inégalités suivantes : si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{N}^N$, $k \in \mathbb{N}$, alors

$$|x^\beta| = |x_1^{\beta_1} \cdots x_N^{\beta_N}| \leqslant |x|^{|\beta|} \,, \quad |x|^k \leqslant \left(|x_1| + \cdots + |x_N|\right)^k .$$

A cause de (6.44), on dit aussi qu'une fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est à *décroissance rapide à l'infini*, φ étant dans $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ entraîne que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_{\alpha,k} > 0$ tel que

$$\|x\|^k |\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)| \leqslant \frac{C_{\alpha,k}}{\|x\|^{N+2}}, \quad \|x\| \geqslant 1,$$

on conclut que φ, $\mathrm{D}^\alpha\varphi$, $x \mapsto x^\beta \mathcal{D}^\alpha\varphi(x)$ sont intégrables dans $\mathbb{R}^N$ pour α, $\beta \in \mathbb{N}^N$. De cette remarque, on déduit immédiatement les propriétés suivantes des transformées des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, en utilisant les propriétés des transformées des fonctions intégrables données dans le paragraphe 6.1.3.

6.4.8 Proposition (*propriété des transformées des fonctions de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)

(i) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *alors* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *et, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\mathrm{D}^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha \varphi(x) \exp(-ix \cdot \xi)\, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *alors, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\widehat{\mathrm{D}^\alpha \varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(iii) L'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ *est une bijection de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *; on a*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-N} \widehat{\widehat{\varphi}}(-x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

(iv) Si φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *alors* $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\,\widehat{\psi}(\xi), \quad \widehat{\varphi\psi}(\xi) = (2\pi)^{-N}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

(v) Si φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, \mathrm{d}x = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi)\, \overline{\widehat{\psi}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi ;$$

en particulier

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^2\, \mathrm{d}x = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi.$$

DÉMONSTRATION

(i) et *(ii)* sont immédiates de (7) et (8) (§ 6.1.3), d'où l'on conclut que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; la formule d'inversion (§ 6.1.3(4)) établit *(iii)*. La formule $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\,\widehat{\psi}$ dans *(iv)* est une conséquence de paragraphe 6.1.3(6) ; si φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors alors $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la formule

de Leibniz (remarque (ii), ci-après) pour $\mathrm{D}^\alpha(\varphi\psi)$; donc $\widehat{\varphi}\,\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (car $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ grâce à *(iii)*) d'où $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (encore grâce à *(iii)* car $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\,\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) ; la seconde formule de *(iv)* est une conséquence de *(iii)* et de la formule de convolution. Finalement, *(v)* est une conséquence de *(iii)* et du lemme 6.2.7 ; en effet, si $h = (2\pi)^{-N}\overline{\widehat{\psi}}$, alors $\widehat{h} = \overline{\psi}$ car, pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\overline{\psi(x)} = \overline{(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(\xi)\exp(i\xi\cdot x)\,\mathrm{d}\xi} = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\widehat{\psi}(\xi)}\exp(-i\xi\cdot x)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} h(\xi)\exp(-i\xi\cdot x)\,\mathrm{d}\xi = \widehat{h}(x)$$

en utilisant la formule d'inversion (6.6) dans la première égalité ; avec le lemme 6.2.7, on a, pour φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et h comme ci-dessus,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,\widehat{h}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(x)\,\overline{\widehat{\psi}(x)}\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne *(v)*. ♦

REMARQUES

(i) Notons que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; de plus, si $\varphi(x) = \exp(-\alpha\|x\|^2)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha > 0$, alors $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

(ii) La formule de Leibniz mentionnée dans la démonstration est la suivante : si φ, $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ sont de classe C^n et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leqslant n$, alors

$$\mathrm{D}^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ \beta \in \mathbb{N}^N}} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}\mathrm{D}^\beta\varphi\,\mathrm{D}^{\alpha-\beta}\psi \tag{6.45}$$

où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \leqslant \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leqslant \alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, et $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ de sorte que

$$\frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} = \prod_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j!}{\beta_j!\,(\alpha_j-\beta_j)!}\,.$$

Puisque $\mathrm{D}^\alpha = \mathrm{D}_1^{\alpha_1}\cdots\mathrm{D}_N^{\alpha_N}$ et

$$\mathrm{D}_j^{\alpha_j}(\varphi\psi) = \sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\beta_j!\,(\alpha_j-\beta_j)!}\,\mathrm{D}_j^{\beta_j}\varphi\,\mathrm{D}_j^{\alpha_j-\beta_j}\psi$$

d'après la formule de Leibniz pour les fonctions d'une variable, on obtient (6.45) en observant que $\mathrm{D}_j^{\beta_j}$ et $\mathrm{D}_k^{\alpha_k}$ commutent.

(iii) Dans la démonstration de la proposition 6.4.8*(iii)*, on a utilisé la formule d'inversion de Fourier pour les fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Comme indiqué dans la remarque (ii) (§ 6.2.8), la démonstration de la formule d'inversion est particulièrement simple dans ce cas car il s'agit de fonctions continues. On verra (§ 6.4.10) que la formule d'inversion générale peut être déduite aisément du cas des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

6.4.9 Distributions tempérées

Une fonctionnelle linéaire $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ *continue* au sens suivant s'appelle une ***distribution tempérée*** dans $\mathbb{R}^N$; on écrit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

On dit que $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ est *continue* si $\langle u\,,\,\varphi_n\rangle = u(\varphi_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour toute suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ au sens suivant : pour tout choix de α, $\beta \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| x^\beta \, \mathrm{D}^\alpha \varphi_n(x) \right| \right\} = 0\,.$$

Comme expliqué auparavant, nous ne discuterons pas de la continuité des fonctionnelles linéaires dans la suite ; notons simplement que si les $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on voit que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$; ainsi, *une distribution tempérée dans* $\mathbb{R}^N$ *est une distribution dans* $\mathbb{R}^N$.

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable ; si f est à *croissance lente* à l'infini dans le sens que pour un entier $k \geqslant 0$, $R > 0$, $C > 0$, on a

$$\left|f(x)\right| \leqslant C\left\|x\right\|^k\,, \quad \left\|x\right\| \geqslant R\,,$$

alors u_f défini par

$$\langle u_f\,,\,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \tag{6.46}$$

est une distribution tempérée dans $\mathbb{R}^N$. En effet, puisque

$$\lim_{|x|\to\infty} \left\|x\right\|^{N+k+2} \left|\varphi(x)\right| = 0$$

on a

$$\left|f(x)\varphi(x)\right| \leqslant \frac{C_1}{\left\|x\right\|^{N+2}}\,, \quad \left\|x\right\| \geqslant R_1$$

pour des constantes C_1, $R_1 > 0$ appropriées de sorte que $f\varphi$ est intégrable dans $\mathbb{R}^N$.

On conclut que toute fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ continue majorée en valeur absolue par un polynôme en dehors d'une boule définit une distribution tempérée u_f. Par contre, une fonction du type $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$, ne définit pas une distribution tempérée ; u_f donne bien une distribution dans $\mathbb{R}$ car $f\varphi$ est évidemment intégrable dans $\mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mais il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $f\varphi$ est non intégrable. En effet, si

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0, \end{cases}$$

alors $\varphi(x) = \theta(x)\,\mathrm{e}^{-x/2}$, $x \in \mathbb{R}$, définit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\,\mathrm{e}^x = \infty$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \infty\,.$$

La terminologie *distribution tempérée* est sensée d'évoquer justement la notion de croissance lente à l'infini.

Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, $p \geqslant 1$, alors u_f donnée par (6.46) est une distribution tempérée dans $\mathbb{R}^N$. Si $p = 1$, c'est évident ; si $1 < p < \infty$, on a, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $1/p + 1/q = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bigl|f(x)\varphi(x)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p} \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^q\,\mathrm{d}x\right\}^{1/q} < \infty$$

selon l'inégalité de Hölder (vol. 1, § 5.12.2). En particulier si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors u_f est une distribution tempérée (dans ce cas, l'inégalité de Hölder ci-dessus devient l'inégalité de Cauchy–Schwarz).

Il y a beaucoup d'autres distributions dans $\mathbb{R}^N$ qui sont tempérées. Sans entrer dans les détails disons, qu'en général, une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est tempérée si et seulement si la fonctionnelle linéaire $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ peut être prolongée (de manière continue) en une fonctionnelle linéaire $\widetilde{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$. Ainsi, une distribution u *à support compact* (c'est-à-dire telle qu'il existe K compact avec $\langle u\,,\,\varphi\rangle = 0$ dès que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vérifie $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in K$) est tempérée ; il suffit de choisir une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\theta(x) = 1$, $x \in K$, et de définir $\widetilde{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ par

$$\langle \widetilde{u}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\theta\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\,.$$

On vérifie que $\langle \widetilde{u}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\varphi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ car $\varphi = \theta\varphi + (1-\theta)\varphi$ et $\theta\varphi$, $(1-\theta)\varphi$ sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $(1-\theta)\varphi$ est 0 sur K de sorte que

$$\langle u\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\theta\varphi\rangle = \langle \widetilde{u}\,,\,\varphi\rangle$$

si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. L'idée intuitive régissant la notion d'une distribution à support compact est celle d'avoir une distribution qui « s'annule en dehors d'une partie

compacte ». Ainsi, si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est une fonction localement intégrable telle que $f(x) = 0$ si $x \in K^c$, K compact, alors la distribution u_f engendrée par f sera une distribution à support compact K ; en effet, si $\varphi(x) = 0$, $x \in K$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\langle u_f\,,\,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

car $f(x)\varphi(x)$ est identiquement nul (étant donné que $f(x)\varphi(x) = 0$ si $x \in K$ car alors $\varphi(x) = 0$ et $f(x)\varphi(x) = 0$ si $x \in K^c$ car alors $f(x) = 0$).

De même, on peut démontrer qu'une *distribution périodique* (on a défini cette notion pour $N = 1$, sect. 4.5, la définition pour $N \geqslant 1$ étant analogue) est tempérée. On peut démontrer qu'*une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est tempérée si et seulement si $u = \mathrm{D}^\alpha v$ (au sens des distributions) où $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est une fonction continue (de croissance lente) de la forme*

$$v(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{k/2} f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N\,,$$

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ étant continue, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Nous ne démontrons pas cette affirmation ; elle justifie de nouveau la terminologie « distribution tempérée ».

Observons finalement que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathrm{D}^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $Pu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ où P est une fonction polynomiale des variables $x_1, \ldots, x_N$ et $\langle Pu\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,P\varphi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. En effet,

$$\langle \mathrm{D}^\alpha u\,,\,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u\,,\,\mathrm{D}^\alpha\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et $\mathrm{D}^\alpha\varphi$ et $P\varphi$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

6.4.10 Transformées de Fourier des distributions tempérées

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$; on définit $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par la formule

$$\langle \widehat{u}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\widehat{\varphi}\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\,. \tag{6.47}$$

Puisque $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dès que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (prop. 6.4.8*(iii)*), on constate que (6.47) définit bien une fonctionnelle linéaire $\widehat{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$.

Supposons que $u = u_f$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$; du lemme 6.2.7, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\widehat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

ce qui donne

$$\langle \widehat{u}_f\,,\,\varphi\rangle = \langle u_f\,,\,\widehat{\varphi}\rangle = \langle u_{\widehat{f}}\,,\,\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\,.$$

On en conclut que $\widehat{u}_f = u_{\widehat{f}}$, c'est-à-dire $\widehat{u}_f$ est engendrée par la fonction $\widehat{f}$; on décrira cette situation plus simplement en disant que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors la transformée de f en tant que fonction dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec la transformée de f en tant que distribution tempérée u_f ; de plus, on écrit souvent

$$\langle \widehat{f}\,, \varphi \rangle = \langle f\,, \widehat{\varphi} \rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\,.$$

On en déduit, à nouveau, la formule d'inversion de Fourier pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ en partant de la validité de cette formule pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\widehat{f}}\,, \varphi \rangle = \langle f\,, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot (2\pi)^{-N} \varphi(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (2\pi)^{-N} f(-x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle g\,, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{6.48}$$

où $g(x) = (2\pi)^{-N} f(-x)$; de la validité de l'égalité (6.48) pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on conclut que la distribution tempérée $\widehat{\widehat{f}}$ est engendrée par g ce qui veut dire que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = g(x) = (2\pi)^{-N} f(-x) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N$$

ce qui est (6.6).

Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ avec $\|f\|_2 = \{\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\}^{1/2} < \infty$. Alors il existe $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (même $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$), $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\|\varphi_n - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_n(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Nous admettons cette affirmation (démontrée pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ dans le volume 1 (prop. 5.11.5), avec $\|f - \varphi_n\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$, le cas de $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ étant similaire). De la proposition 6.4.8*(v)*, on a

$$\|\widehat{\varphi}_m - \widehat{\varphi}_n\|_2^2 = (2\pi)^N \|\varphi_m - \varphi_n\|_2^2 \xrightarrow{m\,,\,n\to\infty} 0$$

d'où l'existence de $g_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi}_n - g_0\|_2 = 0$$

à cause de la complétude de $L^2(\mathbb{R}^2)$ (§ 3.2.4) ; notons que

$$\|g_0\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi}_n\|_2^2 = (2\pi)^N \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_2^2 = (2\pi)^N \|f\|_2^2 \tag{6.49}$$

toujours d'après la proposition 6.4.8*(v)*. Posons $\widehat{f} = g_0$; si $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|\psi_n - f\|_2^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

alors en passant à la suite «mixte» $\psi_0, \varphi_0, \psi_1, \varphi_1, \ldots$ on montre que $\|\psi_n - g_0\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ de sorte que $\widehat{f} = g_0$ ne dépend pas (p.p. $x \in \mathbb{R}^N$ près) de la suite $\{\varphi_n\}$ initiale choisie dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ avec $\|\varphi_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Nous démontrons que $\widehat{f}$ représente aussi la transformée de u_f en tant que distribution tempérée, c'est-à-dire

$$\widehat{u}_f = u_{\widehat{f}}\,;$$

en effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\langle u_{\widehat{f}}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\,\widehat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\widehat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle u_f\,,\,\widehat{\varphi}\,\rangle = \langle \widehat{u}_f\,,\,\varphi\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne $u_{\widehat{f}} = \widehat{u}_f$. D'après (6.49), on a

$$\|\widehat{f}\,\|_2 = (2\pi)^{N/2}\|f\|_2\,. \tag{6.50}$$

En écrivant

$$\langle f\,,\,g\rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

pour $f,\ g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, on obtient

$$\langle \widehat{f}\,,\,\widehat{g}\,\rangle_2 = (2\pi)^N\langle f\,,\,g\rangle_2\,. \tag{6.51}$$

En effet, (6.51) est équivalente à (6.50) si $f = g$ et le cas général s'obtient de la formule de polarisation (ou en posant des suites $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telles que $\|\varphi_n - f\|_2 \to 0$, $\|\psi_n - g\|_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$). Nous mettons les résultats de nos discussions sous forme d'une proposition.

6.4.11 Proposition (*transformation de Fourier comme isomorphisme de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$)

(i) L'application $u \mapsto \widehat{u}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *(c'est-à-dire* $u \mapsto \widehat{u}$ *est une application linéaire, bijective continue avec* $\widehat{u} \mapsto u$ *continue). On a* $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^N\breve{u}$ *où* $\langle \breve{u}\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\breve{\varphi}\rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *avec* $\breve{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ *(formule d'inversion de Fourier).*

(ii) Si $u = u_f$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, *alors* $\widehat{u}_f = u_{\widehat{f}}$ *où* $\widehat{f}$ *est la transformée de Fourier de* f *en tant que fonction intégrable donnée par (6.1).*

(iii) ***Théorème de Plancherel***

Si $u = u_f$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors il existe une fonction $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, unique à l'ensemble négligeable près, telle que $\widehat{u}_f = u_{\widehat{f}}$; de plus,

$$\|\widehat{f}\,\|_2 = (2\pi)^{N/2}\|f\|_2$$

et si f, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\langle \widehat{f}\,,\, \widehat{g}\,\rangle_2 = (2\pi)^N \langle f\,,\, g\rangle_2\,.$$

DÉMONSTRATION

Posons $\breve{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors on a, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \widehat{\widehat{u}}\,,\, \varphi\rangle = \langle u\,,\, \widehat{\widehat{\varphi}}\,\rangle = (2\pi)^N \langle u\,,\, \breve{\varphi}\rangle = (2\pi)^N \langle \breve{u}\,,\, \varphi\rangle$$

en écrivant $\langle \breve{u}\,,\, \varphi\rangle = \langle u\,,\, \breve{\varphi}\rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Autrement dit,

$$\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^N \breve{u}\,.$$

Puisque $\breve{\breve{u}} = u$ (car $\breve{\breve{\varphi}} = \varphi$), on voit que $u \mapsto \widehat{u}$ est une bijection linéaire de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. La continuité de $u \mapsto \widehat{u}$ se voit comme suit : si $u_n \to u$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle \widehat{u}_n\,,\, \varphi\rangle = \langle u_n\,,\, \widehat{\varphi}\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle u\,,\, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{u}\,,\, \varphi\rangle$$

ce qui donne $\widehat{u}_n \to \widehat{u}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On démontre la continuité de $\widehat{u} \mapsto u$ de même manière. Ceci établit *(i)*. Les preuves pour *(ii)* et *(iii)* ont été vues dans la discussion qui précède la proposition. ♦

A cause de l'importance du théorème de Plancherel *(iii)*, nous le redonnons dans une autre forme utilisant le langage des opérateurs dans l'espace hilbertien $L^2(\mathbb{R}^N)$. Rappelons que les éléments de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sont des classes d'équivalence de fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. Nous notons par $\langle f\,,\, g\rangle_2$ le produit scalaire de deux éléments f, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\|f\|_2$ la norme de $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$: $\|f\|_2^2 = \langle f\,,\, f\rangle_2$. Nous écrivons

$$\mathcal{F}f = (2\pi)^{-N/2}\widehat{f} \tag{6.52}$$

si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ ou si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (ou si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$) ; si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{f}$ est donné par (6.1) de sorte que $\mathcal{F}f$ est une fonction continue ; si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{f}$ (et donc $\mathcal{F}f$) est une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ donnée par la proposition *(iii)*. Si $f_1 = f_2$ p.p. et $f_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors $f_2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ et $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$ p.p. ; ainsi, $\mathcal{F}f = (2\pi)^{-N/2}\widehat{f}$ est bien défini pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Nous écrivons

$$\langle f\,,\, g\rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,, \quad \|f\|_2 = \langle f\,,\, f\rangle_2^{1/2}$$

pour f, g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$.

6.4.12 Proposition (*théorème de Plancherel*)

(i) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. *Alors* $\mathcal{F}f$ *(définie par (6.52) et (6.1)) est une fonction continue dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ *avec* $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$ *; si en plus* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, *alors* $\langle f\,,\, g\rangle_2 = \langle \mathcal{F}f\,,\, \mathcal{F}g\rangle_2$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$. *Alors* $\mathcal{F}f$ *(définie dans (6.52)) est une fonction dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ *telle que* $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$. *Si* $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, *sont telles que* $\|f_n - f\|_2 \to 0$, $n \to \infty$, *alors* $\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 \to 0$, $n \to \infty$. *Si* f, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, *alors* $\langle f\,,\, g\rangle_2 = \langle \mathcal{F}f\,,\, \mathcal{F}g\rangle_2$.

(iii) $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ *est un opérateur unitaire (c'est-à-dire* $\mathcal{F}$ *est linéaire, bijective et préserve les produits scalaires).*

REMARQUE. Les deux formules

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2\,, \quad \langle f\,,\, g\rangle_2 = \langle \mathcal{F}f\,,\, \mathcal{F}g\rangle_2\,,$$

valables pour f, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, s'appellent les ***formules de Parseval***.

DÉMONSTRATION

(i) Il suffit de voir que si f est à la fois dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f}$ définie par (6.1) est égale p.p. à $\widehat{f}$ défini par *(iii)* de la proposition 6.4.11 ; or c'est une conséquence du fait que

$$\widehat{u}_f = u_{\widehat{f}}$$

chaque fois que f est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ ou dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ (et aussi lorsque u_h est la distribution tempérée engendrée par une fonction $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ appropriée). Ainsi, si f est à la fois dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{-N/2}\|\widehat{f}\,\|_2 = \|f\|_2$$

d'après (6.52) et (6.50). On complète la preuve de *(i)* de la même manière.

(ii) Si les f_n sont comme indiquées, alors d'après *(i)*

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \xrightarrow{m\,,\, n\to\infty} 0$$

d'où l'existence de $g_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $\|\mathcal{F}f_n - g_0\|_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. D'autre part, $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ est définie par une suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n - f\|_2 = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty}\|\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}f\|_2 = 0\,;$$

puisque $\|f_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$, on a $\|\varphi_n - f_n\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ d'où, d'après *(i)*,

$$\|\mathcal{F}\varphi_n - \mathcal{F}f_n\|_2 = \|\varphi_n - f_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Puisque $\|\mathcal{F}\varphi_n - g_0\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$, on conclut que

$$g_0 = \mathcal{F}f\,.$$

Le reste de *(ii)* est contenu dans la proposition 6.4.11 *(iii)*.

(iii) C'est une reformulation de (6.50) et (6.51). ♦

6.4.13 Remarques

(i) Dans la littérature classique, on définit $\widehat{f}$ pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ par le procédé suivant. On pose, pour $t > 0$,

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leqslant t \\ 0 & \text{si } |x| > t\,; \end{cases}$$

si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, alors $f_t \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$. On montre que les fonctions continues $\widehat{f_t}$ sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ et qu'il existe une fonction g_0 dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|\widehat{f_t} - g_0\|_2 \to 0$ lorsque $t \to \infty$; on pose alors $g_0 = \widehat{f}$. Puisque

$$\lim_{t\to\infty} \|f_t - f\|_2^2 = \lim_{t\to\infty} \int_{|x|>t} |f(x)|^2\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

on voit de la proposition 6.4.12 que cette fonction $\widehat{f}$ est nécessairement la même presque partout que celle définie ci-dessus ; en fait, le procédé de la proposition 6.4.12 est plus général. Il suffit de prendre une suite (ou une famille) quelconque de f_n dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|f_n - f\|_2 \to 0$ pour obtenir $\widehat{f}$ comme limite des $\widehat{f_n}$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ avec $n \to \infty$. Notons que $\widehat{f}$ n'est uniquement définie que presque partout dans $\mathbb{R}^N$ (si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$) de sorte que $\widehat{f}(\xi)$ *n'a pas de sens pour un point* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *donné* ; par contre, $\widehat{f}$ comme un élément de $L^2(\mathbb{R}^N)$ (formé des classes d'équivalence de fonctions) est uniquement déterminé par l'élément f de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Cette subtilité n'est pas présente lorsque $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ car alors on prend $\widehat{f}$ comme la fonction continue uniquement définie par (6.1) et $\widehat{f}(\xi)$ est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(ii) En général, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{u}$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ qui n'est pas nécessairement engendrée par une fonction (ou une classe d'équivalence de fonctions). Néanmoins, il y a beaucoup de distributions tempérées u telles que $\widehat{u} = u_h$ avec $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ une fonction qui est même très régulière. Par exemple, si u est une distribution tempérée provenant d'une distribution à support compact (§ 6.4.9), alors $\widehat{u} = u_h$ où h est une fonction de classe C^∞ ; un théorème important (de Paley–Wiener–Schwartz) caractérise même les fonctions h telles que $\widehat{u} = u_h$, u distribution à support compact, comme fonctions h prolongeables de manière holomorphe à $\mathbb{C}^N$ avec une croissance à l'infini « très contrôlée ».

(iii) Nous n'avons pas abordé ici la formule de convolution pour les distributions tempérées. Etant donné deux distributions tempérées u, v dans $\mathbb{R}^N$, il n'est pas toujours possible de former la convolution $u * v$; ceci est intuivement évident si l'on considère u, v comme deux fonctions polynomiales (c'est-à-dire engendrées par deux fonctions polynomiales). Pour définir $u * v$, il faut imposer des conditions sur u ou v. Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $v = \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire v est engendrée par φ), alors on définit $\varphi * u = u * \varphi$ comme la fonction définie par

$$(\varphi * u)(x) = (u * \varphi)(x) = \langle u\,,\, \varphi_x \rangle\,, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.53}$$

où $\varphi_x(y) = \varphi(x - y)$, $y \in \mathbb{R}^N$. Notons que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $\varphi_x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ de sorte que (6.53) définit bien une fonction $x \mapsto (u * \varphi)(x)$; en se rappelant que si u était une fonction, on aurait

$$(u * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\, \varphi(x - y)\, \mathrm{d}y\ ;$$

on s'aperçoit que (6.53) est une définition naturelle pour $u * \varphi$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. *On démontre que* $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ *et que*

$$(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi) \tag{6.54}$$

si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, φ, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

La convolution des distributions se passe bien si toutes les distributions sauf une au plus sont à support compact. Ainsi, si $u_1, \ldots, u_n$ sont n distributions dans $\mathbb{R}^N$ où toutes sauf une ont un support compact, alors on peut définir $u_1 * \cdots * u_n$ de telle manière que les règles de commutativité et d'associativité soient respectées ; alors les formules (6.53), (6.54) ainsi que les formules de convolution pour les fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ deviennent des cas particuliers. On peut démontrer aussi que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, v à support compact, alors $u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $u * v = v * u$. Une formule centrale du sujet est alors la suivante : *si* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *et* $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, v *à support compact, alors* $u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\,\widehat{v}\ ; \tag{6.55}$$

$\widehat{u}\,\widehat{v}$ est à interpréter comme suit : $\widehat{v}$ étant une fonction de classe C^∞ (remarque (ii)) et $\widehat{u}$ une distribution (tempérée), le produit $\widehat{v}\,\widehat{u}$ $(= \widehat{u}\,\widehat{v})$ en tant que distribution dans $\mathbb{R}^N$ (qui est, en fait, une distribution tempérée selon le théorème énoncé).

Un développement détaillé définissant les convolutions entre les distributions est un peu technique et nous ne le ferons pas ; par contre, les formules telles que (6.55) sont simples et parfaitement analogues aux formules de convolution vues pour les fonctions intégrables, à condition de les interpréter judicieusement.

6.4.14 Exemples

Exemple 1

On a

$$\text{(i)}\ \ \widehat{1} = (2\pi)^N \delta\,, \qquad \text{(ii)}\ \ \widehat{\delta} = 1 \tag{6.56}$$

où 1 est la distribution (tempérée) engendrée par la fonction identiquement égale à 1 dans $\mathbb{R}^N$ et $\delta = \delta_0$, la distribution de Dirac au point $0 \in \mathbb{R}^N$.

En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \widehat{1}\,, \varphi \rangle = \langle 1\,, \widehat{\varphi}\,\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^N \varphi(0) = (2\pi)^N \langle \delta\,, \varphi\rangle$$

ce qui prouve $\widehat{1} = (2\pi)^N \delta$ où l'on a utilisé la formule d'inversion de Fourier pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; de même,

$$\langle \widehat{\delta}\,, \varphi\rangle = \langle \delta\,, \widehat{\varphi}\,\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle 1\,, \varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

ce qui prouve $\widehat{\delta} = 1$. D'ailleurs la formule (i) est une conséquence de (ii) et vice versa (prop. 6.4.11*(i)*).

Exemple 2

On a

$$\text{(i)}\ \ \widehat{e_h} = (2\pi)^N \delta_h\,, \qquad \text{(ii)}\ \ \widehat{\delta}_h = e_{-h} \tag{6.57}$$

où $h \in \mathbb{R}^N$ et e_h est la distribution (tempérée) engendrée par $x \mapsto e_h(x) = \mathrm{e}^{ix\cdot h}$. Notons que (6.56) est le cas particulier de (6.57) avec $h = 0$. La vérification de (6.57) est laissée en exercice.

Pour la suite, introduisons les notations suivantes : si $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $1 \leqslant j \leqslant N$, alors posons

$$\theta_j(x) = x_j\,, \quad p_\alpha(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} = \prod_{j=1}^{N} \theta_j(x)^{\alpha_j}\,.$$

Avec cette notation, les énoncés *(i)* et *(ii)* de la proposition 6.4.8 peuvent être écrits comme suit : si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\mathrm{D}^\alpha \widehat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{p_\alpha \varphi}\,, \quad \widehat{\mathrm{D}^\alpha \varphi} = i^{|\alpha|} p_\alpha \widehat{\varphi} \tag{6.58}$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$; avec $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ on obtient, pour $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$\mathrm{D}_j \widehat{\varphi} = (-i)\,\widehat{\theta_j \varphi}\,, \quad \widehat{\mathrm{D}_j \varphi} = i\theta_j \widehat{\varphi}\,. \tag{6.59}$$

Exemple 3

On a, pour $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$\text{(i)}\ \ \widehat{\mathrm{D}_j\delta} = i\theta_j\,, \qquad \text{(ii)}\ \ \widehat{\theta}_j = i(2\pi)^N\,\mathrm{D}_j\delta\,. \tag{6.60}$$

En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a, en utilisant (6.59),

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\mathrm{D}_j\delta}\,,\,\varphi\right\rangle &= \langle \mathrm{D}_j\delta\,,\,\widehat{\varphi}\,\rangle = -\langle \delta\,,\,\mathrm{D}_j\widehat{\varphi}\,\rangle = i\langle \delta\,,\,\widehat{\theta_j\varphi}\rangle \\ &= i\langle \widehat{\delta}\,,\,\theta_j\varphi\rangle = i\langle 1\,,\,\theta_j\varphi\rangle = \langle i\theta_j\,,\,\varphi\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne (6.60)(i). De même,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\theta}_j\,,\,\varphi\rangle &= \langle \theta_j\,,\,\widehat{\varphi}\,\rangle = \langle 1\,,\,\theta_j\widehat{\varphi}\,\rangle = \frac{1}{i}\left\langle 1\,,\,\widehat{\mathrm{D}_j\varphi}\right\rangle \\ &= \frac{1}{i}\left\langle \widehat{1}\,,\,\mathrm{D}_j\varphi\right\rangle = \frac{(2\pi)^N}{i}\left\langle \delta\,,\,\mathrm{D}_j\varphi\right\rangle = -\frac{(2\pi)^N}{i}\left\langle \mathrm{D}_j\delta\,,\,\varphi\right\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne (6.60)(ii) (où l'on a utilisé (6.56)(i)). On peut obtenir aussi (ii) de (i) dans (6.60) en utilisant la formule d'inversion de Fourier (prop. 6.4.11*(i)*) : puisque $\theta_j = (1/i)\widehat{\mathrm{D}_j\delta}$,

$$\widehat{\theta}_j = \frac{1}{i}\,\widehat{\widehat{\mathrm{D}_j\delta}} = \frac{(2\pi)^N}{i}\,\widetilde{\mathrm{D}_j\delta} = \frac{-1}{i}\,(2\pi)^N\,\mathrm{D}_j\delta$$

car $\widetilde{\mathrm{D}_j\delta} = -\mathrm{D}_j\delta$ comme l'on vérifie directement.

Exemple 4

Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\text{(i)}\ \ \mathrm{D}^\alpha\widehat{u} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{p_\alpha u}\,, \qquad \text{(ii)}\ \ \widehat{\mathrm{D}^\alpha u} = i^{|\alpha|}p_\alpha\,\widehat{u}\,. \tag{6.61}$$

Notons que (6.61) est l'analogue exact de (6.58) ; la vérification de (6.61) utilise (6.58) et les définitions.

Exemple 5

Pour $h \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on définit $\tau_h u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par la formule

$$\langle \tau_h u\,,\,\varphi\rangle = \langle u\,,\,\tau_{-h}\,\varphi\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

où $\tau_{-h}\,\varphi(x) = \varphi(x-h)$. On a

$$\widehat{\tau_h u} = e_h\,\widehat{u} \tag{6.62}$$

avec $e_h(x) = \exp(ih\cdot x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\tau_h u}\,,\,\varphi\rangle &= \langle \tau_h u\,,\,\widehat{\varphi}\,\rangle = \langle u\,,\,\tau_{-h}\,\widehat{\varphi}\,\rangle = \langle u\,,\,\widehat{e_h\varphi}\rangle \\ &= \langle \widehat{u}\,,\,\mathrm{e}_h\,\varphi\rangle = \langle \mathrm{e}_h\widehat{u}\,,\,\varphi\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne (6.62) (où l'on a utilisé (6.4) pour avoir $\widehat{\mathrm{e}_h\,\varphi} = \tau_{-h}\widehat{\varphi}$).

Exemple 6

Nous illustrons la formule de convolution (6.55) par quelques exemples particuliers. On a vu dans (6.57) que $\widehat{\delta}_{-h} = e_h$, $h \in \mathbb{R}^N$; on peut alors interpréter (6.62) comme suit :

$$\tau_h u = u * \delta_{-h}\,, \quad \big(u * \delta_{-h}\big)^{\wedge} = \widehat{u}\, e_h = e_h \widehat{u}\,.$$

De même, en prenant $u = \delta$ dans (6.61), on a

$$\widehat{\mathrm{D}^{\alpha}\delta} = i^{|\alpha|} p_{\alpha}$$

car $\widehat{\delta} = 1$ de (6.56) ; on peut donc interpréter (6.61) comme suit :

$$\mathrm{D}^{\alpha} u = u * \mathrm{D}^{\alpha}\delta\,, \quad \big(u * \mathrm{D}^{\alpha}\delta\big)^{\wedge} = i^{|\alpha|} p_{\alpha} \widehat{u}\,.$$

Les formules (avec $\delta = \delta_0$)

$$\tau_h u = u * \delta_{-h} = \delta_{-h} * u\,, \quad \mathrm{D}^{\alpha} u = u * \mathrm{D}^{\alpha}\delta = \mathrm{D}^{\alpha} u * \delta \tag{6.63}$$

sont évidentes si u est engendrée par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et δ_a est traité comme une « fonction » telle que $\delta_a(x) = 0$ si $x \neq a$ et $\int f(y)\,\delta_a(y)\,\mathrm{d}y = f(a)$; ainsi,

$$(u * \delta_{-h})(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)\,\delta_{-h}(y)\,\mathrm{d}y = u(x+h) = \tau_h u(x)\,.$$

Cette manipulation peut être justifiée par la définition rigoureuse de la convolution des distributions comme indiquée dans (6.53). Nous n'utiliserons la convolution des distributions que pour suggérer des formules qui seront justifiées dans la suite par d'autres calculs.

6.5 QUELQUES COMPLÉMENTS ÉLÉMENTAIRES

6.5.1 Préliminaires

Dans cette section nous nous restreignons aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, même si une grande partie de ce qui suit peut être généralisée aux fonctions $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, quitte à introduire une notation adéquate. Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont souvent interprétées comme *signaux* dans la théorie des communications et leur analyse est basée sur une étude de $\widehat{f}$ (en admettant que $\widehat{f}$ existe dans un sens ou un autre) ; on interprète $f(t)$ comme le signal au temps t et on dit que $\widehat{f}(\omega)$ est le *spectre de Fourier* associé à f (pour la fréquence ω) . Il y a toute une terminologie très variée développée par les ingénieurs autour de f et $\widehat{f}$ que nous n'essayons pas de donner ici ; mais puisque la formule d'inversion de Fourier y joue un rôle essentiel, nous la présentons ici dans ses différentes versions.

Il est commode d'introduire la notation suivante : on écrit

$$⨍_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad ⨍_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$$

en supposant que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est localement intégrable ; autrement dit $⨍_{-\infty}^{\infty}$, $⨍_{0}^{\infty}$ sont des intégrales impropres ($⨍_{-\infty}^{\infty}$ s'appelle aussi *valeur principale* de $\int_{-\infty}^{\infty}$).

6.5.2 Formules intégrales de Fourier

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-iy\xi}\,\mathrm{d}y$$

définit $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue (s'annulant à l'infini) ; au vue de la formule d'inversion de Fourier (§ 6.1.3), il est naturel de considérer, pour $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$I_\lambda(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi\,. \quad (6.64)$$

On peut écrire $I_\lambda(f;x)$ de plusieurs façons différentes ; ainsi

$$I_\lambda(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi\,, \quad (6.65)$$

en observant que, si $g(x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}y$, alors

$$g(x,\xi) + g(x,-\xi) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} g(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{0}^{\lambda}\big\{g(x,\xi) + g(x,-\xi)\big\}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

En écrivant $\cos(x-y)\xi = \cos x\xi\cos y\xi + \sin x\xi\sin y\xi$, on a

$$I_\lambda(f;x) = \int_{0}^{\lambda}\big\{a(\xi)\cos x\xi + b(\xi)\sin x\xi\big\}\,\mathrm{d}\xi \quad (6.66)$$

avec

$$a(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\xi y\,\mathrm{d}y\,, \quad b(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin\xi y\,\mathrm{d}y\,. \quad (6.67)$$

Si f est une fonction paire ($f(y) = f(-y)$), alors

$$b(\xi) = 0\,, \quad a(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y)\cos \xi y \,\mathrm{d}y$$

et

$$\begin{aligned} I_\lambda(f;x) &= \int_0^\lambda a(\xi)\cos x\xi \,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\lambda \cos x\xi \left\{\int_0^\infty f(y)\cos \xi y \,\mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}\xi\,. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Si f est une fonction impaire ($f(y) = -f(-y)$), alors

$$a(\xi) = 0\,, \quad b(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y)\sin \xi y \,\mathrm{d}y$$

et

$$\begin{aligned} I_\lambda(f;x) &= \int_0^\lambda b(\xi)\sin x\xi \,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\lambda \sin x\xi \left\{\int_0^\infty f(y)\sin \xi y \,\mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}\xi\,. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Puisque f est intégrable dans $\mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ est fini, on peut intervertir les intégrales itérées dans (6.64) ou (6.65), en utilisant le théorème de Fubini (vol. 1) ; alors on a

$$I_\lambda(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y}\,\mathrm{d}y \tag{6.70}$$

car

$$\int_0^\lambda \cos(x-y)\xi \,\mathrm{d}\xi = \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y}\,, \quad x \neq y\,.$$

Les formules (6.66) à (6.69) montrent la similarité entre $I_\lambda(f;x)$ et $S_n(f;x)$, la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier d'une fonction périodique f (chap. 4) ; la formule (6.70) est l'analogue de la formule pour $S_n(f;x)$ (cf. (4.40)). Exactement, comme dans la théorie des séries de Fourier,

$$I_\lambda(f;x) \xrightarrow{\lambda\to\infty} f(x) \text{ ou } \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\} \tag{6.71}$$

sous certaines hypothèses sur f (cf. § 6.5.7).

Ainsi, si $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a vu que

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_\lambda(f;x) = f(x) \quad \text{p.p. } x\,;$$

si f est continue partout et $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_\lambda(f;x) = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Notons que *si* $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty} I_\lambda(f;x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{6.72}$$

dans le sens que les intégrales concernant $\mathrm{d}\xi$ sont absolument convergentes (au sens des intégrales de Lebesgue) et ne sont pas des intégrales impropres ; en effet,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}\xi < \infty$$

$$\int_{0}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}\xi < \infty$$

car (avec $g(x,\xi)$ comme ci-dessus)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}y\right| = |g(x,\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\,\mathrm{d}y\right| = \frac{1}{2}\,|g(x,\xi)+g(x,-\xi)| \leqslant |\widehat{f}(\xi)|$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi < \infty$$

après notre hypothèse $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Il faut observer que dans (6.72), les intégrales concernées sont des intégrales *itérées* (avec l'ordre d'intégration clairement indiqué) et *non des intégrales doubles*. En effet, la fonction

$$(y,\xi) \longmapsto f(y)\cos(x-y)\xi$$

n'est pas intégrable en général dans $\mathbb{R}^2$ et le théorème de Fubuni n'est pas applicable ; une inversion des intégrales dans la première égalité de (6.72) donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i(x-y)\xi}\,\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}y\ ; \tag{6.73}$$

cette expression n'a pas de sens dans la théorie d'intégration usuelle car l'intégrale entre parenthèse dans (6.73) n'existe pas ; néanmoins si l'on interprète cette intégrale au sens des distributions, on obtient, d'après (6.57)(i), que celle-ci vaut $2\pi\,\delta_x$ de sorte que l'expression (6.73) vaut $f(x)$, comme prévu par (6.71). Une interprétation analogue est possible aussi pour l'inversion de l'ordre d'intégration dans l'autre formule de (6.72). Ce raisonnement en utilisant les distributions est rendu rigoureux par la discussion du paragraphe 6.4.10. Une autre façon de rendre le raisonnement mathématiquement précis est d'introduire des

« facteurs de convergence » dans (6.73) ; c'est la voie que nous avons suivie dans le paragraphe 6.2.8 en utilisant le noyau de Gauss.

La formule (6.71) (valable sous certaines hypothèses sur f) s'appelle la ***formule intégrale de Fourier*** ; *cette formule est certainement vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *si* f, $\widehat{f}$ *sont dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et* f *est continue.* D'autres conditions sont données dans le paragraphe suivant.

On peut utiliser les formules (6.68) et (6.69) pour obtenir d'autres expressions pour la formule intégrale de Fourier (6.71). Une façon classique et élégante est d'introduire les transformées suivantes : si $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ est intégrable, posons

$$\begin{aligned} F_c(\xi) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(y) \cos(\xi y)\, \mathrm{d}y \\ F_s(\xi) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(y) \sin(\xi y)\, \mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{6.74}$$

On peut appeller F_c la *transformée de Fourier en cosinus* de f et F_s la *transformée de Fourier en sinus* de f. Alors (6.71) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty F_c(\xi) \cos(x\xi)\, \mathrm{d}\xi &= f(x) \text{ ou } \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\} \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty F_s(\xi) \sin(x\xi)\, \mathrm{d}\xi &= f(x) \text{ ou } \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\} \end{aligned} \tag{6.75}$$

où $\int_0^\infty$ est l'intégrale impropre définie par $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda$. De nouveau, *(6.75) est valable pour tout* $x \geqslant 0$ *si* $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ *est continue et intégrable avec* F_c, F_s *intégrables dans* $[0, \infty[$ *; en plus, on suppose* $f(0) = 0$ *pour la validité de la formule contenant* F_s *à* $x = 0$ *; les intégrales dans (6.75) sont alors des intégrales absolument convergentes.*

En effet, prolongeons f par parité en $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire posons $f(x) = f(-x)$ si $x < 0$) ; si f est continue dans $[0, \infty[$, alors le prolongement pair $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sera continu avec $\widehat{f} = \sqrt{2\pi}\, F_c$; si F_c est intégrable sur $[0, \infty[$, alors $\widehat{f}$ sera intégrable dans $\mathbb{R}$ car $F_c(-\xi) = F_c(\xi)$; d'après la formule d'inversion de Fourier, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F_c(\xi)\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty F_c(\xi) \cos x\xi\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

ce qui est (6.75) pour F_c avec $\int_0^\infty$ remplaçant $\mathcal{f}_0^\infty$. On vérifie (6.75) pour F_s (sous des hypothèses indiquées) en prolongeant f en $\mathbb{R}$ par imparité ($f(x) = -f(-x)$ si $x < 0$) ; on aura $\widehat{f} = (\sqrt{2\pi}/i)F_s$, $F_s(-\xi) = -F_s(\xi)$, ce qui donne, comme auparavant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\xi)\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi = \frac{2i}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F_s(\xi) \sin x\xi\, \mathrm{d}\xi$$
$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty F_s(\xi) \sin x\xi\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Nous donnons maintenant une proposition générale qui permettra d'avoir un énoncé valable pour (6.71) et (6.75) avec $(1/2)\{f(x+) + f(x-)\}$ à la place de $f(x)$ (si f est discontinue en x).

6.5.3 Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin \lambda(a-y)}{a-y}\, \mathrm{d}y = \alpha \tag{6.76}$$

est que, pour un $\delta > 0$, on ait

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\delta \{f(a+y) + f(a-y) - 2\alpha\} \frac{\sin \lambda y}{y}\, \mathrm{d}y = 0\,. \tag{6.77}$$

Si (6.77) est vérifiée pour un $\delta > 0$, elle est vérifiée pour tout $\delta > 0$. (Noter que (6.76) équivaut à $\lim_{\lambda\to 0} I_\lambda(f; a) = \alpha$; cf. (6.70).)

On utilise un lemme (déja vu) et un calcul bien connu pour la démonstration de cette proposition ; nous les formulons ici séparément pour plus de clarté.

6.5.4 Lemme (*de Riemann-Lebesgue*)

Si $\int_a^b |g(y)|\, \mathrm{d}y < \infty$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(y) \sin \lambda y\, \mathrm{d}y = 0\,, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b g(y) \cos \lambda y\, \mathrm{d}y = 0\,.$$

6.5.5 Lemme

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\,.$$

Le lemme 6.5.4 est une conséquence immédiate du lemme de Riemann–Lebesgue donné dans le paragraphe 6.1.3. Il suffit de considérer le cas où g est

réelle et $a = -\infty$, $b = \infty$ (en prolongeant g par $g(y) = 0$ si $y > b$ ou $y < a$) ; alors on a

$$0 = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, \mathrm{e}^{i\lambda y}\, \mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cos \lambda y\, \mathrm{d}y + i \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \sin \lambda y\, \mathrm{d}y \right\}$$

ce qui prouve le lemme 6.5.4.

La formule du lemme 6.5.5 a été établie aussi bien dans le volume 1 (p. 261) que dans le volume 2 (p. 212). Voici une autre méthode qui utilise le lemme 6.5.4 et l'égalité (§ 4.2.2)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin t/2}\, \mathrm{d}t = 1\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

On en obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + 1/2)t}{t}\, \mathrm{d}t = 1$$

car

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \left\{ \frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t} \right\} \mathrm{d}t = 0$$

d'après le lemme 6.5.4 (la fonction $t \mapsto 1/(\sin t/2) - 2/t$ étant continue et bornée dans $]\,0\,,\,\pi\,]$). Donc

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\,;$$

le lemme 6.5.5 sera établi si l'on démontre que

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in\mathbb{R}_+}} \int_0^{\lambda} \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y$$

existe ; pour ce faire, on démontre par une intégration par parties que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\pi/2}^{\lambda} \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y = -\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos y}{y^2}\, \mathrm{d}y\,.$$

Démontration de la proposition 6.5.3

Fixons un $\delta > 0$; alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin \lambda(a - y)}{a - y}\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(a - t) \frac{\sin \lambda t}{t}\, \mathrm{d}t = J_1(\lambda) + J_2(\lambda) + J_3(\lambda)$$

où

$$J_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{-\delta} g(t) \sin \lambda t\, \mathrm{d}t\,, \quad J_2(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} g(t) \sin \lambda t\, \mathrm{d}t$$

$$J_3(\lambda) = \int_{\delta}^{\infty} g(t) \sin \lambda t\, \mathrm{d}t\,,$$

avec $g(t) = f(a-t)/t$. Puisque

$$\int_{-\infty}^{-\delta} |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$
$$\int_{\delta}^{\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

on a

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_1(\lambda) = 0\,, \quad \lim_{\lambda\to\infty} J_3(\lambda) = 0$$

grâce au lemme 6.5.4. On vérifie que

$$J_2(\lambda) = \int_0^{\delta} \{f(a+y) + f(a-y)\}\frac{\sin\lambda y}{y}\,\mathrm{d}y\,;$$

de plus,

$$\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin\lambda y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\lambda\to\infty} \alpha\,.$$

Puisque

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sin\lambda(a-y)}{a-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\{J_1(\lambda) + J_3(\lambda)\} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\{f(a+y) + f(a-y) - 2\alpha\}\frac{\sin\lambda y}{y}\,\mathrm{d}y + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin\lambda y}{y}\,\mathrm{d}y\,,$$

la proposition 6.5.3 est établie. ♦

6.5.6 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; alors (6.76) est vérifiée si, pour un $\delta > 0$,

$$\int_0^{\delta}\left|\frac{1}{y}\{f(a+y) + f(a-y) - 2\alpha\}\right|\mathrm{d}y < \infty\,. \tag{6.78}$$

En particulier, si $f(a+)$, $f(a-)$ et

$$\mathrm{D}_+f(a) = \lim_{0<t\to 0}\frac{1}{t}\{f(a+t) - f(a+)\}\,, \quad \mathrm{D}_-f(a) = \lim_{0<t\to 0}\frac{1}{-t}\{f(a-t) - f(a-)\}$$

existent, alors (6.76) est vérifiée avec $\alpha = (1/2)\{f(a+) + f(a-)\}$. Ainsi, si $f'(a)$ existe, alors (6.76) est vérifiée avec $\alpha = f(a)$.

En effet, d'après le lemme 6.5.4, (6.78) entraîne (6.77) d'où résulte (6.76) ; de plus, l'existence de $f(a\pm)$, $\mathrm{D}_\pm f(a)$ entraîne que l'intégrant de (6.78) est borné dans un intervalle $[0\,,\,\delta\,]$ de sorte que (6.78) est alors vérifiée. (Ce corollaire reste valable pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que f est à *variation bornée* dans un intervalle ouvert contenant le point a ; la notion de variation bornée a été discutée dans le paragraphe 4.2.6.)

6.5.7 Remarques

(1) Selon la proposition 6.5.3, l'existence de la limite dans (6.76) dépend seulement du comportement de f dans le voisinage $]\,a-\delta\,,\,a+\delta\,[$ de a, $\delta>0$ étant aussi petit que l'on veut. Ceci donne le *principe de localisation* suivant : si f, g sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f(x)=g(x)$ pour $x\in\,]\,a-\delta\,,\,a+\delta\,[$ (pour un $\delta>0$) et si (6.76) est vérifiée, alors on a également

$$I_\lambda(g\,;a)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{\sin\lambda(a-y)}{a-y}\,\mathrm{d}y\xrightarrow{\lambda\to\infty}\alpha\,.$$

(2) Du corollaire 6.5.6 on conclut ce qui suit : *soit $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; si f est continue par morceaux dans chaque intervalle compact de $\mathbb{R}$ (§ 4.2.8) et si $\mathrm{D}_\pm f(x)$ existent pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_\lambda(f;x)=\frac{1}{2}\left\{f(x+)+f(x-)\right\},\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Rappelons que, d'après (6.65),

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_\lambda(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi$$

et que l'on peut remplacer $\int_0^\infty$ par $\int_0^\infty$ si $\widehat{f}$ est aussi intégrable (cf. (6.72)).

(3) En se rappelant que d'après (6.64)

$$I_\lambda(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi\,,$$

on obtient de (2) une formule d'inversion :

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\left\{f(x+)+f(x-)\right\},\quad x\in\mathbb{R}\tag{6.79}$$

sous les hypothèses sur f indiquées dans (2).

6.5.8 Un raisonnement heuristique

Le raisonnement suivant est souvent indiqué pour suggérer la validité de la formule d'inversion de Fourier. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable et suffisamment régulière pour que f puisse être développée en une série de Fourier dans chaque intervalle $[\,-\lambda\,,\,\lambda\,]$:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp\Big(in\frac{\pi}{\lambda}x\Big)\,,\quad -\lambda<x<\lambda$$

où

$$c_n=\frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,\exp\Big(-in\frac{\pi}{\lambda}x\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons $\xi_n = n\pi/\lambda$, $\Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \pi/\lambda$ et

$$F_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x\,.$$

Alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} F_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{f}\,(\xi)$$

et

$$c_n = F_\lambda(\xi_n)\,\Delta\xi_n$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_\lambda(\xi_n)\exp(i\xi_n x)\,\Delta\xi_n\,, \quad -\lambda < x < \lambda\,.$$

Lorsque $\lambda \to \infty$, il est raisonnable de conclure de ce qui précède que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\,, \quad -\infty < x < \infty$$

en considérant la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ comme une approximation (de Riemann) pour $\int_{-\infty}^{\infty}$. De plus, de l'égalité de Bessel (§ 4.1.10), on a

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = 2\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_\lambda(\xi_n)|^2 (\Delta\xi_n)^2$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_\lambda(\xi_n)|^2\,\Delta\xi_n$$

car $2\lambda\,\Delta\xi_n = 2\pi$; en faisant $\lambda \to \infty$ dans la dernière formule, on peut conclure raisonnablement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2\pi}\,\widehat{f}\,(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}\,(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

étant donné que $F_\lambda(\xi) \to (1/2\pi)\widehat{f}\,(\xi)$ lorsque $\lambda \to \infty$. On a ainsi retrouvé (par un raisonnement heuristique) une partie importante du théorème de Plancherel (prop. 6.4.11*(iii)*) dans $\mathbb{R}$:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\,\|\widehat{f}\,\|_2^2\,.$$

Le raisonnement précédent ne prétend pas d'être rigoureux ; mais il suggère d'autres résultats concernant les transformées de Fourier en partant des séries de Fourier. Certains de ces résultats sont formulés et démontrés (rigoureusement) dans les exercices.

6.6 EXERCICES

1 Etablir les formules suivantes :

(i) soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ -1 & \text{si } -a < x < 0 \\ 0 & \text{si } |x| > a\,; \end{cases}$$

alors

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2i}{\xi}\,(\cos a\xi - 1) & \text{si } \xi \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } \xi = 0\,; \end{cases}$$

(ii) soit

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

alors

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2}{\xi^2}\,(\xi \sin \xi + \cos \xi - 1) & \text{si } \xi \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } \xi = 0\,; \end{cases}$$

(iii) soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$; alors

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{-4\alpha\xi i}{\left(\alpha^2 + \xi^2\right)^2}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,;$$

(iv) soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$; alors

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}\xi}{2\alpha^3 i}\,\exp\left(\frac{-\xi^2}{4\alpha^2}\right)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

2 Vérifier que chaque transformée $\widehat{f}$ de l'exercice 1 est de classe C^∞ ; voir que ceci est aussi une conséquence du résultat suivant que l'on établit : si (cf. § 6.1.3(7))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x^n f(x)\right| \mathrm{d}x < \infty\,, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{alors } \widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})\,.$$

3 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

(a) Démontrer que $\widehat{f}$ est réelle si et seulement si $f(x) = \overline{f(-x)}$ p.p. x.

(b) Démontrer que $\widehat{f}$ est purement imaginaire si et seulement si $f(x) = -\overline{f(-x)}$ p.p. x.

(Voir que

$$\widehat{f} = \bar{\widehat{f}} \iff \int_{\mathbb{R}^N} \{f(x) - \overline{f(-x)}\} \exp(-ix \cdot \xi)\, dx = 0\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

$$\widehat{f} = -\bar{\widehat{f}} \iff \int_{\mathbb{R}^N} \{f(x) + \overline{f(-x)}\} \exp(-ix \cdot \xi)\, dx = 0\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N\,.)$$

4 Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, posons

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + \overline{f(-x)}\}\,, \quad f_{\mathrm{imp}}(x) = \frac{1}{2}\{f(x) - \overline{f(-x)}\}\,.$$

Vérifier les affirmations suivantes :

(i) $f = f_{\mathrm{p}} + f_{\mathrm{imp}}$; si f est réelle, alors f_{p} est paire et f_{imp} est impaire ;
(ii) si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f_{\mathrm{p}}} = \operatorname{Re} \widehat{f}$, $\widehat{f_{\mathrm{imp}}} = i \operatorname{Im} \widehat{f}$ et $\widehat{f} = \widehat{f_{\mathrm{p}}} + \widehat{f_{\mathrm{imp}}}$.

5 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Démontrer que f est réel p.p. si et seulement si $\widehat{f}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

6 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

(i) Si f est une fonction réelle et paire, vérifier que

$$\widehat{f}(\xi) = \operatorname{Re} \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cos x \cdot \xi\, dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

et que si $N = 1$,

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos x\, \xi\, dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Si f est une fonction réelle et impaire, vérifier que

$$\widehat{f}(\xi) = i \operatorname{Im} \widehat{f}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \sin x \cdot \xi\, dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

et que si $N = 1$,

$$\widehat{f}(\xi) = -2i \int_0^\infty f(x) \sin x\, \xi\, dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

7 Démontrer que $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin x/x)^2\, dx = \pi$:

(i) en utilisant l'exemple 2 (§ 6.1.5) ;
(ii) en utilisant l'exemple 1 (§ 6.1.5) et la formule de Parseval (prop. 6.4.12).

8 Posons $\operatorname{sgn} x = 1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$. En utilisant le calcul de l'exercice 1(i) et (6.79), vérifier que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\lambda \frac{1}{\xi}(1-\cos\xi)\sin x\,\xi\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|>1 \\ 1/2 & \text{si } x=1 \\ -1/2 & \text{si } x=-1 \end{cases}$$

ce que l'on peut vérifier directement aussi. Obtenir, en utilisant la formule de Parseval, que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\cos\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \pi\,.$$

9 Soit $h_\alpha(x) = (\alpha/\pi)\big(\alpha^2+x^2\big)^{-1}$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$. Calculer $\widehat{h}_\alpha$ et démontrer que $h_\alpha * h_\beta = h_{\alpha+\beta}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, avec $\int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\alpha>0$. (Utiliser l'exemple 3 (§ 6.1.5), la formule d'inversion de Fourier et la formule de convolution.)

10 (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; la formule concernée s'exprime comme suit : si $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha\beta = 2\pi$, alors

$$\alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n\beta) \tag{6.80}$$

sous certaines conditions sur f. Etablir (6.80) en procédant formellement comme suit : poser $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n\alpha)$; puisque F est α-périodique, on peut écrire F comme une série de Fourier :

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(i\beta m x)\,,\quad \beta = \frac{2\pi}{\alpha}$$

où

$$c_m = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F(x)\exp(-i\beta m x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\,\widehat{f}(\beta m)$$

après un petit calcul échangeant $\int_0^\alpha$ et $\sum_{-\infty}^{\infty}$. Donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\beta m)\exp(i\beta m x)$$

ce qui donne (6.80) pour $x=0$. (Noter que $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entraîne que

$$\int_0^\alpha |F(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^\alpha |f(x+n\alpha)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

de sorte que F est intégrable dans $[0, \alpha]$, la série définissant F étant absolument convergente p.p. ; ce raisonnement justifie aussi le calcul de c_m. L'hypothèse principale sur f est que F doit être telle que la série de Fourier de F converge vers $F(0)$ pour $x = 0$, donc en particulier $F(0)$ doit être bien défini. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, par exemple, (6.80) est vérifiée et le raisonnement indiqué est exact comme on le voit aisément. Il y a une vaste littérature justifiant (6.80) sous d'autres conditions sur f.)

11 En prenant $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$ $(a > 0)$ dans (6.80), on obtient

$$\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-an^2\alpha^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-n^2\beta^2/4a}$$

pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha\beta = 2\pi$. En posant $a = \pi x$, $\alpha = 1$, $\beta = 2\pi$, on en déduit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2/x}, \quad x > 0,$$

ce qui s'écrit comme suit : si

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}, \quad \text{alors } \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \theta\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad x > 0.$$

12 En prenant $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ $(a > 0)$ dans (6.80), on obtient

$$\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|n|\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + n^2\beta^2}$$

pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha\beta = 2\pi$. En posant $\alpha = 2\pi$, $\beta = 1$, on en déduit après un petit calcul

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi a} + 1}{\mathrm{e}^{2\pi a} - 1} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\pi a}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi a}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}, \quad a > 0.$$

13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue intégrable telle que $\widehat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geqslant b$, $b > 0$. On établit la *formule d'échantillonnage*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{b}\Big) \frac{\sin(bx - n\pi)}{bx - n\pi}, \quad n \in \mathbb{R} \tag{6.81}$$

en procédant comme suit :

(i) selon la formule d'inversion de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \widehat{f}(x)\, \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R} ;$$

(ii) les séries de Fourier complexes dans $[-b, b]$ des fonctions $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ et $\xi \mapsto \exp(-ix\xi)$ donnent

$$\widehat{f}(\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\Big(\frac{in\xi\pi}{b}\Big), \quad e^{-ix\xi} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\Big(\frac{in\xi\pi}{b}\Big)$$

où

$$a_n = \frac{\pi}{b} f\Big(-\frac{n\pi}{b}\Big), \quad b_n = \frac{\sin(bx + n\pi)}{bx + n\pi} ;$$

(iii) à partir de (i) et de la formule de Parseval pour les séries de Fourier, on obtient

$$f(x) = \frac{b}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(-\frac{n\pi}{b}\Big) b_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{b}\Big) b_{-n}$$

ce qui donne (6.81). ((6.81) permet de reconstituer le *signal* f à partir d'un échantillon périodique $f(n\tau)$, $\tau = \pi/b$, $n \in \mathbb{Z}$; dans la théorie des signaux, x est le temps et on écrit souvent $b = 2\pi B$, $T = (2B)^{-1}$ et on dit que le signal f est de spectre à support borné.)

14 Soit $f = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; posons $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$ lorsque ces intégrales existent (μ_n s'appelle le *n-ième moment* de f). Sous des hypothèses appropriées (§ 6.1.3(7)) établir que $\mu_n = i^n \widehat{f}^{(n)}(0)$. Si $f = f_\sigma$ où

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

obtenir que

$$\mu_{2n} = \sigma^{2n} \frac{2n!}{2^n \cdot n!} = \sigma^{2n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

avec $\mu_1 = \mu_3 = \ldots = 0$. (l'exemple 4 (§ 6.1.5) donne $\widehat{f_\sigma}(\xi) = \exp(-\sigma^2\xi^2/2)$; f_σ est la densité de probabilité de la loi normale d'écart type σ.)

15 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, f continue, $f(x) = 0$ si $x < 0$; posons $\alpha = \operatorname{Re}\widehat{f}$, $\beta = \operatorname{Im}\widehat{f}$. En supposant que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on établit les formules suivantes :

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi$, $x > 0$;

(ii) $\alpha(\xi) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Re}\Big\{ i \displaystyle\int_0^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\eta)\,e^{-ix(\xi-\eta)}\,d\eta \Big)\,dx \Big\}$, $\xi \in \mathbb{R}$;

(iii) $\beta(\xi) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Im}\Big\{ \displaystyle\int_0^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\eta)\,e^{-ix(\xi-\eta)}\,d\eta \Big)\,dx \Big\}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(Observer que $f(x) = 2f_{\mathrm{p}}(x) = 2f_{\mathrm{imp}}(x)$ si $x > 0$, $\widehat{f}_{\mathrm{p}} = \alpha$, $\widehat{f}_{\mathrm{imp}} = i\beta$ (cf. Ex. 4) ; appliquer ensuite la formule d'inversion de Fourier pour avoir (i) ; pour (ii) et (iii) utiliser (i) avec

$$\alpha(\xi) = \mathrm{Re} \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x\,, \quad \beta(\xi) = \mathrm{Im} \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x\,.$$

Dans la théorie des signaux, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec $f(x) = 0$ si $x < 0$, s'appelle un signal *causal* ; pour ces signaux, α seul (ou β seul) détermine f et les formules (ii) et (iii) montrent que β est déterminé par α et vice versa. Il y a de meilleures formules pour obtenir β à partir de α et réciproquement, en utilisant la transformée de Hilbert (cf. Ex. 24). Du point de vue de l'analyse complexe,

$$F(z) = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-zx}\, \mathrm{d}x$$

définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $D = \{z = \sigma + i\xi : \sigma > 0\}$, F continue dans $\overline{D}$ avec $F(i\xi) = \widehat{f}(\xi)$; la littérature sur les fonctions holomorphes de ce genre est vaste.)

16 (Continuation de l'exercice 15) Supposons de plus que f est réelle. Alors on a les formules suivantes :

$$\text{(i) } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha(\xi) \cos x\xi \, \mathrm{d}\xi = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \beta(\xi) \sin x\xi \, \mathrm{d}\xi,\ x > 0\,;$$

$$\text{(ii) } \alpha(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos x\xi \left(\int_0^\infty \beta(\eta) \sin x\eta \, \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}x,\ \xi \in \mathbb{R}\,;$$

$$\text{(iii) } \beta(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin x\xi \left(\int_0^\infty \alpha(\eta) \cos x\eta \, \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}x,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

17 Soit $u = \sum_{j=-N}^{N} a_j\, \delta_{\alpha_j}$ avec $a_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$; alors $\widehat{u}$ est la distribution (tempérée) engendrée par la fonction continue $x \mapsto \sum_{j=-N}^{N} a_j \exp(-i\alpha_j x)$, $x \in \mathbb{R}$; on écrit

$$\widehat{u} = \sum_{j=-N}^{N} a_j \exp(-i\alpha_j x)\,.$$

(On peut généraliser ce résultat à $u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, \delta_{\alpha_j}$ en supposant que les $a_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ sont tels que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ce qui équivaut à avoir la somme $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, \varphi(\alpha_j)$ convergente pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; alors $\widehat{u}$ est donné par $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \exp(-i\alpha_j x)$ au sens des distributions tempérées ; $\widehat{u}$ n'est plus une fonction en général.)

18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction p-périodique ($p > 0$) et intégrable dans $[0, p]$. On établit que, au sens des distributions tempérées,

$$\widehat{f} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\delta_{2\pi n}}{p}$$

où $c_n = (1/p) \int_0^p f(x) \exp(-2\pi i n x/p)\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, en suivant le calcul qui suit : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \widehat{\varphi}(x)\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)/p} f(x)\, \widehat{\varphi}(x)\, dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^p f(x)\, \widehat{\varphi}(x - np)\, dx = \int_0^p f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x + np)\, dx \\
&= \int_0^p f(x) \cdot \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\varphi}}\left(-\frac{2\pi n}{p}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} n x\right) dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \varphi\left(\frac{2\pi n}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \exp\left(-\frac{2\pi i}{p} n x\right) dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \left\langle \frac{\delta_{2\pi n}}{p}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé un calcul de l'exercice 10 et $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = 2\pi\varphi(-x)$.

19 Soit $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n\beta}$, $\beta > 0$; on établit que

$$\widehat{u} = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n\alpha}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\beta},$$

au sens des distributions tempérées dans $\mathbb{R}$. (Utiliser l'exercice 10.)

20 Ecrivons sgn pour la distribution tempérée engendrée par la fonction $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$ (cf. Ex. 8). On établit que $\widehat{\operatorname{sgn}} = (2/i)v$ où $v = \mathrm{VP}(1/x)$ (sect. 4.6, Ex. 3) défini par

$$\langle v, \varphi \rangle = \lim_{0 < \varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

en suivant le calcul qui suit : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\operatorname{sgn}}\,, \varphi\rangle = \langle \operatorname{sgn}\,, \widehat{\varphi}\rangle &= \int_0^\infty \{\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\varphi}(-\xi)\}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{i}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\sin x\xi\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{i}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\xrightarrow{\lambda\to\infty} \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{\lambda\to\infty}\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(en utilisant le lemme de Riemann–Lebesgue) et

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0\,;$$

pour ce dernier point, on écrit

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

d'où, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,(1-\cos\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0\,;$$

noter que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1-\cos\lambda x}{x}\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad \varepsilon > 0\,.$$

(Dans la littérature des sciences appliquées, on écrit même $\widehat{\operatorname{sgn}}(\xi) = 2/i\xi$; le sens de cette écriture est précisée dans cet exercice.)

21 Soit H la fonction de Heaviside : $H(x) = 1$ si $x > 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$. On établit que $\widehat{H} = \pi\,\delta + (1/i)v$ (cf. Ex. 20) en observant que $H = 1/2 + 1/2\,\mathrm{sgn}$ et $\widehat{1} = 2\pi\,\delta$ (§ 6.4.14).

22 Soit $P(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha\,\mathrm{D}^\alpha$ où les $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, et les α sont des multi-indices (§ 6.1.2) ; pour $x \in \mathbb{R}^N$, posons

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha (ix)^\alpha$$

(voir le paragraphe 6.1.2 pour la notation $(ix)^\alpha$). Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on établit que $\big(P(\mathrm{D})u\big)^\wedge = P \cdot \widehat{u}$ en suivant le calcul qui suit : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\Big\langle \big(P(\mathrm{D})u\big)^\wedge, \varphi \Big\rangle = \langle P(\mathrm{D})u\,,\,\widehat{\varphi}\rangle &= \sum_{|\alpha|\leqslant n} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle u\,,\,\mathrm{D}^\alpha \widehat{\varphi}\rangle \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant n} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle u\,,\,\widehat{p_\alpha \varphi}\rangle\,, \quad p_\alpha(x) = (-ix)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant n} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle p_\alpha\,\widehat{u}\,,\,\varphi\rangle = \langle P\cdot\widehat{u}\,,\,\varphi\rangle\end{aligned}$$

car

$$\sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha (-1)^{|\alpha|}(-ix)^\alpha = \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha (ix)^\alpha = P(x)\,.$$

23 (Continuation de l'exercice 22) Si $\triangle = \mathrm{D}_{11} + \cdots + \mathrm{D}_{NN}$ (le laplacien dans $\mathbb{R}^N$), alors pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$,

$$\widehat{\triangle u} = -r^2 \widehat{u}$$

avec $r(x_1, \ldots, x_N) = \big(x_1^2 + \cdots + x_N^2\big)^{1/2}$. En particulier, si $\triangle u = \delta$, alors $\widehat{u} = -r^{-2}$. Plus généralement, si $P(\mathrm{D})u = \delta$, alors $\widehat{u} = 1/P$. (Si $P(\mathrm{D})u = \delta$, on dit que u est une *solution fondamentale* pour l'opérateur différentiel $P(\mathrm{D})$; la connaissance de u permet la résolution des équations du type $P(\mathrm{D})a = b$ par la formule $a = u * b$ ce qui donne (formellement)

$$P(\mathrm{D})a = P(\mathrm{D})u * b = \delta * b = b\,.$$

Un théorème important de la théorie (théorème de Malgrange–Ehrenpreis) affirme qu'*une solution fondamentale existe pour tout opérateur différentiel* $P(\mathrm{D})$. Notons que $P(\mathrm{D})$ est un opérateur différentiel à coefficients a_α constants ; la situation est plus compliquée pour les opérateurs différentiels dont les coefficients a_α sont des fonctions.

Pour l'opérateur laplacien $\triangle$, les solutions fondamentales sont données par les *fonctions* suivantes :

$$u(x) = -\alpha_N \|x\|^{2-N}, \quad \alpha_N = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \qquad \text{si } N \geqslant 3$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x\| \quad \text{si } N = 2, \qquad u(x) = \frac{1}{2}|x| \quad \text{si } N = 1,$$

ω_N étant la mesure naturelle de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$: $\omega_N = (2\pi^{N/2})/\Gamma(N/2)$ (vol. 1, p. 485, $\omega_3 = 4\pi$, $\omega_2 = 2\pi$). Nous y reviendrons.)

24 Les notations sont celles de l'exercice 15 : $\widehat{f} = \alpha + i\beta$ avec $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f(x) = 0$ si $x < 0$; $\alpha = \widehat{f_{\mathrm{p}}}$, $i\beta = \widehat{f_{\mathrm{imp}}}$ où $\widehat{f_{\mathrm{p}}}$ et $\widehat{f_{\mathrm{imp}}}$ sont définies dans l'exercice 14. Vérifier que $f_{\mathrm{p}}(x) = \operatorname{sgn} x \cdot f_{\mathrm{imp}}(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$; en conclure (en s'inspirant de (6.55)) que

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{i} v * i\beta = \frac{1}{\pi} v * \beta, \quad i\beta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{i} v * \alpha = \frac{1}{i\pi} v * \alpha, \quad \beta = -\frac{1}{\pi} v * \alpha$$

où $\widehat{\operatorname{sgn}} = (2/i)v$ (Ex. 20). Ces formules s'écrivent comme suit :

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(y)}{\xi - y}\, \mathrm{d}y, \quad \beta(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(y)}{\xi - y}\, \mathrm{d}y$$

les intégrales étant prises comme « valeurs principales » :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y)}{\xi - y}\, \mathrm{d}y = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{|\xi-y|>\varepsilon} \frac{g(y)}{\xi - y}\, \mathrm{d}y = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{g(\xi - y)}{y}\, \mathrm{d}y$$

(si $Tg(\xi) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)/(\xi - y)\, \mathrm{d}y$, on dit que Tg est la transformée de Hilbert de g, l'intégrale étant prise comme valeur principale ; si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'existence de Tg est facile à démontrer (cf. sect. 4.6, Ex. 3) ; la discussion de cet exercice est un peu formelle, le maniement rigoureux des transformées de Hilbert exigeant une discussion plus subtile. La théorie des transformées de Hilbert et autres intégrales singulières est importante pour l'étude des équations aux dérivées partielles mais aussi dans d'autres domaines.)

6.7 COMPLÉMENTS CONCERNANT LA TRANSFORMATION DE FOURIER

6.7.1 Analyse harmonique

La théorie des séries de Fourier permet la représentation (*analyse*) d'une fonction 2π-périodique en termes des fonctions trigonométriques $\sin nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$ (appelées « les harmoniques » correspondantes à la période 2π) ou encore

par les fonctions $\exp(inx)$, $n \in \mathbb{N}$. La théorie des transformées de Fourier permet la représentation des fonctions « arbitraires » en utilisant les fonctions $\exp(i\xi x)$, $\xi \in \mathbb{R}$. On a (dans $\mathbb{R}$)

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx), \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{d}x \quad \text{(cas } 2\pi\text{-périodique)}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) \exp(i\xi x)\, \mathrm{d}\xi, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x$$

(cas non périodique)

où l'on voit clairement l'analogie entre les coefficients de Fourier c_n et $(1/2\pi)\widehat{f}(\xi)$ formé avec transformée de Fourier. La même analogie subsiste lorsqu'on passe aux fonctions de plusieurs variables, comme on peut le voir dans les développements précédents. L'analyse harmonique classique concerne les études des fonctions (ou mesures) périodiques ou non périodiques dans $\mathbb{R}^N$ en termes de fonctions trigonométriques ou exponentielles ; depuis l'introduction systématique des distributions dans $\mathbb{R}^N$, cette étude s'étend pour inclure certaines classes de distribution (comme les distributions tempérées).

Un point de vue plus général est de remplacer le groupe $\mathbb{R}^N$ par des groupes plus généraux ; nous n'aurons pas l'occasion d'en parler même si les applications de cette théorie des groupes en physique sont nombreuses.

6.7.2 Remarques historiques et bibliographiques

Au paragraphe 3.8.2 on a déjà évoqué longuement les travaux de Fourier ; une analyse historique très détaillée est donnée dans le volumineux article de H. Burkhardt mentionné dans le paragraphe 4.4.2 ; Burkhardt a écrit un article un peu plus court dans *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (*Trigonometrische Reihen und Integrale*, Band 2/Erster Teil, pp. 825-1353, 1901-1921). Comme expliqué au paragraphe 4.5.7, la théorie des distributions est due à L. Schwartz ; son livre sur ce sujet (référence exacte donnée au paragraphe 4.5.7) contient un exposé complet sur la transformation de Fourier des distributions tempérées. Dautray–Lions [4] donne un résumé utile.

Le livre de Y. Katznelson (*An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, London, 1968) donne une introduction à la théorie du point de vue de la théorie des groupes et de l'analyse fonctionnelle.

Entre 1807 et 1822, Cauchy, Fourier, Poisson et d'autres mathématiciens ont donné diverses formes de la formule d'inversion de Fourier. Il est intéressant de remarquer que l'on a trouvé dans les papiers non publiés de Gauss (datant approximativement de 1799-1813) le théorème d'inversion de Fourier utilisé dans un problème analytique de la théorie des probabilités (*Gauss Werke*, vol. 8, p. 88).

6.8 TRANSFORMATION DE LAPLACE

6.8.1 Définition

Nous définissons la transformation de Laplace essentiellement pour certaines fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telles que

$$F(s) = \int_0^\infty f(x) \exp(-sx)\, \mathrm{d}x$$

existe comme intégrale (absolument convergente) de Lebesgue pour un $s = \sigma_0 \in \mathbb{R}$; alors $F(s)$ existe pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0$. La fonction complexe $s \mapsto F(s)$ est alors définie dans un demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0\}$; on dit que F est la *transformée de Laplace* de f. Dans ce contexte, nous écrivons $s = \sigma + it$, $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$. Puisque

$$F(\sigma + it) = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\, \mathrm{e}^{-itx}\, \mathrm{d}x\,,$$

on voit que $t \mapsto F(\sigma + it)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto f(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}$, en convenant que $f(x) = 0$ si $x < 0$. Cette remarque permet de déduire certaines propriétés des transformées de Laplace de celles des transformées de Fourier.

On peut aussi étudier les transformées de Laplace des fonctions $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{C}$ ou même des fonctions $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$; par exemple

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x$$

pour $s \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale existe s'appelle la *transformée bilatère de Laplace*. Nous n'en reparlerons pas dans la suite ; par contre, on introduira par la suite la transformée de Laplace de certaines distributions dans $\mathbb{R}$.

6.8.2 Conventions et préliminaires

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+ = [\,0\,, \infty\,[$; nous dirons que f *admet une transformée de Laplace* s'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^\infty \big|f(x)\big| \exp(-\sigma_0 x)\, \mathrm{d}x < \infty\,; \tag{6.82}$$

nous dirons que σ_0 est une *abscisse de convergence absolue pour* f (ou plus brièvement une *abscisse* pour f). L'intégrale dans (6.82) sera prise au sens de Lebesgue et on admettra *toujours* que f est mesurable ; en pratique f sera

même continue ou continue par morceaux de sorte que la théorie de l'intégration élémentaire nous suffira dans les applications concrètes. *Si (6.82) est vérifiée, alors f est localement intégrable et*

$$F(s) = \int_0^\infty f(x) \exp(-sx)\, \mathrm{d}x \tag{6.83}$$

est bien définie pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0$. En effet, si $0 \leqslant a < b < \infty$

$$\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b |f(x)| \exp(-\sigma_0 x)\, \mathrm{d}x \leqslant M \int_0^\infty |f(x)| \exp(-\sigma_0 x)\, \mathrm{d}x < \infty$$

où $M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \exp(\sigma_0 x)$; de plus, si $s = \sigma + it$, $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant \sigma_0$,

$$\int_0^\infty |f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}|\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x$$

car $\mathrm{e}^{-\sigma x} \leqslant \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}$ si $x \geqslant 0$, $\sigma \geqslant \sigma_0$; donc $F(s)$ de (6.83) existe (§ 6.8.4). ♦

Nous dirons que F est la *transformée de Laplace* de f et nous écrivons

$$F = \mathcal{L}\{f\} \quad \text{ou} \quad F(s) = \mathcal{L}\big\{f(x)\big\}\,.$$

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est tel que $\int_0^{x_0} |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty$ et

$$|f(x)| \leqslant C \exp(cx)\,, \quad x \geqslant x_0\,,$$

($C \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$, $x_0 \geqslant 0$), alors f admet une transformée de Laplace et (6.82) est vérifiée pour tout $\sigma_0 > c$.

En effet, on a, pour $\sigma_0 > c$,

$$\int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x \leqslant M \int_0^{x_0} |f(x)|\, \mathrm{d}x + \frac{C}{\sigma_0 - c} < \infty$$

où $M = \sup_{0 \leqslant x \leqslant x_0} \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}$ car

$$\int_{x_0}^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x \leqslant C \int_{x_0}^\infty \exp\big\{-(\sigma_0 - c)x\big\}\, \mathrm{d}x < \frac{C}{\sigma_0 - c}\,. \qquad ♦$$

D'autre part, si $f(x) = \exp x^2$, $x \geqslant 0$, alors f n'admet pas une transformée de Laplace car (6.82) est en défaut pour tout $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ à cause du fait que

$$\lim_{x \to \infty} \exp(x^2 - \sigma_0 x) = \infty\,, \quad \sigma_0 \in \mathbb{R}\,;$$

pour de telles fonctions f nous n'aurons pas des transformées de Laplace.

Nous suivrons les mêmes conventions que celles du paragraphe 6.1.2 au sujet des fonctions (toujours mesurables) ; si f est définie seulement p.p. dans $\mathbb{R}_+$, nous compléterons sa définition en posant $f(x) = 0$ pour les x pour lesquels f n'est pas définie. Ceci devient théoriquement nécessaire lors de la discussion

de la convolution de deux fonctions (comme déjà vu au paragraphe 6.2.6). De nouveau, ces précautions ne seront pas nécessaires pour les applications concrètes en vue.

Pour éviter les redites, nous convenons que l'écriture $\mathcal{L}\{f\} = F$ signifie que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ admet une transformée de Laplace F définie par (6.83) avec une abscisse $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ appropriée.

6.8.3 Propriétés principales de la tranformation de Laplace

Dans ce paragraphe nous énumérons les propriétés importantes de $F = \mathcal{L}\{f\}$, en supposant que f admet une transformée de Laplace (§ 6.8.2) ; les démonstrations établissant la validité de ces propriétés seront données dans la suite.

(1) ***Holomorphie***

Soit σ_0 une abscisse de convergence absolue pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (§ 6.8.2) ; alors $F = \mathcal{L}\{f\}$ définie par (6.83) est holomorphe dans le demi-plan ouvert $D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ avec

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) \exp(-sx)\, \mathrm{d}x \tag{6.84}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Ainsi

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \ \operatorname{Re} s > \sigma_0$$

si $\mathcal{L}\{f\} = F$. La fonction holomorphe F est bornée dans D_0 :

$$|F(s)| \leqslant \int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x\,, \quad s \in \mathcal{D}_0\,.$$

(2) ***Unicité***

Soient $\mathcal{L}\{f\} = F$, $\mathcal{L}\{g\} = G$; si $F(s) = G(s)$ pour $s > s_0$ (s, s_0 réels), alors $f = g$ p.p. ; si f, g sont continues dans $\mathbb{R}_+$, alors $f = g$.

(3) ***Convolution***

Soient f, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$; supposons que σ_0 est une abscisse de convergence absolue pour f et pour g. Alors p.p. $x > 0$

$$\int_0^x f(y)\, g(x-y)\, \mathrm{d}y\,, \quad \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$$

existent et sont égales, définissant une fonction $f * g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (appelée la convolution de f et g) ; σ_0 est une abscisse de convergence absolue pour $f * g$ et on a la formule de convolution

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\, \mathcal{L}(g)$$

valable dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0\}$.

(4) ***Formules de translation et de dilatation***

Soit $\mathcal{L}\{f\} = F$ *; soit* σ_0 *une abscisse de convergence absolue pour* f*. Alors, pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{\exp(\alpha x) f(x)\} = F(s-\alpha)\,, \quad \operatorname{Re}(s-\alpha) \geqslant \sigma_0$$

$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\Big(\frac{s}{a}\Big)\,, \quad \operatorname{Re}\Big(\frac{s}{a}\Big) \geqslant \sigma_0\,.$$

(5) ***Formule de dérivation***

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* C^n, $n \in \mathbb{N}^*$, *supposons que* $\sigma_0 \geqslant 0$ *est une abscisse de convergence absolue pour* $f^{(n)}$*. Alors* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ *existe pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *et*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} &= s^n F(s) - \{s^{n-1} f(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\} \\ &= s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0) \end{aligned} \tag{6.85}$$

pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *; chaque* $\sigma > \sigma_0$ *est une abscisse de convergence absolue pour* f*.* (En particulier, pour $n = 1, 2$, on a

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)\,.)$$

(6) ***Formule d'intégration***

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *continue ; posons* $g(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$*. Si* $\sigma_0 \geqslant 0$ *est une abscisse de convergence absolue pour* f*, alors tout* $\sigma > \sigma_0$ *est une abscisse de convergence absolue pour* g *et*

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{1}{s} F(s)\,, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0\,. \tag{6.86}$$

6.8.4 Remarques

Les formules données dans (1), (3), (4), (5) et (6) du paragraphe 6.8.3 sont celles que l'on utilise le plus souvent dans les applications. On peut les démontrer sous les conditions moins exigeantes sur les fonctions concernées.

Supposons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction localement intégrable ; disons que

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$$

existe au sens d'intégrale impropre si

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$$

existe. On peut démontrer que *si $F(s)$ existe au sens d'intégrale impropre, alors $F(s')$ existe au même sens pour* $\operatorname{Re} s' > \operatorname{Re} s$. Alors, on pose

$$\sigma_c = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : F(\sigma+it) \text{ existe au sens d'intégrale impropre pour un } t \in \mathbb{R}\};$$

σ_c s'appelle l'*abscisse de convergence* pour f. *Si $\sigma > \sigma_c$, alors $F(\sigma + it)$ existe au sens d'intégrale impropre pour tout $t \in \mathbb{R}$* car alors il existe σ_0, t_0 réels tels que $\sigma > \sigma_0 > \sigma_c$ avec $F(\sigma_0 + it_0)$ existant au sens d'intégrale impropre d'où l'on déduit l'existence de $F(\sigma + it)$ au même sens.

Rappelons que si $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est telle que

$$\int_0^\infty |g(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

alors

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x$$

existe ; en effet, si $0 < T_1 < T_2 < \infty$,

$$\left|\int_0^{T_2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{T_1} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{T_1}^{T_2} |g(x)|\,\mathrm{d}x \xrightarrow{T_1,\,T_2\to\infty} 0$$

si g est absolument intégrable dans $\mathbb{R}_+$, ce qui entraîne dans ce cas l'existence de la limite lorsque $T \to \infty$.

On peut définir σ_{ac}, l'***abscisse de convergence absolue*** pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$\sigma_{ac} = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} : \int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

On sait que si $s = \sigma + it$, σ et t réels, $\sigma > \sigma_{ac}$, alors

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)\exp(-sx)\,\mathrm{d}x$$

existe, l'intégrale étant absolument convergente ; un tel σ a été appelé *une* abscisse de convergence absolue pour f. De ce qui précède, on constate que

$$-\infty \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_{ac} \leqslant \infty.$$

On peut donner des exemples de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ tel que $\sigma_c = -\infty$, $\sigma_{ac} = \infty$; autrement dit, il existe f tel que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\exp(-sx)\,\mathrm{d}x \text{ existe pour tout } s \in \mathbb{C}$$

mais (exemple 7, § 6.8.5)

$$\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \infty \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Le demi-plan $D_c = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_c\}$ s'appelle le demi-plan de convergence pour f et $D_{ac} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_{ac}\}$ s'appelle le demi-plan de convergence absolue pour f ; on a

$$D_c \supset D_{ac}$$

et $F(s)$ est défini dans D_c par une intégrale absolument convergente si $\operatorname{Re} s > \sigma_{ac}$, par une intégrale impropre (convergente) si $\operatorname{Re} s > \sigma_c$. Sur l'abscisse σ_c l'existence de F n'est pas toujours assurée et de même sur l'abscisse σ_{ac} l'intégrale définissant F n'est pas nécessairement absolument convergente. On peut démontrer que F est une fonction holomorphe dans D_c.

Pour une théorie fine, on a besoin des abscisses de convergence exactes σ_c et σ_{ac} ; pour nous, l'existence d'*une* abscisse de convergence *absolue* donne une théorie à la fois simple et suffisamment utile pour les applications prévues.

6.8.5 Exemples

Sauf mention contraire, les exemples concernent les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ qui sont au moins localement intégrables et $F = \mathcal{L}\{f\}$ dans le demi-plan approprié.

Exemple 1

Soit $F(x) = \exp(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$; alors

$$F(s) = \frac{1}{s-\alpha}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha .$$

Ici, tout $\sigma_0 > \operatorname{Re} \alpha$ est une abscisse de convergence absolue car

$$\int_0^\infty \big|f(x)\big|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \exp\big(-(\sigma_0 - \operatorname{Re}\alpha)x\big)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma_0 - \operatorname{Re}\alpha} < \infty .$$

On calcule $F(s)$ pour $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$ comme suit : on a

$$F(s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \exp(\alpha - s)x\, \mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \frac{\exp(\alpha - s)x}{\alpha - s}\bigg|_{x=0}^{x=T} = \frac{1}{s-\alpha}$$

car

$$\lim_{T\to\infty} \big|\exp(\alpha - s)T\big| = \lim_{T\to\infty} \exp\big(\operatorname{Re}(\alpha - s)T\big) = 0$$

étant donné que $\operatorname{Re}(\alpha - s) < 0$. Pour $\alpha = 0$, on a

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

et $F = \mathcal{L}\{1\}$.

Exemple 2

Soit $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\alpha > -1$; alors

$$F(s) = \Gamma(\alpha+1)s^{-(\alpha+1)}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

où $s^{-(\alpha+1)} = \exp\{-(\alpha+1)\ln s\}$, $\ln s = \ln(s) + i \arg s$ (détermination principale de logarithme de s). Ici, tout $\sigma_0 > 0$ est une abscisse de convergence absolue car, si $a = \operatorname{Re}\alpha > -1$,

$$\int_0^\infty |x^\alpha| \, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^a \, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x} \, \mathrm{d}x < \infty .$$

On calcule $F(s)$ pour $\operatorname{Re} s > 0$ comme suit : on a

$$F(s) = \int_0^\infty x^\alpha \, \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{d}x = \Gamma(\alpha+1)s^{-(\alpha+1)}$$

d'après (6.39).

Exemple 3

Soit $f(x) = x^\alpha \exp(\beta x)$, $x > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\alpha > -1$; alors

$$F(s) = \Gamma(\alpha+1)(s-\beta)^{-(\alpha+1)}, \quad \operatorname{Re}(s-\beta) > 0 .$$

C'est immédiat d'après l'exemple 2 et du paragraphe 6.8.3 ; en effet si $G(s) = \mathcal{L}\{x^\alpha\}$, alors d'après le paragraphe 6.8.3(4), on a

$$F(s) = \mathcal{L}\{x^\alpha \exp(\beta x)\} = G(s-\beta), \quad \operatorname{Re}(s-\beta) > 0 ;$$

en écrivant $G(s)$ d'après l'exempe 2, on obtient le résultat pour $F(s)$. Si $\alpha = n$, n un entier $\geqslant 1$, alors on obtient $F(s)$ en utilisant l'exemple 1 et la formule du paragraphe 6.8.3(1) ; ainsi, si $n = 1, 2, \ldots$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{x^n \exp(\beta x)\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}(s-\beta)^{-1} = n!\,(s-\beta)^{-n-1}$$

pour $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\beta$, grâce à l'exemple 1 et la formule du paragraphe 6.8.3(1), ce qui est la formule donnée pour $F(s)$ si $\alpha = n$.

Exemple 4

Si $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}\{\cos \alpha x\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \alpha x\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

pour $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im}\alpha|$. Ces formules se déduisent de l'exemple 1 en utilisant

$$\cos \alpha x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\alpha x} + \mathrm{e}^{-i\alpha x}), \quad \sin \alpha x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\alpha x} - \mathrm{e}^{-i\alpha x}) ;$$

noter que $\mathrm{Re}(\pm i\alpha) = \mp \mathrm{Im}\,\alpha$ et donc, pour $\mathrm{Re}\,s > |\,\mathrm{Im}\,\alpha|$, on a

$$\mathcal{L}\{\cos\alpha x\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\alpha x}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\alpha x}\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-i\alpha} + \frac{1}{s+i\alpha}\right\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin\alpha x\} = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{i\alpha x}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-i\alpha x}\} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{s-i\alpha} - \frac{1}{s+i\alpha}\right\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\,.$$

Exemple 5

Soit $H_c(x) = 1$ si $x \geqslant c$, $H_c = 0$, $0 \leqslant x < c$; alors

$$\mathcal{L}\{H_c(x)\} = \frac{e^{-cs}}{s}\,, \quad \mathrm{Re}\,s > 0\,.$$

Plus généralement, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, $\mathrm{Re}\,s > \sigma_0$, alors (pour $c \geqslant 0$)

$$\mathcal{L}\{H_c(x)f(x-c)\} = e^{-cs}F(s)\,, \quad \mathrm{Re}\,s > \sigma_0$$

ce que l'on vérifie directement. Notons que, si $c > 0$,

$$H_c(x)f(x-c) = \begin{cases} f(x-c) & \text{pour } x \geqslant c \\ 0 & \text{pour } 0 \leqslant x < c \end{cases}$$

et $H_0(x)f(x) = f(x)$, $x > 0$.

Exemple 6

Soit $f(x) = (x\pi)^{-1/2}\exp(-a^2/4x)$, $x > 0$, $a > 0$. Alors

$$F(s) = s^{-1/2}\exp(-as^{1/2})\,, \quad \mathrm{Re}\,s > 0\,.$$

Pour établir cette formule on considère d'abord s réel, $s > 0$; alors, après un petit calcul,

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{4x} - sx\right)\mathrm{d}x = \frac{2\,e^{a\sqrt{s}}}{\sqrt{s\pi}}\,g\left(\frac{1}{2}\,a\sqrt{s}\right)$$

où

$$g(\alpha) = \int_0^\infty \exp\left(-\left(u + \frac{\alpha}{u}\right)^2\right)\mathrm{d}u\,, \quad \alpha > 0$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha}{v^2}\exp\left(-\left(v + \frac{\alpha}{v}\right)^2\right)\mathrm{d}v$$

en posant $v = \alpha/u$; on constate que, pour $\alpha > 0$,

$$g'(\alpha) = -4g(\alpha)\,,$$

avec $g(0) = \sqrt{\pi}/2$; on en tire

$$g(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-4\alpha}\,, \quad \alpha > 0$$

ce qui donne la formule pour $F(s)$ lorsque s est réel, $s > 0$; en utilisant l'holomorphie de $F(s)$ et de $s^{-1/2}\exp(-as^{1/2})$ pour $\operatorname{Re} s > 0$, on a le résultat complet. Notons que tout $\sigma_0 > 0$ est une abscisse de convergence absolue de sorte que $F(s)$ est holomorphe dans $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ d'après le paragraphe 6.8.3(1).

Exemple 7 (Doetsch)

Soit $f(x) = 0$ si $0 \leqslant x < \ln\ln 3$ et

$$f(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\right) \quad \text{si } a_n \leqslant x < a_{n+1},\ n = 3, 4, \ldots$$

où $a_n = \ln\ln n$. Alors

$$\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

mais

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x \text{ existe}\,, \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Autrement dit, avec les notations du paragraphe 6.8.4, pour cette fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on a $\sigma_{\mathrm{ac}} = -\infty, \sigma_{\mathrm{c}} = \infty$, de sorte que f ne possède aucune abscisse de convergence absolue alors que $F(s)$ existe, au sens d'intégrale impropre, pour tout $s \in \mathbb{C}$. En effet, puisque pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)|\,\mathrm{e}^{-\sigma x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \sigma x\right) = \infty\,,$$

on a

$$\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

D'autre part,

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{N} (-1)^n \alpha_n$$

où

$$\alpha_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \sigma x\right)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{(\ln t)^{-\sigma-1}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

(en faisant la transformation $\mathrm{e}^x = \ln t$). On vérifie que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, pour n suffisamment grand et que $\alpha_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ de sorte que la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$$

est convergente (critère de Leibniz) ; cela entraîne que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x$$

existe pour chaque $\sigma \in \mathbb{R}$. Pour établir que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, il suffit de voir que

$$\frac{\big(\ln(x+1)\big)^{-\sigma-1}}{\sqrt{x+1}} < \frac{\big(\ln x\big)^{-\sigma-1}}{\sqrt{x}}$$

pour $x \geqslant n$; or on vérifie aisément que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, $g(x) = \big(\ln x\big)^p/x$ est strictement décroissante pour x suffisamment grand ce qui montre que, pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto \frac{\big(\ln x\big)^{-\sigma-1}}{\sqrt{x}}$$

est strictement décroissante pour x suffisamment grand, établissant que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ pour n suffisamment grand.

REMARQUES. Nous avons donné les transformées de Laplace des fonctions dont nous aurons besoin dans la suite. Il existe des tables étendues donnant des transformées $\mathcal{L}\{f\}$ pour les fonctions f très variées. On peut consulter les tables (Ed. A. Erdélyi) indiquées a la fin du paragraphe 6.1.5.

Nous annexons une table succincte pour la commodité du lecteur ; on utilisera cette table à l'aide des explications données dans ce paragraphe et dans le paragraphe 6.8.3 concernant le domaine de variabilité des différents paramètres α, β, x, s, etc.

Tableau 6.1

$f(x)$	$F(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$
$\exp(\alpha x)$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$
$\cos \alpha x$	$\dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$
$\sin \alpha x$	$\dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
x^α	$\Gamma(\alpha+1)s^{-(\alpha+1)}$
$x^\alpha \exp \beta x$	$\Gamma(\alpha+1)\big(s-\beta\big)^{-(\alpha+1)}$
$x^n f(x)$	$\big(-1\big)^n F^{(n)}(s)$
$f^{(n)}(x)$	$s^n F(s) - \big\{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\big\}$
$\mathrm{e}^{\alpha x} f(x)$	$F(s-\alpha)$
$f(ax)$, $a > 0$	$\dfrac{1}{a}\,F\Big(\dfrac{s}{a}\Big)$
$H_c(x)f(x-c)$ *	$\mathrm{e}^{-cs}F(s)$
$\displaystyle\int_0^x f$	$\dfrac{1}{s}\,F(s)$

* $H_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < c \\ 1 & \text{si } x > c. \end{cases}$

6.9 DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES

Dans cette section, nous fournissons les démonstrations des propriétés énumérées dans le paragraphe 6.8.3. Nous donnons aussi quelques compléments à ces propriétés.

6.9.1 Holomorphie des transformées

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$; nous supposons qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Posons

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x\,, \quad s \in D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_0\}\,.$$

On a déjà vu (§ 6.8.2) que

$$|F(s)| \leqslant \int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x\,, \quad s \in D_0$$

ce qui montre que F est borné dans D_0. De plus, si $s \in D_0$,

$$\begin{aligned} F'(s) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-hx} - 1}{h} \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx} \cdot (-x)\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.87}$$

car

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-hx} - 1}{h} = -x\,, \quad x \geqslant 0\,,$$

où il faut justifier l'échange de $\lim_{h\to 0}$ et $\int_0^\infty$ pour établir la validité de (6.87). Pour ce faire, on remarque que, si $|h| < \varepsilon$, $x \geqslant 0$,

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{-hx} - 1}{h} \right| \leqslant x\, \mathrm{e}^{\varepsilon x}$$

car le membre de gauche est majoré par

$$x + \frac{|h|}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{|h|^{n-1} x^n}{n!} + \cdots \leqslant x \left\{ 1 + \frac{\varepsilon x}{2!} + \cdots + \frac{\varepsilon^{n-1} x^{n-1}}{n!} + \cdots \right\} \leqslant x\, \mathrm{e}^{\varepsilon x}\,.$$

On sait que

$$\int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x < \infty$$

dès que $\sigma > \sigma_0$; on en déduit que

$$\int_0^\infty |f(x)| x\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x < \infty$$

dès que $\sigma > \sigma_0$; il suffit de remarquer que si $\sigma > \sigma_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sigma - \varepsilon > \sigma_0$ et $x < \mathrm{e}^{\varepsilon x}$ si $x \geqslant x_0 > 0$ (x_0 approprié) d'où

$$\int_{x_0}^\infty |f(x)| x\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_{x_0}^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-(\sigma-\varepsilon)x}\, \mathrm{d}x < \infty\,.$$

Ainsi, si $|h| < \varepsilon$, $\operatorname{Re} s = \sigma$, $x \geqslant 0$,

$$|f(x)| \left| \mathrm{e}^{-sx} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-hx} - 1}{h} \right\} \right| \leqslant |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma x} x\, \mathrm{e}^{\varepsilon x} = |f(x)| x\, \mathrm{e}^{-(\sigma-\varepsilon)x} = M(x)\,;$$

si $\varepsilon > 0$ est tel que $\sigma > \sigma - \varepsilon > \sigma_0$, alors M est intégrable dans $\mathbb{R}_+$ et on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour établir la validité de (6.87). On peut évidemment répéter ce raisonnement sur F' pour obtenir successivement la formule (6.84) pour $n = 2, 3, \ldots$

On peut aussi obtenir (6.84) directement d'une propriété générale de l'analyse complexe (vol. 2, prop. 6.3.2).

6.9.2 Unicité, formule d'inversion

Soit f, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$; on suppose que f et g possèdent une abscisse de convergence absolue σ_0. Alors on a vu que F, G sont holomorphes dans $D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$. Une conséquence du principe d'identité des fonctions holomorphes (vol. 2, sect. 5.2) est que si $F(s) = G(s)$ sur une partie A de D_0 telle que D_0 contienne un point d'accumulation de A, alors $F(s) = G(s)$ pour tout $s \in D_0$. En particulier, si $F(s) = G(s)$ pour $s > s_0$ (s, s_0 réels), alors $F(s) = G(s)$, $s \in D_0$. En prenant $s = \sigma + it$, $\sigma > \sigma_0$, $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F(\sigma + it) = \int_0^\infty \{f(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\}\, \mathrm{e}^{-itx}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \{g(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\}\, \mathrm{e}^{-itx}\, \mathrm{d}x = G(\sigma + it)$$

pour $t \in \mathbb{R}$; autrement dit, les transformées de Fourier des deux fonctions

$$x \longmapsto f(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\,, \quad x \longmapsto g(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(en convenant que $f(x) = g(x) = 0$, $x < 0$) sont identiques. Par le théorème d'unicité pour les transformées de Fourier (§ 6.1.3(5)), on conclut que $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}_+$; évidemment si f, g sont continues, alors $f = g$. On obtient ainsi le *théorème d'unicité* suivant : *si $F(s) = G(s)$, $s \in A \subset D_0$, avec D_0 contenant un point d'accumulation de A, alors $f(x) = g(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}_+$; on a $f = g$ si f, g sont continues.*

Il existe un théorème d'unicité (appelé le *théorème de Lerch* (1903)) d'un autre type.

Si $F(s_0 + n\sigma) = G(s_0 + n\sigma)$ *où* $s_0 \in D_0$, $\sigma > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $f(x) = g(x)$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}_+$ *(avec* $f = g$ *si* f, g *sont continues).* (Noter que l'ensemble $\{s_0 + n\sigma : n \in \mathbb{N}^*\}$ ne possède aucun point d'accumulation.)

DÉMONSTRATION

En passant à $h = f - g$, $H = \mathcal{L}\{h\}$, il suffit de voir que $H(s_0 + n\sigma) = 0$, $s_0 \in D_0$, $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ entraîne que $h = 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}_+$. On a alors pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$0 = \int_0^\infty h(x)\, \mathrm{e}^{-(s_0+n\sigma)x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sigma} h\left(-\frac{\ln t}{\sigma}\right) \mathrm{e}^{(s_0 \ln t)/\sigma} t^{n-1}\, \mathrm{d}t = 0$$

(en posant $t = \mathrm{e}^{-\sigma x}$) ; autrement dit,

$$\int_0^1 \varphi(t) t^n\, \mathrm{d}t = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.88}$$

où

$$\varphi(t) = h\left(-\frac{\ln t}{\sigma}\right) \exp\left(\frac{s_0}{\sigma} \ln t\right) t^{-1}\,, \quad 0 < t \leqslant 1\,.$$

Evidemment

$$\int_0^1 |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t = \sigma \int_0^\infty |h(x)||\mathrm{e}^{-s_0 x}|\, \mathrm{d}x < \infty\,. \tag{6.89}$$

On tire de (6.88) que $\varphi(t) = 0$ p.p. $t \in [0, 1]$ d'où $h(x) = 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}_+$ (au vu de (6.89)). Pour vérifier que (6.88) avec $\varphi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ entraîne que $\varphi = 0$ p.p. dans $[0, 1]$, on remarque d'abord que

$$\int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

pour toute fonction $\psi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue ; ceci est une conséquence du théorème de Weierstrass permettant une approximation uniforme des fonctions ψ par des polynômes (§ 4.1.8(3)). Le raisonnement du paragraphe 4.5.2 nous donne maintenant que $\varphi(t) = 0$ p.p. $t \in [0, 1]$. ♦

Nous n'aurons pas tellement besoin du théorème de Lerch, le théorème d'unicité préliminaire nous étant suffisant. Le raisonnement utilisant les transformées de Fourier qui nous a fourni ce théorème d'unicité nous donne une *formule d'inversion.* On suppose comme auparavant que $F = \mathcal{L}\{f\}$, σ_0 étant une abscisse de convergence absolue pour f. Soit $\sigma \geqslant \sigma_0$, $t \in \mathbb{R}$; alors

$$F(\sigma + it) = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x} \cdot \mathrm{e}^{-itx}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-itx}\, \mathrm{d}x$$

où $\varphi(x) = f(x)\, \mathrm{e}^{-\sigma x}$ si $x \geqslant 0$, $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$; on a $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\widehat{\varphi}(t) = F(\sigma + it)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{6.90}$$

En utilisant (6.79), on obtient

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\widehat{\varphi}(t)\,\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x+)+\varphi(x-)\right\},\quad x\in\mathbb{R}$$

si φ est tel que $\varphi(x+)$, $\varphi(x-)$, $\mathrm{D}_{\pm}\varphi(x)$ existent. En se rappelant la définition de $\varphi(x)$ et (6.90), on en déduit que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(\sigma+it)\,\mathrm{e}^{(\sigma+it)x}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{f(x+)+f(x-)\right\} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}\tag{6.91}$$

en supposant que $f(x+)$, $f(x-)$, $\mathrm{D}_{\pm}f(x)$ existent, avec $f(x)=0$, $x<0$ et, pour $x\geqslant 0$,

$$\mathrm{D}_{\pm}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x\pm\varepsilon)-f(x\pm)}{\pm\varepsilon}\qquad(\S\ 4.2.5(4))\,.$$

La formule (6.91) est appelée la *formule d'inversion* pour les transformées de Laplace ; noter que dans le membre de gauche de (6.91), on intègre F le long d'une droite verticale $t\mapsto\sigma+it$, σ étant un nombre réel quelconque $\geqslant\sigma_0$, une abscisse de convergence absolue pour f. Ainsi, la formule (6.91) est valable pour tout choix de $\sigma\geqslant\sigma_0$; si f est continue en $x>0$, alors le membre de droite de (6.91) devient $f(x)$; pour $x=0$, (6.91) donne $(1/2)f(0+)$. On écrit l'intégrale dans (6.91) comme une intégrale dans le plan complexe comme suit :

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(\sigma+it)\,\mathrm{e}^{(\sigma+it)x}\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}F(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}s$$

où $\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}$ signifie intégrale sur le segment $[\,\sigma-i\lambda\,,\,\sigma+i\lambda\,]$ dans $\mathbb{C}$ paramétré par $s=\sigma+it$, $-\lambda\leqslant t\leqslant\lambda$ avec $\mathrm{d}s=i\,\mathrm{d}t$. Avec cette écriture, la forme classique de (6.91) est la suivante :

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}F(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,\mathrm{d}s=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{f(x+)+f(x-)\right\} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}\tag{6.92}$$

où les notations et les hypothèses sur f sont celles données ci-dessus.

Si pour un $\sigma\geqslant\sigma_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\sigma+it)\right|\mathrm{d}t<\infty\,,$$

on aura alors (selon la formule d'inversion de Fourier)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+it)\,\mathrm{e}^{(\sigma+it)x}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}f(x) & \text{p.p. } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

6.9.3 Convolution

Soient f, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$; *si* f, g *sont localement intégrables, alors p.p.* $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\,, \quad \int_0^x f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.93}$$

existent et sont égales. En effet, pour chaque $T > 0$,

$$\int_0^T \left\{\int_0^x |f(y)|\,|g(x-y)|\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \int_0^T \left\{\int_y^T |g(x-y)|\,\mathrm{d}x\right\}|f(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^T \left\{\int_0^{T-y} |g(u)|\,\mathrm{d}u\right\}|f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \left\{\int_0^T |g(u)|\,\mathrm{d}u\right\}\left\{\int_0^T |f(y)|\,\mathrm{d}y\right\} < \infty$$

ce qui montre que

$$\int_0^x |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}y < \infty \quad \text{p.p. } x \geqslant 0\,.$$

De même,

$$\int_0^x |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y < \infty \quad \text{p.p. } x \geqslant 0$$

d'où l'existence p.p. $x \geqslant 0$ des deux intégrales dans (6.93) ; leur égalité vient d'une transformation de variables.

La valeur commune des deux intégrales dans (6.93) définit la convolution $f * g$: on a

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

pour les $x \geqslant 0$ pour lesquels les deux intégrales de (6.93) existent et on pose $(f * g)(x) = 0$ pour les autres $x \geqslant 0$. Ainsi, $f * g$ est définie dans $\mathbb{R}_+$ dès que f, g sont localement intégrables ; de plus, $f * g$ est localement intégrable car pour tout $T > 0$

$$\int_0^T |(f * g)(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^T |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_0^T |g(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

d'après le calcul fait ci-dessus.

Supposons maintenant que σ_0 est une abscisse de convergence pour f et pour g ; alors on sait que f, g sont localement intégrable de sorte que $f * g$ est bien définie dans $\mathbb{R}_+$. Si $\sigma \geqslant \sigma_0$, alors (en posant $g(x) = 0$, $x < 0$), on a

$$\int_0^\infty |(f * g)(x)|\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x}\left\{\int_0^\infty |f(y)|\,|g(x-y)|\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma y}|f(y)|\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma(x-y)}|g(x-y)|\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y$$

$$= \left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma y}|f(y)|\,\mathrm{d}y\right\}\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}|g(t)|\,\mathrm{d}t\right\} < \infty$$

en utilisant le théorème de Fubini (comme précédemment) pour les fonctions positives. Ainsi, σ est une abscisse de convergence absolue pour $f * g$, dès que $\sigma \geqslant \sigma_0$; le même calcul (utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables) donne alors, pour $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f*g\}(s) &= \int_0^\infty (f*g)(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\left\{\int_0^\infty f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right\}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sy}f(y)\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(x-y)}g(x-y)\,\mathrm{d}x\right\}\,\mathrm{d}y \\ &= \left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sy}f(y)\,\mathrm{d}y\right\}\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \mathcal{L}\{f\}(s)\,\mathcal{L}\{g\}(s)\,.\end{aligned}$$

Notons que si f ou g est localement bornée (par exemple, continue par morceaux), alors les deux intégrales de (6.93) existent pour *tout* $x \geqslant 0$. Mais on peut donner des exemples simples où ce n'est plus le cas ; par exemple si pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x|}} \quad (x \neq 1)\,,$$

alors f, g sont localement intégrables dans $\mathbb{R}_+$ mais

$$\int_0^1 f(y)g(1-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^{-1/2}\cdot y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^{-1}\,\mathrm{d}y = \infty$$

de sorte que $(f*g)(1)$ n'est pas définie ; d'après notre discussion, $(f*g)(x)$ existe néanmoins p.p. $x \in \mathbb{R}_+$.

6.9.4 Formules de dérivation et d'intégration

Nous ne dirons rien sur les formules de translation et de dilatation (§ 6.8.3(4)) car elles s'obtiennent par des transformations affines évidentes.

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 avec f' ayant une abscisse de convergence absolue $\sigma_0 \geqslant 0$; *alors tout* $\sigma > \sigma_0$ *est une abscisse de convergence absolue pour* f. En effet, on a

$$\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{\sigma_0 t}\,\mathrm{e}^{-\sigma_0 t}|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{\sigma_0 x}\int_0^x \mathrm{e}^{-\sigma_0 t}|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\,\mathrm{e}^{\sigma_0 x}$$

où $M = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma_0 t}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$; puisque

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x \geqslant 0\,,$$

on en déduit que

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \Big(|f(0)| + M\Big)\,\mathrm{e}^{\sigma_0 x}\,, \quad x \geqslant 0$$

(noter que $\sigma_0 \geqslant 0$) d'où (d'après § 6.8.2)

$$\int_0^\infty |f(x)|\, \mathrm{e}^{-\sigma x}\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad \sigma > \sigma_0\,.$$

On constate que, si $\operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-sx} = 0$$

d'où l'on a, pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f'(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T f'(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{T\to\infty} \left\{ f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\Big|_{x=0}^{x=T} + s\int_0^T f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x \right\} \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = sF(s) - f(0)\ ;$$

c'est (6.85) pour $n = 1$. On démontre (6.85) généralement par récurrence sur n ; supposons la formule établie pour n ; si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est de classe C^{n+1}, alors $g = f'$ sera de classe C^n et $g^{(n)} = f^{(n+1)}$. Notons que si $\sigma_0 \geqslant 0$ est une abscisse de convergence absolue pour $f^{(n+1)}$ et $\sigma > \sigma_0$, alors σ sera une abscisse de convergence absolue pour $f^{(n)}$ (grâce au raisonnement précédent) d'où, par récurrence, $\sigma > \sigma_0$ sera une abscisse de convergence absolue pour f. De la validité de (6.85) pour n, on a, pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(x)\} = \mathcal{L}\{g^{(n)}(x)\} = s^n G(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} g^{(j)}(0)$$

en posant $G = \mathcal{L}\{g\}$. Puisque $G(s) = sF(s) - f(0)$ (car $f' = g$ et on a déjà établi (6.85) pour $n = 1$), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(x)\} &= s^n\{sF(s) - f(0)\} - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j+1)}(0) \\ &= s^{n+1}F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k)}(0) - s^n f(0) \\ &= s^{n+1}F(s) - \sum_{j=0}^{n} s^{n-j} f^{(j)}(0)\end{aligned}$$

ce qui est (6.85) avec $n + 1$ remplaçant n. Ainsi, (6.85) est établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La formule d'intégration (6.86) est une conséquence de la formule (6.85) avec $n = 1$. En effet, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est continue, alors

$$g(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

définit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 avec $g' = f$; si $\mathcal{L}\{f\} = F$, on a alors, pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g'(x)\} = s\mathcal{L}\{g(x)\}$$

(car $g(0) = 0$) d'où

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{1}{s}F(s)\,, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0$$

ce qui est (6.86). Si $\sigma_0 \geqslant 0$ est une abscisse de convergence absolue pour $f = g'$, alors tout $\sigma \geqslant \sigma_0$ sera une abscisse de convergence absolue pour g (comme déjà établi auparavant).

6.9.5 Théorèmes abélien et taubérien

La transformée de Laplace d'une fonction f est un outil puissant pour l'étude de f. Nous illustrons cet aspect de la théorie des transformées de Laplace en présentant deux théorèmes simples. Nous supposons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (localement intégrable) est telle que, pour tout nombre réel $\sigma > 0$,

$$F(\sigma) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x$$

existe ; pour avoir certaines applications intéressantes nous ne voulons pas supposer que f ait une abscisse de convergence absolue. Ainsi, $F(\sigma)$ est la transformée de Laplace au sens d'intégrale impropre ; comme dans le paragraphe 6.5.2, nous écrivons $⨍_0^\infty$ pour $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda$; donc, *nous supposons que*

$$F(\sigma) = ⨍_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x$$

existe pour tout $\sigma > 0$. Alors, on a les deux théorèmes suivants.

Théorème abélien
Si $⨍_0^\infty f(x)$ *existe, alors*

$$\lim_{\sigma\to 0} F(\sigma) = ⨍_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Théorème taubérien
Si $\lim_{\sigma\to 0} F(\sigma)$ *existe et* $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$, *alors*

$$⨍_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existe et } \lim_{\sigma\to 0} F(\sigma) = ⨍_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME ABÉLIEN

Posons $\varphi(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$; alors

$$F(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \sigma > 0\,.$$

En effet, pour $\lambda > 0$, $\sigma > 0$, une intégration par parties donne

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\Big|_{x=0}^{x=\lambda} + \sigma \int_0^\lambda \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x\,;$$

puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\sigma\lambda} \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$ (car $\sigma > 0$ et $\lim_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda)$ existe), on obtient la formule indiquée pour $F(\sigma)$. (Notons que cette intégration par parties est élémentaire si f est continue ou continue par morceaux ; elle est moins élémentaire si f est seulement localement intégrable mais elle est néanmoins juste.) Posons

$$I = \lim_{\lambda\to\infty} \varphi(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

alors $F(\sigma) - I = A + B$ où

$$A = \sigma \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\sigma x}\big\{\varphi(x) - I\big\}\,\mathrm{d}x\,, \quad B = \sigma \int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x}\big\{\varphi(x) - I\big\}\,\mathrm{d}x\,,$$

$\tau > 0$ étant arbitraire ; ceci vient du fait que, pour $\sigma > 0$,

$$\sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Puisque

$$|B| \leqslant \sup_{x\geqslant\tau} \big|\varphi(x) - I\big| \cdot \sigma \int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\geqslant\tau} \big|\varphi(x) - I\big|\,,$$

étant donné $\varepsilon > 0$, on peut fixer un $\tau > 0$ tel que $|B| < \varepsilon/2$ (car $\varphi(x) \to I$ lorsque $x \to \infty$) ; pour ce $\tau > 0$

$$\lim_{\sigma\to 0} \sigma \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\sigma x}\big\{\varphi(x) - I\big\}\,\mathrm{d}x = 0$$

de sorte que l'on peut choisir $\sigma_\varepsilon > 0$ tel que $|A| < \varepsilon/2$ dès que $0 < \sigma < \sigma_\varepsilon$. Alors on aura

$$\big|F(\sigma) - I\big| < \varepsilon$$

dès que $0 < \sigma < \sigma_\varepsilon$ ce qui prouve le théorème abélien.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME TAUBÉRIEN

Notons d'abord que la condition $xf(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ entraîne que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x y|f(y)|\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Pour $\tau > 0$, écrivons

$$\int_0^\tau f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-x/\tau}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\tau f(x)\{1 - \mathrm{e}^{-x/\tau}\}\,\mathrm{d}x - \int_\tau^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-x/\tau}\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2\,.$$

On a, en utilisant $(1 - \mathrm{e}^{-t}) \leqslant t$, $t \geqslant 0$,

$$|A_1| \leqslant \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x|f(x)|\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\tau\to\infty} 0$$

et

$$|A_2| \leqslant \sup_{x\geqslant\tau} |xf(x)| \int_\tau^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x/\tau}\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\geqslant\tau} |xf(x)| \xrightarrow{\tau\to\infty} 0$$

ce qui montre que

$$\lim_{\tau\to\infty} \left\{ \int_0^\tau f(x)\,\mathrm{d}x - F\Big(\frac{1}{\tau}\Big) \right\} = 0\,.$$

Puisque

$$\lim_{\tau\to\infty} F\Big(\frac{1}{\tau}\Big) = \lim_{\sigma\to 0} F(\sigma)\,, \quad \sigma > 0$$

existe selon notre hypothèse, on conclut que

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe et est égale à $\lim_{\sigma\to 0} F(\sigma)$. ♦

REMARQUES. Notons que les deux théorèmes concernent la possibilité d'échange de l'ordre des deux limites suivantes (avec $\sigma > 0$, $\lambda > 0$) :

$$\alpha = \lim_{\sigma\to 0} \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \beta = \lim_{\lambda\to\infty} \lim_{\sigma\to 0} \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x\,.$$

En effet, on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{\sigma\to 0} \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$$

dès que f est localement intégrable, selon le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En supposant que $F(\sigma) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x$ existe, le théorème abélien affirme que *si β existe, alors α existe et $\alpha = \beta$* ; le théorème taubérien affirme (en supposant toujours l'existence de $F(\sigma)$, $\sigma > 0$) que *si α existe et une condition* (dite ***taubérienne***) *est vérifiée* ($xf(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$), *alors β existe et $\alpha = \beta$*. Des exemples simples montrent qu'une condition taubérienne est bien nécessaire ; ainsi, si $f(x) = \cos x$, $x \geqslant 0$, alors (exemple 4, § 6.8.5)

$$F(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + 1} \xrightarrow{\sigma\to 0} 0\,, \quad \sigma > 0\,,$$

mais

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} \sin\lambda$$

n'existe pas.

L'analyse mathématique contient un grand nombre de théorèmes concernant l'existence et l'égalité de deux limites itérées α et β ; traditionnellement, on appelle certains théorèmes du type « si β existe, alors α existe et $\alpha = \beta$ » les *théorèmes abéliens* et les théorèmes du type « si α existe et une condition C est vérifiée, alors β existe et $\alpha = \beta$ » les *théorèmes taubériens*. Les exemples classiques de ce genre de théorèmes sont ceux qui concernent les séries entières (cf. vol. 2, § 6.2.5 et 6.2.6). L'origine de cette terminologie « théorème abélien », « théorème taubérien » réside dans le fait que Abel a démontré (en 1826) que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ 0<x<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

pourvu que la série de nombres complexes $\sum_n a_n$ converge ; il est clair que le théorème abélien donné ici est une généralisation aux intégrales de ce théorème d'Abel. Le théorème de Tauber (1897) dit que si la limite dans le membre de gauche existe et $na_n \to 0$ ($n \to \infty$) (condition taubérienne), alors la série $\sum_n a_n$ converge et on a l'égalité ci-dessus ; de nouveau, on voit que le théorème taubérien donné ici est une généralisation aux intégrales de ce théorème de Tauber.

6.10 TRANSFORMÉE DE LAPLACE DES DISTRIBUTIONS

6.10.1 Préliminaires

Pour les applications aux équations différentielles, il est utile de généraliser la transformation de Laplace pour inclure certaines distributions dans $\mathbb{R}_+$. En effet, la distribution de Dirac δ (concentrée à $x = 0$) est considérée souvent comme représentant une force impulsive momentanée (d'amplitude 1) au temps

$x = 0$ (par exemple, un coup de marteau) ; de ce point de vue la solution d'une équation différentielle

$$y'' + y = \delta$$

a une interprétation mécanique évidente ; nous y reviendrons dans les exemples. En ce qui concerne la définition de la transformée de Laplace de δ, il est évident que l'on doit poser

$$\mathcal{L}\{\delta\} \equiv 1$$

car, pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a, suivant l'écriture intuitive déjà signalée,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\, \delta(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-sx}\Big|_{x=0} = 1\,.$$

Le problème avec ce calcul formel est que $\varphi_s(x) = \exp(-sx)$ ne définit ni un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ni un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, de sorte que $\langle \delta\,,\, \varphi_s \rangle$ n'est pas défini pour δ en tant qu'élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$; il est vrai que $\varphi_s \in C^\infty = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et on peut considérer δ comme un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ s'appellent les *distributions à support compact* ; ce sont des distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un intervalle compact $[\,a\,,\,b\,]$ (on dit que le support de u est contenu dans $[\,a\,,\,b\,]$) ayant la propriété suivante : $\langle u\,,\,\psi\rangle = 0$ dès que le support de ψ est contenu dans $\mathbb{R}\setminus[\,a\,,\,b\,]$, ψ étant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ce qui veut dire

$$\operatorname{supp}\psi = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}\setminus[\,a\,,\,b\,]$$

avec $\operatorname{supp}\psi$ compact, ψ étant dans $C^\infty(\mathbb{R})$. En effet, si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ possède un support compact, alors on peut prolonger le domaine de définition de u : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ à $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

Ainsi, si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors on peut poser

$$U(s) = \langle u\,,\,\varphi_s\rangle\,, \quad \varphi_s(x) = \exp(-sx)\,,\ s \in \mathbb{C}$$

et définir $U = \mathcal{L}\{u\}$. D'après cette définition, on a bien $\mathcal{L}\{\delta\} \equiv 1$. Cette définition nous suffirait complètement ; néanmoins, nous indiquons d'autres procédés sans entrer dans tous les détails théoriques.

6.10.2 Deux autres procédés

Disons que $u \in \mathcal{D}'_+$ si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\langle u\,,\,\psi\rangle = 0$ dès que $\operatorname{supp}\psi \subset\,]-\infty\,,\,0\,[\,,\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; on dit que $u \in \mathcal{D}'_+$ si u est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que son support est contenu dans $[\,0\,,\,\infty\,[$. Un élément $u \in \mathcal{D}'_+$ généralise donc la notion d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (localement intégrable) ; une telle fonction engendre $u_f \in \mathcal{D}'_+$ en posant $f(x) = 0$, $x < 0$ et en définissant, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle u_f\,,\,\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Soit $u \in \mathcal{D}'_+$; supposons qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_{\sigma_0} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (où $\varphi_{\sigma_0}(x) = \exp(-\sigma_0 x)$, $x \in \mathbb{R}$). Alors, pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$U(s) = \langle u\,,\, \varphi_s \rangle$$

est défini comme suit : soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\alpha(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $\alpha(x) = 0$ pour $x \leqslant -1$; soit σ_1 tel que $\sigma_0 < \sigma_1 < \operatorname{Re} s$; on pose

$$U(s) = \langle \varphi_{\sigma_1} u\,,\, \alpha \varphi_{s-\sigma_1} \rangle\,.$$

Notons que $\varphi_{\sigma_1} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dès que $\sigma_1 > \sigma_0$; puisque $\varphi_{s_1}\varphi_{s_2} = \varphi_{s_1+s_2}$, on établit que la valeur de $U(s)$ ne dépend pas du choix de σ_1 ($\sigma_0 < \sigma_1 < \operatorname{Re} s$) ; elle est également indépendante du choix de α à cause du fait que $u \in \mathcal{D}'_+$. Donc si $u \in \mathcal{D}'_+$ et s'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_{\sigma_0} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors on peut définir $U = \mathcal{L}\{u\}$ comme la transformée de Laplace de u, U étant une fonction complexe définie pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. On peut vérifier que si $u \in \mathcal{D}'_+$ et si u est à support compact, alors la définition proposée ici ne contredit pas celle indiquée dans le paragraphe précédent.

Un autre procédé plus explicite qui s'applique à une partie importante des distributions dans $\mathcal{D}'_+$ est le suivant : supposons que u est une distribution dans $\mathbb{R}$ telle que $u = \mathrm{D}^m f$ ($m \in \mathbb{N}$) au sens des distributions où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que $f(x) = 0$, $x < 0$. Supposons que σ est une abscisse de convergence absolue pour f dès que $\sigma > \sigma_0$; alors $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ est défini pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$; on pose $\mathcal{L}\{u\} = U$ où

$$U(s) = s^m F(s)\,, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0\,.$$

Ce procédé s'applique seulement aux distributions de $\mathcal{D}'_+$ qui sont d'ordre fini (§ 6.4.4) ; puisque $\delta = H'$, $H = f'$ (au sens des distributions) avec $f(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$ (et H est la fonction de Heaviside), on voit que ce procédé donne $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}\}$ pour $n = 0, 1, \ldots$, $\delta^{(0)} = \delta$. Ainsi, ici $\delta = f''$ (au sens des distributions) et

$$F(s) = \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s^2}\,, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

d'où

$$\mathcal{L}\{H\} = \frac{1}{s}\,, \quad \mathcal{L}\{\delta\} = 1\,,\ \mathcal{L}\{\delta'\} = s\,,\ \ldots$$

avec

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}\} = s^n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

car $\delta^{(n)} = \mathrm{D}^{n+2} f$ (au sens des distributions) et

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}\} = s^{n+2}\mathcal{L}\{f\} = s^{n+2} \cdot \frac{1}{s^2} = s^n\,.$$

Notons que l'on aurait le même résultat si l'on calculait naïvement comme suit :

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}\} = \int_0^\infty \delta^{(n)}(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\langle \delta\,,\,\mathrm{D}^n\varphi_s\rangle$$
$$= (-1)^n(-s)^n\,\mathrm{e}^{-sx}\Big|_{x=0} = s^n\,.$$

6.10.3 Résumé des propriétés

Soit u une distribution dans $\mathcal{D}'_+$ telle que $\mathcal{L}\{u\} = U(s)$ est définie pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Alors U est une fonction holomorphe ; de plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$U^{(n)}(s) = \mathcal{L}\Big\{(-x)^n u\Big\}\,, \quad s^n U(s) = \mathcal{L}\{\mathrm{D}^n u\}\,.$$

Notons que ces formules correspondent exactement aux formules pour les transformées de Laplace des fonctions.

Soient u_1, u_2 deux distributions dans $\mathcal{D}'_+$ du type

$$u_1 = \mathrm{D}^{m_1} f_1\,, \quad u_2 = \mathrm{D}^{m_2} f_2 \qquad \text{(au sens des distributions)}$$

avec f_1, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ pour $x < 0$, m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$. Alors on peut définir $u_1 * u_2$ (la convolution de u_1, u_2) comme suit :

$$u_1 * u_2 = \mathrm{D}^{m_1+m_2}(f_1 * f_2) \qquad \text{(au sens des distributions)}$$

Notons que

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(y) f_2(x-y)\,\mathrm{d}y\,, \quad x \geqslant 0\,,$$

avec $(f_1 * f_2)(x) = 0$ si $x < 0$ définit une fonction continue dans $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que si $U_1(s) = \mathcal{L}\{u_1\}$, $U_2(s) = \mathcal{L}\{u_2\}$ existent pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, alors $\mathcal{L}\{u_1 * u_2\}$ existe aussi pour les mêmes valeurs de s et

$$\mathcal{L}\{u_1 * u_2\} = U_1(s)\,U_2(s)\,, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0\,.$$

En effet,

$$\mathcal{L}\{u_1 * u_2\} = s^{m_1+m_2}\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = s^{m_1}\mathcal{L}\{f_1\}\cdot s^{m_2}\mathcal{L}\{f_2\} = U_1(s)\,U_2(s)\,,$$

en utilisant le second procédé du paragraphe 6.10.2. On en déduit que

$$\mathrm{D}^n(u_1 * u_2) = \big(\mathrm{D}^n u_1\big) * u_2 = u_1 * \big(\mathrm{D}^n u_2\big)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

6.11 APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

6.11.1 Equations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants

Soit l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f \tag{6.94}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des constantes (réelles ou complexes), $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ et n est un entier $\geqslant 1$; on suppose que f admet une abscisse de convergence absolue de sorte que $\mathcal{L}\{f\} = F$ est définie dans un demi-plan de $\mathbb{C}$. Supposons que la condition initiale est donnée par

$$y(0) = c_0\,,\ y'(0) = c_1\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}\,. \tag{6.95}$$

Nous procédons d'abord formellement en posant $\mathcal{L}\{y\} = Y$, y étant une solution de (6.94) vérifiant (6.95) ; nous discuterons dans la suite de la validité du procédé.

D'après (6.95), on a

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = sY(s) - c_0\,,\quad \mathcal{L}\{y''(x)\} = s^2Y(s) - (sc_0 + c_1)\,,\quad \ldots$$
$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(x)\} = s^nY(s) - \left(s^{n-1}c_0 + s^{n-2}c_1 + \cdots + sc_{n-2} + c_{n-1}\right).$$

En passant aux transformées de Laplace des deux membres de (6.94), on obtient

$$q(s)Y(s) = F(s) + p(s)$$

où

$$q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\,,$$
$$p(s) = c_0(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1)$$
$$+ c_1(s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2) + \cdots + c_{n-2}(s + a_{n-1}) + c_{n-1}\,.$$

Ainsi,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}\,.$$

Supposons que $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ sont telles que

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{1}{q(s)}\,,\quad \mathcal{L}\{h(x)\} = \frac{p(s)}{q(s)}\,.$$

Alors

$$y = (f * g) + h\,;$$

en utilisant la formule de convolution (§ 6.8.3(5)). Nous discuterons dans la suite (§ 6.11.3) du procédé algébrique qui permet la détermination de g, h. Observons ici d'abord que g possède une interprétation simple qu'il est utile de connaître.

On considère l'équation (6.94) avec $f = 0$ et avec (6.95) où

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-2} = 0\,,\ c_{n-1} = 1\,;$$

soit $\widetilde{y}$ la solution correspondante (dont l'existence et l'unicité sont connues, § 2.4.6) et posons $\widetilde{Y} = \mathcal{L}(\widetilde{y})$; puisque $\widetilde{y}$ est de croissance au plus exponentielle (§ 2.4.6) $\widetilde{Y}$ est bien définie dans un demi-plan approprié de $\mathbb{C}$. Du calcul précédent, on conclut que

$$\widetilde{Y}(s) = \frac{1}{q(s)}$$

d'où $\widetilde{y} = g$. Ainsi, pour n petit, on peut déterminer g rapidement par les considérations du paragraphe 2.4.6.

Notons aussi que h correspond à la solution de (6.94) avec $f = 0$, vérifiant la condition (6.95) ; ceci permet une détermination indépendante de h directement ; h se détermine aussi par un calcul simple en partant de g (§ 6.11.2). Les considération indiquées montrent que g, h *sont de classe* C^∞ *(et même analytiques) dans* $\mathbb{R}$ (car elles sont des combinaisons linéaires finies des exponentielles).

La formule (6.96) montre qu'une solution y de (6.94) sous condition initiale (6.95) est nécessairement de la forme $y = (f * g) + h$ où h est la solution de l'équation homogène associée à (6.94) (c'est-à-dire avec $f = 0$) satisfaisant à (6.95) et $f * g$ est une solution particulière de (6.94) ; ceci reflète la théorie générale vue auparavant (prop. 2.4.2(iii)).

Il reste à discuter la validité du processus indiqué ci-dessus. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est continue, on n'a rien à ajouter ; *(6.96) donne l'unique solution prévue par la théorie générale du chapitre 2 :* $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *donné par (6.96) est de classe* C^n *dans* $\mathbb{R}^+$ *et* y *vérifie la condition (6.95) à* $x = 0$. *Cette conclusion est valable même lorsque* f *n'admet aucune transformée de Laplace* (par exemple $f(x) = \exp x^2$) car la solution (6.96) est bien définie dès que f est continue (g, h étant partout continues puisqu'elles sont des solutions de l'équation homogène associée à (6.94)). Par contre, le sens de la solution (6.96) demande une clarification lorsque f est quelconque (mais admettant une abscisse de convergence absolue ce qui entraîne que f est localement intégrable dans $\mathbb{R}_+$). On peut démontrer que *(6.96) donne une solution de (6.94) vérifiant (6.95), au sens généralisé (expliqué § 6.11.2), sous la seule hypothèse que* f *est localement intégrable.*

Pour conclure, on peut dire que l'équation (6.94) possède toujours une solution généralisée vérifiant (6.95) et cette solution est fournie par (6.96), même lorsque la méthode des transformées de Laplace n'est pas applicable.

6.11.2 Solution généralisée

La notion de solution généralisée à l'équation (6.94), vérifiant la condition initiale (6.95), peut être formulée de diverses manières. Ici nous démontrons d'abord la validité de la formulation suivante : *soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *une fonction localement intégrable ; alors* $y = (f * g) + h$ *définie dans (6.96) est une fonction de classe* C^{n-1} *dans* $\mathbb{R}_+$ *telle que* $y^{(n)}(x)$ *existe p.p.* $x \geqslant 0$ *et vérifie (6.94) p.p.* $x \geqslant 0$ *; de plus,*

$$y(0) = c_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}\,.$$

DÉMONSTRATION

Il suffit de considérer le cas où $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$; ceci équivaut à prendre $h = 0$ dans (6.96) ; puisque h est de classe C^∞, cette réduction est possible. Posons

$$y_0 = y = f * g\,,\ y_1 = f * g'\,,\ \ldots\,,\ y_{n-1} = f * g^{(n-1)}\,,\ y_n = f + f * g^{(n)}\,.$$

Rappelons que g est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$ avec

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0\,,\quad g^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

On voit que y_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont continues dans $\mathbb{R}_+$ et que $y_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est telle que $y_n - f$ est continue dans $\mathbb{R}_+$. Cette affirmation de continuité est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Nous démontrons que, pour $x \geqslant 0$,

$$y_k(x) = \int_0^x y_{k+1}(u)\,\mathrm{d}u\,,\quad 0 \leqslant k \leqslant n-1\,. \tag{6.97}$$

Pour $k = n-1$, on a, pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x y_n(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x \big(f * g^{(n)}\big)(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x \left\{\int_0^u g^{(n)}(u-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x f(t)\left\{\int_t^x g^{(n)}(u-t)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x f(t)\big\{g^{(n-1)}(x-t) - 1\big\}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t)\,g^{(n-1)}(x-t)\,\mathrm{d}t = y_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $g^{(n-1)}(0) = 1$ et en utilisant le théorème de Fubini pour justifier les manipulations des intégrales doubles. La vérification

de (6.97) pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$, est similaire, en utilisant dans ces cas le fait que $g^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

On conclut de (6.97) que, pour $x \geqslant 0$,

$$y'(x) = y_0'(x) = y_1(x)\,,\ y''(x) = y_1'(x) = y_2(x)\,,\ \ldots\,,$$
$$y^{(n-1)}(x) = y_{n-2}'(x) = y_{n-1}(x)$$

de sorte que y est de classe C^{n-1} dans $\mathbb{R}_+$ avec

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0\,.$$

De plus, on a

$$y^{(n)}(x) = y_{n-1}'(x) = y_n(x) = f * g^{(n)}(x) + f(x) \quad \text{p.p. } x \geqslant 0\,;$$

ici on utilise le théorème de la théorie de l'intégration de Lebesgue selon lequel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = f(x) \quad \text{p.p. } x$$

si f est localement intégrable dans $\mathbb{R}$. En tenant compte de ce qui précède, on a, p.p. $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) + y^{(n)}(x) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^x g^{(k)}(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g^{(n)}(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t + f(x) \\
&\quad = \int_0^x \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, g^{(k)}(x-t) + g^{(n)}(x-t) \right\} f(t)\,\mathrm{d}t + f(x) = f(x)
\end{aligned}$$

car

$$g^{(n)}(u) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, g^{(k)}(u) = 0\,, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

Ceci montre que $y = f * g$ vérifie (6.94) p.p. $x \geqslant 0$. ♦

REMARQUE. Si l'on suppose que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux (ce qui entraîne que $f(x+)$, $f(x-)$ existent pour tout $x \geqslant 0$ et que f est bornée dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+$), alors on peut préciser l'affirmation concernant $y = f * g$. On aura alors que $y_+^{(n)}(x)$, $y_-^{(n)}(x)$ existent pour tout $x \geqslant 0$ (à $x = 0$, on a seulement $y_+^n(0)$) où $y_+^{(n)}(x)$ est la dérivée droite de $y^{(n-1)}$ au point x et $y_-^{(n)}$ est la dérivée gauche de $y^{(n-1)}$ au point x ; de plus,

$$y_\pm^{(n)}(x) = \left(f * g^{(n)}\right)(x) + f(x\pm)\,.$$

Dans ce cas y vérifie (6.94) en chaque point x où f est continue ; les points où f est discontinue forment un ensemble discret, au plus dénombrable, dans $\mathbb{R}_+$ et en un tel point x, on a

$$y_{\pm}^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) = f(x\pm)\,.$$

La démonstration de ces affirmations est similaire a celle qui précède ; elle est en fait plus élémentaire.

6.11.3 Fonctions rationnelles comme transformées de Laplace

Soit $H(s) = p(s)/q(s)$ une fonction rationnelle, c'est-à-dire p, q sont deux polynômes dans la variable complexe s. *Alors* $H = \mathcal{L}(h)$ *pour une fonction* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *si et seulement si le degré du polynôme* p *est strictement inférieur à celui du polynôme* q.

DÉMONSTRATION

Supposons que

$$\frac{p(s)}{q(s)} = H(s) = \int_0^\infty h(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$$

pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, σ_0 étant une abscisse de convergence absolue pour h, alors

$$\lim_{\sigma\to\infty} H(\sigma) = \lim_{\sigma\to\infty} \int_0^\infty h(x)\,\mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = 0$$

où σ tend vers ∞ par les valeurs réelles ; ceci entraîne que p est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de q.

Si p, q sont deux polynômes avec degré de p strictement inférieur du degré de q, alors on peut écrire p/q en terme de leurs éléments simples comme suit :

$$\frac{p(s)}{q(s)} = H(s) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{\beta_{j_1}}{s-\alpha_j} + \cdots + \frac{\beta_{jk_j}}{(s-\alpha_j)^{k_j}} \right\}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des racines distinctes de $q(s) = 0$, de multiplicités respectives $k_1, \ldots, k_m$, et $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots$ sont des nombres complexes ; ici, nous supposons que les polynômes p, q n'ont pas de facteurs communs, ce que l'on peut toujours arranger par des simplifications préliminaires. On sait que (cf. exemple 3, 6.8.5)

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{1}{(\nu-1)!}\,\mathrm{e}^{\alpha x} x^{\nu-1} \right\} = \frac{1}{(s-\alpha)^\nu}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que si

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \beta_{j_1} + \beta_{j_2} \frac{x}{1!} + \cdots + \beta_{jk_j} \frac{x^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right\} e^{\alpha_j x},$$

alors

$$\mathcal{L}\{h(x)\} = \frac{p(s)}{q(s)} = H(s).$$

REMARQUES

(1) Puisque h peut être considérée comme une solution d'une équation de type (6.94) avec $f = 0$, la forme de h ci-dessus était prévisible à partir de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants (§ 2.4.6).

(2) Considérons le problème de la détermination de g telle que

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{1}{q(s)}, \quad q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0.$$

On a vu (§ 6.11.1) que g s'interprète comme la solution de (6.94) avec $f = 0$ et avec

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0, \quad g^{(n-1)}(0) = 1.$$

On peut donc déterminer g par les considérations du paragraphe 2.4.6 ; néanmoins, le procédé algébrique de la démonstration ci-dessus reste applicable. Nous ne discuterons pas des différentes astuces pour arriver à une décomposition d'une fonction rationnelle dans ses éléments simples ; si le degré de q est grand, les calculs peuvent devenir longs.

(3) Supposons que l'on connaisse g telle que $\mathcal{L}\{g\} = 1/q$ où q est un polynôme de degré n comme dans (2). Alors la détermination de h telle que $\mathcal{L}\{h\} = p/q$ est simplifiée par l'observation suivante (en supposant que le degré de p est $< n$) :

$$\mathcal{L}\{g^{(k)}(x)\} = \frac{s^k}{q(s)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

C'est une conséquence de la formule de dérivation (6.85) en observant que $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0$. Ainsi, si

$$p(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1},$$

on pose

$$h(x) = b_0 g(x) + b_1 g'(x) + \cdots + b_{n-1} g^{(n-1)}(x) ;$$

alors

$$\mathcal{L}\{h(x)\} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathcal{L}\{g^{(k)}(x)\} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{s^k}{q(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}.$$

(4) Pour une fonction non rationnelle $H(s)$ (définie dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0$), il n'est pas facile de déterminer si, oui ou non, H est la transformée de Laplace d'une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. Evidemment, il faut que H soit holomorphe et bornée dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma$; mais cette condition n'est pas suffisante. Nous ne discuterons pas de cette question un peu subtile ; par contre, on peut démontrer que toute fonction H holomorphe dans un demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma > 0$ est la transformée de Laplace d'une distribution $u \in \mathcal{D}'_+$ (§ 6.10.2) si et seulement si

$$|H(s)| \leqslant M|s|^k \quad |s| \geqslant a$$

pour $M, a > 0$ appropriés et k un entier $\geqslant 0$. Nous ne démontrons pas cette affirmation.

6.11.4 Quelques exemples

Le procédé de résolution des équations différentielles donné dans le paragraphe 6.11.1 est assez général ; il s'applique aux systèmes d'équations ainsi qu'aux équations du type de (6.94) où f est une distribution. Nous expliquons ce procédé par quelques exemples simples ; nous interprétons les solutions des équations différentielles dans le cadre des distributions dans le paragraphe suivant.

Exemple 1

Soit l'équation

$$y'' + \omega^2 y = f$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$, $\omega > 0$; soit $F = \mathcal{L}\{f\}$ (en supposant que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ admet une transformée de Laplace). Si $Y = \mathcal{L}\{y\}$, on aura (d'après § 6.11.1)

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + \omega^2}$$

d'où

$$y(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x f(t) \sin\bigl(\omega(x-t)\bigr)\, \mathrm{d}t\,, \quad x \geqslant 0\,.$$

En effet,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega} \sin \omega x\right\} = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

d'après l'exemple 4 (§ 6.8.5), d'où

$$y = f * g\,, \quad g(x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

en utilisant la formule de convolution (déjà utilisée dans le paragraphe 6.11.1). Si f est continue, ceci donne l'unique solution de l'équation (même si f n'admet pas de transformée de Laplace) comme prévu dans l'exercice 18 (sect. 2.8) ; si

f est seulement localement intégrable, alors $y = f * g$ donne une solution généralisée au sens du paragraphe 6.11.2.

De même, on montre que l'équation

$$y'' - \omega^2 y = f\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

possède la solution $y = f * g$ où $g(x) = (1/\omega)\,\mathrm{sh}\,\omega x$. En effet ici, on aura

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - \omega^2}\,, \qquad \frac{1}{s^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega}\left\{\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right\}.$$

D'après l'exemple 1 (§ 6.8.5), on a

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\pm\omega x}\} = \frac{1}{s \mp \omega}$$

d'où

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\omega}\,(\mathrm{e}^{\omega x} - \mathrm{e}^{-\omega x})\right\} = \frac{1}{2\omega}\left\{\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right\} = \frac{1}{s^2 - \omega^2}$$

donne le résultat indiqué.

Exemple 2

Soit l'équation

$$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Avec $Y = \mathcal{L}\{y\}$ on aura

$$(s^2 + 2s + 1)\,Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

d'où

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

ce qui donne $y(x) = (1/2)x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ (§ 6.8.5).

On peut obtenir le même résultat en utilisant la formule $y = f * g$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, et g une solution de l'équation donnée telle que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$; on obtient aisément que $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ d'où la solution désirée y est donnée par

$$y(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x}\,.$$

On voit aussi que la solution générale de l'équation

$$y'' + 2y' + y = f(x)$$

est donnée par

$$y(x) = a\,\mathrm{e}^{-x} + bx\,\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x f(x-t)\,t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,, \quad x \geqslant 0\,,$$

où a, b sont deux constantes arbitraires ; notons qu'ici

$$y(0) = a\,, \quad y'(0) = (b - a)$$

de sorte que la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$ entraîne que $a = b = 0$ et $y = f * g$.

Exemple 3

Soit l'équation

$$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} + 3\,\delta(x-1)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Par $\delta(x-1)$ on indique la distribution de Dirac δ_1 ; noter que l'opérateur différentiel dans cet exemple est le même que dans l'exemple 2 ; on dit que la force extérieure (représentée ici par $\mathrm{e}^{-x} + 3\,\delta(x-1)$) est différente de celle de l'exemple 2. Avec $Y = \mathcal{L}\{y\}$, on aura

$$(s^2 + 2s + 1)\,Y(s) = \frac{1}{s+1} + 3\,\mathrm{e}^{-s}$$

car $\mathcal{L}\{\delta_1\} = \mathrm{e}^{-s}$. Donc

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)^2}$$

ce qui donne

$$y(x) = \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{-x} + 3H_1(x)(x-1)\,\mathrm{e}^{-(x-1)}\,,$$

en utilisant la formule (exemple 5, § 6.8.5)

$$\mathcal{L}\{H_1(x)(x-1)\,\mathrm{e}^{-(x-1)}\} = \mathrm{e}^{-s}(s+1)^2\,.$$

Rappelons que $H_1(x) = 0$ si $x < 1$, $H_1(x) = 1$ si $x > 1$. Nous interprétons ce résultat dans la suite (§ 6.11.5).

Exemple 4

Soit le système d'équations

$$x' = 2x + 5y$$
$$y' = x - 2y$$

avec $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Posons $X = \mathcal{L}\{x\}$, $Y = \mathcal{L}\{y\}$; ainsi,

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,, \quad Y(s) = \int_0^\infty y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

En passant aux transformées de Laplace, on aura

$$sX(s) - x_0 = 2X(s) + 5Y(s)$$
$$sY(s) - y_0 = X(s) - 2Y(s)$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{bmatrix} s-2 & -5 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2-9} \begin{bmatrix} s+2 & 5 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Si $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, on aura

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2-9} = \frac{5/6}{s-3} + \frac{1/6}{s+3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2-9} = \frac{1/6}{s-3} + \frac{-1/6}{s+3}$$

ce qui donne

$$x(t) = \frac{5}{6}\,\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad y(t) = \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}\right).$$

Si $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, on aura

$$X(s) = \frac{5}{s^2-9} = \frac{5/6}{s-3} + \frac{-5/6}{s+3}$$

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2-9} = \frac{1/6}{s-3} + \frac{5/6}{s+3}$$

ce qui donne

$$x(t) = \frac{5}{6}\left(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}\right), \quad y(t) = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3t} + \frac{5}{6}\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

En posant

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

on a (sect. 2.2)

$$\exp(tA) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-3t} & 5\left(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}\right) \\ \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{3t} + 5\,\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}.$$

La solution lorsque $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ est alors donnée par

$$\exp(tA) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

6.11.5 Remarques

L'exemple 4 (§ 6.11.4) montre qu'on peut utiliser les transformées de Laplace pour la résolution des *systèmes* d'équations différentielles linéaires (ordinaires) à coefficients constants. Les systèmes peuvent être formés d'équations

différentielles d'ordre supérieur ; en passant aux transformées de Laplace le système se transforme à un système d'équations linéaires (algébriques) que l'on peut résoudre ensuite par les méthodes de l'algèbre linéaire. Aucun nouveau principe d'analyse n'est nécessaire pour étudier ce procédé, même si les calculs peuvent devenir longs si le système est grand.

La méthode formelle s'applique aussi aux équations du type de (6.94) où f est une distribution dans $\mathcal{D}'_+$; ceci se voit dans l'exemple 3 (§ 6.11.4). Il est utile d'interpréter le résultat obtenu en le comparant avec la solution de l'exemple 2 (§ 6.11.4). On remarque que les deux solutions sont identiques pour $0 \leqslant x < 1$ (car $H_1(x) = 0$ si $0 \leqslant x < 1$) mais que pour $x > 1$, la solution de l'exemple 3 excède celle de l'exemple 2, par la quantité $3(x-1)\,\mathrm{e}^{-(x-1)}$. En considérant que x représente le temps, on interprète ceci en disant qu'un choc d'amplitude 3 à l'instant $x = 1$ (représenté par le terme $3\,\delta(x-1)$) a perturbé la solution de l'exemple 2 pour les temps $x > 1$; puisque le choc intervient au temps $x = 1 > 0$, ceci n'a aucun effet sur la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$. La perturbation fait que la solution de l'exemple 3, tout en étant continue pour $x \geqslant 0$, ne possède pas de dérivée à $x = 1$; elle a une dérivée à droite et une dérivée à gauche à $x = 1$ ce qui donne le terme $3\,\delta_1$ lorsque l'on passe à la dérivée seconde au sens des distributions.

Pour bien comprendre la situation, considérons l'équation générale (6.94) où f est une distribution quelconque dans $\mathcal{D}'_+$; admettons provisoirement que f possède une transformée de Laplace F définie dans un demi-plan approprié de $\mathbb{C}$. On essaie de trouver une distribution y dans $\mathcal{D}'_+$ tel que (6.94) est vérifiée au sens des distributions ; il n'est pas question à ce stade d'obtenir y qui vérifie une condition initiale (6.95), car, comme on l'a déjà dit, pour une distribution générale y, il n'est pas sensé de parler de sa valeur ou de la valeur de ses dérivées en un point spécifié tel que $x = 0$. Le calcul formel du paragraphe 6.11.1 donne

$$Y(s) = \frac{F(s)}{q(s)}$$

où $q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$, $Y = \mathcal{L}\{y\}$, en prenant c_0, c_1, etc. comme nuls ; ainsi, une solution de (6.94) est donnée par $y = f * g$ (où g est la fonction de classe C^∞ qui est la solution de (6.94) avec $f = 0$, $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0$, $g^{(n-1)}(0) = 1$). Supposons que la distribution f est de la forme $\mathrm{D}^m\varphi$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, φ continue, $\varphi(x) = 0$ si $x \leqslant 0$; alors

$$y = f * g = \mathrm{D}^m(\varphi * g)$$

au sens des distributions. Puisque φ est continue, $\varphi * g$ est de classe C^n dans $\mathbb{R}_+$, avec

$$(\varphi * g)(x) = 0 \quad \text{si } x < 0\,,$$

$$(\varphi * g)(0+) = (\varphi * g)'(0+) = \ldots = (\varphi * g)^{n-2}(0+) = 0\,,\ (\varphi * g)^{n-1}(0+) = 0\,,$$

d'après le paragraphe 6.11.2 ; donc $y = \mathrm{D}^m(\varphi * g)$ est une fonction de classe C^{n-m} dans $\mathbb{R}_+$ si $m \leqslant n$, et les quantités

$$y(0+)\,,\ y'(0+)\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-m)}(0+)$$

sont bien définies. En particulier si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est localement intégrable, on a $f = \varphi'$ p.p. et au sens des distributions, avec

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{si } x \geqslant 0\,, \qquad \varphi(0) = 0\,, \quad x < 0\,,$$

et $y = f * g = \mathrm{D}(\varphi * g)$ est de classe C^{n-1} dans $\mathbb{R}_+$ comme prévu par la discussion du paragraphe 6.11.2. De même, si $f = \delta$, alors $f = \mathrm{D}^2\varphi$ au sens des distributions, avec

$$\varphi(x) = x \quad \text{si } x \geqslant 0\,, \qquad \varphi(x) = 0\,, \quad x < 0\,,$$

de sorte que $y = \delta * g = \mathrm{D}^2(\varphi * g)$ est dans ce cas de classe C^{n-2} dans $\mathbb{R}_+$; puisque

$$y(x) = (\delta * g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

on voit que y est même de classe C^∞ dans $\mathbb{R}_+$ avec

$$y(0+) = y'(0+) = \ldots = y^{(n-2)}(0+) = 0\,, \quad y^{(n-1)}(0+) = 1$$
$$y(0-) = y'(0-) = \ldots = y^{(n-2)}(0-) = y^{(n-1)}(0-) = 0$$

ce qui montre que, au sens des distributions, $y^{(n)}$ se comporte comme δ autour de $x = 0$. Ainsi, il est raisonnable de dire que l'équation (6.94) avec $f = \delta$ possède une unique solution $y = \delta * g$ vérifiant la condition initiale

$$y(0+) = y'(0+) = \ldots = y^{(n-2)}(0+) = 0\,, \quad y^{(n-1)}(0+) = 1\,.$$

En particulier, l'équation

$$y'' + y = \delta$$

avec $y(0+) = 0$, $y'(0+) = 1$, possède une solution

$$y(x) = \begin{cases} \sin x & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0\,. \end{cases}$$

En effet, ici $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne $y = \delta * g$ comme indiqué. On vérifie d'ailleurs sans peine que la fonction définie par $y(x) = \sin x$ pour $x \geqslant 0$, $y(x) = 0$ pour $x < 0$, satisfait à $y'' + y = \delta$ au sens des distributions ; en effet, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle y'' + y\,,\,\psi\rangle = \langle y\,,\,\psi'' + \psi\rangle = \int_0^\infty \sin x\,\{\psi''(x) + \psi(x)\}\,\mathrm{d}x = \psi(0)$$

car

$$\int_0^\infty \sin x\, \psi''(x)\, \mathrm{d}x = -\int_0^\infty \psi'(x) \cos x\, \mathrm{d}x = \psi(0) - \int_0^\infty \psi(x) \sin x\, \mathrm{d}x$$

en faisant des intégrations par parties et en tenant compte du fait que $\psi(x) = 0$ pour x suffisamment grand.

Les remarques précédentes nous suffiront en ce qui concerne la solution de (6.94) lorsque f est une distribution ; les cas les plus importants pour les applications sont ceux où f est formée d'une combinaison linéaire finie d'une fonction continue et des distributions δ_c, δ_c' (δ_c' étant interprété comme un double choc au moment $x = c > 0$). Dans ces cas, la solution $y = f * g$ se comporte comme une fonction en $x = 0$ et on interprète $f * g$ comme la solution distribution *qui s'annule avec ses* $n - 1$ *dérivées en* $x = 0$; nous adopterons cette terminologie pour la solution $y = f * g$ lorsque f est une distribution quelconque dans $\mathcal{D}'_+$.

6.12 EXERCICES

1 Vérifier les formules suivantes où $F = \mathcal{L}\{f\}$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$.

(i) Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a, \end{cases}$$

alors

$$F(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s}\,(1 - \mathrm{e}^{-as}) & \text{si } s \neq 0 \\ a & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

(ii) Si $f(x) = \operatorname{sh} \alpha x$, alors $F(s) = \alpha/(s^2 - \alpha^2)$, $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} \alpha|$.
(iii) Si $f(x) = \operatorname{ch} \alpha x$, alors $F(s) = s/(s^2 - \alpha^2)$, $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} \alpha|$.
(iv) Si $f(x) = (1/x)(1 - \mathrm{e}^{-x})$, $x > 0$, alors $F(s) = \ln(1 + 1/s)$, $\operatorname{Re} s > 0$.
(A cause de l'analyticité de $s \mapsto F(s)$, $s \mapsto \ln(1 + 1/s)$ pour $\operatorname{Re} s > 0$, il suffit de vérifier cette égalité pour $s > 1$, $s \in \mathbb{R}$.)

2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $f(x + p) = f(x)$, $x \geqslant 0$, p étant > 0 ; si f est localement intégrable et $F = \mathcal{L}\{f\}$, alors vérifier que

$$F(s) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sp}} \int_0^p f(x)\, \mathrm{e}^{-sx}\, \mathrm{d}x\,, \quad \operatorname{Re} s > 0\,.$$

3 Vérifier les relations suivantes :

(i) $\mathcal{L}\{x \sin \alpha x\} = \dfrac{2\alpha s}{\left(s^2 + \alpha^2\right)^2}$, $\operatorname{Re} s > \left|\operatorname{Im} \alpha\right|$;

(ii) $\mathcal{L}\{x \cos \alpha x\} = \dfrac{s^2 - \alpha^2}{\left(s^2 + \alpha^2\right)^2}$, $\operatorname{Re} s > \left|\operatorname{Im} \alpha\right|$;

(iii) $\mathcal{L}\{x^2 \cos x\} = \dfrac{2s(s^2 - 3)}{\left(s^2 + 1\right)^3}$, $\operatorname{Re} s > 1$.

4 Posons $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{(1/x)f(x)\}$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est telle que

$$\int_0^\infty \left|f(x)\right| \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int_0^\infty \left|\frac{f(x)}{x}\right| \mathrm{e}^{-\sigma_0 x}\, \mathrm{d}x < \infty$$

pour un $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour s réel, on a

$$G(s) = \int_s^\infty F(u)\, \mathrm{d}u\,, \quad s > \sigma_0\,.$$

(Etablir que $G'(s) = -F(s)$, pour $s > \sigma_0$, d'où

$$G(s) - G(T) = \int_s^T F(u)\, \mathrm{d}u$$

donne le résultat en observant que $\lim_{T\to\infty} G(T) = 0$.)

5 A l'aide de l'exercice 4, obtenir que :

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} s$, $s > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \frac{s^2 + \beta^2}{s^2 + \alpha^2}$, $s > 0$ $(\alpha, \beta > 0)$.

Conclure à l'aide du théorème abélien que :

(iii) $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x}\, \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

6 Soit $F = \mathcal{L}\{f\}$; si $F(s + p) = F(s)$ pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ où p est un nombre > 0, démontrer que $f = 0$ p.p. $x \geqslant 0$. (Utiliser le théorème d'unicité, § 6.9.2.)

7 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 avec $\int_0^\infty \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x < \infty$. Démontrer que f est bornée, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe et que $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ est définie pour $\operatorname{Re} s > 0$; établir que

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in\mathbb{R}_+}} sF(s) = f(0)\,.$$

8 Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(x - \ln n)$, $x \geqslant 0$, où $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$. Vérifier que

$$f(x) = \sum_{\{n : \ln n \leqslant x\}} a_n \,.$$

Vérifier ensuite formellement que si $\mathcal{L}\{f\} = F$, alors

$$sF(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \,.$$

Justifier cette formule pour $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0$ où $\sigma_0 > 0$ est tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma_0} < \infty$. (Utiliser le théorème suivant : si $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\} \mathrm{d}x \,.$$

Rappeler que pour $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-s} = \exp(-s \ln n)$. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ s'appellent les *séries de Dirichlet* ; l'exercice montre leur relation avec les transformées de Laplace.)

9 Posons $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ (sans préciser le domaine de définition de F). Etablir les inversions suivantes (α, $\beta \in \mathbb{C}$) :

(i) si $F(s) = \dfrac{s - \alpha}{\beta^2 + (s - \alpha)^2}$ alors $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$;

(ii) si $F(s) = \beta / \{\beta^2 + (s - \alpha)^2\}$ alors $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$;

(iii) si $F(s) = \dfrac{1}{(s - \alpha)(s - \beta)}$, alors $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}}{\alpha - \beta}$, $\alpha \neq \beta$;

(iv) si $F(s) = \dfrac{s}{(s - \alpha)(s - \beta)}$, alors $f(x) = \dfrac{\alpha \, \mathrm{e}^{\alpha x} - \beta \, \mathrm{e}^{\beta x}}{\alpha - \beta}$, $\alpha \neq \beta$.

10 En utilisant la formule de convolution, établir les relations suivantes (n entier $\geqslant 2$; les convolutions sont prises dans $\mathbb{R}_+$) :

(i) $1 * 1 * \overset{n}{\cdots} * 1 = f$ où $f(x) = \big(1/(n-1)!\big) \, x^{n-1}$, $x \geqslant 0$,

(ii) $x * x * \overset{n}{\cdots} * x = f$ où $f(x) = \big(1/(2n-1)!\big) \, x^{2n-1}$, $x \geqslant 0$.

(Ici, 1 et x représentent les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ ($x \geqslant 0$), respectivement.)

11 Soient $\mathcal{L}\{f\} = \varphi$, $\mathcal{L}\{\varphi\} = \psi$. Vérifier formellement que

$$\psi(s) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{s+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

En supposant que $\int_0^\infty |f(x)|/(\sigma + x)\,\mathrm{d}x < \infty$ pour tout $\sigma > 0$, justifier la formule précédente pour $\operatorname{Re} s > 0$ en utilisant le théorème de Fubini. (On dit que ψ est la *transformée de Stieltjes* de f ; le calcul précédent justifie la notation $\psi = \mathcal{L}^2\{f\}$. Les transformées de Stieltjes jouent un rôle important dans différentes théories analytiques.)

12 Résoudre les équations suivantes sous la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$ en écrivant la solution sous la forme $y = f * g$ (a et b sont des constantes réelles ou complexes) :

(i) $y'' - (a+b)y' + aby = f$, $a \neq b$;
(ii) $y'' - 2ay' + a^2y = f$.

(On a : pour (i) $g(x) = (\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{bx})/(a-b)$, pour (ii) $g(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}$.)

13 Résoudre, en utilisant les transformées de Laplace,

$$y'' + 2ay' + a^2y = \mathrm{e}^{-ax}\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,, \qquad a \in \mathbb{C}\,.$$

(On a $y(x) = (1/2)x^2\,\mathrm{e}^{-ax}$; voir que $\mathcal{L}\{x^2\,\mathrm{e}^{-ax}\} = 2/(s+a)^3$; on peut obtenir la solution de l'exercice 12(ii) mais c'est plus long.)

14 Résoudre le système suivant en utilisant les transformées de Laplace :

$$y_1'' - 2y_1' - y_2' + 2y_2 = 0$$
$$y_1' - 2y_1 + y_2' = -2\,\mathrm{e}^{-x}$$

avec $y_1(0) = 3$, $y_1'(0) = 2$, $y_2(0) = 0$. (On obtient $y_1(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.)

15 En utilisant les transformées de Laplace et directement aussi, démontrer que le système suivant ne possède pas de solution :

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 + y_2'' + y_2' = 0$$
$$y_1' + y_1 + y_2' = 0$$

avec $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$.

16 En utilisant les transformées de Laplace résoudre les équations suivantes avec $y(0) = y'(0) = 0$ (où $a > 0$, $c > 0$) :

$$\text{(i)}\ \ y'' + a^2 y = \delta_c\,, \qquad \text{(ii)}\ \ y'' + a^2 y = \delta_c'\,.$$

Vérifier directement aussi que

$$y_1(x) = H_c(x)\frac{1}{a}\sin a(x-c)\,, \quad y_2(x) = H_c(x)\cos a(x-c)$$

sont des solutions voulues de (i) et (ii) respectivement (avec $H_c(x) = 0$ si $x < c$, $H_c(x) = 1$ si $x > c$.)

6.13 REMARQUES COMPLÉMENTAIRES CONCERNANT LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

6.13.1 Calcul opérationnel et théorie des systèmes

Ce calcul est utilisé souvent dans l'analyse des *systèmes* (dits *linéaires*). Un système peut être conçu comme un appareil (ou une « boîte noire ») qui convertit une fonction $t \mapsto x(t)$ (appelée *entrée* ou *input*) à une fonction $t \mapsto y(t)$ (appelée *sortie* ou *output*) ; en notant $y = Tx$, on peut concevoir le système comme l'opérateur T. Le système est dit linéaire si T est linéaire :

$$T(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Tx_1 + c_2Tx_2\,.$$

La variable t dans $x(t)$, $y(t)$ est interprétée comme étant le temps. L'opérateur T peut avoir des formes très variées :

$$y(t) = Tx(t) = \int_0^t k(t,u)x(u)\,du$$

$$y(t) = Tx(t) = x(t-1) + x'(t)\,.$$

Dans ces cas, $y = Tx$ et donné explicitement ; dans certains exemples importants (comme pour la théorie des circuits électriques) y est décrit comme la solution d'une équation différentielle :

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = x$$

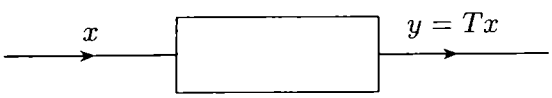


Fig. 6.1

où a_0, a_1, a_2 sont des constantes fixées par le système. Puisque c'est une équation linéaire, on a que $y = Tx$ est un opérateur linéaire (en fixant $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$) ; en fait, on sait de notre analyse du paragraphe 6.11.1 que

$$y(t) = Tx(t) = \int_0^t g(t-u)x(u)\,\mathrm{d}u$$

où g est une fonction appropriée. En calcul opérationnel (pour l'origine de cette terminologie, § 6.13.2), on a tendance à étudier la relation entre x et y via leurs transformées de Laplace X et Y respectivement ; alors on aura

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)\,Y(s) = X(s)$$

d'où

$$Y(s) = R(s)\,X(s)\,, \quad R(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}\,.$$

On appelle R la *fonction de transfert* du système ; elle décrit, *au niveau des transformées de Laplace*, la relation entre l'entrée et la sortie.

L'utilisation des transformées de Laplace dans la théorie des systèmes est souvent dite calcul opérationnel. La littérature consacrée à la *théorie des systèmes* et leur *contrôle* est vaste ; elle concerne la plupart des domaines des ingérieurs.

6.13.2 Remarques historiques

L'appellation « transformée de Laplace » est devenue courante depuis les années 1940. Les expressions de la forme

$$\int_C \exp(z\zeta) f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

où C est un chemin dans $\mathbb{C}$ étaient souvent appelées (déjà au XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle) les « intégrales de Laplace » et elles étaient utilisées pour la solution des équations différentielles ordinaires. Bien entendu, les intégrales telles

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

apparaissent maintes fois chez Euler (XVIII$^{\mathrm{e}}$ siècle) et ensuite chez Lagrange, Abel et Cauchy. Laplace se servit des intégrales comme $F(s)$ dans son célèbre traité (*Théorie analytique des probabilités*, 1$^{\mathrm{re}}$ édition, 1812) où $F(s)$ est appelée « fonction génératrice » ; la terminologie « transformée de Laplace » est généralement justifiée par cette référence à Laplace. L'utilisation des transformées de Laplace durant les années 1920-1930 permit la justification d'une quantité de calcul symbolique (dit « calcul opérationnel ») initié par l'ingénieur électricien anglais Heaviside durant les années 1890-1900 pour la résolution des équations différentielles. Le développement de la théorie des systèmes pendant la Seconde Guerre mondiale a favorisé le progrès de la théorie des transformées de Laplace

en vue de leur application. L'utilité de ces transformées dans les domaines les plus variés de l'analyse théorique ne cesse de croître ; avec l'incorporation de ces transformées dans la théorie des distributions, leur champ d'utilité s'élargit davantage.

L'origine de la terminologie « calcul opérationnel » réside dans les manipulations de Heaviside qui traitait l'opération de la dérivation $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ comme un opérateur p. Son procédé peut être expliqué par l'exemple simple suivant :

$$y' - y = x^2 ;$$

on écrit cette équation comme

$$py - y = x^2$$

d'où

$$y = \frac{1}{p-1}\, x^2 = -(1 + p + p^2 + \cdots)x^2 = -(x^2 + 2x + 2)$$

ce qui donne une solution particulière de l'équation donnée. On obtient ensuite la solution générale telle

$$y(x) = a\,\mathrm{e}^x - (x^2 + 2x + 2)$$

où a est une constante arbitraire. Ce type de calcul était utilisé par Heaviside avec beaucoup de succès, sans qu'il se préoccupe d'expliquer la raison de ce succès. Les transformées de Laplace permirent une première explication partielle durant les années 1920-1930 ; une autre explication fut fournie par une théorie des opérateurs, perfectionnée par Mikusínski autour de 1950 ; la généralisation des transformées de Laplace aux distributions de Schwartz (sect. 6.10) donne un cadre général pour ces calculs opérationnels.

6.13.3 Remarques bibliographiques

Un livre encyclopédique sur les transformées de Laplace est celui de G. Doetsch (*Handbuch der Laplace-Transformation*, 3 vols, Birkhäuser, 1950-1956). De nombreux ouvrages élémentaires présentent une introduction à la théorie des transformées de Laplace ; on peut consulter par exemple ceux de Churchill, de Carslaw et Jaeger ou de Deutsch. Le livre de D. Widder (*The Laplace Transform*, Princeton, 1946) est une référence classique pour les questions théoriques concernant les transformées de Laplace. L'œuvre scientifique de Laplace est analysée de manière détaillée dans l'article qui lui est consacré dans le *Dictionary of Scientific Biography* (vol. 15, pp. 273-403). La méthode de Mikusínski, justifiant le calcul opérationnel de Heaviside sans passer par les transformées de Laplace, est donnée en détail dans son livre (*Operational Calculus*, Pergammon, 1959).

CHAPITRE 7

Equations aux dérivées partielles : introduction

Dans ce chapitre, nous présentons certaines généralités simples concernant les équations aux dérivées partielles. Nous visons essentiellement les équations linéaires et spécialement les équations linéaires du second ordre ; néanmoins, une discussion élémentaire pour les équations quasi linéaires du premier ordre est donnée. En ce qui concerne les équations linéaires du second ordre, nous décrivons le formalisme opérationnel qui permet de résoudre les trois types d'équations importants de la physique mathématique : l'équation de Laplace–Poisson, l'équation de la chaleur et l'équation des ondes. Le formalisme est présenté axiomatiquement ; enfin, on démontre que les opérateurs associés au problème de Sturm–Liouville régulier vérifient les axiomes proposés. Pour l'étude spécifique associée à l'opérateur laplacien, on est renvoyé au chapitre suivant.

7.1 GÉNÉRALITÉS

7.1.1 Préliminaires

Une *équation aux dérivées partielles* (EDP) est une équation de la forme

$$F(u, t, x, \ldots ; u'_t, u'_x, \ldots ; u''_{tt}, u''_{xx}, \ldots ; \ldots) = 0 \tag{7.1}$$

où $u = u(t, x, \ldots)$ est la fonction inconnue des variables réelles t, x, ... à déterminer et F est une fonction donnée ; nous nous bornons ici au cas où u et F sont des fonctions réelles. En général, on demande que la solution cherchée u satisfasse l'équation pour les valeurs de t, x, ... (appelées *variables indépendantes*) dans une partie ouverte Ω donnée et que u remplisse d'autres conditions *auxiliaires* dites *conditions initiales* et/ou *conditions aux limites* (ou *conditions au bord*).

L'équation (7.1) est dite *linéaire* si F est une fonction linéaire dans les quantités u, u'_t, u'_x, u''_{tt}, ... Par exemple, une EDP linéaire du *premier ordre* (en deux variables réelles indépendantes t, x) s'écrit comme

$$a(t,x)u'_t + b(t,x)u'_x + c(t,x)u = f(t,x)\,. \tag{7.2}$$

De même, la forme générale de l'EDP linéaire du second ordre en deux variables indépendantes t, x est

$$au''_{tt} + bu''_{tx} + cu''_{xx} + ku'_t + \ell u'_x + mu = f \tag{7.3}$$

où a, b, c, k, ℓ, m et f sont des fonctions de t et x.

La linéarité des équations (7.2) et (7.3) est caractérisée par le fait que ces équations sont de la forme

$$Lu = f \tag{7.4}$$

où $u \mapsto Lu$ est un opérateur linéaire. Comme pour d'autres équations linéaires, on étudie (7.4) en résolvant l'*équation homogène associée* $Lu = 0$ et en ajoutant aux solutions de cette dernière des *solutions particulières* de $Lu = f$. Pour l'équation homogène $Lu = 0$, le *principe de superposition* des solutions est important : *si* $Lu_j = 0$, $j = 1, 2$, *alors* $Lu = 0$ *pour* $u = c_1u_1 + c_1u_2$, c_1, c_2 *étant des constantes*. Plus généralement, si $\{u_\alpha\}$ est une famille de solutions de l'équation homogène (donc $Lu_\alpha = 0$ pour chaque α) où α est un paramètre approprié, alors

$$u = \int u_\alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

est aussi une solution de l'équation homogène. Par exemple, souvent la solution cherchée de $Lu = 0$ est obtenue comme

$$u = \sum_n c_n u_n$$

à partir des solutions simples u_n, les c_n étant des constantes appropriées.

La solution générale d'une EDP (7.1) contient, dans un certain sens, plusieurs fonctions arbitraires ; en principe, on aura n fonctions arbitraires de $m-1$ variables si l'équation (7.1) est d'*ordre* n en m variables t, x, ... où l'ordre signifie l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qui apparaît dans F de (7.1). Les conditions auxiliaires (conditions initiales et/ou conditions au bord) fixent le choix des fonctions arbitraires impliquées. Mais, contrairement à la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires, la connaissance de la solution générale d'une EDP linéaire ne permet pas toujours de résoudre les problèmes qui se posent. Par exemple, l'EDP linéaire du second ordre à deux variables x, y

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^2$), possède comme solution générale, pour $(x, y) \in \Omega$, un disque ouvert, les fonctions u qui sont les parties réelles des fonctions holomorphes dans Ω ; mais, cette connaissance ne résout pas immédiatement le problème de Dirichlet concernant $\triangle$ dans Ω : trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad u|_{\mathrm{Fr}\,\Omega} = \alpha \quad \text{(condition au bord)}$$

où $\alpha : \mathrm{Fr}\,\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

Les généralités présentées ci-dessus, peuvent être étendues aux systèmes d'EDP où il s'agit de déterminer plusieurs fonctions inconnues u_1, u_2, ... des variables t, x, ... ; dans ce cas, F de (7.1) est une fonction vectorielle de la fonction inconnue vectorielle $u = (u_1, u_2, \ldots)$ et ses dérivées partielles. Un exemple simple mais important est fourni par le système suivant (équation de Cauchy–Riemann) :

$$u'_x - v'_y = 0\,, \quad u'_y + v'_x = 0$$

où les fonctions (réelles) inconnues (des variables réelles x, y) sont u, v. C'est un système linéaire de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre ; de l'analyse complexe, on sait que l'étude de ce système se ramène à l'étude d'une EDP linéaire du second ordre : $\triangle u = 0$.

Dans la suite, nous nous bornerons aux considérations d'une équation (généralement linéaire) seulement.

7.1.2 Quelques exemples

Dans ce paragraphe, nous étudions, de manière préliminaire, quelques solutions de certaines EDP linéaires simples. Notre but est, avant tout, d'illustrer les remarques générales du paragraphe 7.1.1. La plupart des solutions des équations concernées sont obtenues en utilisant les méthodes élémentaires suivantes :

- essayer les solutions de type $\exp(rx+sy)$ (ou autres fonctions) contenant certains paramètres r, s ;
- essayer les solutions du type $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ ou $u(x,y) = \varphi(x)+\psi(x)$ où φ, ψ sont à déterminer (*séparations des variables*) ;
- changements de variables.

Exemple 1

Soit l'équation

$$u^{(3)}_{xxy} = 1\,, \quad u = u(x,y)\,.$$

Ici, la solution générale s'obtient en intégrant trois fois successivement ; on aura

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2y + xa(y) + b(x) + c(y)$$

comme solution générale où a, b, c sont trois fonctions arbitraires d'une variable.

Exemple 2

Soit l'équation

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0\,, \quad u = u(x,y)\,.$$

On voit que $u(x,y) = \exp(rx + sy)$ est une solution si

$$r^2 + 2rs + s^2 = 0\,,$$

c'est-à-dire $r = -s$; on obtient ainsi une famille de solutions $u(x, y) = \exp r(x - y)$, $r \in \mathbb{R}$. Selon le principe de superposition, une fonction du type

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) \exp t(x - y)\, \mathrm{d}t$$

serait aussi une solution (si la fonction c est choisie de telle manière que l'intégrale existe convenablement).

Exemple 3

Soit l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathrm{D}_j u + bu = f \tag{7.5}$$

où $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ est à déterminer et $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction continue donnée, $a_1, \ldots, a_n, b$ étant des nombres réels avec $a_j \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Posons, $x = Ay$ où

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & a_n \end{bmatrix}$$

et $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de sorte que

$$x_1 = a_1 y_1 \,, \; x_2 = a_2(y_1 + y_2) \,, \; \ldots \,, \; x_n = a_n(y_1 + \cdots + y_n) \,.$$

Ecrivons $v(y) = u(Ay)$; notons que A est une matrice inversible. On a

$$\frac{\partial v}{\partial y_1}(y) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathrm{D}_j u(Ay) \;;$$

donc u vérifie (7.5) si et seulement si v est une solution de l'équation

$$\mathrm{D}_1 v(y) + bv(y) = f(Ay) \,. \tag{7.6}$$

Ecrivons $g(y) = f(Ay)$; en fixant $y_2, \ldots, y_n$, on obtient dans (7.6) une équation différentielle ordinaire linéaire en la variable y_1 ; en résolvant celle-ci, on obtient, pour $y_2, \ldots, y_n$ fixes,

$$v(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathrm{e}^{-by_1} \left\{ \int_0^{y_1} \mathrm{e}^{bt} g(t, y_2, \ldots, y_n)\, \mathrm{d}t + c(y_2, \ldots, y_n) \right\} \tag{7.7}$$

où c est une fonction « arbitraire » des $n - 1$ variables $y_2, \ldots, y_n$. Puisque $u(x) = v(A^{-1}x)$, (7.7) donne la solution générale de (7.5) en remplaçant y dans (7.7) par $A^{-1}x$; notons que

$$A^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{a_1} \,, \; \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_1}{a_1} \,, \; \ldots \,, \; \frac{x_n}{a_n} - \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} \right) .$$

Si $v(0, y_2, \ldots, y_n)$ est spécifié pour tous $(y_2, \ldots, y_n)$, ce qui équivaut à imposer une condition sur les valeurs de $u(0, x_2, \ldots, x_n)$, alors u sera uniquement déterminé. Pour illustrer cette discussion, considérons le cas particulier suivant de (7.5) avec $n = 2$ (et avec un changement de notations) :

$$u'_x + au'_y - u = 0\,, \quad a > 0 \tag{7.8}$$

où $u = u(x, y)$ est à déterminer. En posant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & a \end{bmatrix}\,, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\,,$$

on a

$$x = s\,, \quad y = a(s+t)\,, \quad v(s,t) = u\big(s,\, a(s+t)\big)$$

et, d'après (7.8),

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = u\big(s,\, a(s+t)\big) = v(s,t)$$

ce qui donne $v(s,t) = c(t)\,\mathrm{e}^s$ d'où

$$u(x,y) = v\Big(x\,,\, \frac{y}{a} - x\Big) = c\Big(\frac{y}{a} - x\Big)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Si l'on impose la condition $u(0,y) = \varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}$, alors on aura

$$\varphi(y) = c\Big(\frac{y}{a}\Big)\,, \quad c(t) = \varphi(at)$$

d'où

$$u(x,y) = \varphi(y - ax)\,\mathrm{e}^x\ ;$$

on vérifie aisément que ceci donne une solution u, de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$, de (7.8), vérifiant $u(0,y) = \varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}$, *pourvu* que la fonction φ donnée soit de classe C^1 dans $\mathbb{R}$. Le raisonnement suivi démontre que cette solution est l'unique solution de (7.8) vérifiant $u(0,y) = \varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}$, φ étant dans $C^1(\mathbb{R})$.

Les exemples suivants illustrent les principes déjà indiqués ; nous les donnons séparément à cause de leur importance.

7.1.3 Equation des ondes dans $\mathbb{R}$

L'équation

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} \tag{7.9}$$

où $u = u(t,x)$, $a > 0$, s'appelle l'*équation des ondes* dans $\mathbb{R}$ (où t, x sont des variables réelles) ; on peut interpréter t comme le temps, x comme la position et $u(t,x)$ la pression à instant t au point x.

Posons $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ et

$$u(t,x) = v(x + at\,,\, x - at) = v(\xi, \eta)\,.$$

Alors

$$u'_t(t,x) = av'_\xi(x+at\,,\,x-at) - av'_\eta(x+at\,,\,x-at)$$
$$u'_x(t,x) = v'_\xi(x+at\,,\,x-at) + v'_\eta(x+at\,,\,x-at)$$

ce que nous écrivons succinctement comme

$$u'_t = a(v'_\xi - v'_\eta)\,, \quad u'_x = v'_\xi + v'_\eta\,.$$

De même, on obtient

$$u''_{tt} = a^2(v''_{\xi\xi} - 2v''_{\xi\eta} + v''_{\eta\eta})\,, \quad u''_{xx} = v''_{\xi\xi} + 2v''_{\xi\eta} + v''_{\eta\eta}$$

d'où

$$a^2u''_{xx} - u''_{tt} = 4a^2v_{\xi\eta}$$

le membre de gauche étant calculé à (t,x) et celui de droite à $(x+at\,,\,x-at) = (\xi,\eta)$.

On constate que u est une solution de (7.9) si et seulement si

$$v''_{\xi\eta} = 0$$

d'où

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)\,.$$

Donc, la solution générale u de (7.9) est de la forme

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at) \tag{7.10}$$

où f, g sont deux fonctions « arbitraires » d'une variable réelle. On dit que $f(x+at)$ représente l'onde se propageant vers la gauche avec la vitesse a et $g(x-at)$ représente celle se propageant vers la droite avec la même vitesse a ; voir la figure 7.1 pour la justification de cette terminologie.

Pour déterminer u, c'est-à-dire pour fixer les fonctions arbitraires f, g dans (7.10), on se donne une condition dite *initiale* comme suit : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u(0,x) = \alpha(x)\,, \quad u'_t(0,x) = \beta(x)\,. \tag{7.11}$$

Si u de (7.10) doit vérifier (7.11), on doit avoir

$$\alpha(x) = u(0,x) = f(x) + g(x)$$
$$\beta(x) = u'_t(0,x) = a\{f'(x) - g'(x)\}$$

d'où

$$\frac{1}{a}\int_0^x \beta(y)\,\mathrm{d}y = f(x) - g(x) + k\,, \quad k \text{ une constante}\,,$$

ce qui donne (avec $\alpha(x) = f(x) + g(x)$)

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\alpha(x) - \frac{k}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \beta(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad g(x) = \frac{1}{2}\,\alpha(x) + \frac{k}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \beta(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

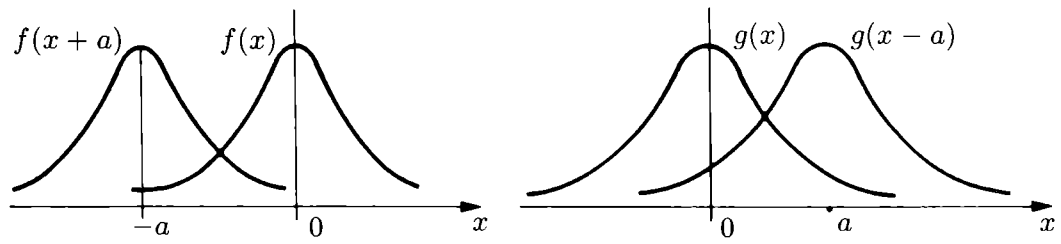


Fig. 7.1

et, ainsi,

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at)$$
$$= \frac{1}{2}\{\alpha(x+at) + \alpha(x-at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \beta(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{7.12}$$

Si α est de classe C^2 et β et de classe C^1, alors u donné par (7.12) est une fonction de classe C^2 pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, telle que u est une solution de l'équation des ondes (7.9) vérifiant la condition initiale (7.11) ; cette solution est unique. En effet, un calcul simple montre que (7.12) est effectivement une solution de (7.9) vérifiant (7.11) ; d'autre part, le raisonnement conduisant à (7.10) établit que (7.12) est la seule solution possible vérifiant (7.11).

Notons que la valeur de u en (t_0, x_0) (donnée par (7.12)) dépend seulement des valeurs de α aux points $x_0 \pm at_0$ et des valeurs de β dans l'intervalle $[\,x_0 - at_0\,,\ x_0 + at_0\,]$; si $\alpha(x_0 \pm at_0) = 0$, $\beta(x) = 0$ pour $x \in [\,x_0 - at_0\,,\ x_0 + at_0\,]$, alors $u(t_0, x_0) = 0$. On interprète ceci en disant que la condition initiale se propage avec la vitesse $a > 0$. Vu différemment, l'équation (7.12) dit que seules les valeurs de α, β dans $[\,x_0 - h\,,\ x_0 + h\,]$, $h > 0$, déterminent les valeurs $u(t,x)$ pour (t,x) dans l'ensemble triangulaire défini par

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{h}{a}\,, \quad |x - x_0| \leqslant h - at\,.$$

(fig. 7.2, avec $a = 1$) ; ce fait est souvent appelé le *principe de Huygens*.

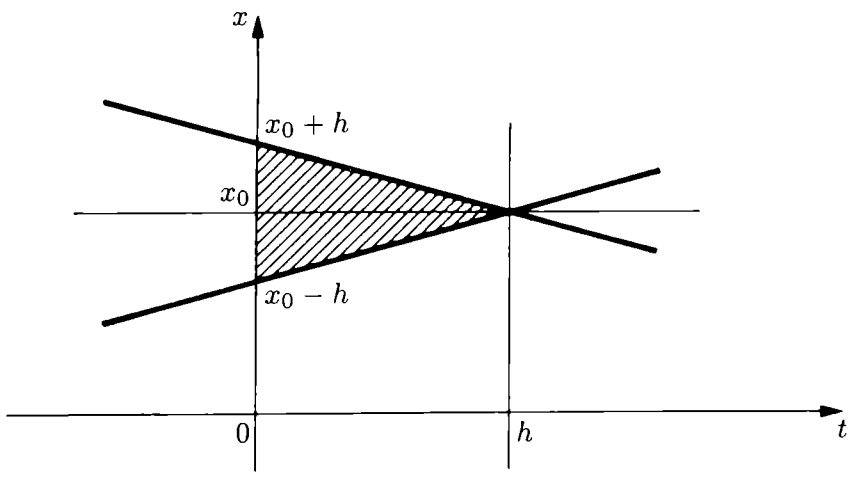


Fig. 7.2

L'équation (7.9) avec la condition initiale (7.11) est un exemple d'un *problème de Cauchy* ; nous discuterons de la généralisation de ce problème dans $\mathbb{R}^N$ dans la suite.

L'étude de l'équation (7.9) lorsque x varie dans un intervalle ouvert borné $]0, \ell[$ est également importante ; on l'appelle alors l'équation des *cordes vibrantes*. On cherche dans ce cas à résoudre (7.9) pour $t > 0$, $0 < x < \ell$, avec une condition initiale (7.11) vérifiée pour $0 < x < \ell$ où u est soumise à une *condition aux limites* qui peut être du type $u(t, 0) = 0$, $u(t, \ell) = 0$. L'interprétation physique de ce problème est la suivante : on considère $x \mapsto u(t, x)$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$, comme la forme d'une corde pour le temps $t > 0$; pour $t = 0$, la forme et la vitesse de la corde sont données par (7.11), les deux extrémités de la corde étant fixées (ce qui donne la condition aux limites $u(t, 0) = 0$, $u(t, \ell) = 0$) ; le problème mathématique est donc de déterminer la forme $x \mapsto u(t, x)$, pour tout temps $t > 0$, étant donné la forme et la vitesse initiale (et le fait que les deux extrémités soient fixes). Les équations où non seulement il y a une condition initiale à remplir mais également une condition aux limites à vérifier donnent ce que l'on appelle un *problème mixte*.

7.1.4 Equation de la chaleur dans $\mathbb{R}$

L'équation

$$u'_t = k u''_{xx} \tag{7.13}$$

où $u = u(t, x)$, $k > 0$, s'appelle l'*équation de la chaleur* dans $\mathbb{R}$ (où t, x sont des variables réelles). On interprète t comme le temps, x comme la position et $u(t, x)$ la température à l'instant t au point x (d'une barre métallique homogène par exemple). Comme pour l'équation des ondes, on peut étudier cette équation pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec une condition initiale appropriée (le cas d'une barre métallique infiniment longue) où pour $0 < x < \ell$ avec une condition initiale et une condition aux limites appropriées. Nous étudions ici ce dernier problème mixte ; on constatera dans la suite qu'une condition initiale appropriée est du type

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 < x < \ell \tag{7.14}$$

et qu'une condition aux limites appropriée (dite *de Dirichlet*) est

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0, \qquad t > 0. \tag{7.15}$$

L'interprétation physique de (7.14) et (7.15) est immédiate : les extrémités (0 et ℓ) de la barre sont maintenues à une température 0 (c'est (7.15)) et la distribution initiale de la température dans la barre est donnée par f (c'est (7.14)).

On procède par la recherche des solutions de (7.13) de la forme

$$u(t,x) = \varphi(x)\psi(t)\ ;$$

ce procédé s'appelle celui de la *séparation des variables*. On verra dans la suite que ce procédé est utile dans un certain nombre de cas importants. Pour que $u = \varphi(x)\psi(t)$ soit une solution de (7.13), on doit avoir

$$\varphi(x)\psi'(t) = k\varphi''(x)\psi(t)\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\psi'(t)}{k\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda$$

où λ est une constante. On a écrit la constante $-\lambda$ pour des raisons de commodité non essentielles ; il faut se rappeler que si $g : T \to \mathbb{R}$, $h : X \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles telles que $g(t) = h(x)$ pour $t \in T$, $x \in X$ (T, X étant deux ensembles non vides quelconques), alors $g(t) = h(x) = c$, une constante ; il suffit de fixer $t_0 \in T$ pour avoir $h(x) = c = g(t_0)$ d'où $g(t) = h(x) = c$, $t \in T$, $x \in X$. En fixant $\lambda \in \mathbb{R}$, on voit que φ, ψ doivent vérifier les deux équations différentielles suivantes :

$$\psi'(t) + k\lambda\psi(t) = 0\,, \quad \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0\,.$$

L'équation pour ψ donne (avec c une constante)

$$\psi(t) = c\exp(-k\lambda t)\,.$$

Nous résolvons l'équation pour φ sous la condition aux limites suggérée par (7.15) :

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0\,, & 0 < x < \ell \\ \varphi(0) = 0\,, \quad \varphi(\ell) = 0\,. \end{cases} \tag{7.16}$$

C'est un exemple de ce que l'on appelle un *problème de Sturm–Liouville* où il s'agit de résoudre une équation différentielle ordinaire dans un intervalle, sous conditions (*aux limites*) imposées sur le comportement des solutions aux extrémités de l'intervalle concerné. Démontrons d'abord que *(7.16) possède une solution φ non triviale* (c'est-à-dire $\varphi \not\equiv 0$ dans $[\,0\,,\,\ell\,]$) *si et seulement si λ est de la forme $\left(n\pi/\ell\right)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$*. En effet, notons d'abord que λ est nécessairement strictement positif, car sinon (pour A, B constantes réelles)

$$\varphi(x) = Ax + B \quad \text{si } \lambda = 0$$

$$\varphi(x) = A\exp(-x\sqrt{-\lambda}\,) + B\exp(x\sqrt{-\lambda}\,) \quad \text{si } \lambda < 0\,;$$

pour que $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, on doit alors avoir $A = B = 0$ ce qui est évident pour le cas $\lambda = 0$; pour $\lambda < 0$, on le voit en étudiant les deux équations suivantes qui sont des conséquences de $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$:

$$0 = \varphi(0) = A + B$$

$$0 = \varphi(\ell) = A\exp(-\ell\sqrt{-\lambda}\,) + B\exp(\ell\sqrt{-\lambda}\,)\,.$$

Pour que ce système linéaire d'équation dans les quantités A, B possède une solution non triviale (c'est-à-dire $(A, B) \neq (0, 0)$), il est nécessaire et suffisant que le déterminant de la matrice des coefficients soit nul, ce qui exige que

$$\exp(\ell\sqrt{-\lambda}\,) = \exp(-\ell\sqrt{-\lambda}\,) ;$$

ceci est impossible car $\ell > 0$, $\lambda < 0$ et l'exponentielle est injective dans $\mathbb{R}$.

Si $\lambda > 0$ et φ vérifie (7.16), alors

$$\varphi(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}\,) + B\sin(x\sqrt{\lambda}\,)$$

où A, B sont déterminées par

$$0 = \varphi(0) = A$$

$$0 = \varphi(\ell) = B\sin(\ell\sqrt{\lambda}\,).$$

Ainsi, puisque $B \neq 0$ pour que φ ne soit pas triviale, on doit avoir

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}\,) = 0$$

ce qui donne

$$(\ell\sqrt{\lambda}\,) = n\pi\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$$

c'est-à-dire $\lambda = \big(n\pi/\ell\big)^2$, $n = 1, 2, \ldots$

En tenant compte de ce qui précède, on obtient une suite de solutions suivantes pour (7.13) :

$$u_n(t, x) = \exp(-\lambda_n kt)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

où $\lambda_n = \big(n\pi/\ell\big)^2$. Les u_n vérifient (7.13) et (7.15) ; puisque (7.13) et (7.15) sont des relations linéaires, on obtient d'autres solutions vérifiant (7.13) et (7.15) du type

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n kt)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{7.17}$$

contenant une suite de constantes $\{a_n\}$ « arbitraire » ; c'est ce que l'on appelle le *principe de superposition*. Les constantes $\{a_n\}$ sont déterminées en exigeant que u définie par (7.17) vérifie la condition initiale (7.14) :

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\,, \quad 0 < x < \ell\,,$$

ce qui donne, selon la théorie des séries de Fourier,

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{7.18}$$

Ainsi, on voit que u donnée par (7.17) et (7.18) est un *candidat plausible* pour être une solution de (7.13) vérifiant (7.14) et (7.15). Il reste à vérifier si l'expression (7.17) est une solution (dans un sens à préciser) et si cette solution est unique.

Il y a plusieurs possibilités en ce qui concerne la définition exacte de ce que l'on peut appeler une solution de (7.13) vérifiant (7.14) et (7.15). Nous dirons que u est une *solution classique* de (7.13) vérifiant (7.14) et (7.15) dans $[\,0\,,\,\infty[\,\times\,[\,0\,,\,\ell\,]$ si u satisfait aux exigences suivantes :

- u est de classe C^2 dans l'ensemble ouvert $]\,0\,,\,\infty[\,\times\,]\,0\,,\,\ell\,[$ et u vérifie (7.13) à chaque point $(t,x) \in\,]\,0\,,\,\infty[\,\times\,]\,0\,,\,\ell\,[$;
- u est continue dans l'ensemble fermé $[\,0\,,\,\infty[\,\times\,[\,0\,,\,\ell\,]$;
- u vérifie (7.14) et (7.15).

Il est clair que, pour qu'une telle solution classique u existe, il est nécessaire que f dans (7.14) soit au moins continue dans $[\,0\,,\,\ell\,]$ avec $f(0) = f(\ell) = 0$; nous dirons que c'est une condition de *compatibilité* entre la condition initiale (7.14) et la condition aux limites (7.15). Nous pouvons maintenant donner un énoncé précis.

Soit $f : [\,0\,,\,\ell\,] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(\ell) = 0$; alors l'équation (7.13) possède une unique solution classique u vérifiant (7.14) et (7.15) ; de plus, u est définie par (7.17) et (7.18).

DÉMONSTRATION

Vérifions d'abord que u donnée par (7.17) et (7.18) est une solution classique de (7.13) vérifiant (7.14) et (7.15). Pour ce faire, il faut se rappeler d'après la théorie des séries de Fourier (§ 4.2.8) que, puisque $f : [\,0\,,\,\ell\,] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 avec $f(0) = f(\ell) = 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

avec $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ où les a_n sont donnés par (7.18). Ceci entraîne immédiatement que u donnée par (7.17) est continue dans $[\,0\,,\,\infty[\,\times\,[\,0\,,\,\ell\,]$ car le n-ième terme de la série pour $u(t,x)$ est majoré en valeur absolue par $|a_n|$ de sorte que $u(t,x)$ est la somme d'une série de fonctions continues, uniformément convergente dans $[\,0\,,\,\infty[\,\times\,[\,0\,,\,\ell\,]$; pour $t > 0$, $0 < x < \ell$,

$$u'_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n k) a_n \exp(-\lambda_n k t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$u''_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 a_n \exp(-\lambda_n k t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

où $\lambda_n = \left(n\pi/\ell\right)^2$, car la série (7.17) peut être dérivée terme à terme autant de fois que l'on veut par rapport à t et à x lorsque $t > 0$; en effet, la présence

des termes $\exp(-\lambda_n k t)$ rend ces séries obtenues par dérivation terme à terme uniformément convergentes pour $t \geqslant t_0 > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$, pour chaque choix de $t_0 > 0$, compte tenu du fait que $\sup_n |a_n| < \infty$. Ainsi, on établit que u est de classe C^2 (même de classe C^∞) dans $]\,0\,,\infty[\,\times\,]\,0\,,\ell\,[$ et les expressions explicites obtenues pour u'_t, u'_{xx} permettent de vérifier immédiatement que (7.13) est satisfaite pour $t > 0$, $0 < x < \ell$. Donc u donnée par (7.17) est bien une solution classique désirée.

Pour la démonstration d'unicité, il faut établir que si u, v sont deux solutions classiques, alors $w = u - v$ est identiquement nulle dans $[\,0\,,\infty[\,\times\,[\,0\,,\ell\,]$. Autrement dit, si w est une fonction de classe C^2 dans $]\,0\,,\infty[\,\times\,]\,0\,,\ell\,[$ et continue dans $[\,0\,,\infty[\,\times\,[\,0\,,\ell\,]$, avec

$$w'_t = k w''_{xx} \quad \text{dans }]\,0\,,\infty[\,\times\,]\,0\,,\ell\,[$$
$$w(0,x) = 0\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \qquad w(t,0) = w(t,\ell) = 0\,, \quad t \geqslant 0\,,$$

alors $w \equiv 0$. Nous démontrerons ceci dans la suite (chap. 8, en utilisant un principe du maximum) ; ici, nous donnons une courte preuve sous l'hypothèse supplémentaire que

$$\sup_{0<x<\ell} |w'_t(t,x)| < \infty\,, \qquad \sup_{0<x<\ell} |w'_x(t,x)| < \infty$$

pour chaque $t > 0$. Posons

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell w^2(t,x)\,\mathrm{d}x\,, \quad t > 0\,;$$

alors

$$E'(t) = \int_0^\ell w(t,x) w'_t(t,x)\,\mathrm{d}x\,, \quad t > 0\,,$$

d'après l'hypothèse faite sur w'_t ; on en déduit que, pour $t > 0$,

$$E'(t) = k\int_0^\ell w(t,x) w''_{xx}(t,x)\,\mathrm{d}x = -k\int_0^\ell \{w'_x(t,x)\}^2\,\mathrm{d}x\,,$$

la première égalité venant de l'équation vérifiée par w est la seconde égalité étant obtenue d'une intégration par parties ; en effet, on obtient, par une telle intégration par parties,

$$\lim_{\substack{\lambda\to\ell\\ \varepsilon\to 0}} w(t,x) w'_x(t,x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varepsilon}^{x=\lambda} - \int_0^\ell \{w'_x(t,x)\}^2\,\mathrm{d}x\,, \quad \varepsilon > 0\,,\ \lambda < \ell$$

où le premier terme s'annule car w est continue avec $w(t,0) = w(t,\ell) = 0$ et $w'_x(t,x)$ est borné. Ainsi, on a, pour $t > 0$,

$$E(t) \geqslant 0\,, \quad E'(t) \leqslant 0$$

avec

$$\lim_{0<t\to 0} E(t) = 0$$

car w est continue avec $w(0,x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$; ceci entraîne immédiatement que $E(t) = 0$, $t \geqslant 0$ d'où $w(t,x) \equiv 0$. ♦

REMARQUE. Nous avons donné ce raisonnement pour établir l'unicité (sous une condition supplémentaire) car il est applicable dans d'autres situations.

La question d'unicité de la solution de l'équation de la chaleur (7.13) vérifiant (7.14) et (7.15) est un peu subtile. Si l'on abandonne les solutions dites classiques et si on élargit la classe de solutions admises, alors l'unicité peut être en défaut. Ainsi, il existe u de classe C^∞ dans $]\,0\,,\infty[\,\times\,]\,0\,,\ell\,[$ telle que u vérifie (7.13) dans cet ensemble ouvert avec

$$\lim_{0<t\to 0} u(t,x) = 0\,,\quad 0<x<\ell\,,\qquad \lim_{\substack{0<x\to 0\\ x>0}} u(t,x) = \lim_{\substack{\ell>x\to\ell\\ x<\ell}} u(t,x) = 0\,,\quad t>0\,,$$

sans que u soit identiquement nulle ; une telle fonction u n'est pas continue dans $[\,0\,,\infty[\,\times\,[\,0\,,\ell\,]$ et dans les exemples explicites connus $u(x^2,x) \to \infty$ lorsque $x \to 0$ par les valeurs de $x > 0$. Nous ne discuterons pas ce genre de solutions dans la suite ; nous mentionnons son existence pour indiquer les difficultés qui peuvent surgir si on laisse à u « trop de liberté » à la frontière de $]\,0\,,\infty[\,\times\,]\,0\,,\ell\,[$.

Observons que, pour la solution (7.17), $u(t,x) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, pour tout $x \in [\,0\,,\ell\,]$, confirmant l'intuition physique élémentaire qu'une barre dont les extrémités sont maintenues à la température 0 se refroidit (même rapidement) à 0, indépendamment de la répartition de la température initiale $f(x)$ car aucune source de chaleur n'alimente la barre pour $t > 0$.

7.2 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

7.2.1 Préliminaires

Nous indiquons brièvement dans cette section comment on étudie une EDP linéaire du premier ordre. La méthode s'applique également aux EDP du premier ordre qui sont appelée équations *quasi linéaires* ; elles sont de la forme (7.22), mais nous considérons d'abord les équations un peu plus simples suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\mathrm{D}_j u + b(x,u) = 0 \tag{7.19}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ représente les variables réelles indépendantes, les a_j et b sont des fonctions réelles données et $u = u(x)$ est la fonction inconnue de x à déterminer. L'équation (7.19) est linéaire si $b(x,u)$ est de la forme $c(x)u + d(x)$.

Par une *solution* (*classique*) de (7.19), on entend une fonction réelle u de classe C^1 définie dans une partie ouverte V de $\mathbb{R}^n$ telle que u vérifie (7.19) en chaque point $x \in V$.

7.2.2 Méthode des courbes caratéristiques

Etant donné l'équation (7.19), on considère le système d'équations différentielles ordinaires

$$x' = a(x) = \big(a_1(x), \ldots, a_n(x)\big)\,. \tag{7.20}$$

Les solutions $t \mapsto x(t)$, t dans un intervalle de $\mathbb{R}$, de (7.20) s'appellent les *courbes caractéristiques* pour l'équation (7.19) ; leur importance pour la détermination des solutions de (7.19) deviendra évidente dans la suite. Si les a_j sont de classe C^1 dans une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, les courbes caractéristiques, solutions de (7.20), existent certainement (chap. 1). Soit $t \mapsto \xi(t,\alpha)$, $t \in I_0$, I_0 un intervalle ouvert contenant $t = 0$, une solution de (7.20) telle que $\xi(0,\alpha) = \alpha$; on dit que ξ est une courbe caractéristique de (7.19) passant par le point $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Posons

$$v(t) = u\big(\xi(t,\alpha)\big)$$

où u est une solution de (7.19) définie dans un voisinage ouvert V de $\alpha \in \mathbb{R}^n$; par définition, u est défini et est de classe C^1 dans V, un voisinage ouvert de α, vérifiant (7.19) en chaque point de ce voisinage ; on suppose que $\xi(t,\alpha) \in V$ pour $t \in I_0$, de sorte que $t \mapsto v(t)$, $t \in I_0$, est une fonction de classe C^1. Puisque

$$\xi'(t,\alpha) = a\big(\xi(t,\alpha)\big)\,, \quad \xi(0,\alpha) = \alpha\,, \quad t \in I_0\,,$$

on a $v'(t) = u'\big(\xi(t,\alpha)\big)\xi'(t,\alpha)$ d'où

$$v'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\big(\xi(t,\alpha)\big)\,\mathrm{D}_j u\big(\xi(t,\alpha)\big)\,, \quad t \in I_0\,,$$

ce qui veut dire, compte tenu du fait que u vérifie (7.19), que v est une solution de l'équation

$$v'(t) + b\big(\xi(t,\alpha)\,,\, v(t)\big) = 0 \tag{7.21}$$

avec $v(0) = u(\alpha)$. Si b est de classe C^1 dans une partie ouverte appropriée, la solution v est déterminée uniquement par (7.21) dès que $v(0) = u(\alpha)$ est fixée. Au total, on voit que, *pour une solution u de (7.19) dans un voisinage ouvert V de α, la connaissance de $u(\alpha)$ au point $\alpha \in \mathbb{R}^n$ détermine u sur la courbe caractéristique $t \mapsto \xi(t,\alpha)$ passant par α.*

Ainsi, *si l'on se donne comme condition initiale les valeurs de u pour tous les points d'une hypersurface S de $\mathbb{R}^n$* (S étant supposée « transversale » en chaque courbe caractéristique passant par un point de S), *alors u sera uniquement déterminée dans un ensemble ouvert contenant S.*

Nous ne formulerons pas un théorème précis (définissant, en particulier, la notion de transversalité utilisée ci-dessus) ; nous illustrons le procédé par les exemples qui suivent. La situation pour $n = 2$ est illustrée par la figure 7.3.

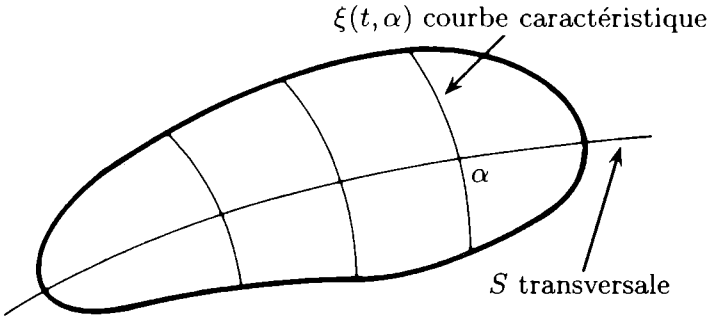


Fig. 7.3

La méthode indiquée se généralise aux équations quasi linéaires les plus générales de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\,\mathrm{D}_j u + b(x,u) = 0\,. \tag{7.22}$$

Esquissons le procédé : on pose $a_{n+1} = -b$; si u est une solution de (7.22) dans un voisinage ouvert V de $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, résolvons le système d'équations différentielles ordinaires

$$x_j' = a_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

sous la condition initiale

$$x_1(0) = \alpha_1\,, \ \ldots\,, \ x_n(0) = \alpha_n\,, \ x_{n+1}(0) = u(\alpha)\,.$$

Soit $t \mapsto \xi(t,\alpha) = \big(\xi_1(t,\alpha), \ldots, \xi_n(t,\alpha), \xi_{n+1}(t,\alpha)\big)$, $t \in I_0$, I_0 un intervalle ouvert contenant $t = 0$, la solution ; donc

$$\xi_j(0,\alpha) = \alpha_j\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,, \qquad \xi_{n+1}(0,\alpha) = u(\alpha)\,.$$

Vérifions que

$$u\big(\xi_1(t,\alpha), \ldots, \xi_n(t,\alpha)\big) = \xi_{n+1}(t,\alpha)\,, \quad t \in I_0 \tag{7.23}$$

en supposant que $\xi(t,\alpha) \in V$, $t \in I_0$.

En effet, pour $t = 0$ les deux membres sont égaux ; de plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, u\big(\xi_1(t,\alpha), \ldots, \xi_n(t,\alpha)\big) &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(t,\alpha)\,\mathrm{D}_j u\big(\xi_1(t,\alpha), \ldots, \xi_n(t,\alpha)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\big(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}\big)\,\mathrm{D}_j u\big(\xi_1, \ldots, \xi_n\big) \\
&= a_{n+1}\big(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}\big) = \xi_{n+1}'(t,\alpha)
\end{aligned}$$

ce qui établit (7.23). L'interprétation de (7.23) est la suivante : étant donné $u(\alpha)$, les valeurs de $u(x)$ sont déterminées uniquement le long de la *courbe (caractéristique)* $t \mapsto \big(\xi_1(t,\alpha), \ldots, \xi_n(t,\alpha)\big)$, $t \in I_0$, pour (7.22). De nouveau, la connaissance de u sur une hypersurface S, transversale à ces courbes caractéristiques, détermine u dans un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant S.

7.2.3 Exemples

Exemple 1

A résoudre $u'_x + a u'_y - u = 0$ $(a \neq 0)$ sous condition initiale $u(0,y) = \varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Ici, les courbes caractéristiques sont données par les solutions de

$$x' = 1\,, \quad y' = a\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0\,;$$

en prenant $x_0 = 0$, $y_0 = s$, on obtient $x(t) = t$, $y(t) = at + s$, $-\infty < t < \infty$; donc ces courbes caractéristiques sont les droites dans $\mathbb{R}^2$ de pente a et on voit que la courbe initiale $(x = 0)$ est transversale à ces courbes caractéristiques. Si

$$v(t) = u(t\,,\, at + s)\,,$$

on a $v'(t) = v(t)$, $v(0) = u(0,s) = \varphi(s)$, d'où $v(t) = \varphi(s)\,\mathrm{e}^t$; donc

$$u(t\,,\, at + s) = \varphi(s)\,\mathrm{e}^t\,, \quad t\,,\, s \in \mathbb{R}$$

d'où

$$u(x,y) = \varphi(y - ax)\,\mathrm{e}^x\,, \quad x\,,\, y \in \mathbb{R}\,.$$

On aurait pu prendre comme condition initiale $u(x,0) = \psi(x)$ (où la courbe initiale est donnée par $y = 0$) ou toute autre condition initiale fixant $u(x,y)$ lorsque $(x,y) \in S$, S une courbe transversale aux courbes caractéristiques de l'équation. Si S est elle-même une courbe caractéristique (par exemple S donnée par $y - ax = c$), alors la condition initiale, $u(x,y) = \theta(x,y)$, $(x,y) \in S$, n'est pas appropriée pour la résolution de l'équation ; en effet si $\theta(x,y) \neq \mathrm{Cte}\,\mathrm{e}^x$, alors la condition initiale est impossible à satisfaire ; si $\theta(x,y) = \mathrm{Cte}\,\mathrm{e}^x$, $(x,y) \in S$ (S donnée par $y - ax = c$), alors la condition initiale ne détermine pas $u(x,y)$ lorsque $(x,y) \notin S$.

Notons que cette équation a été résolue un peu différemment comme un cas particulier de (7.5).

Exemple 2

Soit à résoudre l'équation

$$x u'_x + y u'_y = u$$

avec $u(x,1) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ici, les courbes caractéristiques sont données par la solution de

$$x' = x\,, \quad y' = y\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0\ ;$$

avec $x_0 = \xi$, $y_0 = 1$, on obtient

$$x(t) = \xi\,\mathrm{e}^t\,, \quad y(t) = \mathrm{e}^t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Les courbes caractéristiques sont les demi-droites définies par $(\xi, 1)$ et $(0,0)$; si $v(t) = u(\xi\,\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t)$, alors $v'(t) = v(t)$ avec $v(0) = h(\xi)$ d'où $v(t) = h(\xi)\,\mathrm{e}^t$ et

$$u(x,y) = u\left(\frac{x}{y}\mathrm{e}^{\ln y}\,,\ \mathrm{e}^{\ln y}\right) = h\left(\frac{x}{y}\right) y\,, \quad y > 0\,.$$

On voit que u n'est déterminée que dans le demi-plan ouvert supérieur si la courbe initiale est la droite donnée par $y = 1$. Résolvons maintenant l'équation sous la condition

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = k(\theta)\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

où $k(0) = k(2\pi)$; ici la courbe initiale est le cercle dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Les courbes caractéristiques utiles sont données par les équations

$$x' = x\,, \quad y' = y\,, \qquad x(0) = \cos\theta\,, \quad y(0) = \sin\theta$$

ce qui donne

$$x(t) = \cos\theta \cdot \mathrm{e}^t\,.$$

Si $v(t) = u(\cos\theta \cdot \mathrm{e}^t\,,\ \sin\theta \cdot \mathrm{e}^t)$, alors $v'(t) = v(t)$ avec $v(0) = u(\cos\theta, \sin\theta) = k(\theta)$ d'où $v(t) = k(\theta)\,\mathrm{e}^t$ et

$$u(x,y) = u(r\cos\theta\,,\ r\sin\theta) = v(\ln r) = rk(\theta) = k(\theta)\left\{x^2 + y^2\right\}^{1/2}\,,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \theta = \arg(x,y)$$

ce qui donne u dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, un voisinage ouvert de la courbe initiale, le cercle unité.

Notons que le choix des courbes initiales $y = 0$ ou $x = 0$ (par exemple) n'est pas approprié ; ces « courbes » se confondent avec des courbes caractéristiques et la donnée des valeurs de u sur ces courbes ne déterminent pas u.

Observer que toute fonction homogène u d'ordre 1,

$$u(tx, ty) = tu(x,y)\,,$$

satisfait l'équation (selon un énoncé élémentaire d'Euler que l'on vérifie facilement).

7.3 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

7.3.1 Préliminaire

Dans cette section nous énumérons les équations les plus importantes parmi les EDP linéaires du second ordre et nous expliquons les problèmes principaux les concernant. Chacune de ces équations joue un rôle fondamental dans les théories physiques les plus diverses ; le développement de la théorie mathématique des EDP est dû en grande partie à l'effort de recherche des solutions de ces équations.

Nous nous plaçons dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ où $N = 1, 2, \ldots$; nous écrivons $\triangle u$ (le *laplacien* de $u \in C^2(\Omega)$) pour

$$\mathrm{D}_{11}u + \cdots + \mathrm{D}_{NN}u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} .$$

Pour $N \geqslant 2$, ν représente la normale unitaire (définie sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$) dirigée vers l'extérieur de Ω, en supposant que $\mathrm{Fr}\,\Omega$ est telle que ν est bien définie en chaque point de $\mathrm{Fr}\,\Omega$, certaines exceptions étant éventuellement permises comme dans le cas de l'application du théorème de la divergence aux domaines dit *gaussiens* (vol. 1, p. 496 ; ce point sera expliqué plus longuement dans la suite dans l'appendice 7.7.2). On écrit

$$\mathrm{D}_\nu u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$$

pour la dérivée normale de $u \in C^1(\overline{\Omega})$; $\mathrm{D}_\nu u$ est définie en chaque point $x \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ où $\nu(x)$ est défini. Rappelons que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ si u est la restriction à $\overline{\Omega}$ d'une fonction de classe C^1 définie dans une partie ouverte de $\mathbb{R}^N$ contenant $\overline{\Omega}$; dans un appendice (§ 7.7.3), nous avons expliqué cette notion en termes des dérivées de u dans Ω lorsque Ω vérifie une condition générale. Pour $N = 1$, Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; si $\Omega =]\,a\,,\,b\,[$, un intervalle ouvert borné, $\mathrm{Fr}\,\Omega = \{a, b\}$ et nous poserons $\mathrm{D}_\nu u(a) = u'(a)$, $\mathrm{D}_\nu u(b) = u'(b)$, en supposant que $u \in C^1[\,a\,,\,b\,]$.

Nous écrivons

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

pour dire que $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que u est de classe C^2 dans Ω ; les écritures similaires seront utilisées pour décrire d'autres conditions (par exemple $f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ équivaut à avoir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue avec $\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$). Par $C(A)$ nous indiquons la classe des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ continues.

Nous commençons par une énumération des problèmes principaux autour de l'opérateur laplacien $\triangle$; nous expliquerons leur signification physique dans la suite. Les problèmes énoncés pour l'opérateur $\triangle$ se généralisent utilement aux autres opérateurs *elliptiques* comme nous l'expliquerons ci-après.

Dans la suite, lorsque $u = u(t, x)$ est une fonction de t (temps) et de $x = (x_1, \ldots, x_N)$ (variable spatiale), on écrira u'_t, u''_{tt}, etc. pour les dérivées partielles de u par rapport à t ; par $\triangle u$ on notera, par contre, le laplacien de u comme fonction de x avec t fixe :

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

La même convention sera aussi utilisée pour d'autres opérateurs L (au lieu de $\triangle$) ; si ces conventions se prêtent à une ambiguïté quelconque, on introduira alors des notations appropriées pour éviter cette ambiguïté.

7.3.2 Problèmes élliptiques concernant $\triangle$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$.

(1) ***Problème de Dirichlet*** *ou premier problème aux limites*
Etant donné $\alpha \in C(\mathrm{Fr}\,\Omega)$, *déterminer* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *telle que*

$$\triangle u = 0 \quad \textit{dans } \Omega$$
$$u = \alpha \quad \textit{sur } \mathrm{Fr}\,\Omega \quad \textit{(condition au bord de Dirichlet)}.$$

Si une telle fonction u existe, on dit que u est une *solution (classique) d'un problème de Dirichlet dans* Ω, le problème étant précisé par la donnée de la fonction $\alpha : \mathrm{Fr}\,\Omega \to \mathbb{R}$ qui est ici supposée être *continue*. Puisque $\triangle u = 0$ dans Ω, u est une fonction *harmonique* dans Ω ; le problème de Dirichlet est donc décrit en disant qu'il consiste en la détermination d'une fonction harmonique dans Ω qui *prend* les valeurs données par α sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$. La notion de solution au problème de Dirichlet peut être généralisée utilement en se servant de la théorie des distributions mais, sauf mention contraire, nous nous tenons à la définition de la solution classique proposée.

Le théorème principal concernant le problème de Dirichlet est le suivant : *si* Ω *est un domaine borné tel que* $\mathrm{Fr}\,\Omega$ *vérifie une condition de régularité* (que nous décrirons dans la suite), *alors une solution au problème de Dirichlet* (avec condition au bord $\alpha \in C(\mathrm{Fr}\,\Omega)$) *existe et elle est unique.*

(2) ***Problème de Neumann*** *ou deuxième problème aux limites*
Etant donné $\alpha \in C(\mathrm{Fr}\,\Omega)$, *déterminer* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *telle que*

$$\triangle u = 0 \quad \textit{dans } \Omega$$
$$\mathrm{D}_\nu u = \alpha \quad \textit{sur } \mathrm{Fr}\,\Omega \quad \textit{(condition au bord de Neumann)}.$$

Pour que le problème proposé ait un sens, il faut supposer que $\operatorname{Fr}\Omega$ est telle que $\nu(x)$ est définie pour tout $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. Si u existe, on dit que u *est une solution (classique) d'un problème de Neumann dans* Ω ; il s'agit ici donc de trouver une fonction u, harmonique dans Ω, dont les dérivées normales sur $\operatorname{Fr}\Omega$ sont déterminées par α.

Le théorème principal concernant le problème de Neumann est le suivant : *si* Ω *est un domaine borné tel que* $\operatorname{Fr}\Omega$ *vérifie une condition de régularité, alors la solution* u *existe et est unique, à une constante près, si et seulement si*

$$\int_{\operatorname{Fr}\Omega} \alpha(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0$$

où σ *est la mesure naturelle sur* $\operatorname{Fr}\Omega$ (par exemple σ est la mesure superficielle si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $\operatorname{Fr}\Omega$ est une surface appropriée de classe C^1).

(3) ***Troisième problème aux limites***

Etant donné α *et* β *dans* $C(\operatorname{Fr}\Omega)$, *déterminer* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *telle que*

$$\begin{aligned} &\triangle u = 0 && \text{dans } \Omega \\ &\mathrm{D}_\nu u + \beta u = \alpha && \text{sur } \operatorname{Fr}\Omega \quad \text{(troisième condition au bord)}. \end{aligned}$$

De nouveau, il faut faire une hypothèse sur $\operatorname{Fr}\Omega$ pour que le problème ait un sens ; sous des condtions appropriées sur α, β et $\operatorname{Fr}\Omega$ et en supposant que $\beta(x) > 0$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$, on démontre que u *existe et est unique.*

(4) ***Equation de Poisson***

L'équation $\triangle u = f$ *s'appelle l'équation de Poisson ; les trois problèmes précédents peuvent être formulés pour l'équation de Poisson. Il s'agit alors de trouver* $u \in C^2(\Omega)$ *telle que*

$$\triangle u = f \quad \text{dans } \Omega$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une fonction donnée et* u *doit vérifier une des trois conditions au bord indiquées ci-dessus. Sous des conditions appropriées sur* f *et* $\operatorname{Fr}\Omega$, Ω *étant un domaine borné, on établit des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions que nous décrirons dans la suite.*

Les trois conditions au bord précédentes ne sont pas les seules possibles ; nous les signalons spécialement à cause de leur importance. Si $\alpha = 0$ dans les trois conditions au bord données, on dit que la condition au bord correspondante est *homogène*. Une condition au bord est dite homogène si, pour tout u, v qui satisfont à la condition, $au + bv$ la satisfait aussi pour tout choix des nombres a, b. Ainsi, la condition au bord homogène de Dirichlet (resp. de Neunann) exige que $u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ (resp. $\mathrm{D}_\nu u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$).

(5) ***Equation de Helmholtz*** *ou problème aux valeurs propres*
L'équation de Helmholtz est

$$\triangle u + \lambda u = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. *Le problème aux valeurs propres consiste dans la détermination de* $u \in C^2(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, *et de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\triangle u + \lambda u = 0$ *dans* Ω, u *étant assujettie à une condition au bord homogène ; on demande que* u *soit aussi dans* $C(\overline{\Omega})$ *ou* $C^1(\overline{\Omega})$, *selon la nature de la condition homogène.*

Si Ω est un domaine borné tel que $\operatorname{Fr}\Omega$ vérifie une condition de régularité, alors le problème aux valeurs propres sous la condition au bord homogène de Dirichlet admet comme solution $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $\lambda_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tels que

- $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$;
- $\triangle u_n + \lambda_n u_n = 0$ dans Ω, $u_n = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, $n \geqslant 0$;
- $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormale pour $L^2(\Omega)$.

On dit que u_n est une *fonction propre* correspondant à la *valeur propre* λ_n de l'opérateur $\triangle$ dans Ω soumis à la condition au bord homogène de Dirichlet. En fait, on devrait dire que u_n, λ_n sont associés à $-\triangle$ car on a $-\triangle u_n = \lambda_n u_n$ (cette terminologie existe aussi). Le fait que $\lambda_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ entraîne que chaque nombre λ apparaît au plus un nombre fini de fois dans la suite $\{\lambda_n\}$; on décrit ce fait en disant que pour $\triangle$ dans Ω *chaque valeur propre est réelle,* > 0 *et de multiplicité finie*, les valeurs propres n'ayant pas de point d'accumulation dans $\mathbb{R}$. (Pour l'opérateur $\triangle$, la valeur propre minimale $\lambda_0 > 0$ est *simple*, c'est-à-dire $\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ ou encore que l'équation $\triangle u + \lambda_0 u = 0$ dans Ω, $u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, possède une unique solution $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $\int_\Omega |u_0|^2 \, dx = 1$).

On a des résultats analogues pour les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur $\triangle$ dans Ω soumis à l'autres conditions au bord homogène (sauf que λ_0 peut être $\leqslant 0$ et non nécessairement simple).

7.3.3 Problèmes paraboliques concernant $\triangle$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. L'équation

$$u'_t = k \triangle u + Q(t, x) \tag{7.24}$$

s'appelle une *équation de diffusion* ou *de la chaleur* ; ici, $Q :]0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, k est une constante > 0 et $u = u(t, x)$ est la fonction inconnue à déterminer vérifiant (7.24) pour $t > 0$, $x \in \Omega$, et vérifiant une *condition initiale*

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

ainsi qu'une *condition aux limites* du type

$$u(x,t) = \alpha(t,x)\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega\,, \quad t > 0 \quad (\textit{condition au bord de Dirichlet})$$

ou

$$\mathrm{D}_\nu u(x,t) = \alpha(t,x)\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega\,, \quad t > 0 \quad (\textit{condition au bord de Neumann})$$

ou d'autres, α étant une fonction donnée. En général, nous supposerons que Q, f et α sont continues. Par une *solution* (classique), nous entendons une fonction continue

$$u : [\,0\,, \infty\,[\, \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que u soit de classe C^2 dans $]\,0\,, \infty\,[\, \times \Omega$ où u vérifie (7.24) et

$$u(0,x) = f(x)\,, \quad x \in \overline{\Omega}\,, \qquad u(t,x) = \alpha(t,x) \quad \text{si } t > 0\,,\ x \in \operatorname{Fr}\Omega$$

s'il s'agit de la condition au bord de Dirichlet (une définition analogue étant applicable pour d'autres conditions au bord). Pour que u existe dans le sens précisé ici, il faut évidemment que f et α soient *compatibles* ; par exemple, il faut que f et α soient telles que

$$\lim_{0<t\to 0} \alpha(t,x) = f(x)\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega\,.$$

Il y a d'autres interprétations moins restrictives reliant les valeurs de $u(t,x)$ pour $0 < t < \infty$, $x \in \Omega$, et les valeurs de $u(t,x)$ pour $t = 0$ ou $x \in \operatorname{Fr}\Omega$; nous les mentionnerons au moment opportun.

7.3.4 Problèmes hyperboliques concernant $\triangle$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. L'équation

$$u''_{tt} = a^2\,\triangle u + F(t,x) \tag{7.25}$$

s'appelle une *équation d'évolution* ou *des ondes* ; ici $F :]\,0\,, \infty\,[\, \times \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, a est une constante > 0 et $u = u(t,x)$ est la fonction inconnue à déterminer vérifiant (7.25) pour $t > 0$, $x \in \Omega$, et vérifiant une *condition initiale*

$$u(0,x) = f(x)\,, \quad u'_t(0,x) = g(x)\,, \qquad x \in \overline{\Omega}$$

ainsi qu'une *condition aux limites* du type

$$u(t,x) = \alpha(t,x)\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega\,,\ t > 0 \quad (\textit{condition au bord de Dirichlet})\,,$$

α étant une fonction donnée, ou toutes autres conditions. En général, nous supposerons que F, f, g et α sont continues. Une *solution* (classique) u sera une fonction de classe C^2 dans $]\,0\,, \infty\,[\, \times \Omega$ qui prend ses valeurs au bord ($t = 0$

ou $x \in \operatorname{Fr}\Omega$) d'une manière appropriée qui doit être précisée. Il est évident (comme au paragraphe 7.3.3) que f, g et α doivent vérifier des conditions de compatibilité pour qu'une solution u puisse exister.

7.3.5 Généralisations

Dans les paragraphes 7.3.2 à 7.3.4, on aurait pu formuler les problèmes en remplaçant Δ par un opérateur différentiel linéaire L plus général. Un exemple important d'un tel L est celui d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre général :

$$Lv(x) = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} a_{ij}(x)\, \mathrm{D}_{ij} v(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\, \mathrm{D}_i v(x) + c(x) v(x)$$

où les a_{ij}, b_i, c sont des fonctions réelles des variables $x_1, \ldots, x_N$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, v étant une fonction de classe C^2. Il s'avère qu'une bonne condition à imposer sur les a_{ij} (où, évidemment, l'on peut supposer que $a_{ij} = a_{ji}$, pour tout i, j) est la condition d'*ellipticité* dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$: on veut que

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0\,, \quad x \in \Omega\,,$$

pour tout choix de $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. En fait, une condition plus forte (dite *ellipticité stricte*) dans Ω est souvent utile : on veut qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant C \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2\,, \quad x \in \Omega\,,$$

pour tout choix de $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$. En plus, on impose des conditions sur les b_i et c ainsi que sur la régularité des fonctions a_{ij}, b_i, c. Notons que Δ est un cas particulier de L.

On considère aussi les opérateurs différentiels linéaires L d'ordre supérieur ; le cas de $L = \Delta^2$, par exemple, a été étudié en détail à cause de son utilisation dans la théorie d'élasticité. La considération des opérateurs L non linéaires prend de plus en plus d'importance ; ce sujet ne sera pas abordé dans notre ouvrage.

Si L est un opérateur différentiel d'ordre deux, les conditions aux limites ou les conditions initiales pour les équations considérées dans les paragraphes 7.3.2 à 7.3.4 restent inchangées ; pour les opérateurs d'ordre supérieur, on doit considérer des changements que nous ne discuterons pas ici.

Les équations (7.24) et (7.25) avec Δ remplacé par un opérateur elliptique L seront appelées également les *équations paraboliques* et *hyperboliques* (ou *de diffusion* ou *d'évolution*).

7.3.6 Remarques physiques intuitives

Les équations présentées dans les paragraphes précédents sont utilisées dans la modélisation d'une vaste gamme de phénomènes physiques dont nous en énumérons ici quelques-uns : propagation des ondes, diffusion de la chaleur, électromagnétisme. Nous expliquons ici, en termes intuitifs, quelques aspects de cette modélisation.

Imaginons un corps solide dans $\mathbb{R}^3$ décrit par une partie $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, Ω étant un domaine borné de $\mathbb{R}^3$; on pense à $x \in \Omega$ comme un point intérieur du corps et $x \in \operatorname{Fr}\Omega$ comme un point de la surface du corps. Supposons que le corps est homogène et dans un état de stabilité thermique ; alors la température $u(x)$ en un point x dans l'intérieur du corps vérifie $\triangle u = 0$, en supposant qu'il n'y ait aucune source de perte on de gain de chaleur dans le corps. En présence de telles sources, u vérifie une équation de Poisson $\triangle u = f$. La condition au bord de Dirichlet s'interprète alors comme le maintien de la température de la surface du corps à une température contrôlée : $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$. La condition de Neumann $\mathrm{D}_\nu u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ s'interprète comme une caractérisation du type d'isolation de la surface ; si $\mathrm{D}_\nu u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, alors la surface est complètement isolante et il n'y a aucune perte ou gain thermique à travers la surface.

Les équations paraboliques modélisent l'évolution de la température $u(t, x)$ au temps t, à la position x, lorsque le corps précédent n'est pas dans un état de stabilité thermique.

Une interprétation de l'équation hyperbolique pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est la suivante : on imagine Ω comme une membrane (flexible et homogène) avec sa frontière ($\operatorname{Fr}\Omega$) fixée dans le plan (horizontal) $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$; imaginons que l'on fait vibrer la membrane par un coup de bâton ; si $u(t, x)$ est le déplacement du point $x \in \Omega$ de l'horizontale $z = 0$ au temps t, alors u vérifie l'équation $u''_{tt} = a^2 \triangle u$ dans Ω, pour $t > 0$ et la condition au bord est $u(t, x) = 0$, $t \geqslant 0$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. On verra que les fréquences des vibrations seront données par les valeurs propres λ de $\triangle$: $\triangle u + \lambda v = 0$ dans Ω. Une interprétation analogue est possible pour un gaz contenu dans un récipient $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$; $u(t, x)$ est alors la pression au temps $t > 0$ et en $x \in \Omega$. Cette interprétation est utile pour la propagation du son considérée comme la variation de la pression dans le milieu Ω.

En électrostatique, si ρ est la densité de charge dans une partie ouverte bornée $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec $\operatorname{Fr}\Omega$ un conducteur parfait, alors la fonction $u = u(x)$ (appelée « potentiel scalaire » associé au champ électrique $E = -\operatorname{grad} u$) vérifie $\triangle u = -\rho$ dans Ω (en supposant un milieu diélectrique parfait de permittivité $\varepsilon = 1$) avec $u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$; donc u est la solution d'un problème de Dirichlet.

En mécanique quantique, on est amené à considérer les solutions d'une équation (dite *de Schrödinger*) qui est de la forme

$$u'_t = i\,Lu\,, \quad u(0, x) = u_0(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^N$$

où L est un opérateur linéaire (appelé *hamiltonien* du problème) ; l'apparition de $i = \sqrt{-1}$ dans cette équation fait que ses solutions ont un caractère ondulatoire, comme on le verra dans la suite.

Nous ne pouvons pas décrire ici les nombreux autres problèmes provenant de la mécanique des fluides et de l'électromagnétisme qui s'expriment en termes des équations différentielles données précédemment. Les quelques exemples esquissés nous guideront dans la compréhension des développements mathématiques qui suivent.

7.4 SOLUTIONS FORMELLES

7.4.1 Préliminaires

Nous montrons dans cette section comment on peut résoudre formellement les problèmes décrits dans la section précédente avec un opérateur L assez général à la place de $\triangle$. Nous disons « formellement » pour indiquer que nous éviterons, ici, les questions de convergence des séries et des intégrales que nous rencontrerons dans l'obtention de ces solutions ; ces questions sont parfois difficiles (voire impossibles à trancher) si l'on veut avoir la convergence ponctuelle ou uniforme. Par contre, les solutions obtenues sont justes dans le sens de la convergence en distribution ou dans L^2 ; pour les problèmes simples (surtout dans $\mathbb{R}$), les séries concernées peuvent être traitées assez directement.

Les considérations seront basées sur les *hypothèses* suivantes concernant l'opérateur L et le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (pour $a, b \in L^2(\Omega)$, on écrit $\langle a , b \rangle = \int_\Omega a(x)\,\overline{b(x)}\,\mathrm{d}x$) :

(i) L est défini dans un sous-espace vectoriel $\mathcal{D} = \mathcal{D}_L \subset L^2(\Omega)$ avec L : $\mathcal{D}_L \to L^2(\Omega)$ linéaire et symétrique :

$$\langle Lf , g \rangle = \langle f , Lg \rangle , \quad f , g \in \mathcal{D}_L ;$$

(ii) il existe une suite de nombres réels

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots , \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

et une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}_L$, $\varphi_n \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$L\varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0 \quad \textit{dans } \Omega , \; n \in \mathbb{N}$$

avec $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formant un système orthogonal complet dans $L^2(\Omega)$; les φ_n sont supposées être des fonctions réelles.

Les nombres λ_n dans l'hypothèse *(ii)* s'appellent les *valeurs propres* de $-L$ (quelquefois aussi de L) dans Ω pour la condition aux limites homogène incorporée dans le choix de $\mathcal{D}_L$; la fonction φ_n s'appelle une *fonction propre* associée à λ_n. Un nombre λ peut apparaître plus qu'une fois dans la suite croissante $\{\lambda_n\}$; λ est alors appelée une valeur propre *multiple* ou *dégénérée*. Puisque $\lambda_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, un nombre λ ne peut apparaître qu'un nombre fini de fois au plus dans la suite $\{\lambda_n\}$; autrement dit, chaque valeur propre est de *multiplicité* finie, d'après l'hypothèse *(ii)*.

Notons que si $L\varphi + \lambda\varphi = 0$, pour un $\varphi \in \mathcal{D}_L$, $\varphi \not\equiv 0$, alors $L(t\varphi) + \lambda(t\varphi) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{C}$; ainsi, on peut toujours considérer les φ_n de l'hypothèse *(ii)* comme étant normalisées par la condition $\|\varphi_n\| = 1$; cette condition ne détermine pas les φ_n uniquement car on peut toujours passer à $-\varphi_n$. Dans la discussion qui suit, nous prenons les φ_n comme formant une *base orthonormale* de $L^2(\Omega)$; ceci ne change pas la portée de l'hypothèse *(ii)*. En pratique, les φ_n sont souvent non normalisées et il faut tenir compte de ce détail dans les calculs effectifs (§ 7.5.3). Le sens des hypothèses *(i)* et *(ii)* est que l'opérateur $-L$ *de domaine* $\mathcal{D}_L$ (ou L de domaine $\mathcal{D}_L$) *est un opérateur essentiellement autoadjoint dans l'espace hilbertien* $L^2(\Omega)$, *le spectre de* $-L$ *étant constitué des valeurs propres* $\{\lambda_n\}$ *de multiplicité finie avec* $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$; c'est le corollaire 5.8.7 qui permet cette affirmation. Mais la connaissance du corollaire 5.8.7 n'est pas nécessaire pour pouvoir suivre les procédés de solutions indiqués ci-après ; elle sert uniquement à placer nos procédés dans le cadre de l'analyse hilbertienne donnée au chapitre 5.

Le domaine de définition $\mathcal{D}_L$ de l'opérateur L est déterminé, d'une part, par des conditions de régularité et, d'autre part, par les conditions aux limites homogènes considérées. Typiquement, si $L = \Delta$ sous la condition au bord homogène de Dirichlet, on peut prendre $\mathcal{D}$ comme $C_0^2(\overline{\Omega})$ formé des fonctions f de classe C^2 dans $\overline{\Omega}$ avec $f(x) = 0$ pour $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. On peut aussi prendre $\mathcal{D} = C_0^\infty(\overline{\Omega})$ formé des fonctions f de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$ avec $f(x) = 0$ pour $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. Si Ω est borné et $\operatorname{Fr}\Omega$ est suffisamment régulier, alors Δ avec un des domaines indiqués vérifie les hypothèses *(i)* et *(ii)* (et dans ce cas $0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ de sorte que les valeurs propres de $-\Delta$ dans Ω sont > 0 et λ_0, la plus petite valeur propre, est *simple*). Nous indiquerons dans la suite des classes importantes d'opérateurs différentiels L qui vérifient les hypothèses *(i)* et *(ii)* lorsqu'ils sont restreints aux domaines $\mathcal{D}_L$ appropriés.

Il est essentiel de comprendre que les hypothèses *(i)* et *(ii)* concernent non seulement la forme (analytique) de L (et du domaine Ω) mais également le choix du domaine $\mathcal{D}_L$; *le domaine* $\mathcal{D}_L$ *choisi reflète la condition aux limites homogène considérée*. Ainsi, dans la suite nous résolverons d'abord les problèmes avec les conditions aux limites homogènes ; nous indiquerons ensuite les procédés à suivre lorsque les conditions aux limites ne sont pas homogènes.

Les notations λ_n, φ_n, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_L$ *introduites ici sont utilisées sans explication dans le reste de la section.*

7.4.2 Solution de $Lu = f$

Soit $f \in L^2(\Omega)$; puisque $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormale, on peut écrire

$$f = \sum_{n\geqslant 0} a_n \varphi_n\,, \quad u = \sum_{n\geqslant 0} c_n \varphi_n$$

où les a_n sont connus et les c_n sont à déterminer de telle manière que $Lu = f$. Par la linéarité de L, on a, formellement,

$$Lu = \sum_{n\geqslant 0} c_n\, L\varphi_n = \sum_{n\geqslant 0} -c_n \lambda_n \varphi_n = f = \sum_{n\geqslant 0} a_n \varphi_n$$

ce qui donne $a_n = -\lambda_n c_n$, $n \geqslant 0$. Ce calcul est purement formel car L n'est pas nécessairement continu et la relation

$$L\Big(\sum_n c_n \varphi_n\Big) = \sum_n L(c_n \varphi_n)$$

n'est pas toujours vraie ; elle est valable si u est dans le domaine de l'opérateur autoadjoint $\overline{L}$ associé à L (cf. corollaire 5.8.7).

Le calcul précédent montre que c_n est déterminé par $c_n = -a_n/\lambda_n$ sauf si $\lambda_n = 0$; supposons que $\lambda_n = 0$ pour $n_0 \leqslant n \leqslant n_1$. Alors l'équation $Lu = f$ n'aura une solution que si f est telle que $a_n = 0$, $n_0 \leqslant n \leqslant n_1$; c'est le cas si et seulement si $f \in E_0^{\perp}$ où E_0 est le sous-espace vectoriel engendré par les φ_n, $n_0 \leqslant n \leqslant n_1$ (car $a_n = \langle f\,,\, \varphi_n\rangle$, $n \geqslant 0$). Ainsi, *si* $f \in E_0^{\perp}$, *alors l'équation* $Lu = f$ *possède des solutions*

$$u = \sum_{n\geqslant 0} c_n \varphi_n\,, \quad c_n = -\frac{a_n}{\lambda_n} \quad \textit{si } n > n_1 \textit{ ou si } n < n_0\,, \tag{7.26}$$

les c_n, $n_0 \leqslant n \leqslant n_1$, *étant arbitraires*. Si $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 0$, alors (7.26) donne l'unique solution à $Lu = f$ pour tout $f \in L^2(\Omega)$. La justification de cette affirmation (avec L remplacé par $\overline{L}$) est contenue dans le corollaire 5.8.7 (les séries étant convergentes dans $L^2(\Omega)$).

En utilisant (7.26) nous développons maintenant une forme intégrale pour u. Posons

$$\psi = \sum_{j=n_0}^{n_1} c_j \varphi_j\ ;$$

alors

$$u(x) = \psi(x) + \sum_j{}' \frac{-a_j}{\lambda_j}\, \varphi_j(x)$$

où $\sum'$ représente une somme étendue sur les indices j tels que $j > n_1$ ou $j < n_0$. Puisque

$$a_j = \langle f\,,\, \varphi_j\rangle = \int_\Omega f(y)\, \varphi_j(y)\, \mathrm{d}y$$

(les φ_j étant réelles), on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \psi(x) + {\sum_j}' \frac{-\varphi_j(x)}{\lambda_j} \int_\Omega f(y)\,\varphi_j(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \psi(x) + \int_\Omega \left\{ {\sum_j}' \frac{-\varphi_j(x)\varphi_j(y)}{\lambda_j} \right\} f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \psi(x) + \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{7.27}$$

où

$$G(x,y) = {\sum_j}' \frac{-\varphi_j(x)\varphi_j(y)}{\lambda_j}\,. \tag{7.28}$$

Ici nous n'avons pas essayé de justifier l'échange de $\int$ et $\sum'$, ni de nous soucier du sens auquel il y a convergence de la série définissant $G(x,y)$ dans (7.28). La fonction G dans (7.28) s'appelle la *fonction de Green* du problème $Lu = f$ dans Ω, pour la condition aux limites homogène en question. Cette appellation est mieux justifiée lorsque les $\lambda_n \neq 0$ car alors $Lu = f$ possède une unique solution $u = L^{-1}f$ pour tout $f \in L^2(\Omega)$ avec

$$u(x) = L^{-1}f(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

où

$$G(x,y) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{-\varphi_j(x)\varphi_j(y)}{\lambda_j}\,. \tag{7.29}$$

Le même calcul peut être appliqué à la solution de l'équation

$$Lu = \lambda u + f\,.$$

En supposant que $\lambda \neq -\lambda_n$, pour tout n, on obtient pour $u = \sum_n c_n\varphi_n$, $f = \sum_n a_n\varphi_n$,

$$\sum_{n\geqslant 0} -(\lambda+\lambda_n) c_n \varphi_n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \varphi_n$$

d'où $c_n = -a_n/(\lambda+\lambda_n)$, $n \geqslant 0$ et

$$\begin{aligned} u(x) &= \big(L-\lambda\big)^{-1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-a_n}{\lambda+\lambda_n}\,\varphi_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\varphi_n(x)}{\lambda+\lambda_n} \int_\Omega f(y)\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega G(x,y,\lambda) f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{7.30}$$

avec

$$G(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda+\lambda_n}\,. \tag{7.31}$$

On voit que (7.29) s'obtient de (7.31) avec $\lambda = 0$. On appelle $G(x, y, \lambda)$ aussi la *fonction de Green* pour $L - \lambda$. Il s'avère que l'existence de $G(x, y)$ ou de $G(x, y, \lambda)$ peut être démontrée par un raisonnement rigoureux différent pour L et Ω assez généraux.

Notons que

$$G(x, y) = G(y, x)\,, \quad G(x, y, \lambda) = G(y, x, \lambda)\,.$$

On démontre, par exemple, que pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto G(x, y)$, $y \in \Omega \setminus \{x\}$, est une solution de $Lu = 0$ dans $\Omega \setminus \{x\}$ et qu'elle satisfait à la condition aux limites homogène concernée. En introduisant la distribution de Dirac δ_x (concentrée en x), on peut utiliser l'écriture suggestive suivante :

$$\begin{aligned} L_x \left\{ \int_\Omega G(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y \right\} &= \int_\Omega L_x G(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega L_x G(y, x) f(y)\, \mathrm{d}y \quad (\text{car } G(x, y) = G(y, x)) \\ &= \int_\Omega \delta(y) f(y)\, \mathrm{d}y = f(x) \end{aligned}$$

où L_x indique l'opérateur L appliqué sur une fonction de x. Le calcul précédent peut aussi être validé dans la théorie des distributions.

7.4.3 Equation parabolique

Soit l'équation

$$u'_t = Lu + Q(t, x)\,, \quad t > 0\,,\ x \in \Omega \tag{7.32}$$

avec $u(0, x) = f(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, et $u(t, x)$, pour $t > 0$, $x \in \operatorname{Fr} \Omega$, vérifiant la condition aux limites homogène associée au choix du domaine $\mathcal{D}_L$ de L.

Puisque $\{\varphi_n\}$ est une base orthonormale, on peut écrire

$$u(t, x) = \sum_{n \geqslant 0} c_n(t)\, \varphi_n(x)\,, \quad Q(t, x) = \sum_{n \geqslant 0} q_n(t)\, \varphi_n(x)\,, \quad f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \varphi_n(x)$$

en supposant que, pour chaque $t > 0$, $x \mapsto u(t, x)$, $x \mapsto Q(t, x)$ sont dans $L^2(\Omega)$ ainsi que f, les séries étant prises au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$. Ici, les a_n, $q_n(t)$ sont connus et les $c_n(t)$ sont à déterminer. Pour que u vérifie (7.32), on doit avoir, formellement,

$$\begin{aligned} u'_t &= \sum_n c'_n(t)\, \varphi_n(x) = Lu + Q(t, x) = \sum_n c_n(t)\, L\varphi_n(x) + \sum_n q_n(t)\, \varphi_n(x) \\ &= \sum_n \{-\lambda_n c_n(t) + q_n(t)\} \varphi_n(x) \end{aligned}$$

de sorte que

$$c_n'(t) = -\lambda_n c_n(t) + q_n(t)$$

avec $c_n(0) = a_n$ car

$$u(0,x) = \sum_n c_n(0)\,\varphi_n(x) = f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x)\,.$$

On conclut (voir (1.12)) que

$$c_n(t) = a_n \exp(-\lambda_n t) + \int_0^t q_n(s)\,\exp\bigl\{-\lambda_n(t-s)\bigr\}\,\mathrm{d}s$$

et

$$u(t,x) = \sum_n a_n\,\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\varphi_n(x) + \sum_n \left\{\int_0^t q_n(s)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n(t-s)}\,\mathrm{d}s\right\}\varphi_n(x)\,. \tag{7.33}$$

En se servant des formules

$$a_n = \bigl\langle f\,,\,\varphi_n\bigr\rangle = \int_\Omega f(y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y$$

$$q_n(s) = \bigl\langle Q(s,\,\cdot\,)\,,\,\varphi_n\bigr\rangle = \int_\Omega Q(s,y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y$$

on obtient de (7.33)

$$u(t,x) = \int_\Omega k(t,x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \mathrm{d}s \int_\Omega k(t-s,x,y) Q(s,y)\,\mathrm{d}y \tag{7.34}$$

où

$$k(t,x,y) = \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\varphi_n(y) \tag{7.35}$$

en faisant les manipulations formelles d'échange de $\int$ et de $\sum$ comme dans le paragraphe précédent.

La fonction donnée par $k(t,x,y)$, $0 < t < \infty$, $x,\, y \in \Omega$, s'appelle aussi la *fonction de Green* associée à (7.32) (où le *noyau* de l'équation de la chaleur s'il s'agit de $L = \triangle$) ou la *fonction résolvante* de l'équation (7.32).

La solution (7.34) de l'équation (7.32) peut être vue comme la solution opérationnelle formelle obtenue de la formule (2.15) où l'on remplace la matrice A par l'opérateur L ; en écrivant $u(t)$ pour $u(t\,,\,\cdot\,) \in L^2(\Omega)$ et $Q(s)$ pour $Q(s,\,\cdot\,) \in L^2(\Omega)$, on a

$$u(t) = \exp(tL) f + \int_0^t \bigl\{\exp(t-s)L\bigr\}\,Q(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t > 0 \tag{7.36}$$

où $\exp(tL)$ est l'opérateur dans $L^2(\Omega)$ qui est défini comme suit : si $g \in L^2(\Omega)$,

$$\exp(tL) g(x) = \int_\Omega k(t,x,y) g(y)\,\mathrm{d}y \tag{7.37}$$

où $k(t,x,y)$ est donné par (7.35). En fait, sous les hypothèses faites sur L, on démontre que $\exp(tL)$ est un opérateur autoadjoint borné dans $L^2(\Omega)$. En effet, si $g = \sum_n b_n\varphi_n$, $b_n = \langle g\,,\,\varphi_n\rangle$, on a (au sens de $L^2(\Omega)$)

$$\exp(tL)g(x) = \sum_n b_n \exp(tL)\,\varphi_n(x) = \sum_n b_n\,\mathrm{e}^{-t\lambda_n}\varphi_n(x)$$

$$= \sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n}\varphi_n(x)\int_\Omega g(y)\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y$$

ce qui donne (7.37) en échangeant $\int$ et $\sum$. Le fait que

$$\exp(tL)\,\varphi_n = \mathrm{e}^{-t\lambda_n}\varphi_n$$

peut être pris comme la définition de $\exp(tL)$ en se rappelant que $L\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0$; si L est une matrice avec $-\lambda_n$ une valeur propre, ceci se vérifie par la défintion élémentaire de $\exp(tL)$ vue dans la section 2.2 ; le cas général est obtenu par le calcul fonctionnel des opérateurs autoadjoints indiqué dans le chapitre 5.

En écrivant

$$T_t = \exp(tL)\,,\quad t > 0$$

avec $T_0 = I$, l'opérateur identité, on montre que $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ est un *semi-groupe* d'opérateurs dans $L^2(\Omega)$ engendré par L :

$$T_t\,T_s = T_{t+s}\,,\quad t\,,\,s \geqslant 0\,.$$

Les solutions de (7.32) se présentent maintenant comme

$$u(t) = T_t f + \int_0^t T_{t-s}Q(s)\,\mathrm{d}s$$

ce qui est exactement la formule (2.15) en interprétant L comme une matrice. Cette façon formelle peut être justifiée complètement en utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs dans un espace hilbertien. Notons que, puisque $\lambda_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, la présence du terme $\exp(-\lambda_n t)$ dans (7.35) rend la convergence de la série, pour $t > 0$, beaucoup plus facile à établir que celle de (7.29) ou de (7.31).

Une interprétation intuitive pour $k(t,x,y)$ peut être obtenue en utilisant la solution (7.34) pour résoudre formellement

$$u'_t = Lu\,,\quad u(0,x) = \delta_y(x)$$

où δ_y est la distribution de Dirac concentrée à $y \in \Omega$. (Evidemment, δ_y n'est pas une fonction et δ_y n'appartient pas à $L^2(\Omega)$.) Alors de (7.34) (avec $Q = 0$)

$$u(t,x) = \int_\Omega k(t,x,z)\,\delta_y(z)\,\mathrm{d}z = k(t,x,y)\,.$$

Donc (en considérant $u'_t = Lu$ comme l'équation de la chaleur), on peut dire que $k(t,x,y)$ est la température au point $x \in \Omega$ à l'instant $t \succ 0$ si initialement il y avait une source unitaire de chaleur au point $y \in \Omega$ (cette source étant modélisée par δ_y) ; puisque, d'après (7.35),

$$k(t,x,y) = k(t,y,x)\,,$$

on voit que les rôles de x et y peuvent être échangés dans cette description.

7.4.4 Equation hyperbolique

Soit l'équation

$$u''_{tt} = Lu + F(t,x)\,, \quad t > 0\,,\ x \in \Omega \tag{7.38}$$

avec $u(0,x) = f(x)$, $u'_t(0,x) = g(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ et $u(t,x)$, pour $t > 0$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$, vérifiant la condition aux limites homogène associée au choix du domaine $\mathcal{D}_L$ de L.

Nous procédons exactement comme dans le paragraphe précédent : posons

$$u(t,x) = \sum_n c_n(t)\,\varphi_n(x)\,, \quad F(t,x) = \sum_n F_n(t)\,\varphi_n(x)$$

$$f(x) = \sum_n a_n\varphi_n(x)\,, \quad g(x) = \sum_n b_n\varphi_n(x)$$

(où $n \in \mathbb{N}$) en supposant que, pour chaque $t > 0$, $x \mapsto u(t,x)$, $x \mapsto F(t,x)$ sont dans $L^2(\Omega)$ ainsi que f et g, les séries étant prises au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$. Pour que u vérifie (7.38), on doit avoir, formellement

$$u''_{tt} = \sum_n c''_n(t)\,\varphi_n(x) = Lu + F(t,x) = \sum_n c_n(t)\,L\varphi_n(x) + \sum_n F_n(t)\,\varphi_n(x)$$

$$= \sum_n \bigl\{-\lambda_n c_n(t) + F_n(t)\bigr\}\varphi_n(x)$$

de sorte que

$$c''_n(t) = -\lambda_n c_n(t) + F_n(t) \tag{7.39}$$

avec $c_n(0) = a_n$, $c'_n(0) = b_n$, car

$$u(0,x) = \sum_n c_n(0)\,\varphi_n(x) = f(x) = \sum_n a_n\varphi_n(x)$$

$$u'_t(0,x) = \sum_n c'_n(0)\,\varphi_n(x) = g(x) = \sum_n b_n\varphi_n(x)\,.$$

Si $\lambda_n > 0$ (ce qui est sûrement le cas si $n \geqslant n_0$ pour n_0 approprié car $\lambda_n \to \infty$), la solution de (7.39) est donnée par

$$c_n(t) = A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}\,t) + B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}\,t) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-s)F_n(s)\,\mathrm{d}s \tag{7.40}$$

avec $c_n(0) = a_n = A_n$, $c_n'(0) = b_n = B_n\sqrt{\lambda_n}$, (se reporter à Ex. 18, sect. 2.8). Si $\lambda_n = 0$, la solution de (7.39) est

$$c_n(t) = a_n + b_n t + \int_0^t (t-s)\, F_n(s)\, \mathrm{d}s\,. \tag{7.41}$$

Si $\lambda_n < 0$, la solution de (7.39) est

$$c_n(t) = A_n\, \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda_n|}\, t} + B_n\, \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda_n|}\, t} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\, \mathrm{sh}\, \sqrt{\lambda_n}\, (t-s)\, F_n(s)\, \mathrm{d}s \tag{7.42}$$

avec $c_n(0) = a_n = A_n + B_n$, $c_n'(0) = b_n = \sqrt{|\lambda_n|}\,(B_n - A_n)$. Notons que les $c_n(t)$ dans (7.40) (cas $\lambda_n > 0$) ont un caractère oscillatoire, alors que les $c_n(t)$ dans (7.41) et (7.42) (cas $\lambda_n \leqslant 0$) ont un caractère non oscillatoire (voire explosif si les a_n, b_n s'y prêtent).

De ce qui précède, la solution u de (7.38) s'écrit sous la forme

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$$

avec

$$u_1(t,x) = \sum_{n<n_0} c_n(t)\, \varphi_n(x)$$

$$\begin{aligned} u_2(t,x) = &\sum_{n\geqslant n_0} \left\{ a_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t\, \varphi_n(x) + \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\, \varphi_n(x) \right\} \\ &+ \sum_{n\geqslant n_0} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, (t-s)\, F_n(s)\, \mathrm{d}s \right\} \varphi_n(x)\,. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Avec les manipulations formelles utilisées dans le paragraphe précédent, on peut écrire, formellement,

$$\begin{aligned} u_2(t,x) = &\int_\Omega \frac{\partial H}{\partial t}\, (t,x,y) f(y)\, \mathrm{d}y + \int_\Omega H(t,x,y) g(y)\, \mathrm{d}y \\ &+ \int_0^t \mathrm{d}s \int_\Omega H(t-s,x,y) F(s,y)\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{7.44}$$

où

$$H(t,x,y) = \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\, \varphi_n(x) \varphi_n(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}\, (t,x,y) = \sum_{n\geqslant n_0} \cos \sqrt{\lambda_n} t\, \varphi_n(x) \varphi_n(y)\,.$$

Si tous les $\lambda_n > 0$, on voit d'après (7.43) que la solution $u(t,x) = u_2(t,x)$ est de nature oscillatoire ; u est alors la superposition des fonctions oscillatoires dont les fréquences sont déterminées par les nombres $\sqrt{\lambda_n}$; on dit que $\sqrt{\lambda_0}$ donne

la *fréquence fondamentale*. Les nombres $\sqrt{\lambda_n}$ s'appellent aussi les *fréquences naturelles* du système décrit par l'équation (7.38), le terme $F(t,x)$ dans l'équation étant considéré comme celui qui représente la force extérieure imposée ; en absence de F, u est déterminée par les nombres $\sqrt{\lambda_n}$ et les coefficients de Fourier a_n, b_n de f, g par rapport au système orthonormal $\{\varphi_n\}$.

7.4.5 Equation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger de la mécanique quantique est de la forme

$$u'_t = iLu\,, \quad t>0\,,\ x\in\Omega=\mathbb{R}^N \tag{7.45}$$

sous une condition initiale $u(0,x)=f(x)$, $x\in\Omega$ (avec $i=\sqrt{-1}$). Ici, on prend $u(t,x)$ à valeurs complexes ($x\mapsto u(t,x)$ s'appelle la *fonction d'onde* à l'instant t), et l'opérateur L (appelé le *hamiltonien*) est souvent de la forme $-k\triangle+V(x)$ où $k>0$ et $V:\Omega\to\mathbb{R}$ représente un *potentiel*. Même si (7.45) ressemble à l'équation parabolique, la présence du facteur i fait que les solutions ont un caractère oscillatoire (la raison pour laquelle la terminologie « mécanique ondulatoire » pour mécanique quantique semble être appropriée). Sous les hypothèses faites sur L, on peut résoudre (7.45) formellement par le procédé utilisé dans les paragraphes précédents. En effet, posons comme précédemment

$$u(t,x)=\sum_n c_n(t)\,\varphi_n(x)\,,\quad f(x)=\sum_n a_n\varphi_n(x)\ ;$$

pour que u vérifie (7.45), on doit avoir, formellement,

$$u'_t=\sum_n c'_n(t)\,\varphi_n(x)=iLu=i\sum_n c_n(t)\,L\varphi_n(x)=-i\sum_n \lambda_n c_n(t)\,\varphi_n(x)$$

d'où

$$c'_n(t)=-i\lambda_n c_n(t)$$

avec $c_n(0)=a_n$ car

$$u(0,x)=\sum_n c_n(0)\,\varphi_n(x)=f(x)=\sum_n a_n\varphi_n(x)\,.$$

On conclut que $c_n(t)=a_n\exp(-i\lambda_n t)$ et

$$u(t,x)=\sum_n a_n\exp(-i\lambda_n t)\,\varphi_n(x)\,. \tag{7.46}$$

En se servant des formules

$$a_n=\langle f\,,\,\varphi_n\rangle=\int_\Omega f(y)\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

on peut obtenir une formule intégrale pour $u(t,x)$ de (7.46) :

$$u(t,x) = \sum_n \exp(-i\lambda_n t)\,\varphi_n(x) \int_\Omega f(y)\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega S(t,x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

où

$$S(t,x,y) = \sum_n \exp(-i\lambda_n t)\,\varphi_n(x)\varphi_n(y)\,.$$

Nous rappelons encore que ce dernier calcul est purement formel, l'échange de $\int$ et $\sum$ étant non justifié et la convergence de la série dans $S(t,x,y)$ parfaitement impossible sauf au sens des distributions. Par contre, la série de (7.46) converge évidemment dans $L^2(\Omega)$ pour chaque $t \geqslant 0$ et la formule intégrale suggère que

$$u(t) = \exp(itL) f$$

où $u(t)$ est la fonction $x \mapsto u(t,x)$ dans $L^2(\Omega)$. Ici,

$$T_t = \exp(itL)$$

définit un *groupe d'opérateurs unitaires* dans $L^2(\Omega)$:

$$T_t\, T_s = T_{t+s}\,, \quad t\,,\ s \in \mathbb{R}\,.$$

L'interprétation de $u(t) = T_t f$ en mécanique quantique est la suivante : l'état initial f devient à l'instant t l'état $T_t f$. Le caractère unitaire de T_t devient visible de (7.46) : si

$$T_t f = \sum_n a_n\, \mathrm{e}^{-i\lambda_n t}\varphi_n\,, \quad T_t g = \sum_n b_n\, \mathrm{e}^{-i\lambda_n t}\varphi_n$$

avec f, $g \in L^2(\Omega)$, alors, d'après la relation de Parseval,

$$\langle T_t f\,,\, T_t g\rangle = \sum_n \bigl(a_n\, \mathrm{e}^{-i\lambda_n t}\bigr)\overline{\bigl(b_n\, \mathrm{e}^{-i\lambda_n t}\bigr)} = \sum_n a_n \overline{b_n} = \langle f\,,\, g\rangle$$

car $f = \sum_n a_n\varphi_n$, $g = \sum_n b_n\varphi_n$.

On peut démontrer généralement que si H est un opérateur autoadjoint *quelconque* dans $L^2(\Omega)$ (ou dans un autre espace hilbertien), alors $T_t = \exp(itH)$, $t \in \mathbb{R}$, est un groupe d'opérateurs unitaires dans $L^2(\Omega)$ et tout groupe d'opérateurs unitaires (continu) est engendré de cette manière par un opérateur autoadjoint (*théorème de Stone*). Le cas traité ici concerne un opérateur $H = L$ qui est essentiellement autoadjoint de spectre discret d'une forme particulière ($\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$).

7.5 CONDITIONS AUX LIMITES NON HOMOGÈNES

7.5.1 Préliminaires

Dans cette section nous indiquons comment on peut résoudre les problèmes de la section 7.3 lorsque les conditions aux limites ne sont pas homogènes. La méthode consiste à ramèner le problème au cas homogène.

Pour illustrer la méthode, considérons le problème de la résolution de l'équation

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= \alpha \quad \text{sur } \operatorname{Fr}\Omega \end{aligned} \tag{7.47}$$

où L est un opérateur différentiel donné (par exemple $L = \triangle$) et Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$; ici, f et α sont deux fonctions données (qui sont généralement au moins continues). On choisit une fonction $\widetilde{\alpha}$ définie dans $\overline{\Omega}$ telle que $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha(x)$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$, $\widetilde{\alpha}$ étant suffisamment régulière dans Ω pour que $L\widetilde{\alpha}$ ait un sens (par exemple si $L = \triangle$, on demande que $\widetilde{\alpha}$ soit de classe C^2 dans Ω) ; puisque l'on n'exige rien de $\widetilde{\alpha}$ sauf sa régularité dans Ω et que $\widetilde{\alpha}|_{\operatorname{Fr}\Omega} = \alpha$, l'existence de $\widetilde{\alpha}$ n'est pas une difficulté primordiale. De toute façon, si $\widetilde{\alpha}$ n'existait pas, le problème posé n'aurait aucune solution car on cherche justement une fonction u telle que $u|_{\operatorname{Fr}\Omega} = \alpha$ avec $Lu = f$ dans Ω. Pour Ω simple (par exemple, Ω un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une boule de $\mathbb{R}^N$), on peut écrire sans peine des formules explicites pour $\widetilde{\alpha}$. Avec une telle fonction $\widetilde{\alpha}$, posons $\widetilde{u} = u - \widetilde{\alpha}$; alors u vérifie (7.47) si et seulement si $\widetilde{u}$ vérifie

$$\begin{aligned} L\widetilde{u} &= f - L\widetilde{\alpha} \quad \text{dans } \Omega \\ \widetilde{u} &= 0 \qquad\qquad \text{sur } \operatorname{Fr}\Omega\,. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Ainsi, $\widetilde{u}$ est une solution d'un problème à condition aux limites homogène. Si l'on sait résoudre (7.48), on aura une solution u pour (7.47) en prenant $u = \widetilde{u} + \widetilde{\alpha}$. On a vu que si l'opérateur différentiel L (*muni de la condition au bord homogène*) vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1, alors (7.48) possède une solution.

7.5.2 Cas des autres équations

Le procédé est tout à fait analogue pour les équations paraboliques et hyperboliques. Considérons, par exemple, l'équation

$$u'_t = Lu + Q(t,x)\,, \quad t > 0\,,\ x \in \Omega \tag{7.49}$$

avec $u(0,x) = f(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ (condition initiale) et

$$u(t,x) = \alpha(t,x)\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega\,,\ t > 0$$

(condition au bord non homogène de Dirichlet), f et α étant au moins des fonctions continues. On prend une fonction $\widetilde{\alpha} : [0, \infty[\times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue, suffisamment régulière (par exemple, de classe C^2 si $L = \triangle$) dans $]0, \infty[\times \Omega$ tel que $\widetilde{\alpha}(t,x) = \alpha(t,x)$ si $t > 0$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. On pose $\widetilde{u} = u - \widetilde{\alpha}$; si u vérifie (7.49), la condition initiale et la condition au bord données, alors

$$\widetilde{u}(0,x) = f(x) - \widetilde{\alpha}(0,x) = \widetilde{f}(x), \quad x \in \overline{\Omega}$$

avec

$$\widetilde{u}(t,x) = 0, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega, \ t > 0 ;$$

de plus,

$$\widetilde{u}'_t = L\widetilde{u} + \widetilde{Q}, \quad t > 0, \ x \in \Omega \tag{7.50}$$

où

$$\widetilde{Q} = L\widetilde{\alpha} + Q - \widetilde{\alpha}'_t .$$

En effet,

$$\widetilde{u}'_t = u'_t - \widetilde{\alpha}'_t = Lu + Q - \widetilde{\alpha}'_t = L\widetilde{u} + L\widetilde{\alpha} + Q - \widetilde{\alpha}'_t = L\widetilde{u} + \widetilde{Q} .$$

Ainsi, $\widetilde{u}$ vérifie (7.50) avec une condition initiale $\widetilde{u}(0,x) = \widetilde{f}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, et une condition initiale $\widetilde{u}(t,x) = 0$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$, $t > 0$. Si l'opérateur différentiel L (*muni de la condition au bord homogène*) vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1, alors (7.50) (et par conséquent (7.49)) peut être résolue par le procédé de la section précédente.

7.5.3 Exemple

Soit l'équation

$$u'_t = ku''_{xx} + Q(t,x), \quad t > 0, \ 0 < x < \ell \tag{7.51}$$

avec condition initiale $u(0,x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$, et la condition au bord $u(t,0) = \alpha(t)$, $u(t,\ell) = \beta(t)$, $t > 0$, $k > 0$ étant une constante. Nous résolvons l'équation en deux étapes en utilisant le procédé indiqué ci-dessus.

1. *Cas homogène* $\alpha(t) = \beta(t) = 0$, $t > 0$.

   L'opérateur est ici $Lv = kv''$, les fonctions v étant de classe C^2 dans $[0, \ell]$ avec $v(0) = v(\ell) = 0$. Vérifions que L satisfait aux hypothèses du paragraphe 7.4.1 ; pour simplifier l'écriture, considérons $k = 1$; le cas $k \neq 1$ en suivra immédiatement.

La linéarité de L est évidente ; établissons la symétrie : si $f,\ g \in \mathcal{D}_L$ où

$$\mathcal{D}_L = \{v : [0\,,\,\ell] \to \mathbb{C} : v(0) = v(\ell) = 0\,,\ v \text{ de classe } C^2\}\,,$$

alors

$$\langle Lf\,,\,g\rangle = \int_0^\ell f''(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\ell f'(x)\,\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\ell f'(x)\,\overline{g''(x)}\,\mathrm{d}x = \langle f\,,\,Lg\rangle$$

en faisant deux intégrations par parties et en observant que les termes $f'(x)\,\overline{g(x)}\big|_{x=0}^{x=\ell}$, $f(x)\,\overline{g'(x)}\big|_{x=0}^{\ell}$ sont nuls. On résout maintenant l'équation

$$L\varphi + \lambda\varphi = \varphi'' + \lambda\varphi = 0$$

avec $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$; ceci a déjà été fait (§ 7.1.4) et on sait que

$$\lambda = \lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2\,,\quad \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell}\,x\,,\quad n = 1\,,2,\ldots$$

sont les solutions. De la théorie des séries de Fourier (chap. 4) nous savons que $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ est une base orthogonale de $L^2([0\,,\,\ell])$. Donc les hypothèses du paragraphe 7.4.1 sont vérifiées pour $Lv = v''$, $v \in \mathcal{D}_L$; notons qu'ici les λ_n sont des valeurs propres simples et

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\,,\quad \lambda_n \to \infty\ (n \to \infty)\,.$$

La numérotation débute ici à partir de $n = 1$ mais c'est un détail sans importance ; pour l'opérateur $Lv = kv''$ avec $k > 0$ (avec $v \in \mathcal{D}_L$), on aura les mêmes φ_n mais les valeurs propres $k\lambda_n$ car $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ entraîne $k\varphi'' + k\lambda\varphi = 0$. La formule (7.33) donne maintenant la solution cherchée pour (7.51) :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\Big(-k\Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2 t\Big)\sin\frac{n\pi x}{\ell} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\int_0^\infty q_n(s)\exp\Big(-k\Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2(t-s)\Big)\,\mathrm{d}s\Big\}\sin\frac{n\pi x}{\ell} \end{aligned} \tag{7.52}$$

où

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,\quad Q(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,\qquad 0 < x < \ell$$

de sorte que

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x\,,\quad q_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell Q(t,x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

(noter que $\{\varphi_n\}$ est ici une famille orthogonale et non orthonormale ; ainsi, $a_n = \langle f\,,\,\varphi_n\rangle/\|\varphi_n\|^2$). On retrouve dans (7.52) la solution (7.17) (avec $q_n \equiv 0$).

2. *Cas non homogène*

Ici $u(t,0) = \alpha(t)$, $u(t,\ell) = \beta(t)$, $t > 0$. Posons

$$\gamma(t,x) = \alpha(t) + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{\ell}\, x\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell\,;$$

alors $\gamma(t,0) = \alpha(t)$, $\gamma(t,\ell) = \beta(t)$. Si $\widetilde{u}(t,x) = u(t,x) - \gamma(t,x)$, on aura $\widetilde{u}(t,0) = 0$, $\widetilde{u}(t,\ell) = 0$, ; en supposant que α, β sont de classe C^1, on a

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \left\{\alpha'(t) + \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{\ell}\, x\right\} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \widetilde{Q}(t,x)$$

avec

$$\widetilde{Q}(t,x) = Q(t,x) - \left\{\alpha'(t) + \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{\ell}\, x\right\}.$$

De plus,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d'où

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} + \widetilde{Q}(t,x)$$

avec

$$\widetilde{u}(0,x) = u(0,x) - \gamma(0,x) = f(x) - \left\{\alpha(0) + \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{\ell}\, x\right\} = \widetilde{f}(x)$$

et $\widetilde{u}(t,0) = 0$, $\widetilde{u}(t,\ell) = 0$. On a donc ramené le problème du départ à la solution d'un problème similaire avec la condition au bord homogène.

7.5.4 Une méthode alternative

On peut traiter un problème de condition limite non homogène par une méthode différente qui a ses avantages. Nous expliquons cette méthode en résolvant de nouveau (7.51) sous la condition au bord $u(t,0) = \alpha(t)$, $u(t,\ell) = \beta(t)$, $t > 0$, et la condition initiale $u(0,x) = f(x)$, $0 < x < \ell$.

Nous écrivons

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

les fonctions propres et les valeurs propres associées au problème homogène : $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $0 < x < \ell$, $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$. Puisque les φ_n forment une base orthogonale de $L^2([\,0\,,\ell\,])$, on peut écrire

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,\varphi_n(x)\,, \quad t > 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\,, \quad Q(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,\varphi_n(x)$$

avec

$$c_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u(t,x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad t>0$$

et les formules analogues pour a_n, $q_n(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $c_n(0) = a_n$ car $u(0,x) = f(x)$, $0 < x < \ell$. Alors, pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} c_n'(t) &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_t'(t,x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \big\{k u_{xx}''(t,x) + Q(t,x)\big\}\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(d'après (7.51))} \\ &= \frac{2k}{\ell}\int_0^\ell u_{xx}''(t,x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + q_n(t)\,. \end{aligned}$$

En faisant des intégrations par parties, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_{xx}''(t,x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{u_x'(t,x)\,\varphi_n(x)\Big|_{x=0}^{x=\ell}}_{=0} - \int_0^\ell u_x'(t,x)\,\varphi_n'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -u(t,x)\varphi_n'(x)\Big|_{x=0}^{x=\ell} + \int_0^\ell u(t,x)\,\varphi_n''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n\pi}{\ell}\big\{\alpha(t) - (-1)^n\beta(t)\big\} - \Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2\int_0^\ell u(t,x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

en tenant compte des relations suivantes :

$$\varphi_n'(x) = \frac{n\pi}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,, \quad \varphi_n'(0) = \frac{n\pi}{\ell}\,, \quad \varphi_n'(\ell) = (-1)^n\frac{n\pi}{\ell}\,,$$
$$u(t,0) = \alpha(t)\,, \quad u(t,\ell) = \beta(t)\,.$$

Donc

$$c_n'(t) = -\lambda_n k\frac{2}{\ell}\int_0^\ell u(t,x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + \widetilde{q}_n(t) = -\lambda_n k\,c_n(t) + \widetilde{q}_n(t)$$

où

$$\widetilde{q}_n(t) = \frac{2kn\pi}{\ell 2}\big\{\alpha(t) - (-1)^n\beta(t)\big\} + q_n(t)$$

avec $c_n(0) = a_n$. En résolvant pour c_n, on obtient

$$c_n(t) = a_n\exp(-\lambda_n k t) + \int_0^t \exp\big(-\lambda_n k(t-s)\big)\,\widetilde{q}_n(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t>0\,,\ n=1,2,\ldots$$

d'où $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty c_n(t)\,\varphi_n(x)$ donne la solution désirée.

L'avantage de cette méthode est que les fonctions $t \mapsto \alpha(t)$, $t \mapsto \beta(t)$, n'ont pas besoin d'être dérivables ; de plus, on obtient la solution $u(t,x)$ directement sans passer à une nouvelle fonction $\widetilde{u}$ obtenue en écrivant $\widetilde{u}(t,x) = u(t,x) - \gamma(t,x)$ où $\gamma(t,x)$ est une fonction appropriée pour annuler les conditions au bord imposées sur u. Cette méthode est applicable à tous les problèmes précédents, à condition que dans $\mathbb{R}^N$ on utilise les formules de Green au lieu des intégrations par parties.

7.6 EXEMPLES D'OPÉRATEURS

7.6.1 Introduction

Dans cette section nous donnons quelques exemples simples mais importants des opérateurs L qui satisfont les hypothèses du paragraphes 7.4.1. Pour les opérateurs réguliers de Sturm-Liouville (§ 7.6.2) et l'opérateur associé à l'oscillateur harmonique (§ 7.6.4), nous donnons des démonstrations détaillées. Dans le paragraphe 7.6.5, nous indiquons d'autres opérateurs importants vérifiant les hypothèses du paragraphes 7.4.1 sans donner les démonstrations nécessaires pour les établir.

7.6.2 Opérateurs réguliers de Sturm–Liouville

Soit $Lf = f'' + qf$ où $q : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $[a\,,b]$ étant un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f est une fonction de classe C^2, à valeur complexes, définie dans $[a\,,b]$. Posons

$$B_1 f = \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a)\,, \quad B_2 f = \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) \tag{7.53}$$

où α_1, α_2, β_1 et β_2 sont des nombres réels tels que

$$|\alpha_1| + |\beta_1| > 0\,, \quad |\alpha_2| + |\beta_2| > 0\,;$$

soit

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_L = \Big\{ f \in C^2\big([a\,,b]\big) : B_1 f = 0\,,\ B_2 f = 0 \Big\}\,. \tag{7.54}$$

Notons que si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, les conditions $B_1 f = 0$ et $B_2 f = 0$ correspondent à la condition au bord homogène de Dirichlet ; de même si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, alors $B_1 f = 0$ et $B_2 f = 0$ correspondent à la condition au bord homogène de Neumann. Nous démontrons que L *avec domaine* $\mathcal{D}_L$ *vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1 ; de plus, chaque valeur propre* λ_n *est simple.* Un tel couple $(L, \mathcal{D}_L)$ sera appelé un *opérateur régulier de Sturm–Liouville.* La démonstration qu'un opérateur régulier de Sturm–Liouville possède les propriétés exigées dans les hypothèses du paragraphe 7.4.1 se fait en plusieurs étapes intermédiaires. Dans la suite $\langle f\,, g\rangle$, $\|f\|$, signifient le produit scalaire et la norme dans $L^2\big([a\,,b]\big)$.

LEMME 1. *L est symétrique : pour f, $g \in \mathcal{D}_L$,*

$$\langle Lf\,,\, g\rangle = \langle f\,,\, Lg\rangle\,.$$

DÉMONSTRATION

On vérifie aisément que, pour φ, $\psi \in \mathcal{D}_L$,

$$\psi(L\varphi) - \varphi(L\psi) = \big(\psi\varphi' - \varphi\psi'\big)' \tag{7.55}$$

car le membre de gauche vaut $\psi\varphi'' - \varphi\psi''$ ce qui est égal au membre de droite ; (7.55) s'appelle *identité de Lagrange*. De plus, si φ, $\psi \in \mathcal{D}_L$, $(\psi\varphi' - \varphi\psi')$ s'annule en $x = a$ et en $x = b$; en effet, si $\beta_1 = 0$ dans la définition de B_1 dans (7.53), alors $B_1\varphi = 0$, $B_1\psi = 0$ entraînent que $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$; si $\beta_1 \neq 0$, alors $\varphi'(a) = \theta\varphi(a)$, $\psi'(a) = \theta\psi(a)$, $\theta = -\alpha_1/\beta_1$ (car $B_1\varphi = 0$, $B_1\psi = 0$) d'où

$$\psi(a)\varphi'(a) - \varphi(a)\psi'(a) = 0\,;$$

on démontre, de même, que

$$\psi(b)\varphi'(b) - \varphi(a)\psi'(a) = 0\,.$$

Donc, pour f, $g \in \mathcal{D}_L$,

$$\langle Lf\,,\, g\rangle - \langle f\,,\, Lg\rangle = \int_a^b \{\overline{g}(Lf) - f(L\overline{g})\} = (\overline{g}f' - f\overline{g'})\Big|_a^b = 0$$

en utilisant $\varphi = f$, $\psi = \overline{g}$ dans (7.55). Notons que $g \in \mathcal{D}_L$ entraîne $\overline{g} \in \mathcal{D}_L$ car les nombres α_1, α_2, β_1 et β_2 sont réels. ♦

LEMME 2. *Si $f \in \mathcal{D}_L$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant \varepsilon\|f'\| + c_\varepsilon\|f\|\,.$$

DÉMONSTATION (d'après Dautray–Lions [4])

Pour $a < \xi < b$, posons

$$\theta_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(\xi-a)^n} & \text{si } a \leqslant x < \xi \\[2ex] -\dfrac{(b-x)^{n+1}}{(b-\xi)^n} & \text{si } \xi < x \leqslant b \end{cases}$$

où n est un entier $\geqslant 1$. On vérifie aisément que

$$\int_a^\xi f'\theta_\xi + \int_a^\xi f\theta'_\xi = \lim_{\substack{t\to\xi \\ t<\xi}} f\theta_\xi \Big|_a^t = f(\xi)(\xi - a)$$

$$\int_\xi^b f'\theta_\xi + \int_\xi^b f\theta'_\xi = \lim_{\substack{t\to\xi \\ t>\xi}} f\theta_\xi \Big|_t^b = f(\xi)(b - \xi)$$

d'où

$$\langle f' , \theta_\xi \rangle + \langle f , \theta'_\xi \rangle = f(\xi)(b - a) .$$

On en conclut, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, que

$$(b - a)|f(\xi)| \leqslant \|\theta_\xi\| \, \|f'\| + \|\theta'_\xi\| \, \|f\| . \tag{7.56}$$

Un calcul simple donne que

$$\|\theta_\xi\|^2 = \frac{1}{2n+3} \left\{ (\xi - a)^3 + (b - \xi)^3 \right\} \leqslant \frac{(b-a)^3}{2n+3}$$

$$\|\theta'_\xi\|^2 = \frac{(n+1)^2}{2n+1} (b - a)$$

d'où, en utilisant (7.56), on a

$$|f(\xi)| \leqslant \frac{(b-a)^{1/2}}{\sqrt{2n+3}} \|f'\| + \frac{(b-a)^{-1/2}(n+1)}{\sqrt{2n+1}} \|f\| .$$

Il suffit de choisir n tel que

$$\frac{(b-a)^{1/2}}{\sqrt{2n+3}} \leqslant \varepsilon$$

et de poser $c_\varepsilon = (b-a)^{-1/2}(n+1)/\sqrt{2n+1}$ pour cette valeur de n pour avoir

$$|f(\xi)| \leqslant \varepsilon \|f'\| + c_\varepsilon \|f\|$$

ce qui donne le résultat. ♦

LEMME 3

Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle -Lf , f \rangle > c$$

pour tout $f \in \mathcal{D}_L$, $\|f\| = 1$.

DÉMONSTRATION

On a, pour $f \in \mathcal{D}_L$,

$$\begin{aligned} \langle -Lf\,,\, f\rangle &= \int_a^b -(f'' + qf)\,\overline{f} = -\int_a^b f''\,\overline{f} - \int_a^b q|f|^2 \\ &= -f'\,\overline{f}\Big|_a^b + \int_a^b |f'|^2 - \int_a^b q|f|^2 \end{aligned} \tag{7.57}$$

en faisant une intégration par parties. Si $f(b) = 0$, alors $f'(b)\,\overline{f}(b) = 0$; si $f(b) \neq 0$, alors $B_2 f = 0$ dans (7.53) entraîne que $\beta_2 \neq 0$ et $f'(b) = (-\alpha_2/\beta_2) f(b)$ d'où

$$|f'(b)\,\overline{f}(b)| = \left|\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right| |f(b)|^2 \leqslant \left|\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right| \{\varepsilon \|f'\| + c_\varepsilon\}^2 \leqslant 2\left|\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right| \left\{\varepsilon^2 \|f'\|^2 + c_\varepsilon^2\right\}$$

si $\|f\| = 1$ (en utilisant le lemme 2). De même, pour $f \in \mathcal{D}_L$, $\|f\| = 1$,

$$|f'(a)\,\overline{f}(a)| \leqslant 2\left|\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right| \left\{\varepsilon^2 \|f'\|^2 + c_\varepsilon^2\right\}$$

si $f(a) \neq 0$; ainsi, il existe $M_1 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|f'(a)\,\overline{f}(a)| + |f'(b)\,\overline{f}(b)| \leqslant M_1 \left\{\varepsilon^2 \|f'\|^2 + c_\varepsilon^2\right\}$$

où $c_\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{D}_L$, $\|f\| = 1$. Si $q(x) \leqslant M_2$, $a \leqslant x \leqslant b$, alors de (7.57) on obtient, pour $f \in \mathcal{D}_L$, $\|f\| = 1$,

$$\langle -Lf\,,\, f\rangle \geqslant -M_1 \left\{\varepsilon^2 \|f'\|^2 + c_\varepsilon^2\right\} + \|f'\|^2 - M_2$$

ce qui donne

$$\langle -Lf\,,\, f\rangle \geqslant \|f'\|^2 (1 - \varepsilon^2 M_1) - M_1 c_\varepsilon^2 - M_2 \geqslant -M_1 c_\varepsilon^2 - M_2 > c$$

si $\varepsilon^2 M_1 < 1$ et $c < -M_1 c_\varepsilon^2 - M_2$. ♦

Notons que, dans (7.57), $\langle -Lf\,,\, f\rangle$ est réel car L est symétrique ; il s'ensuit, de (7.57), que $f'\overline{f}\Big|_a^b$ est réel.

Nous utilisons le lemme 3 de manière suivante ; posons $\widetilde{L} = L + c$ où c est le nombre donné par le lemme 3. Alors

$$\widetilde{L}\varphi = L\varphi + c\varphi = \varphi'' + (q + c)\,\varphi$$

et, si $\varphi \in \mathcal{D}_L$, $\|\varphi\| = 1$,

$$\langle -\widetilde{L}\varphi\,,\, \varphi\rangle = \langle -L\varphi\,,\, \varphi\rangle - c > 0\,;$$

ceci entraîne que si $\widetilde{L}\varphi + \lambda\varphi = 0$ pour un $\varphi \in \mathcal{D}_L$, $\|\varphi\| = 1$, alors $\lambda > 0$ car

$$0 < \langle -\widetilde{L}\varphi\,,\,\varphi\rangle = \langle \lambda\varphi\,,\,\varphi\rangle = \lambda\,.$$

De plus,

$$\widetilde{L}\varphi + \lambda\varphi = 0 \Longleftrightarrow L\varphi + (\lambda + c)\,\varphi = 0\,;$$

donc si λ est une valeur propre pour $-\widetilde{L}$, alors $(\lambda + c)$ sera une valeur propre pour $-L$ et vice versa, les fonctions propres étant identiques ; de plus, $\widetilde{L}$ est également symétrique (avec domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_L$ donné par (7.54). En démontrant que $\widetilde{L}$ vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1, on aura démontré que L les vérifie aussi. *On peut donc supposer* (en remplaçant L par $\widetilde{L}$) *que* $-L$ *est symétrique et positif* (c'est-à-dire $\langle -Lf\,,\,f\rangle > 0$, $f \in \mathcal{D}_L$, $f \neq 0$) ; alors $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de $-L$ de sorte que $L\varphi = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}_L$, *entraîne que* $\varphi = 0$. Dans la suite, nous procédons en faisant cette hypothèse.

LEMME 4. *Il existe une fonction continue* $k : [a\,,\,b] \times [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ *ayant la propriété suivante : soit*

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{7.58}$$

où $f \in C([a\,,\,b])$ *; alors* $K : C([a\,,\,b]) \to \mathcal{D}_L$ *est un opérateur linéaire bijectif tel que* $LKf = f$, $f \in C([a\,,\,b])$ *et* $KLf = f$, $f \in \mathcal{D}_L$.

REMARQUE. $\mathcal{D}_L$ est défini dans (7.54) ; autrement dit, l'opérateur intégral K est l'inverse de l'opérateur différentiel L, $Lf = f'' + qf$; rappelons que l'on a supposé dorénavant que L est injectif dans $\mathcal{D}_L$.

DÉMONSTRATION

Soit $u \in C^2([a\,,\,b])$ (u reélle) telle que

$$Lu = 0 \quad \text{dans } [a\,,\,b]\,, \qquad B_1u = 0\,, \quad u \not\equiv 0\,;$$

l'existence de u est garantie par la théorie des équations différentielles linéaires (sect. 2.4) ; il suffit de prendre comme condition initiale pour u, $u(a) = \beta_1$, $u'(a) = -\alpha_1$. De même, soit $v \in C^2([a\,,\,b])$ (v réelle) telle que

$$Lv = 0 \quad \text{dans } [a\,,\,b]\,, \qquad B_2v = 0\,, \quad v \not\equiv 0\,.$$

Posons

$$k(x,y) = \begin{cases} \alpha\,u(x)v(y) & \text{si } x \leqslant y \\ \alpha\,v(x)u(y) & \text{si } y \leqslant x, \end{cases} \qquad x\,,\,y \in [a\,,\,b] \tag{7.59}$$

où α est une constante réelle que nous choisirons pour avoir

$$\frac{\partial k}{\partial x}(t+,t) - \frac{\partial k}{\partial x}(t-,t) = 1\,, \quad a < t < b\,. \tag{7.60}$$

Ce choix de α est possible car le membre de gauche dans (7.60) vaut

$$\alpha\{v'(t)u(t) - u'(t)v(t)\} = \alpha W(u,v)(t)\,,$$

$W(u,v)$ étant le wronskien de u, v et $W(u,v)(t) = c$, une constante, d'après (2.30) ; ce dernier point est d'ailleurs, ici, immédiat car de $Lu = 0$, $Lv = 0$, on conclut que

$$0 = v(Lu) - u(Lv) = \big(vu' - uv'\big)'$$

selon (7.55), ce qui prouve la constance de $W(u,v)(t)$. Si la constante $c = 0$, on aurait

$$u(a)v'(a) = v(a)u'(a)\,, \quad u(b)v'(b) = v(b)u'(b)$$

de sorte que $\big(u(a), u'(a)\big)$ est un multiple de $\big(v(a), v'(a)\big)$ et $\big(u(b), u'(b)\big)$ et un multiple de $\big(v(b), v'(b)\big)$; puisque

$$B_1 u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0\,, \quad B_2 v = \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0\,,$$

on aurait aussi $B_2 u = 0$, $B_1 v = 0$; on aurait alors que $Lu = 0$, $Lv = 0$, avec u, $v \in \mathcal{D}_L$ ce qui entraînerait que $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ selon l'hypothèse de l'injectivité sur L. Donc $c \neq 0$ et il suffit de prendre $\alpha = 1/c$; alors $\alpha W(u,v)(x) \equiv 1$.

Avant de continuer, résumons ici les propriétés de la fonction $k : [\,a\,,\,b\,] \times [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ ainsi déterminée :

(i) k est continue dans $[\,a\,,\,b\,] \times [\,a\,,\,b\,]$; k est de classe C^2 dans chaque triangle $\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant y \leqslant b\}$, $\{(x,y) : a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$;

(ii) pour chaque $y \in [\,a\,,\,b\,]$, $(Lk^y) = 0$ si $x \neq y$, $x \in [\,a\,,\,b\,]$ où $k^y(x) = k(x,y)$;

(iii) pour chaque $y \in [\,a\,,\,b\,]$,

$$\alpha_1 k(a,y) + \beta_1 \frac{\partial k}{\partial x}(a,y) = 0\,, \quad \alpha_2 k(b,y) + \beta_2 \frac{\partial k}{\partial x}(b,y) = 0\,;$$

(iv) k vérifie (7.60).

Pour tout choix de $\alpha \in \mathbb{R}$, k définie par (7.59) vérifie (i), (ii) et (iii) ; on a vu ci-dessus que α peut être choisi de telle manière que k vérifie (7.60) également. On démontre que l'opérateur K défini par k, d'après (7.58), où k vérifie (i)-(iv), satisfait aux exigences de la proposition ; *nous démontrons ceci en utilisant la forme explicite de k donnée par (7.59).*

Soit $f \in C\big([\,a\,,\,b\,]\big)$; posons $Kf = g$; alors

$$g(x) = \alpha v(x) \int_a^x u(y)f(y)\,\mathrm{d}y + \alpha u(x) \int_x^b v(y)f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad (7.61)$$

d'où

$$g'(x) = \alpha v'(x) \int_a^x u(y)f(y)\,\mathrm{d}y + \alpha u'(x) \int_x^b v(y)f(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad a \leqslant x \leqslant b \qquad (7.62)$$

en observant que le terme $\alpha v(x)u(x)f(x)$ apparaît deux fois avec des signes opposés dans le calcul de $g'(x)$; on obtient alors

$$\begin{aligned} g''(x) &= \alpha v''(x)\int_a^x u(y)f(y)\,dy + \alpha u''(x)\int_x^b v(y)f(y)\,dy \\ &\quad + \alpha v'(x)u(x)f(x) - \alpha u'(x)v(x)f(x) \\ &= \alpha v''(x)\int_a^x u(y)f(y)\,dy + \alpha u''(x)\int_x^b v(y)f(y)\,dy + f(x)\,. \quad (7.63) \end{aligned}$$

car $\alpha W(u,v)(x) = \alpha\{v'(x)u(x) - u'(x)v(x)\} \equiv 1$. De (7.61) et (7.63), on a

$$Lg(x) = g''(x) + q(x)g(x) = f(x)\,, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

car $v''(x) + q(x)v(x) = 0$, $u''(x) + q(x)u(x) = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. Grâce à (7.63), on voit que $g \in C^2([a\,,b])$ et d'après (7.61) et (7.62) on vérifie immédiatement que $B_1 g = 0$, $B_2 g = 0$ de sorte que $g \in \mathcal{D}_L$; ainsi $g = Kf \in \mathcal{D}_L$ et $LKf = f$ dès que $f \in C([a\,,b])$. D'autre part, si $f \in \mathcal{D}_L$, on a $Lf \in C([a\,,b])$ d'où, par ce qui précède,

$$LK(Lf) = Lf\,, \quad L\{KLf - f\} = 0$$

ce qui donne $KLf = f$, $f \in \mathcal{D}_L$, à cause de l'injectivité de L dans $\mathcal{D}_L$ (car $f \in \mathcal{D}_L$, $KLf \in \mathcal{D}_L$ et $KLf - f \in \mathcal{D}_L$). ♦

REMARQUE. La fonction k vérifiant (i)-(iv) s'appelle la *fonction de Green* pour L avec domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_L$; la discussion précédente montre que k est uniquement déterminé sous l'hypothèse que L soit injectif dans $\mathcal{D}_L$. L'opérateur K défini par k via (7.58) est l'inverse de L. Notons que k *est réelle avec* $k(x,y) = k(y,x)$ *pour* $x,\ y \in [a\,,b]$.

Grâce au lemme 4, les propriétés de L se déduisent immédiatement de celle de $K : C([a\,,b]) \to \mathcal{D}_L$. Notons que K est un opérateur symétrique compact dans l'espace préhilbertien $C([a\,,b])$ (§ 5.3.2(6)). De la proposition 5.4.1, on conclut que $-K$ possède une suite de valeurs propres $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et de fonctions propres $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ correspondantes telles que $|\mu_0| \geqslant |\mu_1| \geqslant \ldots > 0$, $|\mu_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, avec $\{\varphi_n\}$ formant une base orthonormale pour $\mathcal{D}_L$. Notons que, pour tout $f \in C([a\,,b])$,

$$\langle -Kf\,,\, f\rangle = \langle -Kf\,,\, LKf\rangle = \langle -LKf\,,\, Kf\rangle > 0\,;$$

donc si $-K\varphi = \mu\varphi$, $\|\varphi\| = 1$, alors $\mu > 0$. On conclut que les μ_n sont > 0 et $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Puisque

$$-K\varphi_n = \mu_n\varphi_n \iff -LK\varphi_n = \mu_n L\varphi_n \iff -\varphi_n = \mu_n L\varphi_n \iff L\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0$$

avec $\lambda_n = 1/\mu_n$, on a $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Puisque $C_0^2([a\,,b]) \subset \mathcal{D}_L$ et $C_0^2([a\,,b])$ est dense dans $C([a\,,b])$ (et dans $L^2([a\,,b])$), pour la topologie préhilbertienne, $\{\varphi_n\}$ est également une base

orthonormale pour l'espace préhilbertien $C([a, b])$ (ainsi que pour l'espace hilbertien $L^2([a, b])$). Ceci achève la démonstration que L vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1. Démontrons que les λ_n sont des valeurs propres simples de $-L$. En effet, supposons que pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_L$, $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, on a

$$L\varphi + \lambda\varphi = 0\,, \quad L\psi + \lambda\psi = 0$$

pour un λ ; puisque $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_L$, on a, en particulier,

$$B_1\varphi = \alpha_1\varphi(a) + \beta_1\varphi'(a) = 0$$
$$B_1\psi = \alpha_1\psi(a) + \beta_1\psi'(a) = 0$$

d'où l'on conclut (puisque $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$) que

$$\det \begin{bmatrix} \varphi(a) & \varphi'(a) \\ \psi(a) & \psi'(a) \end{bmatrix} = W(\varphi, \psi)(a) = 0\,;$$

alors $W(\varphi, \psi)(x) \equiv 0$ (sect. 2.4) et φ, ψ sont linéairement dépendants. Ainsi chaque espace propre de $-L$ (ou L) est de dimension 1.

REMARQUES. En utilisant les autres affirmations de la proposition 5.4.1, on peut obtenir d'autres propriétés de K et donc de L. Il est également intéressant de considérer K défini par (7.58) comme un opérateur dans $L^2([a, b])$; alors K est un opérateur autoadjoint de Hilbert-Schmidt (§ 5.5.1) et selon le théorème de Hilbert-Schmidt (§ 5.5.3(2)), pour tout $f \in L^2([a, b])$, on a $Kf \in C([a, b])$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\langle f\,,\, \varphi_n\rangle\varphi_n(x) = -(Kf)(x)\,, \quad x \in [a, b]\,,$$

la série étant absolument uniformément convergente pour $x \in [a, b]$. Ceci permet de conclure que si $f \in \mathcal{D}_L$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f\,,\, \varphi_n\rangle\varphi_n(x) = f(x)\,, \quad x \in [a, b]\,,$$

la convergence de la série étant absolue et uniforme pour $x \in [a, b]$. En effet, on a, pour $f \in \mathcal{D}_L$,

$$-f(x) = -KLf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\langle Lf\,,\, \varphi_n\rangle\varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\langle f\,,\, L\varphi_n\rangle\varphi_n(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\langle f\,,\, \varphi_n\rangle\varphi_n(x)\,, \quad x \in [a, b]$$

ce qui donne le résultat indiqué pour tout $x \in [a, b]$.

Le théorème de Mercer (§ 5.5.4) permet de conclure que

$$k(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y)\,, \quad (x,y) \in [\,a\,,\,b\,] \times [\,a\,,\,b\,]$$

la série étant absolument uniformément convergente dans $[\,a\,,\,b\,] \times [\,a\,,\,b\,]$. Ceci justifie notre formule formelle (7.28) pour l'opérateur L avec domaine $\mathcal{D}_L$.

7.6.3 Problème général de Sturm–Liouville

Le problème général de Sturm–Liouville se présente comme suit : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec extrémités a, b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$; soit L un opérateur différentiel de la forme

$$Lf = (pf')' + qf \tag{7.64}$$

où p, q sont deux fonctions appropriées réelles définies dans I. On veut alors étudier les solutions λ, f de l'équation

$$Lf + \lambda f = 0 \quad \text{dans } I$$

sous des conditions aux limites variées concernant le comportement de f aux extrémités a et b ; parfois on étudie l'équation plus générale

$$Lf + \lambda\rho f = 0 \quad \text{dans } I \tag{7.65}$$

où $\rho : I \to \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée. Le cas *régulier* de ce problème concerne le cas où a, b sont finis (donc I est un intervalle compact), et q, ρ sont continues dans I, $p \in C^1(I)$ avec $\rho(x) \neq 0$, $p(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$; même dans ce cas, les conditions aux limites peuvent être plus générales que celles données dans (7.54) (qui s'appellent les *conditions séparées sur les extrémités*). Par exemple, la condition aux limites *périodiques*

$$f(a) = f(b)\,, \quad f'(a) = f'(b)$$

n'est pas contenue dans (7.54). Le théorème principal concernant le cas régulier avec les conditions séparées sur les extrémités (7.54) est exactement analogue à celui qui est démontré au paragraphe 7.6.2 : on a une suite de valeurs propres tendant vers ∞, ces fonctions propres formant une base orthogonale de $L^2(I)$. En fait, les raisonnements donnés au paragraphe 7.6.2 n'ont pas besoin de changements essentiels ; le cas traité au paragraphe 7.6.2 concerne $p \equiv 1$, $\rho \equiv 1$.

Par contre, le cas où I n'est pas compact (même avec p, q, ρ de classe C^∞) pose des problèmes essentiellement différents ; en terme de la théorie spectrale, l'opérateur L n'est plus en général à spectre discret même lorsque L est essentiellement autoadjoint sur son domaine $\mathcal{D}_L$ délimité par les conditions aux limites. C'est lorsque L est essentiellement autoadjoint dans son domaine $\mathcal{D}_L$ que l'analyse peut être faite assez complètement. Une étude détaillée de ce

problème (et de ses généralisations aux opérations différentiels d'ordre supérieur) est donnée dans les livres de Coddington et Levinson [2] et de Dunford–Schwartz, [7, vol. 2]. C'est une théorie importante qui est loin d'être achevée.

Il faut comprendre que toute la théorie autour du problème de Sturm-Liouville essaie d'imiter, dans la mesure du possible, les résultats élémentaires connus pour l'opérateur $Lf = f''$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ soumis aux différentes conditions aux limites. On a vu (§ 7.5.3) que les solutions λ, f de

$$f'' + \lambda f = 0 \quad \text{dans } [0, \pi], \; f(0) = f(\pi) = 0$$

sont données par

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad f(x) = f_n(x) = \sin nx, \qquad n = 1, 2, \ldots ;$$

on observe déjà ici que $\{\lambda_n\}$ est une suite croissante tendant vers ∞ et les $\{f_n\}$ forment une base orthogonale pour $L^2([0, \pi])$. Ce sont exactement les résultats que nous avons établis *pour tous les opérateurs réguliers de Sturm-Liouville* dans le paragraphe précédent. On peut même démontrer qu'en général (par exemple sous les hypothèses du paragraphe 7.6.2) $\lambda_n \sim n^2$ lorsque $n \to \infty$ si la longueur de l'intervalle concerné est π (autrement $\lambda_n \sim n^2\pi^2/\ell^2$ où ℓ est la longueur d'intervalle).

Les valeurs propres et les vecteurs propres de $Lf = f''$ pour d'autres conditions aux limites sont donnés dans les exercices 4, 5 et 6 (sect. 7.8).

7.6.4 Opérateur d'oscillateur harmonique linéaire

Il s'agit de l'opérateur

$$Lf = f'' - \alpha^2 x^2 f \tag{7.66}$$

où $\alpha > 0$, $-\infty < x < \infty$, f étant une fonction complexe de $x \in \mathbb{R}$; *Soit*

$$\mathcal{D}_L = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) : \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0, \; x^2 f, \; f', \; f'' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Alors L, de domaine $\mathcal{D}_L$, vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1 ; plus précisément, les valeurs propres de $-L$ sont $\lambda_n = (2n+1)\alpha$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, les fonctions propres correspondantes étant données par

$$\varphi_n(x) = \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) H_n(\sqrt{\alpha}\, x), \quad x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N} \tag{7.67}$$

où H_n est le n-ième polynôme de Hermite (§ 4.7.10).

DÉMONSTRATION

La linéarité de $L : \mathcal{D}_L \to L^2(\mathbb{R})$ est évidente ; pour la symétrie de L, il faut voir que si $f, g \in \mathcal{D}_L$, alors $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$ ce qui équivaut à avoir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g''(x)}\, dx, \quad f, g \in \mathcal{D}_L ;$$

ceci est immédiat à l'aide des calculs suivants en utilisant l'intégration par parties : si $f, g \in \mathcal{D}_L$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''\,\overline{g} = \underbrace{\lim_{T\to\infty} f'(x)\,\overline{g}(x)\Big|_{x=-T}^{T}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f'\,\overline{g'}$$

$$= \underbrace{-\lim_{T\to\infty} f(x)\,\overline{g'(x)}\Big|_{x=-T}^{T}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} f\,\overline{g''}\,.$$

Il faut maintenant déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}_L$ tels que

$$Lf + \lambda f = f'' + (\lambda - \alpha^2 x^2) f = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mais on sait que si $\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x)$, alors

$$\psi_n''(x) + \big((2n+1) - x^2\big)\psi_n(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

(Ex. 2.9, sect. 2.8) ce que l'on peut vérifier sans peine avec la définition (4.91) de H_n ; il s'ensuit que $\varphi_n(x) = \psi_n(\sqrt{\alpha}\,x)$ vérifie l'équation

$$\varphi_n''(x) + \big((2n+1)\alpha - \alpha^2 x^2\big)\varphi_n(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Puisque $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale pour $L^2(\mathbb{R})$, la suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est également une base orthogonale pour $L^2(\mathbb{R})$ (§ 4.7.11) ; ceci établit aussi qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, car une fonction propre correspondantes $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, doit être orthogonale à toutes les φ_n ce qui est impossible. ♦

REMARQUES. L'opérateur de l'oscillateur harmonique dans $\mathbb{R}^N$ est

$$Lf = \triangle f - \alpha^2 \|x\|^2 f$$

(le cas $N = 3$ étant spécialement important). Avec $\mathcal{D}_L$ approprié, on peut démontrer aisément, en utilisant ce qui précède, que L vérifie les hypothèses du paragraphe 7.4.1 (cf. Ex. 22, sect. 7.8).

Les opérateurs du type

$$Lf = \triangle f + Vf$$

(et leurs multiples kL, $k \in \mathbb{R}$) sont des exemples d'*opérateurs de Schrödinger* ; ils concernent l'étude des systèmes quantiques non relativistes. Ces opérateurs et leurs généralisations (qui tiennent compte du « champ magnétique ») jouent un rôle essentiel dans toute la mécanique quantique moderne. Leur théorie est résumée par les remarques suivantes : pour V, une fonction appropriée, L définit un opérateur autoadjoint (défini dans un domaine bien choisi) ; le spectre de $-L$

consiste en deux parties ; la partie $[a, \infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ correspond au spectre continu de $-L$; il existe, en plus, une suite de valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lambda_n \to a$ lorsque $n \to \infty$ et le spectre de $-L$ est égal à $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 0} \cup [a, \infty[$. (Il faut comprendre que ceci reflète le comportement d'un grand nombre d'opérateurs $L = \triangle + V$ sans être la situation universellement valable ; il existe également des opérateurs de Schrödinger ayant un spectre très différent.) Nous vérifierons au chapitre 8 une partie de ces affirmations pour le L correspondant à l'atome d'hydrogène non relativiste. Pour un L plus général, la vérification de ce qui est dit est une tâche considérable. Pour des résultats mathématiques précis, on consultera profitablement M. Reed et B. Simon (*Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. IV, Academic Press, London, 1978) ou J. Weidmann (*Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1980).

Dans l'exemple d'opérateur d'oscillateur harmonique traité ici, on voit que pour certaines fonctions V le spectre de $-L$ peut être purement discret, formé entièrement de valeurs propres (même simples s'il s'agit du cas linéaire).

7.6.5 Enumération de quelques autres exemples

Un très grand nombre d'opérateurs différentiels L donnés dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, possèdent les propriétés incorporées dans les deux hypothèses du paragraphe 7.4.1 qui sont brièvement décrites comme suit :

(i) il existe $\mathcal{D}_L \subset L^2(\Omega)$, $\mathcal{D}_L$ étant un sous-espace vectoriel, tel que $L : \mathcal{D}_L \mapsto L^2(\Omega)$ est symétrique ;

(ii) $L\varphi + \lambda\varphi = 0$ possède une suite dénombrable λ_n, φ_n, de solutions, $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, $\varphi_n \in \mathcal{D}_L$, $\varphi_n \not\equiv 0$, $\{\varphi_n\}$ formant une base orthogonale de $L^2(\Omega)$.

On peut résumer ces deux propriétés abstraitement en disant qu'avec un domaine approprié $\mathcal{D}_L \subset L^2(\mathbb{R})$, $(-L+c)^{-1}$ est un opérateur linéaire autoadjoint compact dans $L^2(\Omega)$, pour un c réel approprié ; par brièveté, nous dirons qu'un tel opérateur différentiel L est autoadjoint de *résolvante compacte*. Pour donner un exemple général précis, supposons que Ω est un domaine *borné* dans $\mathbb{R}^N$ et L est donné par

$$Lf = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} \mathrm{D}_i\{a_{ij}(x)\,\mathrm{D}_j f\} + a(x) f$$

où les fonctions a_{ij}, a sont des fonctions réelles de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$ telles que

$$\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^2, \quad x \in \overline{\Omega}$$

pour un $C > 0$ et pour tout choix de $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ (condition de stricte ellipticité). Si $\mathrm{Fr}\,\Omega$ est régulière de classe C^∞ (voir la définition de cette notion dans l'appendice 7.7.2), alors L est un opérateur autoadjoint de résolvante

compacte pour la condition au bord homogène de Dirichlet. Plus précisément, il existe une suite $\{\lambda_n\}$ de nombres réels et une suite de fonctions réelles $\{\varphi_n\}$ telles que

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \qquad \varphi_n \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \quad n \in \mathbb{N},$$
$$L\varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad \varphi_n = 0 \text{ sur } \operatorname{Fr}\Omega, \quad n \in \mathbb{N};$$

de plus, $\{\varphi_n\}$ forme une base orthogonale pour $L^2(\Omega)$.

La proposition citée peut être généralisée de diverses manières :

(i) on peut admettre les coefficients a_{ij}, a, plus généraux ;

(ii) on peut affaiblir les conditions sur $\operatorname{Fr}\Omega$;

(iii) on peut considérer d'autres conditions au bord ;

(iv) on peut considérer les opérateurs L d'ordre $2m$, $m \geqslant 1$.

On trouvera les références bibliographiques dans le paragraphe 7.9.1. Le lecteur notera l'analogie entre la proposition citée et la théorie de Sturm–Liouville discutée dans les paragraphes 7.6.2 et 7.6.3.

Il ne faut pas conclure que la plupart des opérateurs intéressants L vérifient les hypothèses du paragrapbe 7.4.1 ; comme indiqué ci-dessus, il s'agit là seulement des opérateurs essentiellement autoadjoints ayant un spectre discret dénombrable d'un certain type. Il y a énormément d'opérateurs différentiels (essentiellement) autoadjoints dont les spectres contiennent une partie continue ; on verra au chapitre 8 que c'est le cas pour $\triangle$ dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^N$ (avec la condition au bord de Dirichlet, par exemple). Pour ces opérateurs aussi, on peut développer des solutions formelles où les séries $\sum_n a_n\varphi_n$ sont remplacées par les intégrales « spectrales » appropriées. Nous ne pouvons pas discuter ces exemples ici.

7.7 APPENDICE

7.7.1 Préliminaires

L'étude des équations aux dérivées partielles exige des considérations diverses concernant la « régularité » des fonctions $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ définies dans l'adhérence d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ et la « régularité » des points $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. Ces considérations appartiennent à la théorie générale des fonctions de N variables réelles ; elles sont souvent subtiles (sauf lorsque $N = 1$). De plus, elles ne sont pas systématiquement traités dans les livres introductifs. Nous résumons ici quelques définitions et propositions à leur égard ; elles étaient déjà mentionnées dans ce chapitre et elles nous seront encore utiles dans le chapitre suivant.

7.7.2 Régularité de $\operatorname{Fr}\Omega$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Si $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, nous dirons que $\operatorname{Fr}\Omega$ est *régulière* au point a si la condition suivante est vérifiée : il existe un voisinage ouvert U de a et une fonction $\theta : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tels que $\operatorname{grad}\theta(x) \neq 0$, $x \in U$ et

$$U \cap \operatorname{Fr}\Omega = \{x \in U : \theta(x) = 0\}, \quad U \cap \Omega = \{x \in U : \theta(x) < 0\},$$
$$U \cap \operatorname{ext}\Omega = \{x \in U : \theta(x) > 0\}$$

où $\operatorname{ext}\Omega = (\overline{\Omega})^c$. Nous dirons que $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ est un point *régulier de classe* C^k pour $\operatorname{Fr}\Omega$ si la fonction θ ci-dessus peut être choisie de classe C^k ; nous dirons que $\operatorname{Fr}\Omega$ (ou Ω) est *régulière* (*de classe* C^k) si tout point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ est régulier (de classe C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, k entier ou ∞).

Cette notion a été introduite dans le volume 1 (§ 7.4.2 et 7.4.3), pour la discussion du théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^N$; on avait défini $\partial\Omega$ comme l'ensemble formé par les points réguliers de $\operatorname{Fr}\Omega$. Ainsi, selon notre présente définition, $\operatorname{Fr}\Omega = \partial\Omega$ si et seulement si $\operatorname{Fr}\Omega$ est régulière.

Rappelons que l'idée géométrique sous-jacente à la définition de la régularité d'un point a de $\operatorname{Fr}\Omega$ contient deux aspects :

(i) dans un voisinage ouvert U de a, $U \cap \operatorname{Fr}\Omega$ est une hypersurface (de classe C^1 au moins) ;

(ii) dans U, Ω est « d'un côté » de $\operatorname{Fr}\Omega$ et $\operatorname{ext}\Omega$ est « de l'autre côté » de $\operatorname{Fr}\Omega$.

Ceci permet la définition de $\nu(a)$, la *normale unitaire dirigée vers l'extérieur de* Ω, lorsque a est un point régulier de $\operatorname{Fr}\Omega$; on a

$$\nu(a) = \frac{\nabla\theta(a)}{\|\nabla\theta(a)\|}$$

où θ est la fonction définissant la régularité du point a. On a vu (vol. 1, § 7.4.3) que, pour $\varepsilon > 0$ approprié,

$$a + t\nu(a) \in \operatorname{Ext}\Omega, \quad 0 < t < \varepsilon.$$

Rappelons que, si Ω est un domaine borné avec $\operatorname{Fr}\Omega$ régulière, alors le théorème de la divergence est valable dans la forme

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\operatorname{Fr}\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma \tag{7.68}$$

où σ est la mesure naturelle de l'hypersurface compacte $\operatorname{Fr}\Omega$ et $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$; c'est un cas particulier de la proposition 7.4.6 (vol. 1). La proposition complète dit que (7.68) est vérifiée avec $\operatorname{Fr}\Omega$ remplacée par $\partial\Omega$ sous des conditions appropriées sur $\operatorname{Fr}\Omega \setminus \partial\Omega$, ces conditions étant automatiquement remplies si $\operatorname{Fr}\Omega = \partial\Omega$, ce qui est exactement le cas lorsque $\operatorname{Fr}\Omega$ est régulière.

Une boule ouverte est un domaine borné dont la frontière est régulière ; il est facile d'imaginer d'autres domaines ayant des frontières régulières. Un exemple simple d'un domaine Ω tel que $\mathrm{Fr}\,\Omega$ n'est pas régulier est fourni par Ω un pavé ouvert borné :

$$\Omega = \prod_{j=1}^{N}]\, a_j\,,\, b_j\,[\,, \quad -\infty < a_j < b_j < \infty\,,\ 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

Pour $N = 2$, Ω est un rectangle ouvert et $\mathrm{Fr}\,\Omega$ contient quatre points non réguliers (qui sont les quatre points extrémaux de l'ensemble convexe Ω). Pour $N = 3$, Ω est un parallélépipède rectangle ouvert et $\mathrm{Fr}\,\Omega$ contient douze segments (les arêtes de Ω) contenant les points non réguliers de $\mathrm{Fr}\,\Omega$. Rappelons que le théorème de la divergence (7.68) est valable pour un tel pavé Ω en remplaçant $\mathrm{Fr}\,\Omega$ par $\partial\Omega$.

La définition de la régularité d'un point $a \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ peut être généralisée facilement au cas où Ω est un ensemble quelconque ; nous aurons besoin de cette notion seulement lorsque Ω est un domaine.

Lorsque $N = 1$, la discussion précédente est superflue. Dans $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}$ est simplement un intervalle ouvert et $\mathrm{Fr}\,\Omega$ est formée des extrémités de cet intervalle ; ainsi, $\mathrm{Fr}\,\Omega = \emptyset$ si $\Omega = \mathbb{R}$, sinon $\mathrm{Fr}\,\Omega$ est formé d'un ou de deux points. Par définition, $\mathrm{Fr}\,\Omega$ est considérée comme régulière pour tout domaine $\Omega \subset \mathbb{R}$.

REMARQUE. Le mot « régulier » a tendance à être utilisé un peu trop souvent ; il faut donc faire attention aux différents usages de cet adjectif dans des contextes différents. Dans la suite, par exemple, on parlera de la « régularité » d'un point $a \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ par rapport au problème de Dirichlet ; cet usage multiple est accepté assez généralement.

7.7.3 Sur la définition de $C^k(\overline{\Omega})$

Soit $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, A non vide ; nous avons adopté la convention que f est de classe C^k dans A ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) s'il existe un voisinage ouvert V de A et une fonction $\widetilde{f} \in C^k(V)$ tels que $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $x \in A$. Lorsque $A = \overline{\Omega}$, Ω étant une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^N$, une autre définition est souvent utilisée. Disons que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k *au sens général* dans $\overline{\Omega}$, si f est de classe C^k dans Ω et si f et les dérivées $\mathrm{D}^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant k$, sont prolongeables à $\mathrm{Fr}\,\Omega$ continûment ; ceci veut dire qu'il existe des fonctions $g_\alpha \in C(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \leqslant k$, telles que $g_\alpha(x) = \mathrm{D}^\alpha f(x)$ pour $x \in \Omega$ (avec $g_0(x) = \mathrm{D}^0 f(x) = f(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^N$). Il est évident que si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k dans notre sens, alors f est de classe C^k au sens général dans $\overline{\Omega}$. La question que nous voulons clarifier est dans quelle condition la réciproque est valable. Il existe des domaines bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pour lesquels la réciproque n'est pas toujours valable.

Nous dirons que Ω possède la propriété W (W pour Whitney) si pour tout point $a \in \overline{\Omega}$ il existe deux nombres $r > 0$, $C > 0$ (dépendants de a), tels

que deux points quelconques x, y de $\Omega \cap B(a\,;r)$ peuvent être reliés par un chemin γ dans $\Omega \cap B(a\,;r)$ tel que

$$\text{longueur de } \gamma \leqslant C\|x-y\|\,.$$

Il est évident géométriquement que la plupart des ensembles ouverts Ω possèdent la propriété W. *Le théorème de Whitney dit que si Ω possède la propriété* W, *alors toute fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^k au sens général est de classe C^k dans notre sens.*

Whitney a donné une définition générale (que nous ne donnerons pas ici) pour la notion d'appartenance d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ à la classe C^k (où $A \subset \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$) ; un de ses théorèmes importants est le suivant : *si A est fermé et $f : A \to \mathbb{R}$ est de classe C^k au sens de Whitney, alors il existe $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $x \in A$, avec $\widetilde{f}$ de classe C^k dans $\mathbb{R}^N$ (au sens usuel) et $\widetilde{f}$ de classe C^∞ dans A^c (au sens usuel).*

Une conséquence de ce théorème de Whitney est la possibilité du prolongement suivant : si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, A étant une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^N$, alors il existe un prolongement $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de f (ce qui veut dire que $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $x \in A$) tel que $\widetilde{f}$ est continue partout avec $\widetilde{f}$ de classe C^∞ dans A^c.

Une autre conséquence est celle-ci : si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k au sens général, Ω étant une partie ouverte non vide ayant la propriété W, alors f possède un prolongement $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{f}$ est de classe C^k partout avec $\widetilde{f}$ de classe C^∞ dans $\left(\overline{\Omega}\right)^c$ (au sens usuel).

Notons que si $\Omega = \,]\,a\,,\,b\,[\, \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, alors l'appartenance de $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ à une classe C^k est équivalente à avoir f de classe C^k dans Ω avec $f^{(j)}$ prolongeable continûment à $\overline{\Omega}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$. Dans ce cas, les notions d'appartenance à la classe C^k au sens général et dans notre sens coïncident.

On peut consulter les travaux de Whitney (*Collected Papers*, vol. 1, Birkhäuser, Boston, 1992, en particulier les articles [18] et [22], publiés en 1934). Il y a peu de livres introductifs qui donnent un exposé complet des théorèmes de Whitney ; ces théorèmes sont encore plus précis que ceux que nous avons donnés ici. Il faut remarquer que Whitney a également démontré d'autres théorèmes qui généralisent le théorème d'approximation polynomial de Weierstrass. Une monographie avancée qui traite un certain nombre de ces questions (et bien d'autres sujets) est celle de E. M. Stein (*Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970).

7.8 EXERCICES

1 Déterminer les solutions de la forme $u(x,y) = a(x)b(y)$ ou $a(x) + b(y)$ pour l'équation

$$u''_{xx} - u'_x + u''_{yy} = 0\,.$$

2 Résoudre l'équation

$$u'_x - u'_y + u = 1$$

sous la condition $u(x,0) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$:

(i) en utilisant une transformation appropriée des variables x, y ;
(ii) par la méthode des courbes caractéristiques.

3 Résoudre l'équation

$$u'_x + u'_y = u^2$$

sous la condition $u(x,0) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, h étant une fonction appropriée donnée.

4 Vérifier que les valeurs propres et les fonctions propres associées à l'équation $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ dans $[\,0\,,\,\ell\,]$ sous les conditions aux limites homogènes (CL) indiquées sont les suivantes :

(i) (CL) : $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\ell) = 0$;

$$\lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2\,, \quad \varphi_n(x) = \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big)\,, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots$$

(ii) (CL) : $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(\ell) = 0$;

$$\lambda_n = \Big\{\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi}{\ell}\Big\}^2\,, \quad \varphi_n(x) = \sin\Big\{\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi x}{\ell}\Big\}\,, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots$$

(iii) (CL) : $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(\ell) = 0$;

$$\lambda_n = \Big\{\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi}{\ell}\Big\}^2\,, \quad \varphi_n(x) = \cos\Big\{\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi x}{\ell}\Big\}\,, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots$$

(vi) (CL) : $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(\ell) = 0$;

$$\lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2\,, \quad \varphi_n(x) = \cos\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big)\,, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

5 Vérifier que les valeurs propres et les fonctions propres associées à l'équation $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ dans $[\,0\,,\,\ell\,]$ sous la condition aux limites homogène

$$\varphi(0) = 0\,, \quad \varphi'(\ell) + h\varphi(\ell) = 0$$

sont déterminées comme suit : $\lambda = \lambda_n > 0$ sont des solutions de l'équation

$$\mathrm{tg}(\lambda^{1/2}\ell) = -\frac{\lambda^{1/2}}{h} \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \sin(\lambda_n^{1/2}x)\,, \quad n = 1,\,2,\,\ldots$$

En rangeant $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, démontrer que

$$\left\{(n-1)+\frac{\pi}{2}\right\}^2 \ell^2 < \lambda_n < \left(n+\frac{\pi}{2}\right)^2 \ell^2\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vérifier directement que

$$\int_0^\ell \sin(\lambda_m^{1/2} x)\sin(\lambda_n^{1/2} x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \text{si } m \neq n\,.$$

6 Les solutions λ, $\varphi \not\equiv 0$ de l'équation $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ dans $[0, \ell]$ sous la condition aux limites homogène (périodique) $\varphi(0) = \varphi(\ell)$, $\varphi'(0) = \varphi'(\ell)$ sont les suivantes :

$$\lambda_0 = 0\,, \quad \varphi_0(x) = a_0\,, \quad \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2$$

$$\varphi_n(x) = a_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + b_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

où les a_n, b_n sont des constantes réelles arbitraires, $a_0 \neq 0$, $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, $n \geqslant 1$. (Noter que les valeurs propres $\lambda_n > 0$ sont les valeurs propres doubles, contrairement aux cas où la condition aux limites homogène est séparée comme dans le paragraphe 7.6.2.)

7 Démontrer que la solution $u = u(x)$, $x \in [0, \ell]$, $u'' = f$ avec $u(0) = u(\ell) = 0$ est

$$u(x) = \int_0^\ell G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

où

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x-\ell)}{\ell} & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell \\ \dfrac{x(y-\ell)}{\ell} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell \end{cases}$$

et $f \in C\big([0, \ell]\big)$.

8 (Continuation de l'exercice 7) Etablir directement que

$$G(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}\,, \quad 0 \leqslant x\,,\ y \leqslant \ell$$

où $\lambda_n = \big(n\pi/\ell\big)^2$, $\varphi_n(x) = \big(2/\ell\big)^{1/2} \sin\big(n\pi x/\ell\big)$, $n > 1$. (Utiliser la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{n\pi t}{\ell} = \pi^2\left(\frac{1}{6} - \frac{|t|}{2\ell} + \frac{t^2}{4\ell^2}\right), \quad |t| \leqslant \ell$$

qui s'obtient de (4.38).)

9 Démontrer que les solutions $u = u(x)$, $x \in [0, \ell]$, de $u'' = f$ avec $u'(0) = u'(\ell) = 0$ sont

$$u(x) = a + \int_0^\ell G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

où

$$G(x,y) = \begin{cases} -y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell \\ -x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell, \end{cases}$$

et a est une constante réelle arbitraire, f étant dans $C([0,\ell])$ telle que $\int_0^\ell f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

10 (Continuation de l'exercice 9) Etablir directement que

$$G(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}, \quad 0 \leqslant x,\ y \leqslant \ell$$

où $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$, $\varphi_n(x) = (2/\ell)^{1/2}\cos(n\pi x/\ell)$, $n \geqslant 1$.

11 Résoudre l'équation $u'_t = k u''_{xx}$, $0 < x < \ell$, $t > 0$ $(k > 0)$, sous la condition initiale $u(0,x) = f(x)$, $0 < x < \ell$, $f \in C([0,\ell])$, et les conditions aux limites homogènes suivantes :

$$\begin{aligned} &a\,u(t,0) + b\,u'_x(t,0) = 0 \\ &c\,u(t,\ell) + d\,u'_x(t,L) = 0, \end{aligned} \qquad t > 0$$

où

(i) $(a,b) = (1,0)$, $(c,d) = (1,0)$;
(ii) $(a,b) = (1,0)$, $(c,d) = (0,1)$;
(iii) $(a,b) = (0,1)$, $(c,d) = (1,0)$;
(iv) $(a,b) = (0,1)$, $(c,d) = (0,1)$.

12 Résoudre l'équation $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$, $0 < x < \ell$, $t > 0$ $(c > 0)$, sous la condition aux limites $u(t,0) = u(t,\ell) = 0$, $t > 0$, et sous la condition initiale $u(0,x) = f(x)$, $u'_t(0,x) = 0$, $0 < x < \ell$, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{h(\ell - x)}{\ell - a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

(h étant une constante réelle).

13 Résoudre l'équation

$$u'_t = ku''_{xx} + Q\,, \quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0$$

(où $k > 0$, Q réel sont des constantes) sous la condition initiale $u(0,x) = 0$, $0 < x < \ell$ et la condition aux limites $u(t,0) = a$, $u(t,\ell) = b$, $t > 0$ (a, b étant des constantes réelles). Calculer $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = v(x)$ et vérifier que v satisfait à l'équation $kv''(x) + Q = 0$, $0 < x < \ell$, avec $v(0) = a$, $v(\ell) = b$.

14 Soit $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a\,,\ 0 < y < b\}$. Démontrer que les valeurs propres λ et les fonctions propres φ pour $\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0$ dans Ω, $\varphi = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, sont données comme suit :

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2\,, \quad m,\, n = 1,\, 2,\, \ldots$$

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,.$$

(Poser $\varphi(x,y) = f(x)\,g(y)$; on aura $f''(x) + \mu f(x) = 0$, $0 < x < a$, $f(0) = f(a) = 0$, $g''(y) + \nu g(y) = 0$, $0 < y < b$, $g(0) = g(b) = 0$ avec $\lambda = \mu + \nu$. Puisque $\{\varphi_{m,n}\}$ est un système orthogonal complet dans $L^2(\Omega)$, la liste des λ, φ donnée est exhaustive.)

15 (Continuation de l'exercice 14) Obtenir la solution de l'équation (de la membrane rectangulaire vibrante)

$$u''_{tt} = c^2\,\triangle u\,, \quad (x,y) \in \Omega\,,\ t > 0\,,$$

sous la condition initiale

$$u(0,x,y) = F(x,y)\,, \quad u'_t(0,x,y) = G(x,y)\,, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}$$

et la condition de Dirichlet homogène $u(0,x,y) = 0$, $(x,y) \in \operatorname{Fr}\Omega$.

16 Résoudre l'équation

$$u'_t = ku''_{xx}\,, \quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0$$

sous la condition initiale $u(0,x) = x$, $0 < x < \ell$, et la condition aux limites $u(t,0) = 0$, $u(t,\ell) = T$, $t > 0$ (T, $k > 0$ étant des constantes réelles). (Poser $v(t,x) = u(t,x) - (T/\ell)x$; v vérifie $v'_t = kv'_{xx}$ avec $v(0,x) = -(T/\ell)x$, $v(t,0) = v(t,\ell) = 0$ d'où on obtient v ce qui donne

$$u(t,x) = \frac{T}{\ell}\,x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T}{n\pi}\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-k\lambda_n t}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

avec $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$.)

17 Soit $F(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, tel qu'il existe $v(t,x;s)$, s, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, ayant les propriétés suivantes :

(i) $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue ;
(ii) pour chaque $s \in \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto v(t,x;s)$ est de classe C^2 ;
(iii) on a

$$v''_{tt}(t,x;s) = a^2 \triangle v(t,x;s)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}^N$$
$$v(0,x;s) = 0\,, \quad v'_t(0,x;s) = F(s,x)\,,\ x \in \mathbb{R}^N$$

où $a > 0$ est une constante réelle.

Vérifier que $u(t,x) = \int_0^t v(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ satisfait à l'équation suivante :

$$u''_{tt}(t,x) = a^2 \triangle u(t,x) + F(t,x)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}^N$$

avec $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. (En utilisant la formule élémentaire :

$$g(t) = \int_0^t h(t,s)\,\mathrm{d}s\,, \quad g'(t) = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(t,s)\,\mathrm{d}s + h(t,t)\,,$$

on obtient

$$u'_t(t,x) = \int_0^t v'_t(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s \quad (\text{car } v(0,x;t) = 0)$$
$$u''_{tt}(t,x) = \int_0^t v''_{tt}(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s + F(t,x)$$
$$= \int_0^t a^2 \triangle v(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s + F(t,x) = a^2 \triangle u(t,x) + F(t,x)\,;$$

les conditions $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = 0$ sont évidemment vérifiées. Ce procédé pour obtenir $u(t,x)$, solution d'une équation non homogène, en partant de $v(t,x;s)$, solution d'une équation homogène mais sous une condition initiale non homogène, s'appelle le *principe de Duhamel*. Il est applicable assez généralement.)

18 (Continuation de l'exercice 17) En utilisant le principe de Duhamel, démontrer que

$$u(t,x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-at}^{x+at} F(s,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}$$

est une solution de

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + F(t,x)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}$$

avec $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, en supposant que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

19 Formuler une version précise pour le principe de Duhamel pour l'équation de la chaleur, sous la forme suivante : si

$$v'_t(t,x;s) = k\triangle v(t,x;s)\,, \quad t>0\,,\ x\in\mathbb{R}^N$$

avec $v(0,x;s) = F(s,x)$, $s>0$, $x\in\mathbb{R}^N$, alors

$$u(t,x) = \int_0^t v(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s$$

est une solution de

$$u'_t = k\,\triangle u + F(t,x)\,, \quad t>0\,,\ x\in\mathbb{R}^N$$

avec $u(0,x) = 0$, , $x\in\mathbb{R}^N$.

20 (Continuation de l'exercice 18) Ecrire une solution de l'équation

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + F(t,x)\,, \quad t\in\mathbb{R}\,,\ x\in\mathbb{R}$$

avec $u(0,x) = \alpha(x)$, $u'_t(0,x) = \beta(x)$, $x\in\mathbb{R}$, en supposant que

$$F\in C^1(\mathbb{R}^2)\,, \quad \alpha\in C^2(\mathbb{R})\,, \quad \beta\in C^1(\mathbb{R})\,.$$

(On a $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$ où u_1 est donnée par (7.12) et u_2 est donnée par l'exercice 18.)

21 L'équation du *télégraphiste* est

$$u''_{tt} + 2bu'_t + cu = a^2 u''_{xx}\,, \quad t>0\,,\ x\in\mathbb{R}$$

où $a>0$, b, c sont des constantes réelles avec $b^2 - c \geqslant 0$. Démontrer que u est une solution de l'équation du télégraphiste si et seulement si $v(t,x) = \mathrm{e}^{bt}u(t,x)$ donne une solution de l'équation $v''_{tt} - a^2 v''_{xx} - (b^2-c)v = 0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

22 Soient $x = (x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, $\alpha>0$; démontrer que les valeurs propres λ et les fonctions propres φ pour

$$\triangle\varphi + \left(\lambda - \alpha^2\|x\|^2\right)\varphi = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

sont les suivantes :

$$\lambda_n = \left(2\sum_{j=1}^N n_j + N\right)\alpha\,, \quad n = (n_1,\ldots,n_N)\in\mathbb{N}^N$$

$$\varphi_n(x) = \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{\alpha x_j^2}{2}\right) H_{n_j}\left(\sqrt{\alpha}\,x_j\right), \quad x\in\mathbb{R}^N$$

où les H_{n_j} sont les polynômes de Hermites (§ 7.6.4). (Si $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$, $\varphi(x) = \prod_{j=1}^{N} \psi_j(x_j)$, vérifier alors que

$$\triangle\varphi + \left(\lambda^2 - \alpha\|x\|^2\right)\varphi = 0 \quad \text{si } \psi_j''(x_j) + (\lambda_j - \alpha^2 x_j^2)\psi_j(x_j) = 0\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant N\,;$$

utiliser ensuite le résultat du paragraphe 7.6.4. Puisque $\{\varphi_n\}$, $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{N}^N$, forment une base orthogonale pour $L^2(\mathbb{R}^N)$, on conclut que les λ_n, φ_n donnés forment une liste exhaustive.)

7.9 COMPLÉMENTS

7.9.1 Remarques historiques

Les équations aux dérivées partielles apparaissent, approximativement, à partir de 1740, d'abord en relation avec les problèmes de mécanique et ensuite pour l'étude de divers problèmes de géométrie, précurseurs de la géométrie différentielle moderne. L'équation $\triangle u = 0$ (dans $\mathbb{R}^3$), l'équation des ondes $u_{tt}'' = c^2 \triangle u$ (dans $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$) et d'autres équations plus compliquées apparaissent entre 1740 et 1760 en premier lieu en relation avec les problèmes de mécanique, de mécanique céleste et d'hydrodynamique ; ainsi, l'équation des ondes est utilisée pour l'étude de la corde vibrante (dans $\mathbb{R}^1$) pour l'étude des vibrations des membranes (dans $\mathbb{R}^2$) et pour l'étude de la propagation du son (dans $\mathbb{R}^3$). La période de 1740 à 1750 est marquée dans ce domaine par les travaux de d'Alembert, de Daniel Bernoulli et d'Euler (et, dans la moindre mesure, de Clairaut et de Maupertuis ; ce dernier dirigea une expédition en Laponie en 1736-1737 pour mesurer un arc méridien, Clairaut faisant partie de cette expédition). D'Alembert publia, en deux volumes, un *Traité de dynamique* (1743-1744) et plusieurs mémoires importants sur la mécanique céleste et sur la mécanique des fluides durant les années 1740-1750 ; sa solution générale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$ (solution (7.10) de l'équation (7.9)) fut publiée en 1747 et, dans un de ses mémoires (*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, publié en 1752), on y rencontre les équations dites « de Cauchy–Riemann ». A partir de 1750, d'Alembert fut l'éditeur scientifique de l'*Encyclopédie* (dont le premier tome paraît en 1751) ; après 1750, même s'il continua à publier des ouvrages mathématiques ce n'est plus son activité principale. Les échanges épistolaires entre Euler, Clairaut, d'Alembert et Lagrange forment le volume V de la série IVA des *Opera Omnia* d'Euler (publié en 1980 par Birkhäuser à Bâle et édité par A. P. Jushkevitch et R. Taton ; notre présent récit est en partie basé sur l'article de Taton donné dans un volume spécial dédié à Euler *Zum Werk Leonhard Eulers*, Birkhäuser, 1984) ; grâce à cet échange, on s'aperçoit de la vive influence que ces mathématiciens ont mutuellement exercée sur leurs travaux individuels et comment cette « correspondance

passionante » s'est transformée en « une série d'épuisantes et déplaisantes querelles de priorité ou de méthodes » (Taton) entre, d'un côté, d'Alembert et de l'autre Euler. Nous ne pouvons pas décrire cette polémique sauf pour ajouter que celle-ci concernait autant des questions scientifiques que des susceptibilités et des faiblesses humaines.

Quoi qu'il en soit, Euler a continué, par la suite, à formuler un nombre impressionnant d'équations aux dérivées partielles ; ainsi, l'équation dite « de Laplace » ($\triangle u = 0$) apparaît dans son article « Principia motus fluidorum » durant les années 1756-1757 (*Opera Omnia*, série 2, vol. 12) et les célèbres équations d'Euler régissant le mouvement des fluides parfaits (*Opera Omnia*, série 2, vols 12 et 13) sont publiées durant les années 1755-1759. En 1744, Euler publie son livre sur le calcul des variations « Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti », soit en français : « Méthodes pour trouver les courbes rendant maximum ou minimum certaines propriétés ou la solution des problèmes isopérimétriques pris dans un sens général » (*Opera Omnia*, série 1, vol. 24). Il contient les équations dites « d'Euler–Lagrange » qui joueront un rôle fondamental dans le calcul des variations (§ 7.9.2).

A partir de 1760, ce sont les travaux de Lagrange qui contribuèrent de manière importante aux équations aux dérivées partielles. Contrairement à d'Alembert (1717-1783), Lagrange maintint une correspondance harmonieuse avec Euler durant presque deux décennies ; cette correspondance fut marquée d'une estime mutuelle entre ces deux savants appartenant à deux générations différentes, Euler (1707-1783) étant âgé de presque trente ans de plus que Lagrange (1736-1813).

Nous ne pouvons pas présenter ici un récit systématique sur les développements dans la théorie des équations aux dérivées partielles résultant des travaux d'Euler et de Lagrange. Nous nous limitons à mentionner quelques noms importants ; les premiers parmi eux, dans cette fin du XVIII^{e} siècle, sont Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855) et Poisson (1781-1840), même si leurs travaux (surtout ceux de Gauss et de Poisson) sur le sujet qui nous concerne se placent dans le contexte de l'évolution spectaculaire de la physique mathématique de la première moitié du XIX^{e} siècle associée aux noms illustres tels que Legendre (1752-1833), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857) et bien d'autres.

Notons aussi que l'équation de la chaleur ($u'_t = k \triangle u$) n'apparaît que très épisodiquement dans les travaux durant le XVIII^{e} siècle ; c'est avec Fourier (à partir de 1807) que les solutions de cette équation donnent lieu aux développements remarquables des séries et des intégrales dites « de Fourier » (exposés dans les chapitres précédents). Ajoutons que Daniel Bernoulli avait déjà remarqué en 1753 que les solutions de l'équation des cordes vibrantes ($u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$) pouvaient être obtenues par des superpositions des fonctions sinusoïdales ; il pourrait être considéré comme le précurseur de la théorie des séries de Fourier ; cette observation de Daniel Bernoulli avait induit une vive controverse entre ce dernier et d'Alembert et Euler. Les travaux de Sturm (1803-1855) et de Liouville (1809-1882) furent inspirés directement de ceux de Fourier et, à leur

tour, pourraient être considérés comme des prédécesseurs directs de la théorie spectrale des opérateurs dévelopée au XX^{e} siècle.

Une caractéristique des travaux du XIX^{e} siècle dans le domaine des équations aux dérivées partielles est celle de leur effort systématique d'établir les formules explicites donnant des solutions aux équations léguées par la génération précédente. Ainsi, on a diverses formules dues à Cauchy, Gauss, Green, Poisson, Laplace (et à Riemann, Schwarz et bien d'autres, plus tards) résolvant les trois types d'équations fondamentales du second ordre sous différentes conditions. Il ne s'agit pas souvent des théorèmes d'existence et d'unicité au sens moderne, même si Cauchy démontra le premier (en 1842) un théorème général à ce sujet connu aujourd'hui sous les noms de Cauchy–Kowalesky. A partir de 1870, les travaux de Schwarz, de Carl Neumann et de Poincaré (entre autres) arrivèrent à donner des théorèmes d'existence et d'unicité à l'équation de Laplace–Poisson sous différentes conditions aux limites. Ensuite, les théories des équations intégrales et de l'analyse fonctionnelle (due à Fredholm, Hilbert, Schmidt et autres, comme expliqué aux chapitres 3, 4 et 5) ont généralisé et raffiné ces théorèmes d'existence et d'unicité. Nous ne pouvons pas décrire les développements immenses de la théorie des équations aux dérivées partielles depuis 1900 et surtout depuis 1950. Une caractéristique marquante des développements du XX^{e} siècle est l'effort d'établir les algorithmes numériques efficaces pour calculer numériquement les solutions des équations concernées ; évidemment, l'introduction des ordinateurs de plus en plus puissants explique le succès considérable de ces méthodes numériques. Pour la première fois, les considérations, autrefois toutes théoriques, peuvent être traduites en méthodes numériques prêtes pour des applications concrètes. Nous ne pouvons, malheureusement, rien dire de précis sur ces procédés numériques qui forment aujourd'hui une partie importante d'un cours d'analyse numérique, obligatoire pour la plupart des ingénieurs et des scientifiques modernes.

7.9.2 Calcul des variations

Un problème simple mais typique de cette théorie est le suivant : à déterminer les extremums (maximums ou minimuns) de la fonctionnelle intégrale suivante :

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x\ ;$$

ici, $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue de la variable $x \in [a, b]$ avec $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ fixés, et f est une fonction de trois variables réelles donnée par le problème. Par simplicité, nous supposons que f est de classe C^2 et que la fonction cherchée y est également de classe C^2. Si y est un extremum, alors $\varepsilon \mapsto J(y + \varepsilon z)$, ε réel, aura un extremum pour $\varepsilon = 0$ pour tout choix de $z : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $z(a) = 0$, $z(b) = 0$; donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(y + \varepsilon z)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

ce qui donne

$$\int_a^b \{f'_y z + f'_{y'} z'\}\,\mathrm{d}x = 0$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} f(x,\, y+\varepsilon z,\, y'+\varepsilon z')\Big|_{\varepsilon=0} = f'_y(x,y,y')z + f'_{y'}(x,y,y')z'$$

(où $f'_y = \partial f\big(x,y(x),y'(x)\big)/\partial\xi$, $f'_{y'} = \partial f\big(x,y(x),y'(x)\big)/\partial\eta$, en écrivant $f = f(x,\xi,\eta)$). Puisqu'une intégration par parties donne

$$\int_a^b f'_{y'} z'\,\mathrm{d}x = z f'_{y'}\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b z\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'_{y'}\right\}\mathrm{d}x\,,$$

on aura, en tenant compte que $z(a) = 0$, $z(b) = 0$, l'équation

$$\int_a^b \left\{f'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'_{y'}\right\} z\,\mathrm{d}x = 0$$

valable pour toute fonction $z \in C^2\big([\,a\,,\,b\,]\big)$, avec $z(a) = z(b) = 0$. On en déduit immédiatement que *si y est un extremum du problème, alors*

$$f'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'_{y'} = 0\,, \quad a \leqslant x \leqslant b\,;$$

la validité de cette dernière équation (appelée l'*équation d'Euler–Lagrange*) est une condition nécessaire pour que la fonction y soit un extremum (on dira que y est une fonction *extrémale*). L'équation d'Euler–Lagrange joue un rôle central dans le calcul des variations.

Un exemple simple illustre le procédé : soit

$$f(x,y,y') = \big(1+y'^{\,2}\big)^{1/2}$$

avec $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Alors

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1+y'^{\,2}}\,\mathrm{d}x$$

représente la longueur du chemin donné par $x \mapsto y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, reliant $(0,0)$ à $(1,1)$. Ici,

$$f'_y = 0\,, \quad f'_{y'} = y'\big(1+y'^{\,2}\big)^{-1/2}\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'_{y'} = \frac{y''}{\big(1+y'^{\,2}\big)^{3/2}}$$

de sorte que l'équation d'Euler–Lagrange donne

$$y'' = 0\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,;$$

avec $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, on en tire $y(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. On conclut que le chemin rectiligne reliant $(0,0)$ à $(1,1)$ est le seul chemin extrémal (correspondant à l'unique fonction extrémale de notre problème).

En prenant

$$f(x, y, y') = \varphi(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$$

dans la définition de $J(y)$, on obtient plusieurs problèmes classiques de la détermination d'une fonction optimale ; en interprétant $1/\varphi(x, y)$ comme la vitesse de la lumière au point (x, y) du milieu, la fonctionnelle J représente le temps du parcours de la lumière de (a, α) à (b, β) et le problème de la minimisation de $J(y)$ est l'interprétation analytique d'un principe de Fermat. Avec d'autres choix de $\varphi(x, y)$, on a le problème isopérimétrique dans le plan ou celui de la détermination d'une surface minimale de révolution ; un autre choix donne le problème de *brachistochrone* que nous traitons dans le paragraphe suivant à cause de son intérêt historique (se reporter pour tous les exemples mentionnés à l'ouvrage de R. Courant et D. Hilbert [3, vol. 1].

L'équation $f'_y = (\mathrm{d}/\mathrm{d}x) f'_{y'}$ est en fait une équation aux dérivées partielles du second ordre car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'_{y'} = f''_{xy'} + f''_{yy'} y' + f''_{y'y'} y'' .$$

Ainsi, l'équation d'Euler–Lagrange est une équation aux dérivées partielles dont les solutions sont les seules extrémales possibles pour la fonctionnelle $J(y)$; cette observation permet de trouver les propriétés des solutions de l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation d'Euler–Lagrange. Nous illustrons cette remarque en considérant un exemple important ; notons auparavant que le procédé indiqué pour une fonctionnelle $J(y)$ définie par une intégrale simple se généralise sans difficulté aux fonctinnelles définies par les intégrales plus générales (multiples, par exemple).

Considérons

$$J(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}x$$

où Ω est un domaine borné avec $\mathrm{Fr}\,\Omega$ régulière dans $\mathbb{R}^N$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u = u(x)$, est une fonction réelle telle que $u = \alpha$ sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$. Si u est une fonction extrémale pour J, alors $\varepsilon \mapsto J(u + \varepsilon v)$, ε réel, aura un extremum pour $\varepsilon = 0$ où v est une fonction arbitraire telle que $v = 0$ sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$ avec $v \in C^2(\overline{\Omega})$. Puisque

$$J(u + \varepsilon v) = \int_\Omega \|\nabla u + \varepsilon \nabla v\|^2 \, \mathrm{d}x = J(u) + \varepsilon^2 J(v) + 2\varepsilon \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v\} \, \mathrm{d}x ,$$

on voit que la condition

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(u + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

équivaut à avoir

$$\int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v\} \, \mathrm{d}x = 0 ;$$

selon la formule de Green (vol. 1 ; voir aussi chap. 8) on a

$$\int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v\}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Fr}\,\Omega} v(\nabla u \cdot \nu)\,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega v\triangle u\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\triangle u\,\mathrm{d}x$$

(car $v = 0$ sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$) d'où l'on conclut que

$$\int_\Omega v\triangle u\,\mathrm{d}x = 0$$

pour tout $v \in C^2(\overline{\Omega})$, $v = 0$ sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$, si u est une fonction extrémale. Il s'ensuit que

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } \Omega\,.$$

Ainsi, une fonction u extrémale pour la fonctionnelle $J(u)$ est une solution du problème de Dirichlet dans Ω (avec $u = \alpha$ sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$). On démontre, en fait, que la solution u du problème de Dirichlet *minimise* $J(u)$ (sous la condition aux limites $u = \alpha$ sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$). C'est ce que l'on appelle le *principe de Dirichlet* (suivant en cela une terminologie introduite par Riemann).

Ces considérations, esquissées rapidement, sont à la base d'une méthode efficace pour l'étude de l'équation $\triangle u = 0$ ainsi que d'autres équations qui peuvent être formulées comme les équations d'Euler–Lagrange pour un problème (dit *variationnel*) de la détermination du maximum ou du minimum (local) d'une fonctionnelle appropriée.

Le calcul des variations est devenu une des branches centrales de l'analyse mathématique et de ses applications. Comme indiqué ci-dessus, il est à l'origine de nombreuses équations aux dérivées partielles et, à cause de ce fait, il est d'une aide considérable pour l'étude de celles-ci. Depuis la formulation par Maupertuis (en 1744) du principe de moindre action, le calcul des variations joue également un rôle important en physique. Un historique moderne du calcul des variations est donné dans le livre de H. H. Goldstine (*A History of the Calculus of Variations from the 17th to the 19th Century*, Springer-Verlag, Berlin, 1980).

7.9.3 Brachistochrone

Brachistochrone (du grec *brakhistos*, le plus court, *khronos*, temps) est le nom donné à une courbe telle que le temps de parcours d'un point matériel se déplaçant le long de la courbe, sous l'action de la pesanteur, est minimal ; nous démontrons que cette courbe est donnée par une cycloïde.

Durant les années 1696-1697, Jean Bernoulli (1667-1748 ; père de Daniel Bernoulli, 1700-1782) proposa aux mathématiciens européens de l'époque le problème de la détermination de la brachistochrone. Il est rapporté que Bernoulli reçut trois réponses (celle de Leibniz, celle de Marquis de l'Hôpital et celle de Newton sous forme anonyme). Ce sont les problèmes de ce type qui conduisirent très tôt Euler au développement d'une méthode générale pour leurs résolutions. Considérons le plan du mouvement du point matériel comme un

plan vertical de coordonnées cartésiennes (x, y) ; nous supposons que le point matériel est à $(0,0)$ au début et qu'il arrive au point $(b, -\beta)$, $b > 0$, $\beta > 0$, en suivant une courbe donnée par une fonction continue $\xi : [\,0\,,\,b\,] \to \,]-\infty\,,\,0\,[$ de classe C^2 dans $]\,0\,,\,b\,[$ avec $\xi(0) = 0$, $\xi(b) = -\beta$. Le temps de parcours $T(\xi)$ (sous l'effet de la pesanteur g) est donné par

$$T(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \left\{ \frac{1 + \xi'^2}{-\xi} \right\}^{1/2} \mathrm{d}x\,.$$

On obtient cette expression immédiatement en observant que la vitesse du point matériel au point $\big(x, \xi(x)\big)$ est égale à

$$\sqrt{2g|\xi(x)|}$$

et la longueur infinitésimale de la courbe en ce point est donnée par

$$\{1 + \xi'(x)^2\}^{1/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ecrivons $y(x) = -\xi(x)$ et

$$J(y) = \int_0^b \left\{ \frac{1 + y'^2}{y} \right\}^{1/2} \mathrm{d}x\,;$$

puisque $y' = -\xi'$, on trouve la courbe optimale ξ en déterminant la fonction optimale continue y pour $J(y)$ avec $y(0) = 0$, $y(b) = \beta$, $y : [\,0\,,\,b\,] \to \,]\,0\,,\,\infty\,[$ de classe C^2 dans $]\,0\,,\,b\,[$. Dans ce problème,

$$f(x, y, y') = f(y, y') = \left\{ \frac{1 + y'^2}{y} \right\}^{1/2}$$

où f dépend seulement de y et y'. Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(y' f'_{y'} - f) = y'' f'_{y'} + y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f'_{y'} - (f'_y y' + f'_{y'} y'') = y' \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f'_{y'} - f'_y \right\}$$

de sorte que l'équation d'Euler-Lagrange entraîne que

$$y' f'_{y'} - f = c_0$$

où c_0 est une constante. Le procédé général consiste maintenant dans la résolution de cette dernière équation pour avoir

$$y' = \varphi(y, c_0)\,.$$

Pour la fonction f qui nous concerne ici, on obtient

$$f - y' f'_{y'} = \left\{ \frac{1 + y'^2}{y} \right\}^{1/2} - \frac{y'^2 \big(1 + y'^2\big)^{-1/2}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\big(y(1 + y'^2)\big)^{1/2}}$$

d'où y vérifie

$$\sqrt{y(1+y'^2)} = c\,,$$

c'est-à-dire

$$y(1+y'^2) = c^2\,,$$

c étant une constante > 0. Posons

$$y = \frac{c^2}{2}(1-\cos t)\,;$$

on aura

$$y' = \left(\frac{c^2}{y} - 1\right)^{1/2} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,.$$

Puisque

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{2}\sin t\,,$$

on obtient

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} = \frac{(c^2/2)\sin t}{\operatorname{ctg} t/2} = c^2\sin^2\frac{t}{2}$$

d'où

$$x = \frac{c^2}{2}(t-\sin t)\,,$$

en tenant compte du fait que $y(0) = 0$ entraîne que le paramètre t vaut zéro pour avoir $x = 0$, $y = 0$. Ainsi, la courbe recherchée est donnée par $x \mapsto -y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant b$, la relation entre x, y étant celle fournie par l'équation paramétrique de la cycloïde C :

$$x = a(t-\sin t)\,,\quad y = a(t-\cos t)\,,\qquad t \in \mathbb{R}\,,\ a = \frac{c^2}{2}\,.$$

Puisque la fonction $y = \gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$, correspondant à la cycloïde C n'est pas dérivable aux points $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (alors qu'elle est de classe C^∞ dans chaque intervalle ouvert de type $]2n\pi\,,\,2(n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$), notre fonction optimale n'est de classe C^2 que dans l'intervalle $]\,0\,,\,b\,[$. La brachistochrone cherchée dans notre plan vertical est l'image du morceau de la cycloïde C, pour $0 \leqslant t \leqslant t_b < 2\pi$, obtenue par une symétrie par rapport à l'axe des x ($(x,y) \mapsto (x,-y)$) ; les valeurs exactes de t_b et de a sont déterminées par la condition $\xi(b) = -\beta$; nous ne les calculons pas ici.

Il faut comprendre que nous avons seulement démontré que C donne une courbe optimale *possible* ; les raisonnements supplémentaires sont nécessaires pour établir que celle-ci est effectivement *la seule courbe minimale* pour le problème posé et qu'une telle courbe minimale *existe*.

7.9.4 Remarques bibliographiques

La théorie des équations aux dérivées partielles est si vaste qu'aucun ouvrage seul ne peut couvrir toutes ses ramifications. Nous conseillons la lecture du livre classique de Courant et Hilbert [3, vol. 1], pour son exposé riche en exemples importants ; il contient un chapitre détaillé sur le calcul des variations qui est ensuite utilisé pour l'étude des problèmes aux valeurs propres associées aux équations différentielles. L'ouvrage de Dunford et Schwartz [7, vol. 2] présente une théorie avancée ; le livre de Dautray et Lions [4] contient une présentation encyclopédique des équations aux dérivées partielles (surtout du second ordre) en relation avec leurs applications très variées. Les quatre volumes de L. Hörmander (*The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1983-1985) sont considérés comme une référence essentielle par les spécialistes. Pour l'équation de Schrödinger, nous avons déjà indiqué deux références importantes au paragraphe 7.6.4. L'ouvrage de D. Gilbarg et N. S. Trudinger (*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 2^e éd. 1983) est consacré aux problèmes aux limites concernant les équations du second ordre (pour les équations linéaires et non linéaires). La plupart de ces ouvrages exigent des préparations importantes de la part du lecteur. Un livre qui donne une vue d'ensemble introductive sans exigences préliminaires est celui de F. John (*Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 3^e éd. 1978). Un livre du même type (plus avancé) est celui de G. B. Folland (*Introduction to Partial Differential Equation*, Princeton Univ. Press, 2^e éd. 1995). L'ouvrage de Courant et Hilbert [3, vol. 2] (réédition d'un volume de 1937) est un ouvrage classique couvrant des aspects très variés de la théorie générale des équations aux dérivées partielles.

Problèmes associés au laplacien

Nous considérons les équations

(i) $\triangle u = 0$,
(ii) $\triangle u = f$,
(iii) $\triangle u + \lambda u = 0$,
(iv) $u'_t = k \triangle u$,
(v) $u''_{tt} = a^2 \triangle u$,

dans différents domaines de $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{R}^{N+1}$. Les solutions de $\triangle u = 0$ sont les fonctions *harmoniques* ; leur étude ainsi que celle de l'*équation de Poisson* (ii) sont présentées dans les cinq premières sections. L'*équation de Helmhotz* (iii) concerne le problème aux valeurs propres ; elle est étudiée dans la section 8.6 ; son importance dans la théorie des équations de la *chaleur* (iv) et des *ondes* (v) est capitale, comme expliqué au chapitre 7. Les sections 8.7 et 8.8 sont consacrées aux équations (iv) et (v) respectivement. Les exercices de la section 8.9 contiennent la résolution de plusieurs cas particuliers simples de ces équations ; une brève section 8.10 donne des indications bibliographiques sur ces équations.

8.1 FORMULES PRÉLIMINAIRES

8.1.1 Formules de Green

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. On a vu dans la proposition 7.4.6 (vol. 1 ; *théorème de la divergence*) que si Ω est un domaine *gaussien*, alors, pour tout champ vectoriel $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, \mathrm{d}x \tag{8.1}$$

où $\partial\Omega$ est la partie de $\operatorname{Fr}\Omega$ formée par les points réguliers de $\operatorname{Fr}\Omega$ (§ 7.7.2) ; si Ω est régulier (ce qui veut dire que $\operatorname{Fr}\Omega = \partial\Omega$), alors dans (8.1) on peut écrire $\operatorname{Fr}\Omega$ à la place de $\partial\Omega$. Dans (8.1), $\mathrm{d}x$ représente une intégration par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathrm{d}\sigma$ correspond à l'intégration par rapport à la mesure naturelle de l'hypersurface $\partial\Omega$; si $N = 3$, $\partial\Omega$ est une surface (de

classe C^1) et si $N = 2$, $\partial\Omega$ est une variété (de classe C^1) de dimension 1 (c'est-à-dire une réunion de courbes régulières). Rappelons qu'une hypersurface dans $\mathbb{R}^N$ est une variété de dimension $N-1$, non nécessairement connexe, supposée être toujours de classe C^1 (au moins) pour les formules du type (8.1). Nous ne rappellerons pas ici la définition d'un domaine gaussien (donnée dans les remarques après la proposition 7.4.6, vol. 1) ; il suffit de savoir que pour ces domaines (8.1) est vérifiée. Par ailleurs, dans beaucoup d'applications, $\partial\Omega = \operatorname{Fr}\Omega$ (c'est-à-dire Ω est un domaine régulier) ; les lecteurs qui ne connaissent pas la théorie des mesures naturelles des sous-variétés de $\mathbb{R}^N$ (chap. 7, vol. 1) peuvent se restreindre à considérer (8.1) dans $\mathbb{R}^N$ avec $N = 2$ ou 3, ce qui correspond à l'analyse vectorielle élémentaire (chap. 6, vol. 1) ; le passage aux dimensions $N > 3$ n'exige aucune considération nouvelle. Rappelons que, si $F = (F_1, \ldots, F_N)$,

$$\operatorname{div} F = \mathrm{D}_1 F_1 + \cdots + \mathrm{D}_N F_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\,.$$

En posant $F = f\,\nabla g = f(\mathrm{D}_1 g, \ldots, \mathrm{D}_N g)$ dans (8.1) avec $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in C^2(\overline{\Omega})$, on obtient

$$\int_{\partial\Omega} f\,\mathrm{D}_\nu g\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega (f\,\triangle g + \nabla f \cdot \nabla g)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.2}$$

En effet,

$$f\,\mathrm{D}_\nu g = f\,\nabla g \cdot \nu\,, \quad \operatorname{div}(f\,\nabla g) = f\,\triangle g + \nabla f \cdot \nabla g\,,$$

(où ν est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de Ω, définie partout dans $\partial\Omega$; § 7.7.2) en se rappelant que le *laplacien* $\triangle$ dans $\mathbb{R}^N$ est défini par

$$\triangle h = \mathrm{D}_{11} h + \cdots + \mathrm{D}_{NN} h = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}$$

pour toute fonction h de classe C^2. De (8.2), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} (f\,\mathrm{D}_\nu g - g\,\mathrm{D}_\nu f)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega (f\triangle g - g\triangle f)\,\mathrm{d}x \tag{8.3}$$

pour $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Nous appellerons (8.2) et (8.3) les *formules de Green* (Ex. 6, § 7.4.8, vol. 1) ; ces deux formules, conséquences immédiates du théorème de la divergence (8.1), jouent un rôle central dans les considérations concernant le laplacien dans $\mathbb{R}^N$; souvent, (8.2) est appelée formule de l'intégration par parties dans $\mathbb{R}^N$.

Notons ici quelques formules qui se déduisent immédiatement de (8.2). On a, pour $f \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_\nu f\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \triangle f\,\mathrm{d}x\,; \tag{8.4}$$

de plus, si f est *harmonique* dans Ω (c'est-à-dire $\triangle f = 0$ dans Ω), alors

$$\int_{\partial\Omega} f\, \mathrm{D}_\nu f \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \|\nabla f\|^2 \, \mathrm{d}x \tag{8.5}$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_\nu f \, \mathrm{d}\sigma = 0\,. \tag{8.6}$$

En effet, il suffit de poser $f = 1$ et $g = f$ dans (8.2) pour avoir (8.4) ; (8.6) en est une conséquence si $\triangle f = 0$; (8.5) vient de (8.2) avec $f = g$, $\triangle f = 0$. Comme ci-dessus, on utilisera systématiquement $\mathrm{d}x$ pour les intégrales volumiques dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathrm{d}\sigma$ pour les intégrales sur les hypersurfaces dans $\mathbb{R}^N$, sans mentionner spécifiquement la valeur de N en question. Si la dimension N de l'espace a besoin d'être précisée, on introduira une notation appropriée pour le faire ; de même, s'il est nécessaire de préciser qu'il s'agit de l'intégration sur une hypersurface spécifique $X \subset \mathbb{R}^N$, on pourra écrire $\mathrm{d}\sigma^X$ au lieu de $\mathrm{d}\sigma$.

Notons que, pour $N = 1$, les formules (8.1), (8.2) et (8.3) prennent la forme suivante : $\Omega = \,]\,a\,,\,b\,[\,$, $-\infty < a < b < \infty$,

$$\int_a^b f' \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a) = f\Big|_a^b \quad \text{si } f \in C^1\big([\,a\,,\,b\,]\big)$$

$$\int_a^b (fg'' + f'g') \, \mathrm{d}x = fg'\Big|_a^b \quad \text{si } f \in C^1\big([\,a\,,\,b\,]\big)\,,\ g \in C^2\big([\,a\,,\,b\,]\big)$$

$$\int_a^b (fg'' - gf'') \, \mathrm{d}x = (fg' - gf')\Big|_a^b \quad \text{si } f\,,\ g \in C^2\big([\,a\,,\,b\,]\big)\,.$$

Ces formules sont parfaitement élémentaires ; les analogues de (8.4), (8.5) et (8.6), pour $N = 1$, le sont également. Notez que, pour $N = 1$, f est harmonique dans $\Omega = \,]\,a\,,\,b\,[\,$ si et seulement si $f(x)$ est de la forme $\alpha x + \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

REMARQUES. Il est utile d'observer que la formule (8.1) reste valable sous l'hypothèse plus faible suivante : $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continue, dérivable dans Ω, $\operatorname{div} F \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Ceci entraîne que les formules (8.2) à (8.6) sont valables sous des hypothèses plus faibles. Pour (8.2), il suffit que $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec $\triangle g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Pour (8.3) et (8.4), il suffit que f et g soient dans $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec $\triangle f$, $\triangle g$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. Donc (8.5) et (8.6) sont valables si $f \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec $\triangle f = 0$ dans Ω. Dans la suite, nous utiliserons ces versions améliorées des formules (8.2)-(8.6) sans commentaires.

8.1.2 Volumes des boules et des sphères

Pour $a \in \mathbb{R}^N$, $0 < r < \infty$, il sera commode dans la suite d'écrire $B_r(a)$ pour $B(a\,;r)$ et $S_r(a)$ pour $\operatorname{Fr} B(a\,;r)$; ainsi,

$$B_r(a) = \big\{x \in \mathbb{R}^N : \|x - a\| < r\big\}\,, \quad S_r(a) = \big\{x \in \mathbb{R}^N : \|x - a\| = r\big\}\,.$$

On dit que $B_r(a)$ est la *boule* de centre a et de rayon r et que $S_r(a)$ est la *sphère* de centre a et de rayon r, dans $\mathbb{R}^N$, même si, pour $N = 2$, il s'agit d'un disque ouvert et d'un cercle et si, pour $N = 1$, il s'agit d'un intervalle ouvert et de ses deux extrémités. Soient λ_N la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$ et σ la mesure naturelle de $S_r(a)$; la notation plus précise $\sigma^{S_r(a)}$ ne sera pas nécessaire. Alors

$$\lambda_N\big(B_r(a)\big) = \frac{\omega_N r^N}{N}, \quad \sigma\big(S_r(a)\big) = \omega_N r^{N-1} \tag{8.7}$$

où $\omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$. Ces formules sont établies dans le volume 1 (p. 485) pour $N \geqslant 2$; pour $N = 1$, $\omega_1 = 2$ et la formule pour $\sigma\big(S_r(a)\big)$ sera admise comme une convention commode. Notons que $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$, ce qui donne dans (8.7) les formules familières pour l'aire d'un disque et le périmètre d'un cercle, ainsi que le volume d'une boule et la superficie de la sphère associée. Notons que

$$\operatorname{Fr} B_r(a) = \partial B_r(a) = S_r(a)$$

où ∂ représente la frontière régulière (§ 7.7.2).

8.1.3 Moyennes sphériques et spatiales

Dorénavant, il sera plus commode d'écrire $B_r(a)$ pour $B(a\,;r) \subset \mathbb{R}^N$. Posons, pour $B_r(a) \subset \mathbb{R}^N$, $S_r(a) = \operatorname{Fr} B_r(a)$, $N \geqslant 2$,

$$M_r(f,a) = \frac{1}{r^{N-1}\omega_N} \int_{S_r(a)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

$$A_r(f,a) = \frac{N}{r^N \omega_N} \int_{B_r(a)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

lorsque f est une fonction (réelle ou complexe) pour laquelle ces intégrales existent, ce qui sera certainement le cas si f est continue dans $\overline{B_r}(a)$. On dira que $M_r(f,a)$ est la *moyenne* de f *sur la sphère* $S_r(a)$ et que $A_r(f,a)$ est la *moyenne spatiale* de f sur la boule $B_r(a)$.

Rappelons les formules suivantes concernant les intégrales volumiques (par rapport à $\mathrm{d}x$) et superficielles (par rapport à $\mathrm{d}\sigma$) : *Si* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *est intégrable (ou* $\geqslant 0$ *et borélienne)*, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left\{ \int_{S_r(0)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \right\} \mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty r^{N-1} \left\{ \int_{S_1(0)} f(ry)\,\mathrm{d}\sigma(y) \right\} \mathrm{d}r\,. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Cette formule est établie dans le volume 1 (p. 484). Notons aussi la formule suivante : si $f : S_r(a) \to \mathbb{R}$ est σ-intégrable (ou $\geqslant 0$ et borélienne), alors

$$\int_{S_r(a)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = r^{N-1} \int_{S_1(0)} f(a+ry)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,. \tag{8.9}$$

Nous dirons que (8.9) provient de la transformation des variables $x = a + ry$.

D'après (8.8) et (8.9), on obtient encore, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left\{ \int_{S_r(a)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \right\} \mathrm{d}r \tag{8.10}$$

en observant que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+a)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{S_r(0)} f(y+a)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{S_r(a)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

(en supposant que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $f \geqslant 0$ et borélienne).

De (8.10), on déduit que

$$\int_{B_r(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^r \left\{ \int_{S_t(a)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \right\} \mathrm{d}t \tag{8.11}$$

si f est intégrable dans $B_r(a)$ (ou $f \geqslant 0$ et borélienne) ; il suffit de prolonger f en posant $f(x) = 0$ si $\|x - a\| \geqslant r$ et utiliser (8.10).

De (8.11), on déduit immédiatement

$$A_r(f,a) = \frac{N}{r^N} \int_0^r t^{N-1} M_t(f,a)\,\mathrm{d}t\,. \tag{8.12}$$

Notons que pour $N = 1$, $\omega_1 = 2$ et on pose

$$M_r(f,a) = \frac{1}{2}\left\{f(a+r) + f(a-r)\right\}, \quad A_r(f,a) = \frac{1}{2r}\int_{a-r}^{a+r} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour avoir la validité des formules de ce paragraphe qui sont alors immédiates.

8.2 FONCTIONS HARMONIQUES

8.2.1 Définitions préliminaires

Soit Ω une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^N$; une fonction réelle $f \in C^2(\Omega)$ est dite ***sous-harmonique*** (***surharmonique***) si $\triangle f \geqslant 0$ ($\triangle f \leqslant 0$) dans Ω.

Il est évident que f est sous-harmonique dans Ω si et seulement si $-f$ est surharmonique dans Ω, f étant de classe C^2 ; de plus, si f est à la fois sous-harmonique et surharmonique dans Ω, alors f est ***harmonique*** dans Ω : $\triangle f = 0$ dans Ω.

Pour $N = 1$, une fonction réelle de classe C^2 dans un intervalle ouvert est sous-harmonique (surharmonique) si et seulement si elle est convexe (concave). Cette observation simple est un guide utile pour l'étude des fonctions sous-harmoniques et surharmoniques dans les parties ouvertes de $\mathbb{R}^N$.

8.2.2 Lemme

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, f une fonction réelle de $C^2(\Omega)$ et $R > 0$, $a \in \Omega$ tels que $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$. Alors les fonctions $t \mapsto M_t(f,a)$, $t \mapsto A_t(f,a)$ (§ 8.1.3), $0 < t \leqslant R$, sont croissantes (décroissantes) si f est sous-harmoniques (surharmonique). De plus,

$$f(a) \leqslant M_R(f,a)\,, \quad f(a) \leqslant A_R(f,a) \quad \textit{si } f \textit{ est sous-harmonique}$$
$$f(a) \geqslant M_R(f,a)\,, \quad f(a) \geqslant A_R(f,a) \quad \textit{si } f \textit{ est surharmonique}.$$

En particulier, si f est harmonique, $f(a) = M_R(f,a) = A_R(f,a)$.

DÉMONSTRATION

Pour $0 < t \leqslant R$, on a de (8.9),

$$\frac{1}{t^{N-1}} \int_{S_t(a)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{S_1(0)} f(a+ty)\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{t^{N-1}} \int_{S_t(a)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right\} = \int_{S_1(0)} \nabla f(a+ty)\cdot y\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+ty) = \nabla f(a+ty)\cdot y\,.$$

De nouveau, de (8.9) on a

$$\int_{S_1(0)} \nabla f(a+ty)\cdot y\,\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{t^{N-1}} \int_{S_t(a)} \nabla f(x)\cdot \frac{x-a}{t}\,\mathrm{d}\sigma(x)\,.$$

Puisque ν sur $S_t(a)$ est donné par $(x-a)/t$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{t^{N-1}} \int_{S_t(a)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right\} &= \frac{1}{t^{N-1}} \int_{S_t(a)} \mathrm{D}_\nu f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \frac{1}{t^{N-1}} \int_{B_t(a)} \triangle f(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de (8.4). On en conclut que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{M_t(f,a)\} = \frac{1}{\omega_N t^{N-1}} \int_{B_t(a)} \triangle f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad 0 < t \leqslant R\,; \tag{8.13}$$

ceci prouve les affirmations sur la monotonicité de $t \mapsto M_t(f,a)$.

De la continuité de f au point a, on démontre facilement que

$$\lim_{t\to 0} M_t(f,a) = f(a)$$

d'où on déduit les inégalités entre $f(a)$ et $M_R(f,a)$. Les affirmations concernant $A_R(f,a)$ et $t \mapsto A_t(f,a)$ se déduisent de celles concernant $M_R(f,a)$ et $t \mapsto M_t(f,a)$ en utilisant (8.12) ; en effet, d'après (8.12), on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} A_r(f,a) = \frac{N}{r}\left\{M_r(f,a) - \frac{N}{r^N}\int_0^r t^{N-1} M_t(f,a)\,\mathrm{d}t\right\}\,; \tag{8.14}$$

si $t \mapsto M_t(f,a)$ est croissante, on a

$$\frac{N}{r^N}\int_0^r t^{N-1} M_t(f,a)\,\mathrm{d}t \leqslant M_r(f,a)$$

d'où (8.14) donne $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)A_r(f,a) \geqslant 0$; de même, si $t \mapsto M_t(f,a)$ est décroissante, on a $(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)A_r(f,a) \leqslant 0$.

Finalement, si $\triangle f = 0$ dans Ω, on voit à l'aide de (8.13) que $M_t(f,a)$ est indépendant de t d'où

$$f(a) = M_t(f,a) = M_R(f,a)\,, \quad 0 < t \leqslant R$$

ce qui donne

$$f(a) = A_t(f,a) = A_R(f,a)\,, \quad 0 < t \leqslant R$$

grâce à (8.12) (ou à (8.14)). ♦

REMARQUE. Pour la suite, il est utile de noter l'amélioration suivante du lemme 8.2.2 : *lorsque* $f \in C(\overline{B}_R(a)) \cap C^2(B_R(a))$ *avec* f *harmonique dans* $B_R(a)$, *alors*

$$f(a) = M_R(f,a) = A_R(f,a)\,.$$

En effet, on a (d'après le lemme)

$$f(a) = M_r(f,a) = A_r(f,a)\,, \quad 0 < r < R\,;$$

la continuité de f dans $\overline{B}_R(a)$ entraîne que

$$\lim_{r\to R} M_r(f,a) = M_R(f,a)\,, \quad \lim_{r\to R} A_r(f,a) = A_R(f,a)$$

d'où la validité de l'affirmation.

Cette affirmation constitue le ***théorème de la moyenne de Gauss***.

8.2.3 Proposition (*principe du maximum et du minimum*)

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^2(\Omega)$, f réelle ; posons

$$M = \sup_{x\in\Omega} f(x)\,, \quad m = \inf_{x\in\Omega} f(x)\,.$$

Si f est sous-harmonique (surharmonique) dans Ω et s'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = M$ ($f(a) = m$), alors f est une constante. En particulier si f est harmonique et s'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = M$ ou $f(a) = m$, alors f est une constante.

DÉMONSTRATION

Il suffit de considérer le cas où f est sous-harmonique (le passage à $-f$ permettra de traiter le cas d'une fonction surharmonique). Posons $\Omega_M = \{x \in \Omega : f(x) = M\}$; d'après les hypothèses, M est un nombre réel et $a \in \Omega_M$; puisque f est continue, Ω_M est un ensemble fermé dans Ω. Démontrons que Ω_M est ouvert ; en effet, si $b \in \Omega_M$ et $\overline{B}_r(b) \subset \Omega$, alors, à l'aide du lemme 8.2.2, on a

$$f(b) \leqslant A_r(f, b)\ ;$$

puisque $A_r(M, b) = M$ pour tout $M \in \mathbb{R}$, on obtient

$$0 = f(b) - M \leqslant A_r(f - M, b) \leqslant 0$$

car $f - M \leqslant 0$; donc

$$\int_{B_r(b)} \{f(x) - M\}\,\mathrm{d}x = 0$$

d'où la continuité de f entraîne que $f(x) = M$, $x \in B_r(b)$. Ainsi, $B_r(b) \subset \Omega_M$ et Ω_M est ouvert. Puisque Ω est connexe, on conclut que $\Omega_M = \Omega$ et f est une constante. ♦

COROLLAIRE

Supposons que Ω est un domaine borné et $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, f étant une fonction réelle, non constante. Si f est sous-harmonique dans Ω, alors

$$f(x) < \sup_{y\in \mathrm{Fr}\,\Omega} f(y)\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Si f est surharmonique dans Ω, alors

$$f(x) > \inf_{y\in \mathrm{Fr}\,\Omega} f(y)\,, \quad x \in \Omega\,.$$

En particulier si f est harmonique dans Ω, alors

$$\inf_{y\in \mathrm{Fr}\,\Omega} f(y) < f(x) < \sup_{y\in \mathrm{Fr}\,\Omega} f(y)\,, \quad x \in \Omega\,.$$

DÉMONSTRATION

Il suffit de considérer le cas sous-harmonique ; posons $M = \sup_{y\in\overline{\Omega}} f(y)$. Puisque $\overline{\Omega}$ est compact et f est continue dans $\overline{\Omega}$, il existe $a \in \overline{\Omega}$ tel que $f(a) = M$; selon la proposition, $a \notin \Omega$ (car autrement f serait une constante), ce qui entraîne que $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ et $M = f(a) = \sup_{y\in\operatorname{Fr}\Omega} f(y)$ avec $f(x) < f(a)$ si $x \in \Omega$. ♦

8.2.4 Proposition (*unicité des solutions*)

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$.

(a) L'équation $\triangle u = f$ dans Ω avec $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ possède au plus une solution $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

(b) L'équation $\triangle u = f$ dans Ω avec $\mathrm{D}_\nu u = \alpha$ sur $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ étant la frontière régulière du domaine gaussien Ω, § 7.7.2) possède, à une constante additive près, au plus une solution $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Si une solution u existe, alors on doit avoir

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \alpha(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

en supposant que $f \in C(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega)$, $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$.

(c) L'équation $\triangle u = f$ dans Ω avec $\mathrm{D}_\nu u + \beta u = \alpha$ sur $\partial\Omega$, $\beta \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, $\beta(x) \geqslant 0$, $\beta(x) \not\equiv 0$, pour $x \in \partial\Omega$, possède au plus une solution $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ où $\partial\Omega$ est la frontière régulière de Ω, Ω étant un domaine gaussien (§ 7.7.2).

(Les fonctions considérées sont toutes réelles.)

DÉMONSTRATION

(a) Si u_1, u_2 sont deux solutions dans $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, alors $v = u_1 - u_2$ est dans $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec $\triangle v = 0$ dans Ω, $v = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$. Du corollaire de la proposition 8.2.3, on conclut que $v \equiv 0$ d'où $u_1 = u_2$.

(b) Si u_1, u_2 sont deux solutions dans $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, alors $v = u_1 - u_2$ est dans $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec $\triangle v = 0$ dans Ω, $\mathrm{D}_\nu v = 0$ sur $\partial\Omega$. De (8.5), on aura

$$\int_\Omega \|\nabla v\|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{D}_\nu v\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

d'où $\nabla v = 0$ dans Ω, ce qui donnera $v(x) = c$, $x \in \overline{\Omega}$, c étant une constante réelle ; ainsi, $u_1 = u_2 + c$.

Si une solution $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ existe, il est clair que f doit être continue dans Ω et α continue sur $\partial\Omega$; sous l'hypothèse faite sur f et α, on peut utiliser (8.4) (cf. remarques, § 8.1.1) sur la fonction harmonique u, ce qui donne

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \triangle u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathrm{D}_\nu u\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} \alpha(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\,.$$

(c) Si u_1, u_2 sont deux solutions du type indiqué, alors $v = u_1 - u_2 \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ avec $\triangle v = 0$ dans Ω, $\mathrm{D}_\nu v + \beta v = 0$ sur $\partial\Omega$. En utilisant (8.5) sur la fonction harmonique v dans Ω, on aura

$$0 \leqslant \int_\Omega \|\nabla v\|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v \, \mathrm{D}_\nu v \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} -\beta v^2 \, \mathrm{d}\sigma \leqslant 0$$

d'où

$$\int_\Omega \|\nabla v\|^2 \, \mathrm{d}x = 0 \,,$$

ce qui donnera $\nabla v = 0$ dans Ω et $v \equiv c$ dans $\overline{\Omega}$, c constante réelle ; puisque $\mathrm{D}_\nu v + \beta v = 0$ sur $\partial\Omega$ avec $\beta(x) \geqslant 0$, $\beta(x) \not\equiv 0$, $x \in \partial\Omega$, on aura $c = 0$. ♦

REMARQUES

(i) Pour pouvoir affirmer que la solution u (du type indiqué) de chacune des équations de la proposition *existe*, il faut imposer des hypothèses appropriées sur f, α, β et $\mathrm{Fr}\,\Omega$. Par exemple, il est clair que dans (a), f doit être continue dans Ω et α continue dans $\mathrm{Fr}\,\Omega$. En fait, on doit exiger une condition un peu plus forte sur f ($f \in C^1(\Omega)$ serait suffisante) ; de plus, il faut imposer des conditions sur $\mathrm{Fr}\,\Omega$ que nous discuterons dans la suite.

(ii) L'hypothèse que Ω soit borné est une hypothèse essentielle. On verra dans la suite des exemples simples de Ω non borné où l'unicité des solutions de la proposition fait défaut.

8.2.5 Solutions fondamentales de l'équation de Laplace

Nous déterminons d'abord les fonctions harmoniques f dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ qui sont de la forme $f(x) = \psi(\|x\|)$, $\psi :]\,0\,, \infty[\to \mathbb{R}$ étant une fonction de classe C^2. Un petit calcul montre que, pour $x \neq 0$,

$$\triangle f(x) = \psi''(r) + \frac{N-1}{r}\,\psi'(r)$$

où $r = \|x\|$. On vérifie ensuite aisément que les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$\psi''(t) + \frac{N-1}{t}\,\psi'(t) = 0\,, \quad t > 0\,,$$

sont de la forme

$$\psi(t) = \begin{cases} \alpha \ln t + \beta & \text{si } N = 2 \\ \alpha t^{-N+2} + \beta & \text{si } N \geqslant 3 \end{cases}$$

et pour $N = 1$, $\psi(t) = \alpha t + \beta$, α et β nombres réels. Avec $\beta = 0$ et $\alpha = c_N$, une constante appropriée, $x \mapsto \psi(\|x\|)$ s'appelle une *solution fondamentale* pour l'équation $\triangle f = 0$ dans $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, posons

$$\psi_0(\|x\|) = \gamma(x) = \begin{cases} c_N \|x\|^{-N+2} & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ N \geqslant 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x\| & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ N = 2 \end{cases} \tag{8.15}$$

avec $\gamma(x) = (1/2)|x|$, $x \in \mathbb{R}$, où $c_2 = 1/2\pi$, $c_1 = 1/2$ et

$$c_N = \frac{-1}{\omega_N(N-2)}, \quad N \geqslant 3, \tag{8.16}$$

ω_N étant donné au paragraphe 8.1.2. Nous démontrerons dans la suite (prop. 8.4.6) que $\triangle\gamma = \delta$ dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, au sens des distributions ; c'est la validité de cette équation qui justifie la terminologie, *solution fondamentale*, pour les fonctions γ définies dans (8.15). (Notons que, pour $N = 1$, $c_1 = 1/2$ mais c_2 n'est pas bien défini par la formule (8.16).)

Si $a \in \mathbb{R}^N$, les fonctions $x \mapsto \gamma(x-a)$, définies pour $x \neq a$, seront aussi appelées *solutions fondamentales* de l'équation de Laplace (dans $\mathbb{R}^N$) ; pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, $x \mapsto \gamma(x-a)$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^N \setminus \{a\}$ ce qui sera indiqué en écrivant

$$\triangle_x \gamma(x-a) = 0, \quad x \neq a,$$

ou simplement $\triangle\gamma(x-a) = 0$ s'il n'y a aucune ambiguïté à craindre.

Un calcul utilisant (8.11) établit aisément que

$$\int_\Omega |\gamma(x-a)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

pour tout domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

8.2.6 Formule fondamentale

Cette formule se déduit de la formule de Green (8.3) en posant $g(x) = \gamma(x-a)$, γ étant la solution fondamentale (8.15). Puisque $x \mapsto \gamma(x-a)$ possède une singularité au point a, il faut entreprendre un petit détour.

Nous supposons dans ce paragraphe que Ω est un *domaine borné gaussien* (§ 8.1.1) dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Si $f \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, f réelle, avec $\operatorname{div} f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, nous écrirons $f \in J(\Omega)$ (provisoirement et uniquement dans ce paragraphe).

Pour $f \in J(\Omega)$ appliquons (8.3) avec Ω remplacé par $\Omega \setminus \overline{B}_r(a)$ et $g(x) = \gamma(x-a)$ où $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$, a étant un point fixe de Ω. En écrivant B_r pour $B_r(a) = B(a\,;r)$, on a

$$\partial B_r = \operatorname{Fr} B_r = S_r(a) = S_r\ ;$$

aussi, $\partial(\Omega \setminus \overline{B}_r)$ est formé de la réunion disjointe de $\partial\Omega$ et S_r.

Puisque $\triangle\gamma(x-a) = 0$, on obtient

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B}_r} -\gamma(x-a)\,\triangle f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \big\{f(x)\,\mathrm{D}_\nu\gamma(x-a) - \gamma(x-a)\,\mathrm{D}_\nu f(x)\big\}\,\mathrm{d}\sigma(x) - T_r \tag{8.17}$$

où

$$T_r = \int_{S_r} \big\{f(x)\,\mathrm{D}_\nu\gamma(x-a) - \gamma(x-a)\,\mathrm{D}_\nu f(x)\big\}\,\mathrm{d}\sigma(x)\,.$$

Lorsque $x \in S_r$, on a

$$\nu(x) = \frac{x-a}{r}, \quad \gamma(x-a) = \psi_0(r), \quad \|x-a\| = r$$

(ψ_0 étant définie dans le pararagraphe 8.2.5). Un calcul direct donne

$$\nabla\gamma(x-a) = \frac{1}{\omega_N}\|x-a\|^{-N}(x-a), \quad x \neq a, \ N \geqslant 2.$$

Donc

$$\left|\int_{S_r} \gamma(x-a)\,\mathrm{D}_\nu f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right| = |\psi_0(r)|\left|\int_{S_r} \nabla f(x)\cdot\frac{x-a}{r}\,\mathrm{d}\sigma(x)\right|$$
$$\leqslant |\psi_0(r)| r^{N-1}\omega_N \sup_{x\in S_r}\|\nabla f(x)\| \xrightarrow{r\to 0} 0$$

et

$$\int_{S_r} f(x)\,\mathrm{D}_\nu\gamma(x-a)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{S_r} f(x)\,\nabla\gamma(x-a)\cdot\frac{x-a}{r}\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$= \int_{S_r} f(x)\frac{1}{\omega_N}\frac{\|x-a\|^{2-N}}{r}\,\mathrm{d}\sigma(x)$$
$$= \frac{1}{\omega_N} r^{-N+1}\int_{S_r} f(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \xrightarrow{r\to 0} f(a)$$

d'où

$$\lim_{r\to 0} T_r = f(a)$$

Puisque $x \mapsto \gamma(x-a)$ est intégrable dans Ω, on obtient à l'aide de (8.17), en faisant $r \to 0$,

$$-\int_\Omega \gamma(x-a)\,\triangle f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\{f(x)\,\mathrm{D}_\nu\gamma(x-a) - \gamma(x-a)\,\mathrm{D}_\nu f(x)\}\,\mathrm{d}\sigma(x) - f(a)$$

ce qui conduit à la ***formule fondamentale*** : *pour* $a \in \Omega$,

$$f(a) = \int_\Omega \gamma(x-a)\,\triangle f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\{f(x)\,\mathrm{D}_\nu\gamma(x-a) - \gamma(x-a)\,\mathrm{D}_\nu f(x)\}\,\mathrm{d}\sigma(x) \tag{8.18}$$

où $f \in J(\Omega)$ (défini ci-dessus). L'intérêt de (8.18) réside dans le fait qu'elle donne une représentation intégrale pour une fonction arbitraire $f \in C^2(\overline{\Omega})$ (plus généralement $f \in J(\Omega)$) en termes de $\triangle f$ dans Ω et les valeurs de f et de ∇f sur $\partial\Omega$. Nous donnons maintenant quelques formules qui se déduisent de (8.18).

Si f est une fonction de classe C^2 dans R^N ($N \geqslant 2$) à support compact, alors, pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(y-x)\,\triangle f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x-y)\,\triangle f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{8.19}$$

Il suffit d'utiliser (8.18) avec $\Omega = B_R(0)$ et avec R suffisamment grand pour que $f(x) = 0$ pour $\|x\| > R/2$ et de faire ensuite $R \to \infty$; ceci donne (8.19).

Si $u \in J(\Omega)$ et u est harmonique dans Ω (domaine borné gaussien dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$), *alors, pour $x \in \Omega$,*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \{u(y)\, \mathrm{D}_\nu \gamma(y-x) - \gamma(y-x)\, \mathrm{D}_\nu u(y)\}\, \mathrm{d}\sigma(y)\,. \tag{8.20}$$

Ceci provient de (8.18), en remplaçant f par u, a par x et x par y, et en utilisant $\triangle u = 0$ dans Ω.

L'intégrale qui apparaît dans (8.19) joue un rôle important dans la *théorie du potentiel* ; si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x-y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on dit que ψ est le *potentiel newtonien* engendré par φ dans $\mathbb{R}^N$. Cette terminologie a ses origines dans la théorie de la gravitation newtonienne dans $\mathbb{R}^3$. De (8.19), on peut imaginer que $\triangle\psi = \varphi$; on verra que ceci est effectivement le cas, sous des hypothèses appropriées sur φ (prop. 8.3.4).

Une autre application envisageable de (8.18) est la suivante. Supposons qu'il existe une fonction donnée par $h(x,y)$ qui vérifie les propriétés suivantes : posons

$$G(x,y) = \gamma(x-y) + h(x,y)\,, \quad x \in \Omega\,,\ y \in \overline{\Omega}\,,\ x \neq y\,;$$

(i) pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto h(x,y)$ est harmonique dans Ω et appartient à $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$;

(ii) pour tout $x \in \Omega$, $G(x,y) = 0$ pour $y \in \partial\Omega$.

La fonction définie par $G(x,y)$ s'appelle la *fonction de Green* pour Ω (pour le problème de Dirichlet). L'importance de G vient de la formule suivante (appelée ***formule intégrale de Poisson***) : *Si $f \in J(\Omega)$, alors, pour $x \in \Omega$,*

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)\, \mathrm{D}_\nu G(x,y)\, \mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega G(x,y)\, \triangle f(y)\, \mathrm{d}y\,. \tag{8.21}$$

En effet, pour $x \in \Omega$, $y \mapsto h(x,y)$ vérifie (i) ; en utilisant la formule de Green (8.3) où $g(y)$ est $y \mapsto h(x,y)$, on a

$$0 = \int_{\partial\Omega} \{f(y)\, \mathrm{D}_\nu h(x,y) - h(x,y)\, \mathcal{D}_\nu f(y)\}\, \mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega h(x,y)\, \triangle f(y)\, \mathrm{d}y\,;$$

en ajoutant cette expression à (8.18) écrite sous la forme

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} \{f(y)\, \mathrm{D}_\nu \gamma(y-x) - \gamma(y-x)\, \mathcal{D}_\nu f(y)\}\, \mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega \gamma(y-x)\, \triangle f(y)\, \mathrm{d}y\,,$$

on obtient (8.21) car $G(x,y) = 0$ lorsque $y \in \partial\Omega$.

L'avantage de (8.21) sur (8.18) est que (8.21) donne une représentation intégrale pour f utilisant seulement $\triangle f$ dans Ω et f (sans ∇f) sur $\partial\Omega$. Ainsi, (8.21) nous suggère que la solution des équations

$$\triangle f = \varphi \quad \text{dans } \Omega\,, \qquad f = \alpha \quad \text{sur } \partial\Omega$$

sera donnée par la formule

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} \alpha(y)\, \mathrm{D}_\nu G(x,y)\, \mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega G(x,y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y\,. \tag{8.22}$$

On peut démontrer que c'est effectivement le cas lorsque α, φ sont des fonctions appropriées.

Notons que l'existence de la fonction de Green G dépend de l'existence de h vérifiant (i) et (ii) ; ceci revient, en fait, à la résolution d'un problème de Dirichlet : pour chaque $x \in \Omega$, trouver une fonction harmonique $y \mapsto u_x(y)$, $y \in \Omega$ avec $u_x \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_x(z) = -\gamma(x-z)$ pour $z \in \partial\Omega$ (en supposant que $\partial\Omega = \operatorname{Fr}\Omega$) ; alors $h(x,y) = u_x(y)$. Cette remarque montre que *la fonction de Green G d'un domaine borné Ω est unique si elle existe.* En effet, de la proposition 8.2.4(a), $h(x,y)$ est uniquement déterminée (si elle existe) pour $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$; puisque $G(x,y) = \gamma(x-y) + h(x,y)$, G est uniquement déterminée aussi.

REMARQUE. La terminologie « fonction de Green » est utilisée souvent avec des définitions légèrement différentes ; certains auteurs exigent seulement que $y \mapsto h(x,y)$ appartienne à $C(\overline{\Omega})$ pour tout $x \in \Omega$; notre définition est guidée par le désir de pouvoir établir (8.21). Par ailleurs, au chapitre 7, nous avons donné une définition plus générale d'une fonction de Green (d'un opérateur différentiel plus général). La relation entre ces définitions devient visible en prenant $\alpha = 0$ dans (8.22). La fonction

$$(x,y) \longmapsto \mathrm{D}_\nu G(x,y) = P_\Omega(x,y)$$

avec $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$, $\mathrm{D}_\nu G(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y)$, s'appelle le ***noyau de Poisson*** pour Ω (pour le problème de Dirichlet). De (8.22) on voit que la formule

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P_\Omega(x,y)\alpha(y)\, \mathrm{d}\sigma(y)\,, \quad x \in \Omega$$

a une bonne chance de fournir la solution du problème de Dirichlet : trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $\triangle u = 0$ dans Ω avec $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$. La proposition 8.2.8 établit la validité de cette observation lorsque $\Omega = B_R(0) = B(0\,;R)$.

8.2.7 Fonction de Green pour une boule

Lorsque $\Omega = B_R(0)$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon R, dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, on peut déterminer la fonction de Green G explicitement. Ici,

$y \in \operatorname{Fr} B_R(0) = \partial B_R(0)$ si et seulement si $\|y\| = R$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, posons

$$\widetilde{x} = \frac{R^2}{\|x\|^2}\, x\,,$$

et écrivons

$$h(x,y) = \begin{cases} -\gamma\left(\dfrac{\|x\|}{R}\,(\widetilde{x}-y)\right) & \text{si } x \neq 0,\ x \in B_R(0),\ y \in \overline{B}_R(0) \\ -\psi_0(R) & \text{si } x = 0,\ y \in \overline{B}_R(0). \end{cases} \tag{8.23}$$

Rappelons que $\gamma(z) = \psi_0(\|z\|)$ si $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ d'après (8.15). Si $x \neq 0$ et $\|x\| < R$, alors $\|\widetilde{x}\| = R^2/\|x\| > R$ de sorte que $h(x,y)$ est bien défini par (8.23) pour $x \in B_R(0)$, $y \in \overline{B}_R(0)$. Il est évident que, pour tout $x \in B_R(0)$, $y \mapsto h(x,y)$ est harmonique dans $B_R(0)$ et de classe C^2 dans $\overline{B}_R(0)$. Si $x = 0$,

$$h(0,y) = -\psi_0(R) = -\gamma(y) \quad \text{si } y \in \operatorname{Fr} B_R(0) \Leftrightarrow \|y\| = R\,;$$

si $x \neq 0$, $\|x\| < R$, alors on vérifie aisément que

$$\|x-y\| = \frac{\|x\|}{R}\,\|\widetilde{x}-y\| \quad \text{si } \|y\| = R \tag{8.24}$$

en vérifiant que le carré de chacun des deux membres de (8.24) vaut $\|x\|^2 + R^2 - 2x\cdot y$ si $\|y\| = R$. On conclut que

$$h(x,y) = -\gamma(x,y) \quad \text{si } x \neq 0\,,\ \|x\| < R\,,\ \|y\| = R\,.$$

Ainsi,

$$G(x,y) = \gamma(x-y) + h(x,y)\,, \quad x \in B_R(0)\,,\ y \in \overline{B}_R(0)\,,\ x \neq y\,, \tag{8.25}$$

vérifie les conditions (i) et (ii) du paragraphe 8.2.6 définissant la fonction de Green pour $B_R(0)$.

Pour utiliser G dans la formule (8.21) avec $\Omega = B_R(0)$, nous calculons $\mathrm{D}_\nu G(x,y)$, $y \in \operatorname{Fr} B_R(0)$; dans ce cas, $\nu(y) = y/R$ si $\|y\| = R$. Un calcul montre que, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\nu G(x,y) &= \frac{y}{R}\cdot\nabla_y\left\{\gamma(x-y) - \gamma\left(\frac{\|x\|}{R}\,(\widetilde{x}-y)\right)\right\} \\ &= \frac{y}{R}\cdot\left\{\frac{-(x-y)}{\omega_N\|x-y\|^N} + \frac{\widetilde{x}-y}{\omega_N\|\widetilde{x}-y\|^N}\left(\frac{R}{\|x\|}\right)^{N-2}\right\} \\ &= \frac{R^2-\|x\|^2}{R\,\omega_N\|x-y\|^N} \end{aligned}$$

en utilisant (8.24). Pour $x = 0$, $N > 2$,

$$G(0,y) = \gamma(y) - \psi_0(R) = c_N\|y\|^{-N+2} - \psi_0(R)\,;$$

si $\|y\| = R$, $\nu(y) = y/R$, on a (aussi pour $N \geqslant 2$)

$$\mathrm{D}_\nu G(0,y) = \frac{y}{R} \cdot \nabla_y \Big(c_N \|y\|^{-N+2} \Big) = \frac{y}{R} \cdot \frac{y}{\omega_N \|y\|^N} = \frac{R^2}{R\omega_N \|y\|^N} \cdot$$

Posons

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_N \|x-y\|^N} \cdot \tag{8.26}$$

On a vu que

$$P_R(x,y) = \mathrm{D}_\nu G(x,y)$$

pour $x \in B_R(0)$, $y \in \partial B_R(0)$ où $\mathrm{D}_\nu G(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y)$; de (8.21), on conclut que *si u est une fonction harmonique dans $B_R(0)$ avec $u \in C^1\big(\overline{B}_R(0)\big)$, alors, pour $x \in B_R(0)$,*

$$u(x) = \int_{S_R(0)} P_R(x,y) u(y)\, \mathrm{d}\sigma(y) \tag{8.27}$$

où $S_R(0) = \partial B_R(0) = \big\{ y \in \mathbb{R}^N : \|y\| = R \big\}$.

La fonction $P_R : B_R(0) \times S_R(0) \to \mathbb{R}_+$ définie par (8.26) s'appelle le ***noyau de Poisson*** pour $B_R(0)$; nous écrivons P pour P_1.

La formule (8.27) (***formule intégrale de Poisson***) suggère la validité de la proposition suivante.

8.2.8 Proposition (*solution du problème de Dirichlet dans une boule*)

Soit $\alpha \in C\big(S_R(0)\big)$, α réelle. Alors

$$u(x) = \int_{S_R(0)} P_R(x,y) \alpha(y)\, \mathrm{d}\sigma(y)\,, \quad \|x\| < R\,, \tag{8.28}$$

définit l'unique solution du problème de Dirichlet suivant : trouver

$$u \in C^2\big(B_R(0)\big) \cap C\big(\overline{B}_R(0)\big)$$

telle que $\triangle u = 0$ dans $B_R(0)$ avec $u = \alpha$ sur $S_R(0)$; u est automatiquement dans $C^\infty\big(B_0(0)\big)$.

REMARQUE. (8.28) donne $u(x)$ pour $\|x\| < R$; on doit démontrer (et c'est la partie principale de la démonstration) que

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \alpha(y)\,, \quad y \in S_R(0)\,.$$

DÉMONSTRATION

Nous établissons d'abord les trois propriétés suivantes de $P_R(x,y)$, $x \in B_R(0)$, $y \in S_R(0)$:

(i) $P_R(x,y) > 0$ et

$$\int_{S_R(0)} P_R(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 1\,;$$

(ii) $x \mapsto P_R(x,y)$ est de classe C^∞ avec

$$\triangle_x P_R(x,y) = 0\,;$$

(iii) pour $\delta > 0$, $y_0 \in S_R(0)$, posons

$$M_\delta(x,y_0) = \int_{E_\delta(y_0)} P_R(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

où $E_\delta(y_0) = \{y \in S_R(0) : \|y - y_0\| \geqslant \delta\}$; alors

$$\lim_{x \to y_0} M_\delta(x,y_0) = 0$$

pour tout $\delta > 0$, $y_0 \in S_R(0)$.

Pour établir (i), il suffit de poser $u \equiv 1$ dans (8.27) ; la (stricte) positivité de $P_R(x,y)$ vient de (8.26) d'où un calcul explicite (Ex. 1(vi), sect. 8.9) donne (ii). Pour (iii), notons que si $\|x - y_0\| < \delta/2$, alors

$$\|x-y\| \geqslant \|y-y_0\| - \|x-y_0\| > \frac{\delta}{2}$$

si $\|y - y_0\| \geqslant \delta$; de (8.26) on obtient, pour $\|x - y_0\| < \delta/2$, $y \in E_\delta(y_0)$,

$$P_R(x,y) < \frac{1}{R\omega_N}\Big(\frac{2}{\delta}\Big)^N (R - \|x\|)(R + \|x\|) < \frac{2}{\omega_N}\Big(\frac{2}{\delta}\Big)^N (R - \|x\|)$$

d'où

$$M_\delta(x,y_0) \leqslant \frac{2}{\omega_N}\Big(\frac{2}{\delta}\Big)^N (R - \|x\|)\omega_N R^{N-1} \longrightarrow 0$$

lorsque $x \to y_0$ (car alors $\|x\| \to \|y_0\| = R$). De (ii), on obtient immédiatement que u est même de classe C^∞ dans $B_R(0)$ et

$$\triangle u(x) = \int_{S_R(0)} \triangle_x P_R(x,y)\alpha(y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = 0\,, \quad x \in B_R(0)\,.$$

Nous démontrons maintenant que, pour tout $y_0 \in S_R(0)$, $u(x) \to \alpha(y_0)$ lorsque $x \to y_0$, x étant toujours dans $B_R(0)$. De (i), on a

$$u(x) - \alpha(y_0) = \int_{S_R(0)} P_R(x,y)\{\alpha(y) - \alpha(y_0)\}\,\mathrm{d}\sigma(y)\ ;$$

donc, pour $\delta > 0$,

$$|u(x) - \alpha(y_0)| \leqslant I_1(x, y_0, \delta) + I_2(x, y_0, \delta)$$

où

$$I_1(x, y_0, \delta) = \int_{V_\delta(y_0)} P_R(x,y)|\alpha(y) - \alpha(y_0)|\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

avec $V_\delta(y_0) = \{y \in S_R(0) : \|y - y_0\| < \delta\}$,

$$I_2(x, y_0, \delta) = \int_{E_\delta(y_0)} P_R(x,y)|\alpha(y) - \alpha(y_0)|\,\mathrm{d}\sigma(y)\,.$$

Si $\sup_{y \in S_R(0)} |\alpha(y)| = C$, alors pour tout $\delta > 0$, $x \in B_R(0)$, $y_0 \in S_R(0)$,

$$I_2(x, y_0, \delta) \leqslant 2CM_\delta(x, y_0)\,.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta_0 > 0$ tel que

$$|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que y_0, $y \in S_R(0)$, $\|y - y_0\| < \delta_0$, ce qui est possible à cause de la continuité uniforme de α ; pour ce choix de δ_0, on aura

$$I_1(x, y_0, \delta_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|u(x) - \alpha(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2CM_{\delta_0}(x, y_0)$$

pour $x \in B_R(0)$, $y_0 \in S_R(0)$. A l'aide de (iii) on conclut qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x - y_0\| < \eta$, $x \in B_R(0)$, alors

$$|u(x) - \alpha(y_0)| < \varepsilon\,,$$

y_0 étant un point fixe mais arbitraire de $S_R(0)$. ♦

REMARQUE. Pour $\delta > 0$ fixe, $M_\delta(x, y_0) \to 0$ lorsque $x \to y_0$, uniformément en $y_0 \in S_R(0)$, comme on s'aperçoit en considérant $M_\delta(x, y_0)$ ci-dessus ; on conclut que le choix de η peut-être fait indépendamment de y_0, ce qui donne

$$|u(x) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$$

dès que $\|x - y_0\| < \eta$, $y_0 \in S_R(0)$, $x \in B_R(0)$. Nous n'aurons pas besoin de ce raffinement.

La démonstration de la proposition 8.2.8 n'utilise pas le fait que $P_R(x,y)$ est obtenu d'une certaine manière à partir de la fonction de Green $G(x,y)$; elle dépend uniquement des propriétés (i), (ii), (iii) de $P_R(x,y)$. Néanmoins, le procédé de passer de $G(x,y)$ à $P_R(x,y)$ est général. Le calcul de $G(x,y)$ pour la boule $B_R(0)$ dépend de l'*inversion* de $x \neq 0$ par rapport à la sphère $S_R(0)$ pour avoir $\widetilde{x}$ (cf. (8.23)) ; ce procédé (dans $\mathbb{R}^3$) s'appelle la *méthode des images de Kelvin* en électrostatique.

Notons explicitement la solution du problème de Dirichlet pour la boule $B_R(a)$, $a \in \mathbb{R}^N$: l'unique $u \in C^2\big(B_R(a)\big) \cap C\big(\overline{B}_R(a)\big)$ telle que $\triangle u = 0$ dans $B_R(a)$ avec $u = \alpha$ sur $S_R(a)$ est donnée par

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x-a\|^2}{R\omega_N} \int_{S_R(a)} \frac{\alpha(y)}{\|x-y\|^N}\, \mathrm{d}\sigma(y)\,, \tag{8.29}$$

pour $x \in B_R(a)$. Il est intéressant de noter que (8.29) est valable dans $\mathbb{R}^N$ pour tout $N \geqslant 1$ (en interprétant le cas $N = 1$ de manière appropriée).

Nous appellerons (8.29) la ***solution du problème de Dirichlet dans la boule*** $B_R(a)$ ou encore la *formule intégrale de Poisson pour u dans la boule fermée* $\overline{B}_R(a)$.

8.3 FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES

8.3.1 Préliminaires

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$; le lemme 8.2.2 suggère que nous définissions les fonctions sous-harmoniques plus généralement comme suit : si $f \in C(\Omega)$, f réelle, f s'appelle ***sous-harmonique*** dans Ω si pour tout $a \in \Omega$ et pour toute boule $B_R(a)$ avec $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$, on a (§ 8.1.3)

$$f(a) \leqslant M_R(f,a)$$

f s'appelle ***surharmonique*** dans Ω si $-f$ est sous-harmonique dans Ω ce qui veut dire qu'alors, $f(a) \geqslant M_R(f,a)$, $a \in \Omega$, $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$. De nouveau notons que, pour $N = 1$, les fonctions (continues) sous-harmoniques sont les fonctions convexes et celles surharmoniques sont concaves ; nous verrons dans la suite que si f continue est à la fois sous-harmonique et surharmonique dans Ω, alors f est de classe C^2 dans Ω et f est harmonique dans Ω ($\triangle f = 0$ dans Ω). Nous utiliserons les fonctions sous-harmoniques pour donner une solution générale au problème de Dirichlet (sect. 8.5).

La proposition suivante donne plusieurs caractérisations des fonctions sous-harmoniques ; en particulier, elle établit que pour les fonctions $f \in C^2(\Omega)$, $\triangle f \geqslant 0$ dans Ω est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit sous-harmonique dans Ω, ce qui concorde avec les définitions préliminaires du paragraphe 8.2.1.

8.3.2 Proposition (*caractérisation des fonctions sous-harmoniques*)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$; pour une fonction réelle $f \in C(\Omega)$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) f est sous-harmonique dans le sens que

$$f(a) \leqslant M_R(f,a)\,, \quad a \in \Omega\,,\ \overline{B}_R(a) \subset \Omega\,;$$

(ii) pour tout $a \in \Omega$, $f(a) \leqslant A_R(f,a)$ (§ 8.1.3) dès que $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$;

(iii) pour tout domaine V tel que $\overline{V} \subset \Omega$, on a la propriété suivante : si $h \in C^2(V) \cap C(\overline{V})$ et h est harmonique dans V avec $f(x) \leqslant h(x)$ pour $x \in \operatorname{Fr} V$, alors $f(x) \leqslant h(x)$ pour $x \in \overline{V}$;

(iv) l'affirmation (iii) pour V une boule B telle que $\overline{B} \subset \Omega$;

(v) pour tout $a \in \Omega$, il existe $R_0 = R_0(a) > 0$ tel que $B_{R_0}(a) \subset \Omega$ avec

$$f(a) \leqslant M_R(f,a) \quad \textit{pour } 0 < R < R_0\,;$$

(vi) pour tout $a \in \Omega$, il existe $R_0 = R_0(a) > 0$ tel que $B_{R_0}(a) \subset \Omega$ avec

$$f(a) \leqslant A_R(f,a) \quad \textit{pour } 0 < R < R_0\,.$$

De plus, si $f \in C^2(\Omega)$, alors ces affirmations sont équivalentes à avoir $\triangle f \geqslant 0$ dans Ω.

DÉMONSTRATION

(i)⇒(ii) Ceci est une conséquence immédiate de la formule d'intégration (8.12).

(ii)⇒(iii) Pour démontrer cette implication, nous formulons le lemme suivant.

LEMME. *Soit $M = \sup_{x\in\Omega} f(x)$ où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue, Ω étant un domaine de $\mathbb{R}^N$; si f vérifie (ii) ou (vi) et s'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = M$, alors f est une constante.*

La démonstration de ce lemme est exactement comme celle de la proposition 8.2.3.

Si $f(x) \leqslant h(x)$, $x \in \operatorname{Fr} V$, h étant harmonique dans V et continue dans $\overline{V} \subset \Omega$, posons $g(x) = f(x) - h(x)$, $x \in \overline{V}$; puisque h est harmonique dans V, $h(a) = A_r(h,a)$ dès que $\overline{B}_r(a) \subset V$ (lemme 8.2.2) ; alors

$$g(a) = f(a) - h(a) \leqslant A_r(f,a) - A_r(h,a) = A_r(g,a)$$

dès que $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$. Soient

$$M = \sup_{x\in V} g(x)\,, \quad \widetilde{M} = \sup_{x\in\overline{V}} g(x)\,;$$

si $\widetilde{M} > 0$, alors $\widetilde{M} = g(a)$ pour un $a \in V$ (car $g(x) = f(x) - h(x) \leqslant 0$ pour $x \in \operatorname{Fr} V$) et on aurait $\widetilde{M} = M = g(a)$, entraînant que g est une constante strictement positive dans $\overline{V}$ (grâce au lemme), ce qui contredit le fait que $g(x) \leqslant 0$ pour $x \in \operatorname{Fr} V$. Donc $\widetilde{M} \leqslant 0$, ce qui donne $f(x) \leqslant h(x)$, $x \in \overline{V}$.

(iii)⇒(iv) Ceci est banal.

(iv)⇒(i) Soit $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$; d'après (8.29), il existe une fonction h, harmonique dans $B_R(a)$ et continue dans $\overline{B}_R(a)$ telle que $h(x) = f(x)$ pour $x \in S_R(a) = \operatorname{Fr} B_R(a)$. Selon (iv), $f(x) \leqslant h(x)$ pour $x \in \overline{B}_R(a)$ d'où

$$f(a) \leqslant h(a) = M_R(h, a) = M_R(f, a)$$

d'après le théorème de la moyenne de Gauss (remarque après le lemme 8.2.2).

Donc (i), (ii), (iii), (iv) sont équivalentes. L'implication (i)⇒(v) est banale et (v)⇒(vi) se déduit par intégration (comme (i)⇒(ii) ci-dessus) ; finalement, l'implication (vi)⇒(iii) se déduit du lemme précédent (exactement comme (ii)⇒(iii) ci-dessus).

Supposons que $f \in C^2(\Omega)$ et que f vérifie la condition (i) ; démontrons que $\triangle f(x) \geqslant 0$ pour $x \in \Omega$. Pour ce faire, nous établissons d'abord la formule suivante : si $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$, alors

$$f(a) = M_R(f, a) + \int_{B_R(a)} \{\gamma(x - a) - \psi_0(R)\} \triangle f(x)\, \mathrm{d}x \tag{8.30}$$

où ψ_0 et γ sont donnés par (8.15) et $M_R(f, a)$ est défini au paragraphe 8.1.3. En effet, dans la formule (8.18), prenons $\Omega = B_R(a)$; puisque, pour $x \in S_R(a) = \partial B_R(a)$, on a

$$\mathrm{D}_\nu \gamma(x - a) = \nabla \gamma(x - a) \cdot \frac{x - a}{R} = \frac{1}{R\omega_N} \|x - a\|^{-N+2} = \frac{1}{R^{N-1}\omega_N},$$

on obtient de (8.18)

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_{B_R(a)} \gamma(x - a) \triangle f(x)\, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{S_R(a)} \left\{ \frac{1}{R^{N-1}\omega_N} f(x) - \psi_0(R)\, \mathrm{D}_\nu f(x) \right\} \mathrm{d}\sigma(x) \\ &= M_R(f, a) + \int_{B_R(a)} \gamma(x - a) \triangle f(x)\, \mathrm{d}x - \psi_0(R) \int_{S_R(a)} \mathrm{D}_\nu f(x) \mathrm{d}\sigma(x) \ ; \end{aligned}$$

le dernier terme du deuxième membre est réécrit à l'aide de (8.4) :

$$\int_{S_R(a)} \mathrm{D}_\nu f \mathrm{d}\sigma = \int_{B_R(a)} \triangle f\, \mathrm{d}x \ ;$$

cela conduit à (8.30).

Puisque $f(a) \leqslant M_R(f,a)$, on tire de (8.30) que pour toute boule $B_R(a)$ telle que $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$,

$$\int_{B_R(a)} \{\gamma(x-a) - \psi_0(R)\}\, \triangle f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant 0\,. \tag{8.31}$$

Ceci entraîne que $\triangle f(a) \geqslant 0$ car sinon $\triangle f(a) < 0$ d'où, pour un $R > 0$, $\triangle f(x) < 0$ pour $x \in B_R(a)$ avec $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$; la définition de γ et ψ_0 dans (8.15) montre que

$$\gamma(x-a) - \psi_0(R) < 0 \quad \text{si } \|x-a\| < R$$

ce qui prouverait que l'intégrale dans (8.31) est > 0, contredisant (8.31).

Finalement, le fait que $f \in C^2(\Omega)$ avec $\triangle f \geqslant 0$ dans Ω entraîne (i) a été déjà établi dans le lemme 8.2.2. ♦

REMARQUES. Dorénavant, nous dirons qu'une fonction réelle $f \in C(\Omega)$, Ω étant un domaine de $\mathbb{R}^N$, est *sous-harmonique* si f vérifie une quelconque des six conditions énumérées dans la proposition précédente. La caractérisation (iii) de ces fonctions justifie la terminologie « sous-harmonique » : *dès qu'une telle fonction est majorée par une fonction harmonique sur la frontière d'un domaine, elle est majorée par la même fonction harmonique partout dans le domaine.*

Puisqu'une fonction réelle $f \in C(\Omega)$ est *surharmonique* si et seulement si $-f$ est sous-harmonique, on obtient six caractérisations analogues des fonctions surharmoniques en renversant les inégalités concernées ; cette remarque vaut également pour la déduction des autres propriétés des fonctions surharmoniques.

Pour $N = 1$, on retrouve dans la proposition précédente les propriétés bien connues des fonctions convexes ; notons que, contrairement aux fonctions convexes qui sont automatiquement continues dans chaque intervalle ouvert (ou même dans chaque ensemble convexe ouvert de $\mathbb{R}^N$), pour une fonction sous-harmonique, la continuité est une de nos *hypothèses*. En effet, il existe des fonctions non continues f telles que $f(a) \leqslant M_R(f,a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ et toute boule $B_R(a)$.

8.3.3 Propriétés des fonctions sous-harmoniques

Nous donnons ici quelques autres propriétés des fonctions sous-harmoniques toujours supposées être *continues* qui nous seront utiles dans la suite.

(i) ***Principe du maximum***

Une fonction sous-harmonique f non constante dans un domaine Ω ne peut jamais atteindre son maximum en un point $a \in \Omega$.

Autrement dit, $f(a) = \sup_{x\in\Omega} f(x)$ est impossible ; ceci est simplement le lemme qui apparaît dans la démonstration de la proposition 8.3.2.

(ii) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions sous-harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$; alors

$$f = \max\{f_1, \ldots, f_n\}, \quad g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$$

sont sous-harmoniques dans Ω.

En effet, pour tout $a \in \Omega$ avec $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$, on a

$$f_j(a) \leqslant M_R(f_j, a) \leqslant M_R(f, a), \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

d'où $f(a) \leqslant M_R(f, a)$, ce qui prouve que f est sous-harmonique dans Ω. La preuve de la sous-harmonicité de g est similaire.

(iii) ***Modification harmonique d'une fonction sous-harmonique***
Soit f une fonction sous-harmonique dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$. Si B est une boule ouverte avec $\overline{B} \subset \Omega$ et $h \in C(\overline{B})$, h harmonique dans B, avec $h(x) = f(x)$ pour $x \in \operatorname{Fr} B$, posons

$$T_B f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in \overline{B} \\ f(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{B} \ ; \end{cases}$$

alors $T_B f$ est une fonction sous-harmonique dans Ω avec $T_B f \geqslant f$.

REMARQUE. Notons que l'existence (et l'unicité) de h est garantie par (8.29) ; nous dirons que $T_B f$ est la *modification harmonique de f dans B.*

DÉMONSTRATION

Posons $\widetilde{f} = T_B f$; l'inégalité $\widetilde{f} \geqslant f$ vient de la caractérisation (iv) (prop. 8.3.2) des fonctions sous-harmoniques. La continuité de $\widetilde{f}$ est évidente. Si $a \in B$, alors $\widetilde{f}(a) = h(a) = M_r(h, a) = M_r(\widetilde{f}, a)$ pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}_r(a) \subset B$, à cause de l'harmonicité de h. Si $a \in \Omega \setminus B$, alors $\widetilde{f}(a) = f(a)$ et, pour toute boule $B_r(a)$ avec $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$, on a

$$\widetilde{f}(a) = f(a) \leqslant M_r(f, a) \leqslant M_r(\widetilde{f}, a)$$

car f est sous-harmonique et $f \leqslant \widetilde{f}$. On conclut à l'aide de la caractérisation (v) (prop. 8.3.2) que $\widetilde{f}$ est sous-harmonique dans Ω. ♦

Il est facile de donner des exemples de fonctions sous-harmoniques. Par exemple, si $x = (x_1, \ldots, x_N)$,

$$f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2$$

est une fonction sous-harmonique dans $\mathbb{R}^N$ car $\triangle f(x) = 2N > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^N$. La proposition suivante fournit beaucoup d'autres exemples.

8.3.4 Proposition (*solution de l'équation de Poisson*)

Soit φ une fonction réelle de classe C^2 à support compact dans $\mathbb{R}^N$; posons

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x-y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

où γ est la solution fondamentale définie par (8.15). Alors $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et $\triangle f(x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

REMARQUE. En particulier si $\varphi \geqslant 0$, alors f est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^N$.

DÉMONSTRATION

Rappelons que γ est intégrable dans chaque boule de $\mathbb{R}^N$; puisque φ est continue à support compact (c'est-à-dire $\varphi(x) = 0$ dès que $\|x\| \geqslant R$, pour un R approprié), $|\varphi|$ est majoré par une constante M et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(x-y)\,\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant M \int_{B_R(0)} |\gamma(x-y)|\,\mathrm{d}y = M \int_{B_R(x)} |\gamma(z)|\,\mathrm{d}z < \infty$$

de sorte que $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Posons $f = T\varphi$; ainsi

$$T\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x-y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(y)\,\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y$$

ce qui montre (en dérivant par rapport à x sous le signe de la seconde intégrale) que $T\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$\triangle(T\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(y)\,\triangle_x \varphi(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x-y)\,\triangle\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

d'où, en utilisant (8.19), on conclut que

$$\triangle f = \triangle T\varphi = T\,\triangle\varphi = \varphi$$

dans $\mathbb{R}^N$. ♦

REMARQUE. On voit que l'opérateur $\varphi \mapsto T\varphi$, $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ (fonctions de classe C^2 à support compact dans $\mathbb{R}^N$), est l'inverse de l'opérateur laplacien $\triangle$. Rappelons que $T\varphi$ s'appelle le *potentiel newtonien* engendré par φ. La proposition 8.3.4 peut être améliorée de plusieurs façons ; il suffit, par exemple, de supposer que φ soit de classe C^1 à support compact dans $\mathbb{R}^N$. Une proposition classique est la suivante : *soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction bornée localement höldérienne* (voir la définition qui suit) *dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$; posons $\varphi(x) = 0$ pour $x \in \Omega^c$; alors le potentiel newtonien $f = T\varphi$ est de classe C^2 dans Ω et $\triangle f = \varphi$ dans Ω* ; autrement dit, si

$$f(x) = \int_{\Omega} \gamma(x-y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega\,,$$

alors (sous les conditions indiquées sur φ et Ω), $f \in C^2(\Omega)$ et $\triangle f(x) = \varphi(x)$, $x \in \Omega$.

Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite *localement höldérienne* dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ s'il existe $\alpha \in]\,0\,,\,1\,]$ ayant la propriété suivante : pour toute boule $B \subset \Omega$, il existe une constante $C = C_B > 0$ telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C\|x - y\|^{\alpha}$$

pour x, $y \in B$. Il est clair qu'une fonction localement höldérienne est continue ; de plus, si Ω est ouvert et φ est de classe C^1 dans Ω, alors φ est localement höldérienne dans Ω (avec $\alpha = 1$, ce que l'on appelle aussi localement lipschitzienne). La condition höldérienne joue un rôle important dans la théorie du potentiel car elle renforce utilement la condition de continuité dans cette théorie. Il est connu que la proposition précédente est en défaut si φ est seulement continue et bornée ; nous ne poursuivrons pas ces aspects de la théorie du potentiel.

8.4 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES

8.4.1 Préliminaires

Par « fonction harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ », nous entendrons toujours une fonction réelle $f \in C^2(\Omega)$ telle que $\triangle f = 0$ dans Ω. Pour les fonctions harmoniques nous avons déjà établi le *principe du maximum et du minimum* (prop. 8.2.3 et son corollaire) et le *théorème de la moyenne de Gauss* (remarque après le lemme 8.2.2). De la proposition 8.2.8 (et sa généralisation donnée dans (8.29)) on conclut qu'*une fonction harmonique dans Ω est de classe C^∞ dans Ω*. La proposition suivante établit que la validité du théorème de la moyenne de Gauss caractérise les fonctions harmoniques.

8.4.2 Proposition (*caractérisation des fonctions harmoniques*)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = M_R(f, a)$ (ou $f(a) = A_R(f, a)$) pour tout $a \in \Omega$ et pour tout $R > 0$ tel que $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$. Alors f est harmonique dans Ω.

REMARQUE. Nous dirons que f *vérifie le théorème de la moyenne de Gauss* dans Ω si $f(a) = M_R(f, a)$ pour tout $a \in \Omega$ et pour tout $R > 0$ tel que $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$; la proposition dit alors qu'une fonction continue est harmonique dans Ω si et seulement si f vérifie le théorème de la moyenne de Gauss dans Ω.

DÉMONSTRATION

Notons que si $g(a) = M_R(g,a)$, $a \in \Omega$, $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$, ($g$ continue), alors $g(a) = A_R(g,a)$ également pour tout $a \in \Omega$, $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$ (grâce à (8.12)) ; sous cette dernière condition g vérifie le principe du maximum et du minimum (comme donné dans la proposition 8.2.3 et son corollaire).

Soit f une fonction qui vérifie les hypothèses de la proposition. Si $a \in \Omega$ et $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$, soit h une fonction continue dans $\overline{B}_R(a)$, harmonique dans $B_R(a)$ avec $h(x) = f(x)$ pour $x \in S_R(a) = \operatorname{Fr} B_R(a)$; l'existence de h est garantie par (8.29). Posons $g(x) = f(x) - h(x)$ pour $x \in \overline{B}_R(a)$; d'après nos hypothèses sur f et l'harmonicité de h, g vérifie le théorème de la moyenne dans $B_R(a)$. Donc, g vérifie le principe du maximum et du minimum dans $B_R(a)$; puisque $g(x) = 0$ pour $x \in S_R(a)$, on conclut alors que $g(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{B}_R(a)$ d'où $f(x) = h(x)$, $x \in \overline{B}_R(a)$. Ceci établit que f est harmonique dans $B_R(a)$; puisque a est quelconque, on conclut que f est harmonique dans Ω. ♦

8.4.3 Proposition (*inégalités de Harnack*)

(i) Si u est une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans $B_R(a) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, alors, pour tout $x \in B_R(a)$,

$$\alpha\left(\frac{\|x-a\|}{R}\right) u(a) \leqslant u(x) \leqslant \beta\left(\frac{\|x-a\|}{R}\right) u(a) \tag{8.32}$$

où

$$\alpha(t) = \frac{1-t}{(1+t)^{N-1}}, \quad \beta(t) = \frac{1+t}{(1-t)^{N-1}}, \qquad 0 \leqslant t < 1.$$

(ii) Si u dans (i) est > 0, alors, pour tout x, y dans $\overline{B}_r(a)$, $0 < r < R$,

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N \tag{8.33}$$

(iii) Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, et K une partie compacte non vide de Ω. Il existe une constante $C = C(\Omega, K) > 1$, telle que pour toute fonction $u \geqslant 0$, harmonique dans Ω, on a

$$\sup_{x \in K} u(x) \leqslant C \inf_{x \in K} u(x).$$

DÉMONSTRATION

(i) Si $0 < \rho < R$, on a de la formule intégrale de Poisson (8.29)

$$u(x) = \int_{S_\rho(a)} F(x,y) u(y)\, \sigma(\mathrm{d}y)$$

où $\|x-a\| = r(x) < \rho$ et

$$F(x,y) = \frac{\rho^2 - r(x)^2}{\rho\omega_N \|x-y\|^N}\,.$$

Si $y \in S_\rho(a)$, alors

$$\rho - r(x) \leqslant \|x-y\| \leqslant \rho + r(x)$$

d'où, pour $r(x) < \rho$,

$$\frac{\rho - r(x)}{\rho\omega_N\big(\rho + r(x)\big)^{N-1}} \leqslant F(x,y) \leqslant \frac{\rho + r(x)}{\rho\omega_N\big(\rho - r(x)\big)^{N-1}}\,.$$

Puisque $u \geqslant 0$, on en déduit, en utilisant la formule de la moyenne de Gauss, que

$$u(x) \leqslant \frac{\rho + r(x)}{\big(\rho - r(x)\big)^{N-1}} \cdot \rho^{N-2} \cdot \frac{1}{\rho^{N-1}\omega_N} \int_{S_\rho(a)} u(y)\,\sigma(\mathrm{d}y) = \beta\left(\frac{r(x)}{\rho}\right) u(a)$$

d'où, en faisant $\rho \to R$, on obtient l'inégalité de droite dans (8.32) ; l'inégalité de gauche de (8.32) s'obtient de même manière.

(ii) De (8.32), on obtient

$$\alpha\left(\frac{r}{R}\right)u(a) \leqslant u(x) \leqslant \beta\left(\frac{r}{R}\right)u(a)$$

d'abord pour $\|x-a\| = r$ et ensuite pour $\|x-a\| \leqslant r$, en utilisant le principe du maximum et du minimum pour les fonctions harmoniques. Donc, si x, y sont dans $\overline{B}_r(a)$, alors

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant \frac{\beta(r/R)}{\alpha(r/R)} = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N$$

(iii) On peut se borner au cas où $u > 0$ car si $u(x) = 0$ pour un $x \in \Omega$, alors $u \equiv 0$ selon le principe du minimum pour les fonctions harmoniques. L'affirmation à établir est donc la suivante : il existe $C(\Omega, K) > 0$ tel que, pour x, $y \in K$,

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant C(\Omega, K)\,, \tag{8.34}$$

u étant une fonction harmonique > 0 dans le domaine Ω et K une partie compacte non vide de Ω.

D'après (ii), (8.34) est vérifiée si

$$K \subset B_R(a) \subset \Omega$$

car alors $K \subset \overline{B}_r(a)$ pour un $r < R$; on pourra prendre

$$C(\Omega, K) = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N$$

dans ce cas. Formulons ceci comme suit : si B est une boule telle que $\overline{B} \subset \Omega$, alors il existe une constante $c > 1$ telle que, pour $x, y \in \overline{B}$,

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant c$$

où c dépend seulement du rayon r de B et de Ω (par l'intermédiaire de $R > r$ tel que $\overline{B} \subset B_R(a) \subset \Omega$) ; nous dirons que c est la constante associée à $\overline{B} \subset \Omega$. Nous établirons que *si $K \subset \Omega$, K compact, alors il existe un nombre fini n de boules ouvertes $B_1, \ldots, B_n$ telles que $\overline{B}_i \subset \Omega$, $1 \leqslant i \leqslant n$, avec*

$$K \subset B_1 \cup \ldots \cup B_n\,, \quad B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1\,.$$

En admettant ceci, (8.34) est facile à établir ; si c_i est la constante associée à $\overline{B}_i \subset \Omega$, posons $\theta = \max(c_1, \ldots, c_n)$; alors

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant \theta^n$$

dès que $x, y \in K$. En effet si x, y sont dans une même boule B_i, alors

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant c_i \leqslant \theta \leqslant \theta^n\,;$$

si $x \in B_i$, $y \in B_{i+j}$ et $x_i' \in B_i \cap B_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, alors

$$u(x) \leqslant \theta u(x_i') \leqslant \theta^2 u(x_{i+1}') \leqslant \ldots \leqslant \theta^j u(x_{i+j-1}') \leqslant \theta^{j+1} u(y)$$

d'où $u(x) \leqslant \theta^n u(y)$ puisque $j+1 \leqslant n$ et $\theta > 1$. Donc (8.34) est établi avec $C(\Omega, K) = \theta^n$.

Pour établir l'affirmation sur l'existence des boules $B_1, \ldots, B_n$, nous utiliserons la compacité de K et la connexité de Ω comme suit. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$ pour tout $x \in K$; ceci est possible car K compact est contenu dans Ω ouvert ; choisissons ensuite (en utilisant la compacité de K) une partie finie $F \subset K$ telle que

$$K \subset \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)\,.$$

Puisque Ω est connexe, il existe un chemin continu γ dans Ω reliant les points de F ; autrement dit, il existe $\gamma : [0, 1] \to \Omega$, γ continue, tel que $F \subset \gamma([0, 1])$. On peut supposer que $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ sont dans F ; supposons $r > 0$ tel que $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$ pour tout $x \in \gamma([0, 1])$; l'existence de r est garantie par la compacité de $\gamma([0, 1]) \subset \Omega$. En utilisant la continuité uniforme de γ, on peut déterminer

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$$

tels que

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\| < r\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1\,, \quad F \subset \{\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)\}\,.$$

Posons $\xi_i = \gamma(t_i)$; posons

$$B_i = \begin{cases} B_\rho(\xi_i) & \text{si } \xi_i \in F,\ \rho = \max(\varepsilon, r) \\ B_r(\xi_i) & \text{si } \xi_i \notin F. \end{cases}$$

Alors on vérifie aisément que les boules B_i satisfont aux propriétés utilisées ci-avant pour établir (8.34). ♦

8.4.4 Corollaire

Si u est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^N$ bornée supérieurement ou inférieurement, alors u est constante.

DÉMONSTRATION

En passant à $u + c$ ou $-u + c$, c une constante réelle, on peut supposer que $u(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Si x, $y \in \mathbb{R}^N$, soit r tel que $\|x\| < r$, $\|y\| < r$; avec $R > r$ on a alors, de (8.33),

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leqslant \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^N$$

d'où, en faisant $R \to \infty$, on obtient $u(x) \leqslant u(y)$. En renversant les rôles de x et y, on en déduit que $u(x) = u(y)$, x, $y \in \mathbb{R}^N$. ♦

REMARQUE. Le corollaire, ainsi que les inégalités de type (8.33), peuvent être établis directement de la formule $u(x) = A_r(u, x)$ sans passer par (8.32) (Ex. 7, sect. 8.9). Le corollaire est l'analogue du théorème de Liouville de l'analyse complexe : toute fonction entière, bornée dans $\mathbb{C}$, est constante (vol. 2).

8.4.5 Proposition (*principe de Harnack*)

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions harmoniques dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$. Alors, ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \infty$ pour tout $x \in \Omega$ ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, $x \in \Omega$, où u est une fonction harmonique dans Ω et la convergence des u_n vers u est uniforme dans toute partie compacte de Ω.

DÉMONSTRATION

En passant, si nécessaire, aux $u_n - u_0 + 1$ on peut supposer que $0 < u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots$; posons $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$, $x \in \Omega$. Si $u(a) = \infty$, démontrons que $u(x) = \infty$ pour tout $x \in \Omega$; en effet, de la proposition 8.4.3 appliquée à la partie compacte $K = \{a, x\}$, on a une constante $\theta > 1$ telle que

$$u_n(a) \leqslant \theta u_n(x)\,, \quad n \geqslant 0$$

d'où, en faisant $n \to \infty$, on obtient $u(x) = \infty$ si $u(a) = \infty$. Si $u(x)$ est fini pour tout $x \in \Omega$, démontrons la convergence uniforme des u_n vers u dans K, une partie compacte quelconque de Ω. En effet, soit $C = C(\Omega, K)$ la constante donnée par la proposition 8.4.3 ; puisque $u_n - u_m$ est harmonique dans Ω, on a, pour $n > m$ et $x \in K$,

$$0 \leqslant u_n(x) - u_m(x) \leqslant C\big\{u_n(a) - u_m(a)\big\}$$

où a est un point quelconque mais fixe de K. Ceci établit la convergence uniforme des u_n dans K. On en conclut que u est continue dans Ω et que u vérifie le théorème de la moyenne de Gauss dans Ω. En effet, si $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$ alors

$$u(a) = \lim_{n\to\infty} u_n(a) = \lim_{n\to\infty} M_r(u_n, a) = M_r(u, a)\,,$$

la dernière égalité provenant de la convergence uniforme des u_n dans $\overline{B}_r(a)$. ♦

8.4.6 Proposition (*solution fondamentale*)

Si γ est défini par (8.15) alors, au sens des distributions dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, on a

$$\triangle\gamma = \delta\,, \quad \triangle_x\gamma(x - a) = \delta_a\,, \quad a \in \mathbb{R}^N\,.$$

DÉMONSTRATION

C'est une conséquence immédiate de (8.19) ; si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors, d'après (8.19),

$$\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(y - a)\,\triangle\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

ce qui s'écrit en notation de la théorie des distributions (sect. 6.4)

$$\big\langle \delta_a\,,\, \varphi\big\rangle = \varphi(a) = \big\langle \gamma_a\,,\, \triangle\varphi\big\rangle = \big\langle \triangle\gamma_a\,,\, \varphi\big\rangle\,,$$

où $\gamma_a(x) = \gamma(x - a)$, ce qui veut dire que $\triangle\gamma_a = \delta_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^N$. Pour $a = 0$, on a $\triangle\gamma = \delta$. ♦

8.4.7 Proposition (*singularités artificielles*)

Soit u une fonction harmonique dans $B'_R(a) = B_R(a) \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^N$ avec $N \geqslant 2$; si

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{\gamma(x-a)} = 0$$

où γ est la solution fondamentale (8.15), alors $\lim_{x \to a} u(x) = \alpha$ existe avec $\alpha \in \mathbb{R}$; en posant $u(a) = \alpha$, u devient harmonique dans $B_R(a)$. En particulier, si u est une fonction harmonique bornée dans $B'_R(a)$, alors u se prolonge (uniquement) comme une fonction harmonique dans $B_R(a)$.

REMARQUE. Rappelons que pour $N \geqslant 3$, $\gamma(x)$ est un multiple de $\|x\|^{-N+2}$ et pour $N = 2$, $\gamma(x)$ est un multiple de $\ln \|x\|$; dans les deux cas, $|\gamma(x-a)| \to \infty$ lorsque $x \to a$, de sorte que la condition imposée sur u est certainement vérifiée si u est bornée dans $B'_R(a)$.

DÉMONSTRATION

Pour simplifier l'écriture, nous supposons que $a = 0$ et nous écrivons B_r, B'_r au lieu de $B_r(0)$, $B'_r(0)$. Fixons $0 < r < R$ et considérons le cas $N \geqslant 3$; soit v la fonction continue dans $\overline{B}_r$ qui est harmonique dans B_r avec $v(x) = u(x)$ si $\|x\| = r$ (prop. 8.2.8). Posons

$$w(x) = u(x) - v(x) - \varepsilon \left(\|x\|^{-N+2} - r^{-N+2} \right)$$

pour $0 < \|x\| \leqslant r$ où $\varepsilon > 0$; dans B'_r, w est harmonique et $w(x) = 0$ si $\|x\| = r$; de plus, $w(x) \to -\infty$ lorsque $x \to 0$ car

$$w(x) = \|x\|^{-N+2} \left(\frac{u(x)}{\|x\|^{-N+2}} - \varepsilon \right) - v(x) + \varepsilon r^{-N+2}$$

et

$$\frac{u(x)}{\|x\|^{-N+2}} - \varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2}$$

pour $\|x\|$ petit à cause du fait que $u(x)/\|x\|^{-N+2} \to 0$ lorsque $x \to 0$. Donc, on peut choisir $\delta > 0$ arbitrairement petit tel que $w(x) < 0$ si $\|x\| = \delta$; du principe du maximum, on conclut que $w(x) \leqslant 0$ pour $\delta < \|x\| \leqslant r$; δ étant arbitrairement petit, on a $w(x) \leqslant 0$ pour $0 < \|x\| \leqslant r$. En faisant $\varepsilon \to 0$ dans la définition de w, on conclut que $u(x) - v(x) \leqslant 0$ pour $0 < \|x\| \leqslant r$. Le même raisonnement appliqué sur

$$w(x) = v(x) - u(x) - \varepsilon \left(\|x\|^{-N+2} - r^{-N+2} \right)$$

permet de conclure que $v(x) - u(x) \leqslant 0$ pour $0 < \|x\| \leqslant r$ d'où $v(x) = u(x)$ pour $0 < \|x\| \leqslant r$. Ceci démontre l'affirmation pour $N \geqslant 3$. Pour $N = 2$, on utilise $-\ln\|x\|$ à la place de $\|x\|^{-N+2}$ et

$$w(x) = u(x) - v(x) - \varepsilon\big(-\ln\|x\| + \ln r\big)\,. \qquad \blacklozenge$$

8.4.8 Analyticité des fonctions harmoniques

De la formule intégrale de Poisson (prop. 8.2.8), on peut non seulement conclure qu'une fonction harmonique u est de classe C^∞ mais que u est *analytique* dans le sens suivant : si u est harmonique dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$, alors pour tout $a \in \Omega$

$$u(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha$$

pour $x \in B_r(a) \subset \Omega$ ($r > 0$ dépend de a, Ω et u) où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et

$$(x-a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_N - a_N)^{\alpha_N}$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et $a = (a_1, \ldots, a_N)$.

L'analyticité des fonctions harmoniques a des conséquences importantes. Ainsi, *si u, v sont deux fonctions harmoniques dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ et $u(x) = v(x)$ pour x dans une partie ouverte de Ω, alors $u \equiv v$ dans Ω.* C'est un *principe d'unicité* que nous avons vu pour les fonctions holomorphes et les fonctions harmoniques dans $\mathbb{C}$ (vol. 2). Une conséquence de cette unicité est la validité d'un *principe du maximum ou du minimum local : une fonction u harmonique non constante dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ ne peut pas avoir un maximum ou minimum local.* En effet, si $a \in \Omega$ est un maximum local, alors il existe $R > 0$ tel que $u(x) \leqslant u(a)$ pour $x \in B_R(a) \subset \Omega$, d'où par le principe du maximum déjà vu, $u(x) = u(a)$ pour tout $x \in B_R(a)$; le principe d'unicité précédent entraîne alors que u est une constante dans Ω, ce qui contredit l'hypothèse de la non constance de u.

8.5 PROBLÈME DE DIRICHLET

8.5.1 Préliminaires

Rappelons que le problème de Dirichlet pour l'opérateur laplacien $\triangle$ dans une partie ouverte non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, est le suivant : étant donné une fonction $\alpha : \operatorname{Fr}\Omega \to \mathbb{R}$, déterminer $u \in C^2(\Omega)$, tel que $\triangle u = 0$ dans Ω avec

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} u(x) = \alpha(a) \tag{8.35}$$

pour tout $a \in \operatorname{Fr}\Omega$. Lorsque u existe, nous dirons que u *est une solution* (dite ***classique***) *du problème de Dirichlet* (Ω, α). Observons que *si* u *existe alors* $\alpha \in C(\Omega)$; autrement dit, la continuité de α est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution classique du problème de Dirichlet (Ω, α). Ceci est une conséquence du fait que *si* $u \in C(\Omega)$ *et (8.35) est vérifiée pour tout* $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, *alors* $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, Ω étant une partie ouverte quelconque de $\mathbb{R}^N$ avec $\Omega \neq \emptyset$, $\operatorname{Fr}\Omega \neq \emptyset$. En effet, soit $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, $\varepsilon > 0$; si (8.35) est vérifiée pour a, il existe $r > 0$ tel que

$$x \in \Omega \cap B_r(a) \Longrightarrow \big|u(x) - \alpha(a)\big| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Démontrons que si $b \in \operatorname{Fr}\Omega \cap B_{r/2}(a)$, alors $\big|\alpha(b) - \alpha(a)\big| < \varepsilon$. Pour ce faire, prenons $r' > 0$ tel que $r' < r/2$ et

$$x \in \Omega \cap B_{r'}(b) \Longrightarrow \big|u(x) - \alpha(b)\big| < \frac{\varepsilon}{2}\ ;$$

l'existence de r' est garantie par la validité de (8.35) lorsque $a = b$. Puisque

$$\Omega \cap B_{r'}(b) \subset \Omega \cap B_r(a)$$

dès que $b \in B_{r/2}(a)$, on obtient, en prenant un $x \in \Omega \cap B_{r'}(b)$, que

$$\big|\alpha(b) - \alpha(a)\big| \leqslant \big|\alpha(b) - u(x)\big| + \big|u(x) - \alpha(a)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + = \varepsilon$$

pour tout $b \in \operatorname{Fr}\Omega \cap B_{r/2}(a)$, établissant la continuité de α en $a \in \operatorname{Fr}\Omega$.

Puisque nous ne considérons que les solutions classiques, nous étudions le problème de Dirichlet (Ω, α) seulement pour $\alpha \in C(\Omega)$; dans ce cas, une solution u du problème de Dirichlet (Ω, α) peut être considérée comme une fonction u de $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $\triangle u = 0$ dans Ω avec $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$. Nous démontrons dans cette section que si Ω est un *domaine borné* de $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, et si $\operatorname{Fr}\Omega$ vérifie certaines conditions, alors le problème de Dirichlet (Ω, α) possède une solution (nécessairement unique, prop. 8.2.4).

Voici un exemple simple pour démontrer la nécessité de quelques conditions sur $\operatorname{Fr}\Omega$. Soit $\Omega = B_1'(0) = B_1(0) \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^N$; alors

$$\operatorname{Fr}\Omega = \{0\} \cup S\,, \quad S = \big\{x : \|x\| = 1\big\}\,.$$

Prenons $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$ défini par

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in S \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, une solution u pour le problème de Dirichlet (Ω, α) ne peut pas exister. En effet, si u est une fonction harmonique dans $B_1'(0) = \Omega$ avec $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$, alors u est prolongeable à $B_1(0)$ comme fonction harmonique (prop. 8.4.7) ; on aura alors $u \in C^2\big(B_1(0)\big) \cap C\big(\overline{B_1(0)}\big)$ telle que u est harmonique dans $B_1(0)$ avec $u(x) = 0$ lorsque $\|x\| = 1$. D'après le principe du maximum (prop. 8.2.3), $u \equiv 0$ dans $\overline{B}_1(0)$, ce qui est contraire à l'exigence $u(0) = 1$.

Poursuivant une méthode élémentaire (dite *de Perron*) nous associons, dans un premier temps, une fonction harmonique h_α^Ω à *tout domaine borné* Ω de $\mathbb{R}^N$ et *toute fonction bornée* $\alpha : \operatorname{Fr}\Omega \to \mathbb{R}$. Nous démontrons ensuite que si $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$ et $\operatorname{Fr}\Omega$ vérifie une certaine condition, alors $u = h_\alpha^\Omega$ est l'unique solution du problème de Dirichlet (Ω, α).

Toutes les fonctions dans cette section, sauf mention contraire, seront réelles. Le cas où $N = 1$ est banal car les fonctions harmoniques dans les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto ax + b$; néanmoins, même dans ce cas, la méthode de Perron est intéressante à observer, comme nous l'indiquerons au moment opportun.

8.5.2 Méthode de Perron

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Si $\alpha : \operatorname{Fr}\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction *bornée* quelconque, posons $\mathcal{F}_\alpha$ pour la famille de toutes les fonctions continues $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui sont *sous-harmoniques* dans Ω avec $f \leqslant \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$. Notons que $\mathcal{F}_\alpha$ est non vide car si $m = \inf\{\alpha(x) : x \in \operatorname{Fr}\Omega\}$, alors $f \equiv m$ est une fonction dans $\mathcal{F}_\alpha$. Posons

$$h(x) = h_\alpha^\Omega(x) = \sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}_\alpha\}, \quad x \in \overline{\Omega} \tag{8.36}$$

Si $M = \sup\{\alpha(x) : x \in \operatorname{Fr}\Omega\}$, le principe du maximum entraîne que, pour $f \in \mathcal{F}_\alpha$, $f \leqslant M$ dans $\overline{\Omega}$ d'où $h \leqslant M$ dans $\overline{\Omega}$; de plus, $h \leqslant \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ car chaque $f \in \mathcal{F}_\alpha$ possède cette propriété. Nous appellerons $h = h_\alpha^\Omega$ la *fonction de Perron* associée à Ω et α.

Au sujet de (8.36), faisons deux remarques.

REMARQUES

(i) Si Ω est un intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, on peut visualiser la définition (8.36) comme suit : chaque $f \in \mathcal{F}_\alpha$ est alors une fonction (continue) convexe dans $[a, b]$ avec $f(a) \leqslant \alpha(a)$, $f(b) \leqslant \alpha(b)$; le supremum de ces $f \in \mathcal{F}_\alpha$ donne évidemment la fonction affine $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $h(a) = \alpha(a)$, $h(b) = \alpha(b)$.

(ii) Supposons que u est une solution du problème de Dirichlet (Ω, α) où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$. *L'existence de u étant assurée, il est facile d'établir que $u = h_\alpha^\Omega = h$ dans $\overline{\Omega}$.* En effet, u (harmonique dans Ω) est alors dans $\mathcal{F}_\alpha$ d'où $h \geqslant u$ dans $\overline{\Omega}$; d'autre part, puisque chaque $f \in \mathcal{F}_\alpha$ est sous-harmonique avec $f \leqslant \alpha = u$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, on conclut que $f \leqslant u$ dans $\overline{\Omega}$ (grâce à la prop. 8.3.2(iii)) car u est harmonique dans Ω. Ainsi, $h \leqslant u$ dans $\overline{\Omega}$ (car $h = \sup f$, $f \in \mathcal{F}_\alpha$) ce qui établit que $h = u$ dans $\overline{\Omega}$.

La dernière remarque montre que la fonction h définie par (8.36) est un choix plausible pour une solution du problème de Dirichlet (Ω, α). En tout cas, on a la proposition générale suivante.

8.5.3 Proposition (*harmonicité de la fonction de Perron*)

Pour tout domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$ et pour toute fonction bornée α : $\mathrm{Fr}\,\Omega \to \mathbb{R}^N$, la fonction $h = h_\alpha^\Omega$ définie par (8.36) est une fonction harmonique dans Ω.

DÉMONSTRATION

Observons d'abord que :

(i) si $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_\alpha$, alors $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}_\alpha$,

(ii) si B est une boule ouverte telle que $\overline{B} \subset \Omega$ et si $f \in \mathcal{F}_\alpha$, alors $T_B f \in \mathcal{F}_\alpha$ où $T_B f$ est la modification harmonique de f dans B (§ 8.3.3(iii)).

Rappelons que chaque $f \in \mathcal{F}_\alpha$ est majorée par $M = \sup_x \alpha(x)$.

Il suffit d'établir que si $B = B_R(a)$ est tel que $\overline{B} \subset \Omega$, alors h est harmonique dans B.

Soit $\{f_1, f_2, \ldots\}$ une suite dans $\mathcal{F}_\alpha$ telle que $f_n(a) \to h(a)$, lorsque $n \to \infty$; si

$$g_n = T_B \max(f_1, \ldots, f_n), \quad n \geqslant 1,$$

alors $\{g_n\}$ est une suite croissante dans $\mathcal{F}_\alpha$ telle que $g_n(a) \to h(a)$, $n \to \infty$, avec g_n harmonique dans B pour $n \geqslant 1$. Selon le principe de Harnack (prop. 8.4.5), $g_n(x) \to g(x)$ lorsque $n \to \infty$, uniformément dans toute partie compacte de B où g est une fonction harmonique dans B ; évidemment, $g(a) = h(a)$. De la définition même de h, il est clair que $g(x) \leqslant h(x)$, $x \in B$; nous démontrons que $h(x) \leqslant g(x)$, $x \in B$, ce qui donnera $h(x) = g(x)$, $x \in B$, et établira l'harmonicité de h dans B.

Pour établir $h \leqslant g$ dans B, il suffit de voir que $f \leqslant g$ dans B pour tout $f \in \mathcal{F}_\alpha$. Pour $f \in \mathcal{F}_\alpha$, posons

$$v_n = T_B \max(g_n, f), \quad n \geqslant 1 ;$$

alors $v_n \in \mathcal{F}_\alpha$ et $v_n(a) \leqslant h(a) = g(a)$, v_n étant harmonique dans B pour $n \geqslant 1$. Si $0 < \rho < R$, alors $B_\rho(a) \subset B = B_R(a)$ et

$$g(a) \geqslant v_n(a) = M_\rho(v_n, a) \geqslant M_\rho\big(\max(g_n, f), a\big)$$

car $\max(g_n, f) \leqslant v_n$ dans $\overline{B}$ d'après le paragraphe 8.3.3(iii). Puisque $g_n \to g$ $(n \to \infty)$ uniformément dans $\overline{B}_\rho(a)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} M_\rho\big(\max(g_n, f), a\big) = M_\rho\big(\max(g, f), a\big)$$

d'où

$$g(a) \geqslant M_\rho\big(\max(g, f), a\big).$$

Puisque $g(a) = M_\rho(g, a)$, à cause de l'harmonicité de g dans B, on a

$$\int_{S_\rho(a)} g(x)\,\sigma(\mathrm{d}x) \geqslant \int_{S_\rho(a)} \max\bigl(g(x), f(x)\bigr)\,\sigma(\mathrm{d}x)$$

ce qui entraîne que $f(x) \leqslant g(x)$ pour $\|x - a\| = \rho$; ceci étant vrai pour tout $\rho < R$, on conclut que $f \leqslant g$ dans B. ♦

8.5.4 Résolutivité

On peut également considérer la classe $\mathcal{G}_\alpha$ de toutes les fonctions continues $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui sont *surharmoniques* dans Ω avec $f \geqslant \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ et poser

$$H(x) = H_\alpha^\Omega(x) = \inf\bigl\{f(x) : f \in \mathcal{G}_\alpha\bigr\}, \quad x \in \overline{\Omega} \tag{8.37}$$

Il est évident (d'après la proposition 8.5.3 et sa démonstration) que *pour tout domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et pour toute fonction bornée $\alpha : \operatorname{Fr}\Omega \to \mathbb{R}$, la fonction $H = H_\alpha^\Omega$ définie par (8.37) est une fonction harmonique dans Ω*. Puisque pour tout $f \in \mathcal{F}_\alpha$, $g \in \mathcal{G}_\alpha$, on a $f \leqslant g$ dans $\overline{\Omega}$ (car $f \leqslant \alpha \leqslant g$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ d'où $f - g \leqslant 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ et $f - g$ est sous-harmonique ce qui prouve l'affirmation, grâce au principe du maximum), on conclut que

$$h_\alpha^\Omega \leqslant H_\alpha^\Omega$$

dans $\overline{\Omega}$ (α, Ω étant comme ci-dessus). Il est intéressant de noter que *si Ω est borné et $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, alors $h_\alpha^\Omega = H_\alpha^\Omega$ dans $\overline{\Omega}$* (théorème de Wiener). Les fonctions $\alpha : \operatorname{Fr}\Omega \to \mathbb{R}$ telles que $h_\alpha^\Omega = H_\alpha^\Omega$ dans $\overline{\Omega}$ sont dites *résolutives* ; ainsi, les $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$ sont résolutives (Ω étant un domaine borné). Nous n'aurons pas besoin de cette remarque et nous ne la démontrerons pas ; dans la suite, nous utiliserons seulement h_α^Ω et la proposition 8.5.3.

8.5.5 Points réguliers de la frontière

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}$; un point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ s'appelle un point ***régulier*** (sous-entendu, *pour le problème de Dirichlet* concernant le laplacien dans Ω) si pour tout $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} h_\alpha^\Omega(x) = \alpha(a) \tag{8.38}$$

où $h = h_\alpha^\Omega$ est défini dans (8.36). Si tous les points de $\operatorname{Fr}\Omega$ sont *réguliers*, alors nous dirons que Ω (ou $\operatorname{Fr}\Omega$) est ***régulier*** (en ajoutant, *pour le problème de Dirichlet*, s'il est nécessaire de distinguer cette notion de celle de la régularité géométrique définie dans le paragraphe 7.7.2). Puisque h_α^Ω est toujours harmonique dans Ω borné (prop. 8.5.3), on conclut que *le problème de Dirichlet dans un domaine borné Ω possède une solution u avec $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, pour tout choix de $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, si et seulement si Ω est régulier* (pour le problème de Dirichlet). En effet, si Ω est borné et régulier, $u = h_\alpha^\Omega$ est la solution

du problème de Dirichlet avec $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, car u est harmonique dans Ω (prop. 8.5.3) et (8.38) est vérifiée à chaque point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, selon la définition même de la notion de régularité. D'autre part, d'après la remarque (iii) du paragraphe 8.5.2, si u est la solution du problème de Dirichlet dans Ω avec $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, alors $u = h_\alpha^\Omega$, d'où la validité de (8.38) pour tout $a \in \Omega$ et tout $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$.

Nous introduisons maintenant une condition analytique nouvelle qui s'avère être équivalente à la notion de régularité introduite ci-dessus. Soit $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, Ω étant un domaine de $\mathbb{R}^N$; une fonction continue, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, s'appelle une ***barrière*** *au point a (relatif à Ω)*, si f est sous-harmonique dans Ω et $f < 0$ dans $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$ avec $f(a) = 0$. Notons que *l'existence d'une barrière au point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ est une propriété locale de $\operatorname{Fr}\Omega$ dans un voisinage ouvert de a* dans le sens suivant : soit V une boule ouverte contenant a ; supposons qu'il existe une fonction continue $g : \overline{V \cap \Omega} \to \mathbb{R}$ telle que g est sous-harmonique dans $V \cap \Omega$ et $g < 0$ dans $\overline{V \cap \Omega} \setminus \{a\}$ avec $g(a) = 0$; on appelle g une *barrière locale* au point a relatif à Ω. Si B est une boule ouverte contenant a telle que $\overline{B} \subset V$, posons

$$f(x) = \begin{cases} \max\bigl(M, g(x)\bigr) & \text{si } x \in \overline{\Omega} \cap B \\ M & \text{si } x \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

où $M = \sup\bigl\{g(x) : x \in (V \setminus B) \cap \Omega\bigr\}$; on vérifie aisément que $M < 0$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue, f est sous-harmonique dans Ω avec $f(a) = 0$, $f < 0$ dans $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$; autrement dit, f est une barrière au point a relatif à Ω.

8.5.6 Proposition (*existence d'une solution du problème de Dirichlet*)

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$.

(i) S'il existe une barrière au point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, alors pour tout $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} h_\alpha^\Omega(x) = \alpha(a)\,.$$

(ii) Le problème de Dirichlet (Ω, α) possède une solution pour tout $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$ si et seulement s'il existe une barrière en chaque point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$.

DÉMONSTRATION

(i) Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une barrière au point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$. Posons $h = h_\alpha^\Omega$ où $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque α est continue, il existe $r > 0$ tel que

$$\alpha(a) - \varepsilon < \alpha(x) < \alpha(a) + \varepsilon\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega \cap B_r(a)\,;$$

soit $m = \sup\bigl\{f(x) : x \in \overline{\Omega} \setminus B_r(a)\bigr\}$; alors $-\infty < m < 0$; posons

$$k = \frac{1}{|m|} \sup_{x \in \operatorname{Fr}\Omega} \bigl|\alpha(x) - \alpha(a)\bigr|\,.$$

Alors,

$$|\alpha(x) - \alpha(a)| \leqslant k|m| \leqslant k|f(x)| \quad \text{si } x \in \operatorname{Fr}\Omega \setminus B_r(a)$$

d'où (en tenant compte que $f(x) < 0$ si $x \neq a$)

$$\alpha(a) - \varepsilon + kf(x) < \alpha(a) + kf(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant \alpha(a) - kf(x) < \alpha(a) + \varepsilon - kf(x)$$

pour $x \in \operatorname{Fr}\Omega \setminus B_r(a)$; on en tire

$$\alpha(a) - \varepsilon + kf(x) < \alpha(x) < \alpha(a) + \varepsilon - kf(x) \tag{8.39}$$

pour tout $x \in \operatorname{Fr}\Omega$. De (8.39) nous déduisons que

$$\alpha(a) - \varepsilon + kf(x) \leqslant h(x) \leqslant \alpha(a) + \varepsilon - kf(x) \tag{8.40}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$. En effet, $\alpha(a) - \varepsilon + kf(x) \in \mathcal{F}_\alpha$ (car $\alpha(a) - \varepsilon + f$ est sous-harmonique dans Ω, continue dans $\overline{\Omega}$ et majorée par α sur $\operatorname{Fr}\Omega$ grâce à (8.39)) d'où la validité de la première inégalité de (8.40). D'autre part, si $g \in \mathcal{F}_\alpha$ alors, pour $x \in \operatorname{Fr}\Omega$,

$$g(x) \leqslant \alpha(x) < \alpha(a) + \varepsilon - kf(x)$$

grâce à (8.39), d'où

$$g(x) + kf(x) < \alpha(a) + \varepsilon\,, \quad x \in \operatorname{Fr}\Omega\,;$$

puisque $g+kf$ est sous-harmonique, on en déduit (du principe du maximum) que

$$g(x) + kf(x) < \alpha(a) + \varepsilon\,, \quad x \in \overline{\Omega}$$

d'où

$$g(x) < \alpha(a) + \varepsilon - kf(x)\,, \quad x \in \overline{\Omega}\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathcal{F}_\alpha$, on obtient

$$h(x) = \sup_{g \in \mathcal{F}_\alpha} g(x) \leqslant \alpha(a) + \varepsilon - kf(x)\,, \quad x \in \overline{\Omega}$$

ce qui donne (8.40). Puisque $f(x) \to f(a) = 0$ lorsque $x \to a$, $x \in \overline{\Omega}$, et ε est arbitraire, on conclut de (8.40) que $h(x) \to \alpha(a)$ lorsque $x \to a$ par valeurs de $x \in \Omega$.

(ii) Supposons que le problème de Dirichlet (Ω, α) possède une solution pour tout $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$; si $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, prenons $\alpha_a(x) = -\|x - a\|$, $x \in \operatorname{Fr}\Omega$ et soit u_a la solution du problème de Dirichlet (Ω, α_a). Alors, $u_a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une barrière au point a, ce que l'on vérifie aisément.

D'autre part, s'il existe une barrière en chaque point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, il résulte de (i) que, pour tout $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, la fonction, $u = h_\alpha^\Omega$ sur Ω, $u = \alpha$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, est une solution du problème de Dirichlet (Ω, α). ♦

8.5.7 Conditions géométriques pour la régularité

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Une condition simple pour qu'un point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ soit *régulier* (pour le problème de Dirichlet dans Ω) est celle que l'on appelle *condition de la boule extérieure* en a : il existe $x_0 \in \operatorname{ext}\Omega = (\overline{\Omega})^c$ tel que si $r = \|x_0 - a\|$, alors

$$\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega^c, \quad \{\operatorname{Fr} B_r(x_0)\} \cap \operatorname{Fr}\Omega = \{a\}$$

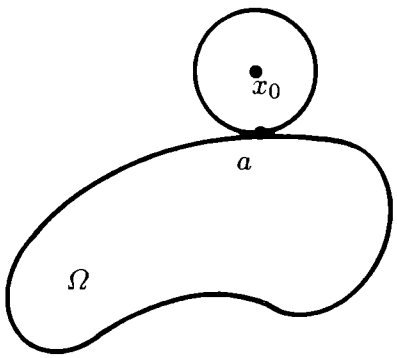


Fig. 8.1

En effet, si

$$f(x) = \begin{cases} \|x - x_0\|^{-N+2} - r^{-N+2} & \text{si } N \geqslant 3 \\ \ln r - \ln\|x - x_0\| & \text{si } N = 2, \end{cases} \qquad x \neq x_0$$

alors $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue, f est harmonique (donc sous-harmonique) dans Ω avec $f(a) = 0$ mais $f(x) < 0$ si $x \in \overline{\Omega} \setminus \{a\}$ (car, alors $\|x - x_0\| > r$) ; autrement dit, f est une barrière au point a (relatif à Ω), ce qui montre que a est un point régulier (prop. 8.5.6). La condition de la boule extérieure permet déjà d'établir que le problème de Dirichlet (Ω, α) possède une solution pour beaucoup de domaines bornés simples Ω et $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$. Par exemple si Ω est convexe et borné, alors cette condition est applicable.

Une condition plus générale est celle appelée *condition du cône extérieur* en $a \in \operatorname{Fr}\Omega$: il existe un cône convexe tronqué K de sommet a tel que

$$K \setminus \{a\} \subset (\overline{\Omega})^c.$$

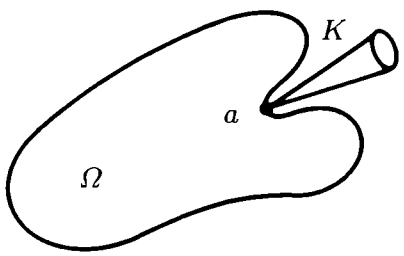


Fig. 8.2

Nous ne formulons pas cette condition analytiquement car nous ne démontrons pas ici que si la condition du cône extérieur est vérifiée en $a \in \operatorname{Fr}\Omega$, alors il existe une barrière au point a. On conclut que si $\operatorname{Fr}\Omega$ vérifie la condition du cône extérieur en chaque point de $\operatorname{Fr}\Omega$, alors le problème de Dirichlet (Ω, α) possède une solution pour Ω (domaine borné) et $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$.

En construisant des barrières diverses, on peut donner d'autres conditions de régularité. Le sujet est trop vaste pour continuer à le développer ici ; nous concluons ce paragraphe en mentionnant quelques faits qui sont établis par les méthodes développées ici : *Pour les domaines bornés* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, il existe une condition nécessaire et suffisante pour que Ω soit régulier (pour le problème de Dirichlet) : la condition est qu'aucune composante connexe de $\operatorname{Fr}\Omega$ ne se réduise à un point. (Rappelons que la composante connexe d'un point $a \in A = \operatorname{Fr}\Omega$ est le plus grand ensemble connexe $E(a) \subset A$ tel que $a \in E(a)$; vol. 1, § 1.8.3.) Cette condition clarifie géométriquement la raison pour laquelle $B_1'(0)$ n'est pas régulier. Dans $\mathbb{R}^3$, il existe un domaine borné Ω ayant exactement un point irrégulier $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ (qui ne vérifie naturellement pas la condition du cône extérieur) formé par un procédé utilisant une construction géométrique appelée « l'épine de Lebesgue ». En tout cas, pour un domaine borné Ω quelconque, l'ensemble des points irréguliers de $\operatorname{Fr}\Omega$ est un ensemble « négligeable » dans un sens fort. De plus, on peut démontrer que tout domaine borné Ω peut être approché par des domaines réguliers : il existe $\{\Omega_n\}$ une suite croissante de domaines réguliers tels que $\overline{\Omega_n} \subset \Omega$, $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$.

L'idée principale qui se dégage de l'étude de la régularité des points de $\operatorname{Fr}\Omega$ (Ω domaine borné ou non) est qu'un point $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ est régulier (pour le problème de Dirichlet dans Ω) si Ω^c n'est pas trop « effilé » dans un voisinage ouvert de a. Par ailleurs, le terme *effilé* est devenu un mot généralement utilisé dans ce contexte. Bien entendu, un extrême effilement se produit lorsque a est un point isolé de Ω^c, comme c'est le cas pour $\Omega = B_r'(a)$, où le problème de Dirichlet n'a pas toujours de solution classique.

8.5.8 Domaines non bornés

Le nouveau phénomène principal qui apparaît dans la solution du problème de Dirichlet (Ω, α) lorsque Ω est un domaine non borné est celui de la non-unicité des solutions. L'exemple simple suivant illustre cette remarque générale. Soit $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$, défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y > 0\} ;$$

considérons le problème de Dirichlet $(\Omega, 0)$ où 0 est la fonction identiquement nulle dans $\operatorname{Fr}\Omega = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. On constate immédiatement que toute fonction u_c définie par

$$u_c(x, y) = cy\,, \quad (x, y) \in \overline{\Omega}\,,$$

avec $c \in \mathbb{R}$, est une solution. On conclut que la solution du problème de Dirichlet (Ω, α) ne peut pas être unique ; si u est une solution, alors $u + u_c$ est également

une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$. Pour fixer une solution, on doit introduire une *condition à l'infini* déterminant le comportement de $u(x,y)$ lorsque $\|(x,y)\|$ est grand ; cette remarque vaut généralement pour Ω un domaine non borné dans $\mathbb{R}^N$.

A cause de son importance, nous donnons ici une solution u du problème de Dirichlet (Ω, α) où $\Omega = \mathbb{R}^2_+$ en écrivant $\alpha(x,0)$ comme $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pour $y > 0$, posons

$$\widehat{u}(p,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) \exp(-ipx)\, \mathrm{d}x \,;$$

ainsi, $p \mapsto \widehat{u}(p,y)$ est la transformée de Fourier de la fonction inconnue $x \mapsto u(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$, pour $y > 0$ fixe. Evidemment, nous ne savons pas d'avance que $x \mapsto u(x,y)$ est intégrable, mais nous procédons comme si c'était le cas ; le résultat u obtenu par ce procédé s'avère être une bonne solution comme nous pourrons le vérifier dans la suite. Posons $\widehat{\alpha}$ pour la transformée de Fourier de α. Des formules données pour les transformées de Fourier (§ 6.1.3), on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} u''_{xx}(x,y) \exp(-ipx)\, \mathrm{d}x = -p^2\, \widehat{u}(p,y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u''_{yy}(x,y) \exp(-ipx)\, \mathrm{d}x = \widehat{u}''_{yy}(p,y)$$

d'où $\triangle u = 0$ dans $\mathbb{R}^2_+$, $u(x,0) = \alpha(x)$, se transforme en

$$u''_{yy}(p,y) - p^2\, \widehat{u}(p,y) = 0\,, \quad \widehat{u}(p,0) = \widehat{\alpha}(p) \tag{8.41}$$

avec $p \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Pour chaque p fixe, nous pouvons résoudre (8.41) comme une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre en y. En choisissant une solution bornée de (8.41), on obtient

$$\widehat{u}(p,y) = \widehat{\alpha}(p) \exp\bigl(-|p|y\bigr)$$

d'où, selon la formule de convolution (§ 6.1.3),

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) g(x-t,y)\, \mathrm{d}t\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ y > 0$$

avec g choisie de telle sorte que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \exp(-ipx)\, \mathrm{d}x = \exp\bigl(-|p|y\bigr)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ y > 0\,.$$

Du paragraphe 6.1.5 (exemple 3), on voit que g doit être de la forme

$$g(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

ce qui donne la formule

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ y > 0\,. \tag{8.42}$$

On peut maintenant démontrer directement que *si* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et bornée, alors (8.42) définit une fonction* $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ *telle que* $u \in C^2(\mathbb{R}^2_+)$, $\triangle u = 0$ *dans* $\mathbb{R}^2_+$ *et que*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ y>0}} u(x,y) = \alpha(a)\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Autrement dit, u défini par (8.40) est une solution (classique) du problème de Dirichlet $(\mathbb{R}^2_+, \alpha)$; nous ne faisons pas cette démonstration ici. On peut démontrer, de plus, que *(8.41) est l'unique solution bornée du problème de Dirichlet* $(\mathbb{R}^2_+, \alpha)$; ici, la condition de bornitude est une condition à l'infini.

En s'inspirant de la formule (8.42), on peut écrire une solution du problème de Dirichlet $(\mathbb{R}^N_+, \alpha)$ où

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\} = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^*_+\,, \quad N \geqslant 2$$

$$\alpha : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R} \text{ continue, bornée.}$$

On a

$$\begin{aligned} u(x) = u(x', x_N) &= \frac{2x_N}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\alpha(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\|x' - t\|^2 + x_N^2\right)^{N/2}} \\ &= \frac{2}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\alpha(x' + x_N t)\,\mathrm{d}t}{\left(1 + \|t\|^2\right)^{N/2}}\,. \end{aligned} \tag{8.43}$$

De la première formule pour $u(x)$, on vérifie que $\triangle u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N_+$, par un calcul direct ; la seconde formule de (8.43) permet de montrer que

$$\lim_{\substack{(x',x_N)\to(a,0)\\ x_N>0}} u(x', x_N) = \alpha(a)\,, \quad a \in \mathbb{R}^{N-1}$$

en utilisant la formule

$$\frac{2}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + \|t\|^2\right)^{N/2}}\,\mathrm{d}t = 1\,. \tag{8.44}$$

La formule (8.44) s'établit en utilisant (8.8), puis en posant $r^2 = s/(1-s)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + \|t\|^2\right)^{N/2}} &= \omega_{N-1} \int_0^\infty \frac{r^{N-2}}{\left(1 + r^2\right)^{N/2}}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\,\omega_{N-1} \int_0^1 s^{(N-1)/2-1}\left(1 - s\right)^{1/2-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\,\omega_{N-1} \frac{\Gamma\left((N-1)/2\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(N/2)} = \frac{\omega_N}{2} \end{aligned}$$

car $\omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ (vol. 2, p. 333 ou vol. 1, p. 307, à propos de la fonction bêta). On peut démontrer que *(8.42) donne l'unique solution classique bornée u du problème de Dirichlet* $(\mathbb{R}^N_+, \alpha)$, $\alpha : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ *étant continue et bornée.*

En ce qui concerne l'existence des solutions pour un problème de Dirichlet (Ω, α), Ω domaine non borné de $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in C(\operatorname{Fr}\Omega)$, on a des théorèmes analogues à ceux indiqués pour le cas de Ω borné. Citons un théorème qui couvre la plupart des applications. *Soit* Ω *tel que* $\overline{\Omega} \neq \mathbb{R}^N$ *; s'il y a une barrière locale à chaque point* $a \in \operatorname{Fr}\Omega$ *(§ 8.5.5), alors il existe une solution classique u au problème de Dirichlet* (Ω, α). En imposant différentes conditions à l'infini, on peut rendre cette solution unique ; nous n'entrerons pas dans ces questions ici.

8.6 VALEURS PROPRES

8.6.1 Préliminaires

Le résultat essentiel concernant les valeurs propres de $\triangle$ dans un domaine *borné* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ soumis à la condition au bord homogène de Dirichlet ($u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$) peut être résumé comme suit : *si* Ω *est régulier pour le problème de Dirichlet alors il existe* $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots$ ($\lambda_n \to \infty$ *lorsque* $n \to \infty$) *et* φ_n *(de classe* C^2 *dans* $\overline{\Omega}$*) tels que*

$$\triangle\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \varphi_n = 0 \quad \text{sur } \operatorname{Fr}\Omega$$

avec $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ *formant une base orthogonale pour* $L^2(\Omega)$. Nous dirons que λ_n, φ_n *sont les valeurs propres et les fonctions propres associées à* $-\triangle$ *dans* Ω *soumis à la condition au bord homogène de Dirichlet* (ou, plus brièvement, *associées à* $-\triangle$ *dans* Ω *sous condition de Dirichlet*). Il y a des résultats analogues pour d'autres conditions au bord homogènes (par exemple, pour la condition de Neumann : $\mathrm{D}_\nu u = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$) sauf que λ_0 peut être $\geqslant 0$. Dans cette section, nous vérifions la validité de ce résultat pour deux domaines simples de $\mathbb{R}^N$.

Avant de procéder, notons que ces résultats sont en défaut si Ω est non borné. Par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}$ (le cas $N = 1$), l'équation

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

possède une solution non triviale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; en effet, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation possède deux solutions réelles non triviales linéairement indépendantes. Puisque $\operatorname{Fr}\mathbb{R} = \emptyset$ dans $\mathbb{R}$, il n'y a pas de condition au bord. De même, si $\Omega =]\,0\,, \infty\,[$, l'équation

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0 \quad \text{dans }]\,0\,, \infty\,[, \qquad \varphi(0) = 0$$

possède une solution non triviale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut constater la même chose pour $\Omega = \mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$ (Ex. 24, sect. 8.9).

Etablissons d'abord la proposition simple suivante.

8.6.2 Proposition (*positivité des valeurs propres*)

Soit Ω un domaine non borné de $\mathbb{R}^N$.

(a) Les valeurs propres de $-\triangle$ dans Ω sous condition de Dirichlet sont strictement positives ; deux fonctions propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $L^2(\Omega)$. (Ici on suppose que Ω est un domaine gaussien, § 8.1.1.)

(b) L'énoncé (a) reste vrai sous condition de Neumann sauf que $\lambda = 0$ est toujours une valeur propre dans ce cas. (Ici on suppose que $\operatorname{Fr}\Omega$ est régulier au sens géométrique pour que D_ν ait un sens, § 7.7.2.)

DÉMONSTRATION

Si f, $g \in L^2(\Omega)$, on écrit

$$\langle f\,,\, g\rangle = \int_\Omega f\,\overline{g}\,\mathrm{d}x$$

Nous établissons d'abord que si φ, $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, alors

$$\langle \triangle\varphi\,,\, \psi\rangle = \langle \varphi\,,\, \triangle\psi\rangle\,, \quad \langle \triangle\varphi\,,\, \varphi\rangle \leqslant 0 \tag{8.45}$$

si φ, ψ sont nuls sur $\partial\Omega$ ou si $\mathrm{D}_\nu\varphi$, $\mathrm{D}_\nu\psi$ sont nuls sur $\partial\Omega$. Ceci est une conséquence immédiate de (8.2) ; par exemple, de (8.2) on a (avec $f = \varphi$, $g = \overline{\psi}$)

$$\int_\Omega \{\varphi\,\triangle\overline{\psi} + \nabla\varphi\cdot\nabla\overline{\psi}\}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \varphi\,\mathrm{D}_\nu\overline{\psi}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

d'où

$$\langle \varphi\,,\, \triangle\psi\rangle = -\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\overline{\psi}\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne

$$\langle \varphi\,,\, \triangle\psi\rangle = \langle \triangle\varphi\,,\, \psi\rangle$$

en échangeant les rôles de φ, ψ. Avec $\varphi = \psi$, on a

$$\langle \triangle\varphi\,,\, \varphi\rangle = \langle \varphi\,,\, \triangle\varphi\rangle = -\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0\,.$$

Les affirmations faites sont des conséquences immédiates de (8.45) (symétrie de $\triangle$ et positivité de $-\triangle$). En effet, si $\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0$ dans Ω avec $\varphi = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ (ou $\mathrm{D}_\nu\varphi = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$), alors

$$0 \geqslant \langle \triangle\varphi\,,\, \varphi\rangle = -\lambda\|\varphi\|^2 \Longrightarrow \lambda \geqslant 0$$

si $\|\varphi\| > 0$; d'autre part $\triangle\varphi = 0$ dans Ω, $\varphi = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ entraîne que $\varphi \equiv 0$ par le principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques, ce qui

entraîne ensuite que $\lambda > 0$ dans le cas de la condition de Dirichlet. Finalement, si

$$\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0\,, \quad \triangle\psi + \mu\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

avec φ, ψ égales à 0 sur $\operatorname{Fr}\Omega$ (ou $\mathcal{D}_\nu\varphi$, $\mathcal{D}_\nu\psi$ égales à 0 sur $\operatorname{Fr}\Omega$), alors, de la symétrie de $\triangle$ et le fait que λ, μ sont réels, on a

$$-\lambda\langle\varphi\,,\,\psi\rangle = \langle\triangle\varphi\,,\,\psi\rangle = \langle\varphi\,,\,\triangle\psi\rangle = -\mu\langle\varphi\,,\,\psi\rangle$$

d'où

$$\langle\varphi\,,\,\psi\rangle(\lambda - \mu) = 0$$

ce qui entraîne que $\langle\varphi\,,\,\psi\rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$. ♦

8.6.3 Remarques méthodologiques

Il y a au moins deux voies pour établir le résultat mentionné au paragraphe 8.6.1 concernant les valeurs propres de $\triangle$. Pour fixer les idées, nous considérons le cas de la condition de Dirichlet homogène sur $\operatorname{Fr}\Omega$, Ω étant un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Une première méthode consiste à démontrer directement (comme dans le cas du problème régulier de Sturm–Liouville, § 7.6.2) que $-\triangle^{-1}$ peut être considéré comme un opérateur compact dans un espace hilbertien approprié ; alors les valeurs propres de $-\triangle^{-1}$ forment une suite de nombres > 0 tendant vers zéro (prop. 5.4.1) d'où celles de $-\triangle$ forment une suite de nombres > 0 tendant vers ∞. La seconde méthode s'appelle la *méthode variationnelle* ou la *méthode de Rayleigh-Ritz*. Pour $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$, posons

$$J(\varphi) = \frac{1}{\|\varphi\|^2}\int_\Omega \|\nabla\varphi(x)\|^2\,\mathrm{d}x$$

où $\|\varphi\|^2 = \langle\varphi\,,\,\varphi\rangle = \int_\Omega|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x > 0$. On établit d'abord que

$$\lambda_0 = \inf J(\varphi)$$

est atteint pour une fonction φ_0, $\|\varphi_0\| = 1$ avec $\triangle\varphi_0 + \lambda_0\varphi_0 = 0$ dans Ω. Ensuite, on pose

$$\lambda_1 = \inf\{J(\varphi) : \varphi \perp \varphi_0\}$$

et on obtient φ_1, $\|\varphi_1\| = 1$ avec $\triangle\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0$ dans Ω. On définit λ_n par récurrence, après avoir obtenu λ_j, φ_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, en posant

$$\lambda_n = \inf\{J(\varphi) : \varphi \perp \varphi_j\,,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1\}\,.$$

On démontre finalement que les φ_n forment une suite orthonormale complète dans $L^2(\Omega)$; il est évident que $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots$ La quantité $J(\varphi)$ s'appelle le *quotient de Rayleigh*.

Aucune des deux méthodes n'est vraiment courte et nous ne donnons pas ici les démonstrations détaillées. La méthode de Rayleigh–Ritz se prête aux algorithmes numériques pour obtenir les estimations pour λ_0, λ_1, etc. en utilisant les fonctions φ convenables pour le calcul de $J(\varphi)$.

N'oublions pas que Ω doit être un domaine borné régulier (pour le problème de Dirichlet). Si $\Omega = B_1'(0)$, on peut vérifier aisément sur les calculs qui suivent que les fonctions propres ne forment plus une base orthonormale pour $L^2(\Omega)$.

8.6.4 Valeurs propres pour un pavé borné

Soit

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N) : 0 < x_i < a_i\,,\ 1 \leqslant i \leqslant N\} \subset \mathbb{R}^N\,.$$

Nous vérifions que les valeurs propres λ et les fonctions propres φ associées à $-\triangle$ dans Ω sous condition de Dirichlet sont données par les expressions suivantes : soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N}^*)^N = J$;

$$\lambda_\alpha = \pi^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i}{a_i}\right)^2\,, \quad \varphi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^N \sin\left(\frac{\alpha_i \pi x_i}{a_i}\right) \tag{8.46}$$

C'est un exercice facile de vérifier que pour $\alpha \in J$

$$\triangle\varphi_\alpha + \lambda_\alpha \varphi_\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \qquad \varphi_\alpha = 0 \quad \text{sur } \operatorname{Fr}\Omega\,.$$

Pour découvrir les formules (8.46), on procède comme suit : pour avoir $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ tel que $\varphi(x) = 0$ sur $\operatorname{Fr}\Omega$ avec

$$\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega\,,$$

on pose

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^N \psi_i(x_i)\,, \quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N\,.$$

Un calcul donne

$$\triangle\varphi + \lambda\varphi = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi}{\psi_j}\,\psi_j'' + \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\varphi}{\psi_j}\,\psi_j = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi}{\psi_j}(\psi_j'' + \lambda_j \psi_j)\,.$$

Il suffit de déterminer λ_j, ψ_j tel que

$$\psi_j'' + \lambda_j \psi_j = 0 \quad \text{dans }]\,0\,,\, a_j\,[\,, \qquad \psi_j(0) = \psi_j(a_j) = 0$$

ce qui donne (§ 7.1.4)

$$\psi_j(t) = \sin\left(\frac{\alpha_j \pi t}{a_j}\right)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant a_j\,, \qquad \lambda_j = \left(\frac{\alpha_j \pi}{a_j}\right)^2\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{N}^*\,.$$

Notons que $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \operatorname{Fr} \Omega$ si et seulement si $x_j = 0$ où a_j pour un $j \in \{1, \ldots, N\}$. Puisque les fonctions données par

$$\sin\left(\frac{\alpha_j \pi t}{a_j}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant a_j, \ \alpha_j = 1, 2, \ldots$$

forment une base orthogonale de $L^2([0, a_j])$ (chap. 4), on conclut que les fonctions $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ forment une base orthogonale pour $L^2(\Omega)$ (§ 4.4.3). Ceci entraîne alors que $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in J}$ forment la totalité des valeurs propres car s'il y avait une valeur propre $\lambda \notin \{\lambda_\alpha, \alpha \in J\}$, alors la fonction propre correspondante φ serait orthogonale à chaque φ_α (prop. 8.6.2), ce qui est impossible (car φ doit être non triviale).

8.6.5 Valeurs propres pour un disque

Soit $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Les valeurs propres λ et les fonctions propres φ associées à $-\triangle$ dans Ω sous condition de Dirichlet sont données par les expressions suivantes : pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\{x > 0 : J_n(x) = 0\} = \{t_{n,1} < t_{n,2} < \ldots\}$$

où J_n est la fonction de Bessel de paramètre n entier $\geqslant 0$ (§ 2.6.7, 2.7.7). Alors $\lambda = t_{n,j}^2$, $n = 0, 1, \ldots, j \geqslant 1$; pour $\lambda = t_{0,j}^2$ une fonction propre est un multiple de

$$\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = J_0(t_{0,j} r), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi ;$$

pour $\lambda = t_{n,j}^2$, $n \geqslant 1$, les fonctions propres sont une combinaison linéaire de

$$\begin{aligned} \varphi_1(r\cos\theta, r\sin\theta) &= J_n(t_{n,j} r)\cos n\theta \\ \varphi_2(r\cos\theta, r\sin\theta) &= J_n(t_{n,j} r)\sin n\theta , \end{aligned} \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi .$$

Pour établir ce résultat, nous passons aux coordonnées polaires. Posons

$$\psi(r, \theta) = \varphi(x, y), \quad x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta ;$$

on sait que (vol. 1, § 3.8.2)

$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} .$$

L'équation à résoudre

$$\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \varphi = 0 \text{ sur } \operatorname{Fr}\Omega$$

devient (en posant $\lambda = \nu^2$, $\nu > 0$, ce qui est permis selon la proposition 8.6.2)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \nu^2\psi = 0 \tag{8.47}$$

pour $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$, avec $\psi(1, \theta) = 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Nous procédons par la séparation des variables r, θ en posant

$$\psi(r, \theta) = a(r)\, b(\theta)\,.$$

Un calcul montre que $\psi = a(r)b(\theta)$ vérifie (8.47) si

$$\frac{a''(r) + a'(r)/r + \nu^2 a(r)}{a(r)/r^2} = -\frac{b''(\theta)}{b(\theta)} = \mu\,,$$

μ étant une constante ; alors on prend a, b tels que

$$b''(\theta) + \mu b(\theta) = 0\,, \qquad 0 < \theta < 2\pi\,,\ b(0) = b(2\pi) \tag{8.48}$$

et

$$a''(r) + \frac{1}{r}\, a'(r) + \left(\nu^2 - \frac{\mu}{r^2}\right) a(r) = 0\,, \quad 0 < r < 1 \tag{8.49}$$

avec $a(1) = 0$, $a(0) = \lim_{r \to 0} a(r)$ fini.

De (8.48), on a $\mu = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, avec b de la forme

$$b(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta\,.$$

L'équation (8.49) est très proche de l'équation de Bessel ; en remplaçant μ par n^2 dans (8.49), on vérifie facilement que

$$a(r) = J_n(\nu r)$$

est une solution de (8.49). Rappelons que

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}$$

d'où $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$, $n \geqslant 1$. On conclut que si $\nu > 0$ est tel que $J_n(\nu) = 0$ (n fixe dans $\mathbb{N}$), alors

$$a(r) = J_n(\nu r)$$

vérifie (8.49) (pour $\mu = n^2$) avec $a(1) = 0$, $a(0)$ fini.

La discussion précédente montre que les nombres $\nu > 0$ tels que $J_n(\nu) = 0$ pour un $n \in \mathbb{N}$, donnent des valeurs propres $\lambda = \nu^2$ pour notre problème, les fonctions propres correspondantes étant données par les combinaisons linéaires de

$$J_n(\nu r) \cos n\theta\,, \quad J_n(\nu r) \sin n\theta\,.$$

Il reste à voir qu'il n'existe pas d'autres valeurs propres. Ceci peut être fait de deux manières différentes.

(1) Puisque ψ qui vérifie (8.47) est de classe C^2, on peut développer $\psi(r,\theta)$ dans une série de Fourier uniformément et absolument convergente de la forme

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r)\,\mathrm{e}^{in\theta}\,, \quad a_n(1) = 0\,,\ n \in \mathbb{Z}\ (\text{car } \psi(1,\theta) \equiv 0)\,;$$

notons que

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(r,\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Il en résulte que, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_r'(r,\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$a_n''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_{rr}''(r,\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$-n^2 a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_{\theta\theta}''(r,\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\,,$$

la dernière relation étant obtenue par deux intégrations par parties. Si ψ vérifie (8.47) pour un $\nu > 0$, alors on aura

$$a_n''(r) + \frac{1}{r}\,a_n'(r) + \left(\nu^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) a_n(r) = 0$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, $0 < r < 1$; on en déduit que $a_n(r)$ est un multiple constant de $J_{|n|}(\nu r)$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $a_n(1) = 0$ pour tout n, ceci n'est possible que s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \equiv 0$ si $n \neq \pm m$ et

$$a_m(r) = A_m J_m(\nu r)\,, \quad a_{-m}(r) = B_m J_m(\nu r)$$

où $\nu > 0$ est un zéro de J_m. (Ici on utilise le fait que les zéros > 0 de J_m, J_n, $m \neq n$, m, n entiers $\geqslant 0$, sont distincts.) Puisque $\psi(r,\theta)$ est réel, $a_{-m}(r) = \overline{a_m(r)}$ d'où $B_m = \overline{A}_m$ (car $J_m(\nu r)$ est réel), ce qui donne

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta) &= (A_m\,\mathrm{e}^{im\theta} + \overline{A}_m\,\mathrm{e}^{-im\theta})J_m(\nu r)\\ &= (A\cos m\theta + B\sin m\theta)J_m(\nu r)\end{aligned}$$

avec A, B constantes réelles. Ceci établit que notre liste de valeurs propres et de fonctions propres est exhaustive.

(2) On peut établir directement que les fonctions propres

$$J_n(\nu r)\cos n\theta\,, \quad J_n(\nu r)\sin n\theta$$

avec $\nu = t_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$, forment un système orthogonal complet dans $L^2(\Omega)$. L'orthogonalité est garantie par la proposition 8.6.2 ; pour la complétude, il faut établir que si $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)J_n(\nu r)\cos n\theta \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 0 \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)J_n(\nu r)\sin n\theta \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned} \tag{8.50}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour chaque $\nu = t_{n,j}$, alors $f = 0$ p.p. On peut, par ailleurs, supposer que f est réelle et continue dans Ω. On écrit

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)\,\mathrm{e}^{in\theta}$$

avec

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\,,$$

la série pour $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ étant convergente dans $L^2\big([\,0\,,\,2\pi\,]\big)$ pour chaque r fixe. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\big|c_n(r)\big|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|f(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|^2\,\mathrm{d}\theta$$

d'où

$$\int_0^1 \big|c_n(r)\big|^2 r\,\mathrm{d}r \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\big|f(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\,\|f\|^2 < \infty$$

(où $\|f\|$ est la norme de $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$). Ecrivons (8.50) comme

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)J_n(\nu r)r\,\mathrm{e}^{\pm in\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

de la formule pour $c_n(r)$, on obtient alors

$$\int_0^1 c_n(r)\,J_n(\nu r)r\,\mathrm{d}r = 0\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{8.51}$$

où $\nu \in \{t_{n,j}\,,\ j = 1, 2, \ldots\}$, les zéros de J_n. Si l'on sait que les fonctions $r \mapsto J_n(\nu r)$, $\nu = t_{n,j}$, $j \geqslant 1$ (n fixe) sont un système orthogonal complet dans $L^2\big([\,0\,,\,1\,]\,,\,\rho\big)$, $\rho(r) = r$, alors on aura $c_n(r) = 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, et donc pour $n \in \mathbb{Z}$ (car $c_{-n}(r) = \overline{c_n(r)}$, f étant réelle) ce qui donne $f = 0$. En fait, on peut démontrer que pour chaque $\alpha \geqslant 0$, les fonctions

$r \mapsto J_\alpha(\nu r)$, $\nu \in \{x > 0 : J_\alpha(x) = 0\}$ forment un système orthogonal complet dans $L^2([0, 1], \rho)$. C'est un cas particulier d'une généralisation de la théorie de Sturm-Liouville que nous avons étudié au paragraphe 7.6.2 (voir aussi § 7.6.3).

L'avantage de la méthode (2) est qu'elle établit aussi la complétude des fonctions propres.

Nous généralisons le résultat de ce paragraphe au cas où Ω est une boule ouverte (de rayon 1) dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$; pour ce faire, nous devons introduire les *fonctions harmoniques sphériques*.

8.6.6 Fonctions harmoniques sphériques

Pour ce paragraphe et les suivants de cette section, nous fixons N entier $\geqslant 2$ et nous adoptons les notations suivantes ($k = 0, 1, \ldots$) :

- $B = B^N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < 1\}$, $S = S^{N-1} = \operatorname{Fr} B^N$,
- $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N) = \{$polynômes homogènes de degré k dans les variables réelles $x_1, \ldots, x_N\}$,
- $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^N) = \{P \in \mathcal{P}_k : \triangle P = 0\}$,
- $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k(S) = \{P|_S : P \in \mathcal{A}_k\}$.

Les polynômes dans $\mathcal{A}_k$ seront appelés les *polynômes harmoniques homogènes de degré k* (des N variables réelles $x_1, \ldots, x_N$) ; les fonctions dans $\mathcal{H}_k$ s'appellent les *fonctions harmoniques sphériques de degré k*. Si $P \in \mathcal{A}_k$ et $Y = P|_S$, alors

$$P(x) = \|x\|^k Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad x \neq 0$$

de sorte que l'application linéaire $P \mapsto Y$ de $\mathcal{A}_k$ sur $\mathcal{H}_k$ est un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.

Si $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, nous écrivons

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N ;$$

donc, si $P \in \mathcal{P}_k$, alors

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

où les coefficients $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Nous rassemblons dans la proposition suivante les propriétés des fonctions harmoniques sphériques dont nous aurons besoin.

8.6.7 Proposition

Les notations sont celles du paragraphe 8.6.6.

(i) Si $P \in \mathcal{P}_k$, *alors*

$$P(x) = P_k(x) + \|x\|^2 P_{k-2}(x) + \cdots + \|x\|^{2s} P_{k-2s}(x)$$

où $s = [k/2]$ *et* $P_{k-2j} \in \mathcal{A}_{k-2j}$, $j = 0, \ldots, s$.

(ii) Si P *est un polynôme quelconque de degré* n *en* $x_1, \ldots, x_N$, *variables réelles, alors* $P\big|_S$ *est une somme finie de fonctions harmoniques sphériques de degré* $\leqslant n$.

(iii) Si $P \in \mathcal{H}_k$, $Q \in \mathcal{H}_m$ *avec* $k \neq m$, *alors*

$$\int_S P(x)Q(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = 0\,.$$

(iv) Soit $f : S \to \mathbb{C}$ *une fonction continue ; pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* φ, *une somme finie de fonctions harmoniques sphériques, telle que*

$$\sup_{x \in S} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\,.$$

(v) Soit $\mathcal{L}^2(S)$ *l'espace vectoriel formé des fonctions* $f : S \to \mathbb{C}$ *telles que*

$$\int_S |f(x)|^2\,\mathrm{d}\sigma(x) < \infty\,.$$

Posons, pour f, $g \in \mathcal{L}^2(S)$,

$$\langle f\,,\, g\rangle_S = \int_S f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\sigma(x)\,, \quad \|f\|_S^2 = \langle f\,,\, f\rangle_S\,.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $f \in \mathcal{L}^2(S)$, *il existe* φ *comme dans (iv) telle que* $\|f - \varphi\|_S < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION

(i) Dans l'espace vectoriel complexe $\mathcal{P}_k$, introduisons le produit scalaire

$$\langle P\,,\, Q\rangle_k = P(\mathrm{D})\,\overline{Q}\,, \quad P\,,\, Q \in \mathcal{P}_k \tag{8.52}$$

où

$$P(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\,\mathrm{D}^\alpha \quad \text{si } P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha\,.$$

On vérifie aisément que si $Q(x) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha x^\alpha$, alors

$$\langle P\,,\,Q\rangle_k = \sum_{|\alpha|=k} \alpha!\, a_\alpha \bar{b}_\alpha \tag{8.53}$$

avec $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. La formule (8.53) établit immédiatement que (8.52) est un produit scalaire dans $\mathcal{P}_k$. Puisque les polynômes de degré $\leqslant 1$ sont toujours harmoniques, nous pouvons supposer que $P \in \mathcal{P}_k$, $k \geqslant 2$. Nous démontrons d'abord que

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus \mathcal{B}_k\,, \quad k \geqslant 2\,, \tag{8.54}$$

$$\mathcal{B}_k = \|x\|^2 \mathcal{P}_{k-2} = \left\{ \|x\|^2 q(x) : q \in \mathcal{P}_{k-2} \right\} \subset \mathcal{P}_k$$

avec $\langle A\,,\,B\rangle_k = 0$ si $A \in \mathcal{A}_k$, $B \in \mathcal{B}_k$. En effet, si $A \in \mathcal{A}_k$, alors $\triangle A = 0$ et, pour tout $q \in \mathcal{P}_{k-2}$,

$$0 = \langle q\,,\,\triangle A\rangle_{k-2} = q(\mathrm{D})\,\overline{\triangle A} = \left\langle \|x\|^2 q\,,\,A \right\rangle_k \tag{8.55}$$

d'après (8.52) ; ceci montre que $\langle A\,,\,B\rangle_k = 0$ dès que $B \in \mathcal{B}_k$, $A \in \mathcal{A}_k$. D'autre part, si $p \in \mathcal{P}_k$ est tel que p est orthogonal à tout élément de $\mathcal{B}_k$, alors, pour tout $q \in \mathcal{P}_{k-2}$, on aura (en suivant le calcul (8.55))

$$0 = \left\langle \|x\|^2 q\,,\,p \right\rangle_k = q(\mathrm{D})\,\overline{\triangle p} = \langle q\,,\,\triangle p\rangle_{k-2}$$

ce qui entraîne que $\triangle p = 0$, c'est-à-dire $p \in \mathcal{A}_k$. Ceci prouve (8.54). Ainsi, si $P \in \mathcal{P}_k$,

$$P(x) = P_k(x) + \|x\|^2 Q(x)$$

où $P_k \in \mathcal{A}_k$, $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$. On obtient le résultat énoncé en raisonnant par récurrence.

(ii) L'affirmation est immédiate grâce à (i), si P est un polynôme homogène (en observant que $\|x\| = 1$ si $x \in S$) ; puisque tout polynôme de degré n est une somme finie des polynômes homogènes de degré $\leqslant n$, on a la conclusion générale indiquée.

(iii) En utilisant la formule de Green (8.3), on a

$$\int_S (P\,\mathrm{D}_\nu Q - Q\,\mathrm{D}_\nu P)\,\mathrm{d}\sigma = \int_B (P\,\triangle Q - Q\,\triangle P)\,\mathrm{d}x = 0$$

où $P \in \mathcal{P}_k$, $Q \in \mathcal{P}_m$; puisque $P(tx) = t^k P(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, on a (selon la formule élémentaire d'Euler)

$$\nabla P(x) \cdot x = kP(x)$$

d'où, pour tout $\xi \in S$,

$$\mathrm{D}_\nu P(\xi) = \nabla P(\xi) \cdot \xi = kP(\xi)\,.$$

De même, $\mathrm{D}_\nu Q(\xi) = m\,Q(\xi)$, $\xi \in S$, et on obtient

$$0 = \int_S (P\,\mathrm{D}_\nu Q - Q\,\mathrm{D}_\nu P)\,\mathrm{d}\sigma = (m-k)\int_S PQ\,\mathrm{d}\sigma$$

d'où le résultat si $k \neq m$.

(iv) C'est une conséquence immédiate du théorème de Weiertrass (vol. 1) qui permet l'approximation uniforme de f dans S par un polynôme P ; puisque, d'après (ii), $\varphi = P\big|_S$ est une somme finie des fonctions harmoniques sphériques, on a établi l'affirmation donnée.

(v) Pour cette affirmation, il faut savoir (de la théorie de l'intégration, vol. 1) qu'il existe $g \in C(S)$ tel que $\|f-g\|_S < \varepsilon/2$; en utilisant (iv), on obtient φ du type désiré avec $\|g-\varphi\|_S < \varepsilon/2$ car

$$\|g-\varphi\|_S^2 \leqslant \sigma(S) \sup_{x\in S} |g(x)-\varphi(x)|^2 . \qquad \blacklozenge$$

8.6.8 Remarques complémentaires sur les fonctions harmoniques sphériques

(1) On peut reformuler (v) de la proposition 8.6.7 comme suit. Soit $L^2(S)$ l'espace hilbertien associé à $\mathcal{L}^2(S)$; pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k(S)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie d_k dans $L^2(S)$; de (iii), on sait que ces sous-espaces sont mutuellement orthogonaux. Alors, d'après (v), chaque $f \in L^2(S)$ s'écrit

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \tag{8.56}$$

où $Y_k \in \mathcal{H}_k$, $Y_k = P_{\mathcal{H}_k} f$, $P_{\mathcal{H}_k}$ étant le projecteur orthogonal associé à $\mathcal{H}_k$. Ce fait est indiqué symboliquement comme suit :

$$L^2(S) = \mathcal{H}_0(S) \oplus \mathcal{H}_1(S) \oplus \cdots$$

(2) Démontrons que, pour $k = 0, 1, \ldots, N \geqslant 2$,

$$\delta_k = \delta_k^{(N)} = \dim \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N) = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)!\,k!} = \binom{N+k-1}{k} \tag{8.57}$$

$$\begin{aligned} d_k = d_k^{(N)} &= \dim \mathcal{H}_k(S^{N-1}) = (N+2k-2)\frac{(N+k-3)!}{(N-2)!\,k!} \\ &= \delta_k - \delta_{k-2} \quad \text{si } k \geqslant 2\,. \end{aligned} \tag{8.58}$$

DÉMONSTRATION

Il est évident que δ_k est le nombre de monômes distincts $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$ avec $|\alpha| = k$; c'est un nombre bien connu de l'analyse combinatoire élémentaire. On peut l'obtenir par le raisonnement analytique suivant (Bourbaki) : soit $A(N, k)$ le nombre des applications

$$\alpha : \{1, \ldots, N\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k\}$$

telles que $\sum_{j=1}^N \alpha_j \leqslant k$ et $B(N, k)$ le nombre de ces applications telles que $\sum_{j=1}^N \alpha_j = k$, avec $N = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$ Il est facile de voir que

$$B(N, k) = A(N-1, k), \quad N \geqslant 1, \ k \geqslant 0$$

en posant $A(0, k) = 1$; ensuite on voit que, pour $N \geqslant 1$, $k \geqslant 1$,

$$A(N, k) = A(N, k-1) + B(N, k) = A(N, k-1) + A(N-1, k)$$

d'où résulte

$$A(N, k) = \binom{N+k}{k}, \quad N \geqslant 1, \ k \geqslant 0$$

par récurrence sur $N + k$, en utilisant la relation élémentaire

$$\binom{N+k-1}{k-1} + \binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k}{k}.$$

On conclut que

$$\delta_k = B(N, k) = A(N-1, k) = \binom{N+k-1}{k}$$

ce qui donne (8.57) ; pour (8.58), on observe que $d_k = \delta_k - \delta_{k-2}$ pour $k \geqslant 2$ à cause de (8.56) car

$$\delta_k = \dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{A}_k + \dim \mathcal{P}_{k-2} = \dim \mathcal{H}_k + \delta_{k-2} ;$$

notons que $d_0 = 1$, $d_1 = N$, car $\mathcal{H}_0$ contient seulement des fonctions constantes et $\mathcal{H}_1$ est engendré par les monômes $x_1, \ldots, x_N$. ♦

(3) Dans $\mathbb{R}^2$, les polynômes harmoniques sphériques (en x, y) de degré $k \geqslant 1$ forment un espace vectoriel de dimension 2 engendré par z^k, $\overline{z}^k$ où $z = x + iy$, $|z| = 1$. En effet, pour $N = 2$, $d_k = 2$ dans (8.58) pour $k \geqslant 1$; de plus, $z^k = u_k + iv_k$, $\overline{z}^k = u_k - iv_k$, u_k, v_k étant des polynômes (à coefficients réels) homogènes de degré k (en x, y) qui sont harmoniques (étant les parties réelles et imaginaires de la fonction holomorphe z^k) ; l'indépendance linéaire de ces deux polynômes devient évidente en écrivant $z^k = \mathrm{e}^{ik\theta}$, $\overline{z}^k = \mathrm{e}^{-ik\theta}$ avec $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Dans ce cas, le développement (8.56) en série de fonctions harmoniques sphériques est la série de Fourier trigonométrique.

Considérons maintenant $\mathbb{R}^3$; de (8.58), on a que

$$d_k = \dim \mathcal{H}_k(S^2) = 2k+1\,, \quad k = 0, 1, \cdots$$

Une base orthogonale classique de $\mathcal{H}_k \subset L^2(S^2)$ est donnée par les fonctions (dite de *Legendre*) suivantes : écrivons

$$x = \sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = \cos\theta\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

pour $(x, y, z) \in S^2$; alors, les $(2k+1)$ fonctions

$$P_k(\cos\theta)\,,\ P_k^m(\cos\theta)\cos m\varphi\,,\ P_k^m(\cos\theta)\sin m\varphi\,, \quad m = 1, \ldots, k$$

forment une base orthogonale pour $\mathcal{H}_k(S^2)$. Les P_k, P_k^m sont des polynômes (à coefficients réels) de degré k dans une variable t ; $w = P_k^m$ ou $w = P_k^0 = P_k$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)w'' - 2tw' + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right\} w = 0 \tag{8.59}$$

On démontre aisément que (8.59) possède une unique solution polynomiale (à une constante multiple près) $w = P_k^m$ lorsque k est un entier $\geqslant 0$ et m un entier, $0 \leqslant m \leqslant k$, et que $\deg P_k^m = k$. Les polynômes $P_k = P_k^0$ s'appellent les *polynômes de Legendre* (chap. 2 et 4) ; les polynômes P_k^m s'appellent les *polynômes de Legendre associés* (ou *d'ordre m*). Nous n'aurons pas besoin de la théorie classique des fonctions P_k^m, riche en formules élégantes.

La théorie des fonctions de Legendre s'étend de manière harmonieuse au cas de $\mathcal{H}_k(S^{N-1})$, $N \geqslant 3$, fournissant des bases orthogonales pour ces sous-espaces de dimension $d_k^{(N)}$ dans $L^2(S^{N-1})$. Nous ne décrirons pas leur théorie ici ; elle est d'une richesse extraordinaire ; on trouvera les références appropriées à la section 8.10.

(4) Concluons ce paragraphe par une remarque sur la terminologie. Les polynômes dans $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^N)$ s'appellent aussi les *fonctions harmoniques solides* pour les distinguer des fonctions harmoniques sphériques (les éléments de $\mathcal{H}_k(S^{N-1})$) qui sont obtenues en restreignant le domaine de définition à S^{N-1}.

8.6.9 Valeurs propres pour une boule

Les notations sont celles du paragraphe 8.6.6 ; en particulier $B = B_1(0)$, $S = S^{N-1} = \operatorname{Fr} B$ dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$.

Les valeurs propres λ et les fonctions propres φ associées à $-\triangle$ dans B sous condition de Dirichlet sont données par les expressions suivantes : pour $\alpha \geqslant 0$, soit

$$\{x > 0 : J_\alpha(x) = 0\} = \{t_{\alpha,1} < t_{\alpha,2} < \cdots\}$$

où J_α est la fonction de Bessel de paramètre $\alpha \geqslant 0$ (§ 2.6.7, 2.7.7). Alors

$$\lambda = t_{\alpha_k,j}^2\,, \quad \alpha_k = k + \frac{1}{2}(N-2)\,,\ k = 0, 1, \ldots,\ j \geqslant 1 \tag{8.60}$$

$\lambda = t^2_{\alpha_k,j}$ est une valeur propre de multiplicité

$$d_k = d_k^{(N)} = \dim \mathcal{H}_k(S^{N-1})$$

donnée par (8.58) ; une fonction propre associée à $\lambda = t^2_{\alpha_k,j}$ est un multiple de φ où

$$\varphi(x) = \|x\|^{-N/2+1} J_{\alpha_k}(t_{\alpha_k,j}\|x\|)\, Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad 0 < \|x\| \leqslant 1 \tag{8.61}$$

avec $Y \in \mathcal{H}_k(S^{N-1})$.

Notons que, pour $N = 2$, (8.60) et (8.61) redonnent les résultats du paragraphe 8.6.5.

DÉMONSTRATION

Si $Y \in \mathcal{H}_k$, nous posons

$$\widetilde{Y}(x) = Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Notons que $\widetilde{Y}$ est une fonction homogène de degré 0 : $\widetilde{Y}(tx) = \widetilde{Y}(x)$, $t > 0$. Nous établissons d'abord deux formules ; si $Y \in \mathcal{H}_k$, alors

$$\triangle \widetilde{Y}(x) = -k(N+k-2)\|x\|^{-2}\widetilde{Y}(x)\,; \tag{8.62}$$

si $f(x) = a(\|x\|)$, $a \in C^2(]\,0\,,\,1\,[\,)$, alors (avec $r = \|x\|$)

$$\triangle(f\widetilde{Y})(x) = \left\{a''(r) + \frac{N-1}{r}\,a'(r) - \frac{k(N+k-2)}{r^2}\,a(r)\right\}\widetilde{Y}(x)\,. \tag{8.63}$$

Pour ce faire, notons que $P(x) = \|x\|^k \widetilde{Y}(x)$ est une fonction harmonique ; utilisons maintenant les formules élémentaires suivantes :

$$\triangle(FG) = G\,\triangle F + 2\nabla F \cdot \nabla G + F\,\triangle G \tag{8.64}$$

$$\triangle(\psi \circ r) = \psi'' \circ r + \frac{N-1}{r}\,\psi' \circ r \tag{8.65}$$

où $r = \|x\|$ et F, G, ψ sont de classe C^2. On a

$$0 = \triangle P = \triangle(r^k\widetilde{Y}) = \triangle(r^k)\widetilde{Y} + r^k\,\triangle\widetilde{Y}$$

car $\nabla r^k \cdot \nabla\widetilde{Y} = kr^{k-2}x \cdot \nabla\widetilde{Y} = 0$ (formule d'Euler utilisée sur la fonction homogène $\widetilde{Y}$ de degré 0). Puisque

$$\triangle r^k = k(N+k-2)r^{k-2}\,,$$

on a

$$\triangle\widetilde{Y} = -k(N+k-2)r^{-2}\widetilde{Y}$$

ce qui est (8.62). De même,

$$\triangle(f\widetilde{Y}) = (\triangle f)\widetilde{Y} + f(\triangle\widetilde{Y})$$

car $\nabla f \cdot \nabla\widetilde{Y} = 0$ étant donné que

$$\nabla f = \frac{a'(r)}{r}\, x\,, \quad x \cdot \nabla\widetilde{Y} = 0\,.$$

Avec (8.65) et (8.62), on a alors

$$\triangle(f\widetilde{Y}) = \left\{a''(r) + \frac{N-1}{r}\, a'(r)\right\}\widetilde{Y} - \frac{a(r)}{r^2}\, k(N+k-2)\widetilde{Y}$$

ce qui est (8.63).

Nous essayons maintenant de résoudre

$$\begin{aligned} &\triangle\varphi + \nu^2\varphi = 0 \quad \text{dans } B \\ &\varphi = 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } S \end{aligned} \tag{8.66}$$

avec $\nu > 0$, $\varphi(x) = a\big(\|x\|\big)\widetilde{Y}(x)$, où $Y \in \mathcal{H}_k$ pour un $k \geqslant 0$ et $a : [\,0\,,\,1\,] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que $a(1) = 0$ et $t^{-k}a(t)$ soit de classe C^2 à $t = 0$; cette dernière condition est imposée pour avoir φ de classe C^2 autour de 0 car

$$\varphi(x) = \Big\{\|x\|^{-k} a\big(\|x\|\big)\Big\}\Big\{\|x\|^k \widetilde{Y}(x)\Big\}$$

et $\|x\|^k\widetilde{Y}(x) = P(x)$, P un polynôme homogène (harmonique) de degré k. De (8.63) (appliqué sur $a\big(\|x\|\big)\widetilde{Y}(x)$), on voit que $\triangle\varphi + \nu^2\varphi = 0$ dans B avec $\varphi(x) = a\big(\|x\|\big)\widetilde{Y}(x)$ si

$$a''(t) + \frac{N-1}{t}\, a'(t) + \left\{\nu^2 - \frac{k(N+k-2)}{t^2}\right\} a(t) = 0 \tag{8.67}$$

pour $t > 0$. De l'exercice 38 (sect. 2.8), nous constatons que

$$a(t) = t^{-N/2+1} J_{(N/2+k-1)}(\nu t) \tag{8.68}$$

est une solution de (8.67). Rappelons que

$$\left(\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (t/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(j+\alpha+1)}$$

de sorte que $t^{-\alpha}J_\alpha(t)$ est indéfiniment dérivable autour de $t = 0$; donc $t^{-k}a(t)$ est indéfiniment dérivable autour de $t = 0$ si a est défini par (8.68). Pour avoir $a(1) = 0$, il suffit d'avoir ν tel que

$$J_{\alpha_k}(\nu t) = 0$$

où $\alpha_k = N/2 + k - 1 = k + (N-2)/2$, c'est-à-dire $\nu^2 = t^2_{\alpha_k, j}$ pour un $j \geqslant 1$. Ceci établit que (8.60) et (8.61) donnent bien les valeurs propres et les fonctions propres voulues.

Pour établir que (8.60) et (8.61) donnent une liste exhaustive des valeurs propres et des fonctions propres, il suffit d'établir que si $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ est continue et

$$\int_B f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pour chaque φ dans (8.61), alors $f \equiv 0$. En utilisant (8.8), on a

$$0 = \int_B f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_S f(r\xi) Y(\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi) \right) r^{-N/2+1} J_{\alpha_k}(\nu r) r^{N-1}\,\mathrm{d}r$$

pour tout $\nu = t_{\alpha_k,j}$, $k \geqslant 0$, $Y \in \mathcal{H}_k$. Posons

$$g(r) = \int_S f(r\xi) Y(\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\,;$$

g est continue et

$$\int_0^1 g(r) J_{\alpha_k}(\nu r) r^{N/2-1} r\,\mathrm{d}r = 0$$

pour tout $\nu = t_{\alpha_k,j}$, $j \geqslant 1$. Ceci entraîne que $g \equiv 0$ (§ 8.6.5(2)) ; ainsi

$$\int_S f(r\xi) Y(\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi) = 0\,, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

pour tout $Y \in \mathcal{H}_k$, $k \geqslant 0$. La complétude des Y (prop. 8.6.7(v)) entraîne que $f(r\xi) = 0$, $\xi \in S$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ d'où $f \equiv 0$. ♦

REMARQUE. L'équation (8.62) peut être interprétée comme suit : soit $\triangle^*$ l'opérateur laplacien opérant sur les fonctions définies sur la sphère $S = S^{N-1}$ ($\triangle^*$ s'appelle *l'opérateur de Laplace-Beltrami* pour la sphère) ; alors chaque $Y \in \mathcal{H}_k$ est une fonction propre pour $-\triangle^*$ correspondant à la valeur propre $k(N+k-2)$. Ainsi, les valeurs propres et les fonctions propres de $-\triangle^*$ sont

$$k(N+k-2)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,\ Y \in \mathcal{H}_k\,,$$

chaque valeur propre étant de multiplicité $d_k = \dim \mathcal{H}_k$. On peut définir $\triangle^*$ analytiquement comme suit : si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est une fonction, écrivons

$$f(x) = F(r,\xi)\,, \quad r = \|x\|\,,\ \xi = \frac{x}{\|x\|}\,,\ x \neq 0\,.$$

En supposant que f est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on a

$$\triangle f = r^{-N+1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + r^{-2}\, \triangle^*_\xi F \tag{8.69}$$

ce qui peut être considéré comme la définition de $\triangle^* = \triangle^*_\xi$; dans (8.69), le membre de gauche est calculé au point $x \neq 0$ et celui de droite au point (r,ξ) où $r = \|x\|$, $\xi = x/\|x\|$ avec $\triangle^*_\xi$ opérant sur la fonction $\xi \mapsto F(r,\xi)$, $\xi \in S^{N-1}$,

pour $r > 0$ fixe. Les cas bien connus de (8.69) lorsque $N = 2, 3$ donnent les formules pour $\triangle f$ en coordonnées polaires et sphériques ; en écrivant, pour $N = 2$,

$$f(x_1, x_2) = g(r, \theta)\,, \quad \xi = (\cos\theta, \sin\theta)\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

et, pour $N = 3$,

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3) = g(r, \theta, \varphi) \\ &\xi = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\,, \end{aligned} \qquad 0 < \theta < \pi\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

la formule (8.69) devient plus explicite :

$$\triangle f = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right) + r^{-2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \quad (\text{cas } N = 2) \tag{8.70}$$

$$\triangle f = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right) + r^{-2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\right) \quad (\text{cas } N = 3)\,. \tag{8.71}$$

Les formules (8.70) et (8.71) donnent la forme explicite de $\triangle^*$ pour $N = 2, 3$ en utilisant les coordonnées privilégiées θ et (θ, φ) respectivement. Une conséquence de (8.69) est que $\triangle^*$ est un opérateur symétrique :

$$\int_S \triangle^*\varphi(\xi)\,\overline{\psi(\xi)}\,\mathrm{d}\sigma(\xi) = \int_S \varphi(\xi)\,\overline{\triangle^*\psi(\xi)}\,\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

si φ, $\psi \in \mathcal{L}^2(S)$ (prop. 8.6.7(v)). En utilisant (8.69) et les remarques précédentes, on peut maintenant donner une autre démonstration (sans l'utilisation de la complétude $J_{\alpha_k}(\nu t)$) du fait que (8.60) et (8.61) est une liste exhaustive ; la démonstration est basée sur la méthode de la *séparation des variables* qui est à la base de plusieurs procédés déjà vus (par exemple la méthode (1) donnée dans le paragraphe 8.6.5). A cause de l'importance de la méthode, nous la formulons séparément de manière générale mais élémentaire ; sa formulation rigoureuse générale exige l'introduction des *produits tensoriels d'espaces hilbertiens* que nous évitons. Intuitivement, une fonction $g(r, \xi)$ des variables $r > 0$, $\xi \in S$ est un élément du produit tensoriel de deux espaces hilbertiens, l'un formé des fonctions de r et l'autre des fonctions de ξ.

8.6.10 Séparation des variables

Supposons que H est un opérateur symétrique dans un espace hilbertien des fonctions (par exemple $L^2(X)$) du type $f(r, \xi)$ où $x = (r, \xi)$ et supposons que

$$H = H_r + b(r)H_\xi \tag{8.72}$$

où H_r est un opérateur symétrique sur les fonctions de r et H_ξ un opérateur symétrique sur les fonctions de ξ, b étant une fonction de r seul. Un exemple concret de (8.72) est donné par (8.69) où $r > 0$, $\xi \in S^{N-1}$, $x \in X = \mathbb{R}^N$; on

suppose que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans l'espace hilbertien des fonctions $f(r,\xi)$ et $\langle \cdot , \cdot \rangle_\xi$ celui dans l'espace des fonctions de ξ. Les variables r et ξ peuvent être quelconques dans ce qui suit.

Supposons que $Hf(r,\xi) = \lambda f(r,\xi)$, $H_\xi Y(\xi) = \nu Y(\xi)$, $\lambda,, \nu \in \mathbb{R}$; *si* $a(r) = \langle f(r,\xi) , Y(\xi) \rangle_\xi$, *alors si (8.74) est vérifiée, on a*

$$H_r a(r) - \big(\lambda - \nu b(r)\big) a(r) = 0 \tag{8.73}$$

Inversement, si $H_\xi Y(\xi) = \nu Y(\xi)$ *et* $a(r)$ *vérifie (8.73), alors* $f(r,\xi) = a(r)Y(\xi)$ *est telle que* $Hf = \lambda f$.

DÉMONSTRATION

Nous supposons que

$$H_r a(r) = \langle H_r f(r,\xi) , Y(\xi) \rangle_\xi \ ; \tag{8.74}$$

alors, en utilisant (8.72) et $Hf = \lambda f$, $H_\xi Y = \nu Y$, on a

$$\begin{aligned} H_r a(r) &= \langle Hf(r,\xi) , Y(\xi) \rangle_\xi - b(r) \langle H_\xi f(r,\xi) , Y(\xi) \rangle_\xi \\ &= \lambda a(r) - b(r) \langle f(r,\xi) , H_\xi Y(\xi) \rangle_\xi = \lambda a(r) - b(r) \cdot \nu a(r) \end{aligned}$$

ce qui donne (8.73).

D'autre part, si a vérifie (8.73) et $H_\xi Y = \nu Y$, alors à partir de (8.72) on a, pour $f(r,\xi) = a(r)Y(\xi)$,

$$\begin{aligned} Hf(r,\xi) &= Y(\xi) H_r a(r) + b(r) a(r) H_\xi Y(\xi) \\ &= Y(\xi) \big\{ H_r a(r) + \nu b(r) a(r) \big\} = Y(\xi) \cdot \lambda a(r) = \lambda f(r,\xi) \, . \end{aligned}$$ ♦

REMARQUE. L'intérêt du procédé indiqué est le suivant : supposons que nous connaissions toutes les valeurs propres et fonctions propres ν, Y de H_ξ ; alors la détermination des valeurs propres et fonctions propres de H se ramène à l'étude de l'équation (8.73). Si r est une variable réelle (et H_r est un opérateur différentiel), alors le problème de la détermination des valeurs propres et des fonctions propres de H se réduit à un problème du même type unidimensionnel, ce qui peut être plus facile. C'est ce que nous avons vu dans le paragraphe 8.6.9. Notons que si $b(r) \equiv 1$ dans (8.72), alors on a le résultat simple suivant : les valeurs propres λ de H sont de la forme $\lambda = \nu + \nu'$ où ν est une valeur propre de H_ξ et ν' une valeur propre de H_r. Si $H_\xi Y = \nu Y$, $H_r a = \nu' a$, alors $f = aY$ est tel que $Hf = (\nu + \nu')f$; réciproquement, si H_ξ possède une suite de fonctions propres formant une base orthogonale pour l'espace des fonctions de ξ, alors toute fonction propre de H peut être obtenue par ce procédé (cf. Ex. 21, sect. 8.9).

Pour illustrer le procédé de la séparation des variables, nous étudions un exemple important dans le paragraphe suivant ; il concerne un problème général de la mécanique quantique.

8.6.11 Valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger

L'opérateur concerné est donné par

$$Lu = -\triangle u + V(r)u \tag{8.75}$$

où $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $r = \|x\|$. Une fonction $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ sera appelée une fonction propre (pour L) de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si $u \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big)$, $Lu = \lambda u$, et $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$; cette dernière condition joue le rôle d'une condition au bord « à l'infini » et elle est exigée par les règles de la mécanique quantique qui imposent que u soit un *état* (pur). Notons que $Lu = \lambda u$ équivaut à

$$-\triangle u + V(r)u - \lambda u = 0\,.$$

Nous utilisons la décomposition de $\triangle$ donnée par (8.69) et nous nous servons du procédé de la séparation des variables r, ξ, $r > 0$, $\xi \in S = S^2$ (§ 8.6.10). Ecrivons

$$L = H = H_r + b(r)H_\xi$$

avec $H = -\triangle + V(r)$, $H_\xi = -\triangle_\xi^*$, $b(r) = r^{-2}$, et

$$H_r = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + V(r)\,.$$

On conclut du paragraphe 8.6.10 ce qui suit : soit $Y = Y(\xi) \not\equiv 0$ une fonction harmonique sphérique de degré $k \geqslant 0$ (c'est-à-dire $\triangle^* Y = -k(k+1)Y$; § 8.6.9 avec $N = 3$) ; alors $u(x) = a(r)Y(\xi)$ *(avec $r = \|x\|$, $\xi = x/r$) définit une fonction propre (pour L) de valeur propre λ si et seulement si $a \in C^2\big(]\,0\,,\,\infty\,[\big)$ avec*

$$a''(r) + \frac{2}{r}\,a'(r) + \left\{\lambda - V(r) - \frac{k(k+1)}{r^2}\right\} a(r) = 0 \tag{8.76}$$

et

$$\int_0^\infty r^2 \big|a(r)\big|^2\,\mathrm{d}r < \infty\,. \tag{8.77}$$

En effet, les conditions d'application du procédé de séparation des variables (§ 8.6.10) sont vérifiées et (8.76) est l'équation générale (8.73). De plus, en utilisant (8.8), on a (si $u(x) = a(r)Y(\xi)$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \big|u(x)\big|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty r^2 \left(\int_S \big|u(r\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_S \big|Y(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi \cdot \int_0^\infty r^2 \big|a(r)\big|^2\,\mathrm{d}r < \infty\end{aligned}$$

si et seulement si (8.77) est vérifié (si $Y \not\equiv 0$).

Lorsque $V(r) = -c/r$ *(potentiel coulombien)*, c étant une constante réelle > 0, on peut analyser (8.76) complètement. Les résultats sont les suivants.

L'équation (8.76) avec $V(r) = -c/r$, $c > 0$, possède deux solutions réelles linéairement indépendantes définies dans $]0, \infty[$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$; si $\lambda > 0$ ou si $\lambda < 0$ et $\beta = c/(2\sqrt{-\lambda}) \notin \{k+1, k+2, \ldots\}$, alors ces solutions ne vérifient pas (8.77) ; si $\beta = k + \nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, alors exactement l'une des deux solutions mentionnées vérifie (8.77) et elle est donnée par

$$a(r) = r^k \exp\Big(-\frac{\alpha r}{2}\Big) L_\nu^{(2k+1)}(\alpha r), \quad \alpha = \frac{c}{k+\nu+1}$$

(alors $\lambda = -\alpha^2/4$) où $L_\nu^{(2k+1)}$ est le polynôme de Laguerre défini au paragraphe 4.7.9.

DÉMONSTRATION

L'existence de deux solutions linéairement indépendantes est une conséquence immédiate de la théorie générale des équations linéaires du second ordre à coefficients continus (chap. 2).

Pour $\lambda > 0$, l'énoncé est une conséquence du résultat général suivant (que nous ne démontrons pas, cf. [8, p. 91] et comparer avec la proposition 2.7.8) : soit l'équation

$$x'' + \big\{1 + v(t) + r(t)\big\}x = 0, \quad t > 0,$$

avec v réelle de classe C^1 et r réelle continue telles que, pour un $t_0 > 0$,

$$\int_{t_0}^{\infty} |v'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} |r(t)|\,\mathrm{d}t < \infty ;$$

alors il existe deux solutions linéairement indépendantes φ, ψ telles que

$$\lim_{t\to\infty} \big\{\varphi(t) - \exp\big(iF(t)\big)\big\} = 0, \quad \lim_{t\to 0} \big\{\psi(t) - \exp\big(-iF(t)\big)\big\} = 0$$

avec $F(t) = \int_0^1 \sqrt{1 + v(s)}\,\mathrm{d}s$.

Pour $\lambda < 0$, on doit raisonner comme suit : l'équation

$$tx'' + (2\mu + 2 - t)x' + \nu x = 0 \tag{8.78}$$

possède une solution polynomiale $L_\nu^{(2\mu+1)}(t)$ si et seulement si ν est un entier $\geqslant 0$; pour ν non entier, les solutions tendent vers l'infini en module comme e^t/t^r lorsque $t \to \infty$ (r étant un entier positif approprié) ; ces affirmations sont établies en utilisant les solutions en séries (chap. 2). Si

$$y(t) = t^\mu \mathrm{e}^{-t/2} x(t),$$

alors y vérifie l'équation

$$t^2 y'' + 2ty' + \Big(-\frac{1}{4}t^2 + (\mu + \nu + 1)t - \mu(\mu+1)\Big) y = 0 ;$$

en posant $z(t) = y(\alpha t)$, z vérifie l'équation

$$t^2 z'' + 2tz' + \left(-\frac{\alpha^2}{4}t^2 + (\mu+\nu+1)\alpha t - \mu(\mu+1)\right) z = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$z'' + \frac{2}{t}\,z' + \left(-\frac{\alpha^2}{4} + \frac{(\mu+\nu+1)\alpha}{t} - \frac{\mu(\mu+1)}{t^2}\right) z = 0\,. \tag{8.79}$$

Notons que

$$z(t) = (\alpha t)^{\mu}\, \mathrm{e}^{-\alpha t/2} x(\alpha t)\,. \tag{8.80}$$

Si $\mu = k$, $\alpha = 2\sqrt{-\lambda}$, $(k+\nu+1)\alpha = c$, alors (8.79) devient la même équation que (8.76) avec $V(r) = -c/r$. On en conclut que si $\beta = c/\alpha \in \{k+1, k+2, \ldots\}$, alors $\nu \in \mathbb{N}$ et (8.76) avec $V(r) = -c/r$ aura une solution

$$a(r) = r^k \exp\left(-\frac{\alpha r}{2}\right) L_\nu^{(2k+1)}(\alpha r)$$

qui est bien de carré intégrable (c'est-à-dire qui vérifie (8.77)) car $L_\nu^{(2k+1)}$ est un polynôme. Si $\beta \notin \{k+1, k+2, \ldots\}$, $a(t)$ sera de la forme (8.80) avec $|x(t)| \to \infty$ exponentiellement (comme précisé ci-dessus), ce qui exclut la possibilité que a vérifie (8.77). ♦

Concernant les valeurs propres de L avec $V(r) = -c/r$, $c > 0$, (8.75), on peut alors affirmer ce qui suit : *les valeurs propres sont*

$$\lambda_n = \frac{-(c/2)^2}{n^2}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,; \tag{8.81}$$

en écrivant $n = k + \nu + 1$, k, $\nu \in \mathbb{N}$, *les fonctions propres qui correspondent à* λ_n *sont données par*

$$u(x) = a(r) Y_k(\xi)\,, \quad a(r) = r^k \exp\left(-\frac{cr}{2n}\right) L_\nu^{(2k+1)}\left(\frac{cr}{n}\right)\,, \quad \nu = n-k-1 \tag{8.82}$$

où $r = \|x\|$, $\xi = x/r$, *et* Y_k *est une fonction harmonique sphérique de degré* k, $Y_k \in \mathcal{H}_k(S^2)$ *; la valeur propre* λ_n *est de multiplicité* n^2.

Il reste à vérifier la dernière affirmation ; puisque $\mathcal{H}_k = 2k+1$, on voit que, pour n donné, il existe exactement

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$$

fonctions propres (linéairement indépendantes) fournies par (8.82).

A partir des propriétés établies pour l'équation (8.76) pour $V(r) = -c/r$, nous pouvons caractériser le spectre de l'opérateur L (8.75) avec $V(r) = -c/r$;

on établit séparément que L est alors un opérateur essentiellement autoadjoint avec un domaine approprié. *Le spectre $\sigma(L)$ est donné par*

$$\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \cup [\,0\,, \infty\,[\,, \quad \lambda_n = \frac{-(c/2)^2}{n^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,; \tag{8.83}$$

Les nombres $\lambda \geqslant 0$ forment le spectre continu de L et les nombres strictement négatifs λ_n le spectre ponctuel (formé des valeurs propres de L).

Intuitivement, λ appartient au spectre continu de L si l'équation $Lu = \lambda u$ possède une solution u qui n'est pas de carré intégrable ; c'est ce qui résulte pour notre opérateur lorsque $\lambda > 0$; $\lambda = 0$ appartient au spectre continu car les valeurs propres $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Nous ne démontrons pas ici que les remarques précédentes constituent une preuve que le spectre continu de L est $[\,0\,, \infty\,[$ ni que les nombres qui ne sont pas dans l'ensemble $\sigma(L)$ donné dans (8.83) sont dans l'ensemble résolvant de L.

REMARQUES. Rappelons de la discussion donnée dans les paragraphes 5.10.5 et 7.4.5 que l'équation de Schrödinger est de la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = iL\psi$$

où $\psi = \psi(t, x)$ (abstraction faite de quelques constantes qui ne changent rien d'essentiel). En posant

$$\psi(t, x) = \mathrm{e}^{i\lambda t} u(x) \tag{8.84}$$

on voit que si ψ vérifie l'équation de Schrödinger, alors $Lu = \lambda u$, c'est-à-dire que u est une fonction propre de L, de valeur propre λ, si u est de carré intégrable ; inversement, si ψ est de la forme (8.84) avec u une fonction propre de L de valeur propre λ, alors ψ est une solution de l'équation de Schrödinger. Les valeurs propres λ sont interprétées comme certains niveaux d'énergie et une fonction propre correspondante s'appelle un *état lié* ou *stationnaire*. Dans beaucoup de problèmes de mécanique quantique, l'opérateur L possède, en plus des valeurs propres, un spectre continu, la description (8.83) étant assez typique des systèmes atomiques. Pour une interprétation physique du spectre continu et du spectre ponctuel, on doit consulter l'un des ouvrages de mécanique quantique conseillé au paragraphe 5.10.6. Le nombre entier n dans la formule (8.81) s'appelle le *nombre quantique total* (ou *principal*) de l'atome d'hydrogène pour lequel notre opérateur L (avec $V(r) = -c/r$) est bien adapté ; il y a une terminologie très élaboré décrivant les différents états liés donnés analytiquement par (8.82).

Il faut observer que, dans la littérature physique, la définition des polynômes de Laguerre $L_\nu^\alpha(t)$ est un peu différente ; les définitions coïncident lorsque $\alpha = 0$ (où l'on écrit simplement $L_\nu(t)$). La définition de $L_\nu^\alpha(t)$ utilisée ici est assez universelle dans les écrits mathématiques (même si Courant et Hilbert [3] préfèrent l'usage des physiciens, initié, peut-être, par un article de Schrödinger de 1926).

Bien entendu, dans les problèmes des opérateurs (comme celui traité ici) qui possèdent un spectre continu, les fonctions propres ne forment jamais une base orthogonale de l'espace hilbertien tout entier. Dans ces cas, la décomposition spectrale de l'espace tout entier exige un processus d'intégration indiqué au paragraphe 5.9.6.

8.7 ÉQUATIONS DE LA CHALEUR

8.7.1 Introduction

L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \triangle u \tag{8.85}$$

s'appelle *équation (homogène) de la chaleur* ; ici, $k > 0$ est une constante et $u = u(t, x)$ avec $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \triangle u + Q(t, x) \tag{8.86}$$

s'appelle équation *non homogène* associée. Une interprétation physique est de considérer $u(t, x)$ comme la température et $Q(t, x)$ la contribution de chaleur d'une source, au temps t à la position x ; $Q(t, x) > 0$ signifie un gain de chaleur, $Q(t, x) < 0$ une perte ; la constante k reflète la conductivité thermique. On suppose Q, k, connus et le problème consiste à déterminer u ; nous considérons ces équations pour $t > 0$, $x \in \Omega$, un domaine de $\mathbb{R}^N$; alors on impose une *condition initiale*

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \overline{\Omega} \tag{8.87}$$

et une *condition au bord* pour $t > 0$, $x \in \operatorname{Fr} \Omega$, comme expliqué dans le paragraphe 7.3.3. Nous dirons aussi que f *est la condition initiale* pour les équations (8.85) et (8.86).

Par solution de (8.85) ou (8.86), on entend une fonction *continue* u : $]0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que u'_t, u'_{x_i}, $u''_{x_i x_j}$ existent avec u vérifiant (8.85) ou (8.86) pour $t > 0$, $x \in \Omega$; la condition initiale (8.87) peut être interprétée de diverses manières ; on peut considérer (8.87) comme étant la relation

$$\lim_{0<t\to 0} u(t, x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{8.88}$$

ou comme l'affirmation que

$$\lim_{\substack{0<t\to 0 \\ x\to a \\ x\in\Omega}} u(t, x) = f(a), \quad a \in \overline{\Omega}. \tag{8.89}$$

Etant donné la continuité de u dans $]0, \infty[\times \Omega$, (8.89) équivaut à avoir $u \in C([0, \infty[\times \overline{\Omega})$; la différence entre (8.88) et (8.89) est considérable, (8.89) étant une interprétation plus exigeante de (8.87). Dans ce contexte, d'autres définitions et interprétations de la notion de solution et de la condition initiale (ainsi que des conditions au bord) sont possibles et utiles.

8.7.2 Solution dans $\mathbb{R}^N$

Nous résolvons (8.86) pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, sous la condition initiale $u(0,x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$; nous procéderons d'abord formellement en utilisant les transformées de Fourier des fonctions données f et $x \mapsto Q(t,x)$, $t > 0$ et de la fonction inconnue $x \mapsto u(t,x)$, $t > 0$, sans nous soucier de leur intégrabilité ; les formules obtenues seront justifiées dans la suite.

Posons

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \widehat{Q}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} Q(t,x)\,\mathrm{d}x$$

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} u(t,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En passant aux transformées de Fourier des deux membres de (8.86), on obtient

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -k\|\xi\|^2 \widehat{u}(t,\xi) + \widehat{Q}(t,\xi) \tag{8.90}$$

pour $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, avec $\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Ici, on a utilisé la propriété (8) (§ 6.1.3) ; notons que, pour ξ fixe, (8.90) est une équation différentielle linéaire du premier ordre en t que nous pouvons résoudre immédiatement sous la condition initiale $\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi)$, en utilisant la formule (1.12) ; on obtient

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\exp\Big(-kt\|\xi\|^2\Big) + \int_0^t \widehat{Q}(s,\xi)\exp\Big(-k\|\xi\|^2(t-s)\Big)\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.91}$$

Posons

$$K(t,x) = \big(4\pi kt\big)^{-N/2}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4kt}\right)\,; \tag{8.92}$$

de l'exemple 4 (§ 6.1.5), on sait que, pour $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{K}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} K(t,x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \exp\Big(-kt\|\xi\|^2\Big)\,.$$

En utilisant la formule de convolution (§ 6.1.5(6)), on peut alors déduire de (8.91) que

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K(t,x-y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \left\{\int_{\mathbb{R}^N} K(t-s,x-y)Q(s,y)\,\mathrm{d}y\right\}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(t,y)f(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\int_0^t K(t-s,x-y)Q(s,y)\,\mathrm{d}s\right\}\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{8.93}$$

On peut condenser l'écriture des formules (8.93) en utilisant la notation des convolutions ; posons

$$K_t(x) = K(t,x)\,, \quad Q_t(x) = Q(t,x)\,;$$

alors (8.93) équivaut à

$$u(t,x) = (K_t * f)(x) + \int_0^t (K_{t-s} * Q_s)(x)\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.94}$$

Ayant obtenu la forme d'une solution plausible $u(t,x)$, on peut démontrer séparément que celle-ci est bien une solution de (8.86) en faisant des hypothèses appropriées sur f et Q.

8.7.3 Proposition

(i) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée ; alors (avec $K_t(x) = K(t,x)$ défini par (8.92))

$$u_f(t,x) = u(t,x) = K_t * f(x) \tag{8.95}$$

définit une solution de l'équation homogène (8.85) pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, vérifiant la condition initiale $u(0,x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ au sens de (8.89). La fonction u_f définie par (8.95) est de classe C^∞ dans $]\,0\,,\infty[\,\times\mathbb{R}^N$ avec

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} f(x) \leqslant u_f(t,x) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} f(x)\,,\quad t>0\,,\ x\in\mathbb{R}^N\,. \tag{8.96}$$

(ii) Soit $Q : [\,0\,,\infty[\,\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée de classe C^2 dans $]\,0\,,\infty[\,\times\mathbb{R}^N$, ayant ses dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 bornées dans $]\,0\,,\infty[\,\times\mathbb{R}^N$, ; alors

$$v_Q(t,x) = v(t,x) = \int_0^t (K_{t-s} * Q_s)(x)\,\mathrm{d}s \tag{8.97}$$

définit une solution de l'équation non homogène (8.86) pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, vérifiant la condition initiale $v(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, au sens de (8.89).

REMARQUES. Ainsi, $u_f + v_Q$ est une solution de (8.86) avec condition initiale f, si f, Q vérifient les conditions indiquées dans la proposition ; notez que $u_f + v_Q$ est exactement l'expression donnée dans (8.94). Les conditions imposées sur f et Q pour la validité de la solution (8.94) ne sont pas les seules possibles ; la démonstration qui suit peut suggérer d'autres conditions de validité. Observons aussi que les conditions imposées sur f, Q dans la proposition ne garantissent pas l'existence de $\widehat{f}$, $\widehat{Q}$ comme intégrales de Fourier élémentaires ; néanmoins, le résultat (8.94) qui se déduit en supposant leur existence reste valable, comme affirmé dans la proposition. Evidemment, on peut interpréter tout le calcul donné dans le paragraphe 8.7.2 au sens des distributions ; on aura alors des solutions des équations (8.85) et (8.87) données par (8.94) au sens des distributions. La proposition 8.7.3 dit que si f, Q vérifient certaines conditions, alors ces distributions sont (engendrées par) des fonctions continues de divers degrés de *régularité*. Notons que la solution u_f de (8.85), donnée par (8.95),

est toujours de classe C^∞ même si f est simplement continue ; à partir de la démonstration qui suit, on verra que u_f est de classe C^∞ dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}^N$ sous des conditions beaucoup plus faibles sur f ; la distribution de température initiale f, même très irrégulière, devient instantanément très régulière. La régularité de v_Q définie par (8.97) est plus délicate ; on peut démontrer que si Q est borné et localement höldérien dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}^N$, alors v_Q est de classe C^2 dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}^N$ (par analogie avec la remarque suivant la proposition 8.3.4 concernant l'équation de Poisson), mais cette démonstration doit être faite différemment de celle qui suit.

DÉMONSTRATION

(i) On a

$$u_f(t,x) = u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi kt)^{-N/2} \exp\left(\frac{-\|x-y\|^2}{4kt}\right) f(y)\,dy\ ; \qquad (8.98)$$

posons

$$\frac{y-x}{\sqrt{2kt}} = z\ ;$$

alors

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} g(z) f(x + z\sqrt{2kt})\,dz \qquad (8.99)$$

où

$$g(z) = (2\pi)^{-N/2} \exp\left(\frac{-\|z\|^2}{2}\right).$$

Rappelons que $g \geqslant 0$ avec $\int_{\mathbb{R}^N} g = 1$; de (8.98), on voit que u est de classe C^∞ dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}^N$ car l'expression $K(t, x-y)$ (définie par (8.92)) qui apparaît dans l'intégrale (8.98) est de classe C^∞ dans les variables t, x ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$) ; de plus, f étant bornée, on vérifie aisément que $\mathrm{D}^\alpha K(t, x-y) f(y)$ est intégrable dans $\mathbb{R}^N$ pour tout multi-indice α (signifiant différentes dérivées par rapport à t, $x_1, \ldots, x_N$), ce qui permet de justifier l'échange de la dérivation D^α avec l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N}$ dans (8.98). Ces remarques établissent aussi que u vérifie (8.85) dès que l'on a prouvé que $K(t,x)$ vérifie (8.85) pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Cette preuve (ainsi que la forme de $\mathrm{D}^\alpha K$) devient immédiate en écrivant

$$\ln K(t,x) = \frac{-\|x\|^2}{4kt} - \frac{N}{2} \ln t - \frac{N}{2} \ln(4\pi k)$$

d'où (avec $\mathrm{D}_i = \partial/\partial x_i$, $\mathrm{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}$), pour $t > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathrm{D}_i K(t,x) = \frac{-x_i}{2kt} K(t,x), \quad \mathrm{D}_{ii} K(t,x) = \left\{ \frac{x_i^2}{4k^2t^2} - \frac{1}{2kt} \right\} K(t,x)$$

$$\mathrm{D}_t K(t,x) = \left\{ \frac{\|x\|^2}{4kt^2} - \frac{N}{2t} \right\} K(t,x) = k \triangle K(t,x).$$

Puisque f est continue, on a, pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to a}} f(x + z\sqrt{2kt}\,) = f(a)\ ;$$

f étant bornée et g intégrable, on peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir directement de (8.99) que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to a}} u(t,x) = f(a)\,, \quad a \in \mathbb{R}^N$$

car $\int_{\mathbb{R}^N} g = 1$; les relations (8.96) sont des conséquences immédiates de (8.99).

(ii) Posons

$$w(t,x;s) = \int_{\mathbb{R}^N} K(t, x-y)Q(s,y)\,\mathrm{d}y \tag{8.100}$$

pour $t > 0$, $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^N$; alors $v(t,x)$ de (8.97) s'écrit comme

$$v(t,x) = \int_0^t w(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.101}$$

On va établir maintenant que le principe de Duhamel (Ex. 17, 18, 19, sect. 7.8) peut être appliqué. Comme dans le passage de (8.98) à (8.99), on réécrit (8.100) comme suit, après un changement de variables :

$$w(t,x;s) = \int_{\mathbb{R}^N} g(z)Q(s, x + z\sqrt{2kt}\,)\,\mathrm{d}z \tag{8.102}$$

où g est comme dans la démonstration de (i). De (8.102), on voit que

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{ii}w(t,x;s) &= \int_{\mathbb{R}^N} g(z)\,\mathrm{D}_{ii}Q(s, x + z\sqrt{2kt}\,)\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{D}_t w(t,x;s) &= \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2} t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^N} g(z)\,\nabla Q(s, x + z\sqrt{2kt}\,)\cdot z\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{8.103}$$

où

$$\mathrm{D}_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,, \cdots \frac{\partial}{\partial x_N}\right), \quad \mathrm{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}\,.$$

De (8.103), on a

$$\triangle v(t,x) = \int_0^t \triangle w(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s \tag{8.104}$$

l'échange de $\triangle = D_{11} + \cdots + \mathrm{D}_{NN}$ et $\int_0^t$ dans (8.101) étant facile à justifier. De (8.102), on déduit (comme dans la démonstration de (i)) que, pour $s \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to a}} w(t,x;s) = Q(s,a)$$

ce qui nous permet de poser $w(0,x;s) = Q(s,x)$ pour obtenir une fonction donnée par $w(t,x;s)$ qui est continue pour $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. On peut maintenant dériver $v(t,x)$ par rapport à t dans (8.101) pour avoir

$$\mathrm{D}_t v(t,x) = \int_0^t \mathrm{D}_t w(t-s,x;s)\,\mathrm{d}s + Q(t,x) \tag{8.105}$$

en utilisant une formule (dite de Leibniz) dont l'applicabilité sera établie dans un instant. De (8.100), on sait que

$$\mathrm{D}_t w(t,x;s) = k\,\triangle w(t,x;s)$$

car $K(t,x-y)$ vérifie la même équation et on peut échanger les dérivations et intégrale dans (8.100) comme dans la démonstration de (i). On en conclut, en utilisant (8.104) et (8.105), que

$$\mathrm{D}_t v = k\,\triangle v + Q(t,x)$$

pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$; le fait que $v(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$ et $x \to a \in \mathbb{R}^N$ est évident de (8.101), compte tenu du fait que $|w| \leqslant M$ où $M = \sup\{|Q(t,x)| : t \geqslant 0\,,\ x \in \mathbb{R}^N\}$, grâce à (8.100) ou (8.102). La démonstration de (ii) est ainsi achevée, il ne reste qu'à justifier (8.105). Pour ce faire, posons, pour $x \in \mathbb{R}^N$ fixe,

$$h(t,s) = w(t-s,x;s)\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

avec $h(t,t) = w(0,x;t) = Q(t,x)$, $t \geqslant 0$; de (8.102) et (8.103), on voit que $(t,s) \mapsto h(t,s)$ est continue pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $t \geqslant 0$, et que $\mathrm{D}_t h(t,s) = \mathrm{D}_t w(t-s,x;s)$ est tel que $(t,s) \mapsto \mathrm{D}_t h(t,s)$ est continue pour $0 < s < t$ avec

$$|\mathrm{D}_t h(t,s)| \leqslant C(t-s)^{-1/2}\,, \quad 0 < s < t\,,$$

$C > 0$ étant une constante dépendant de k et $\sup\{\|\nabla Q(s,y)\| : s \geqslant 0\,,\ y \in \mathbb{R}^N\}$; en particulier,

$$\int_0^t |\mathrm{D}_t h(t,s)|\,\mathrm{d}s \leqslant C \int_0^t (t-s)^{-1/2}\,\mathrm{d}s < \infty\,.$$

Posons

$$H(t) = \int_0^t h(t,s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geqslant 0$$

avec $H(0) = 0$; notons que $H(t) = v(t,x)$; les propriétés énumérées de $h(t,s)$ permettent d'établir

$$H'(t) = \int_0^t \mathrm{D}_t h(t,s)\,\mathrm{d}s + h(t,t)\,, \quad t > 0\,,$$

ce qui est (8.105). En effet, si $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\big\{H(t+\varepsilon) - H(t)\big\} \\
&= \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}\big\{h(t+\varepsilon, s) - h(t,s)\big\}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} h(t+\varepsilon, s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathrm{D}_t h(t+\varepsilon', s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} \big\{h(t+\varepsilon, s) - h(t,t)\big\}\,\mathrm{d}s + h(t,t)
\end{aligned}$$

où $0 < \varepsilon' < \varepsilon$; lorsque $\varepsilon \to 0$, la première intégrale tend vers

$$\int_0^t \mathrm{D}_t h(t,s)\,\mathrm{d}s$$

grâce au théorème de Lebesgue et à la continuité de l'expression $\mathrm{D}_t h(t,s)$; la seconde intégrale tend vers 0 à cause de la continuité de l'expression $h(t,s)$. Ceci établit la formule pour $H'(t)$, c'est-à-dire (8.105). ♦

8.7.4 Unicité des solutions

Les solutions de (8.85) et de (8.86) obtenues dans la proposition 8.7.3 *ne sont pas uniques* si l'on n'impose pas des conditions de bornitude sur ces solutions. En effet, *il existe une fonction continue non nulle*

$$\varphi : [\,0\,,\,\infty\,[\,\times\,\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe C^∞ *dans* $]\,0\,,\,\infty\,[\,\times\,\mathbb{R}^N$ *vérifiant (8.85) pour* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ *avec* $\varphi(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ (nous ne démontrons pas ici l'existence d'une telle fonction φ). En ajoutant φ à une solution quelconque u de (8.85) ou de (8.86), on obtient d'autres solutions vérifiant la même condition initiale que u. Selon un théorème important de Widder (1944), *toute solution* u *de (8.85) pour* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, *qui vérifie la condition initiale* $u(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, *même au sens (8.88), qui est bornée inférieurement (*$u(t,x) \geqslant c$ *pour* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$*) ou bornée supérieurement est identiquement nulle.* Cette affirmation donne un théorème d'unicité très satisfaisant du point de vue physique (car les températures physiques sont nécessairement bornées inférieurement) ; on en déduit que *toute solution de (8.21) bornée inférieurement (ou supérieurement) vérifiant une condition initiale donnée possède au plus une solution.*

Il y a des théorèmes d'unicité en supposant que les solutions u ne croissent pas trop rapidement lorsque $\|x\| \to \infty$; nous n'en parlons pas ici ; disons seulement que pour qu'il y ait non-unicité, $|u(t,x)|$ doit croître plus rapidement que $\exp\big(c\|x\|^2\big)$ lorsque $\|x\| \to \infty$, ce qui est un niveau de croissance très élevé.

Les problèmes de non-unicité disparaissent si l'on considère les équations (8.85) et (8.86) dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. C'est une conséquence immédiate de la proposition suivante ; nous écrivons $u = u(t,x)$ et $\mathrm{D}_t u = u'_t$, $\mathrm{D}_i u = u'_{x_i}$, $\mathrm{D}_{ii} u = u''_{x_i x_i}$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

8.7.5 Proposition (*principe du maximum et du minimum*)

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $0 < T < \infty$, et

$$u : [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

une fonction continue telle que $\mathrm{D}_t u$, $\mathrm{D}_i u$, $\mathrm{D}_{ii} u$, $1 \leqslant i \leqslant N$, existent dans $]\,0\,,T\,[\times \Omega$ avec

$$\mathrm{D}_t u = k \triangle u \quad \textit{dans }]\,0\,,T\,[\times \Omega\,,\ k > 0\,.$$

Alors, le supremum et l'infimum de u sont atteints sur

$$F = \big(\{0\} \times \overline{\Omega}\big) \cup \big([\,0\,,T\,] \times \mathrm{Fr}\,\Omega\big)\ ;$$

autrement dit

$$\sup_{(t,x)\in[\,0\,,T\,]\times\overline{\Omega}} u(t,x) = \sup_{(t,x)\in F} u(t,x)\,, \qquad \inf_{(t,x)\in[\,0\,,T\,]\times\overline{\Omega}} u(t,x) = \inf_{(t,x)\in F} u(t,x)\,.$$

DÉMONSTRATION

La proposition sera une conséquence immédiate du lemme élémentaire suivant où u, Ω, T, F sont comme dans la proposition.

LEMME. *Si $u(t,x) \geqslant 0$ pour $(t,x) \in F$, alors $u(t,x) \geqslant 0$ pour $(t,x) \in [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$.*

En effet, si m, M sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de $u(t,x)$, $(t,x) \in F$, alors

$$u_1(t,x) = u(t,x) - m\,, \quad u_2(t,x) = M - u(t,x)\,, \quad (t,x) \in [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$$

sont deux fonctions sur lesquelles le lemme est applicable (car u_1, u_2 vérifient les mêmes hypothèses que u dans $[\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$, en particulier, $\mathrm{D}_t u_j = k \triangle u_j$, $j = 1, 2$, dans $]\,0\,,T\,[\times \Omega$). On conclut que $m \leqslant u(t,x) \leqslant M$ pour $(t,x) \in [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$, ce qui confirme la proposition.

Passons à la démonstration du lemme. Fixons $\varepsilon > 0$, $0 < T' < T$, et posons $v(t,x) = u(t,x) + \varepsilon t$, $\mu = \inf\{v(t,x) : 0 \leqslant t \leqslant T'\,,\ x \in \overline{\Omega}\}$; alors il existe $(\tau, a) \in [\,0\,,T'\,] \times \overline{\Omega}$ tel que $v(\tau,a) = \mu$. Démontrons que $\tau = 0$, $a \in \overline{\Omega}$ ou $0 < \tau \leqslant T'$, $a \in \mathrm{Fr}\,\Omega$; sinon $0 < \tau \leqslant T'$, $a \in \Omega$, et du calcul différentiel élémentaire (des fonctions d'une variable réelle), on a

$$\mathrm{D}_t v(\tau,a) \leqslant 0\ (= 0 \text{ si } 0 < \tau < T')\,, \quad \mathrm{D}_{ii} v(\tau,a) \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant N\,,$$

d'où

$$\mathrm{D}_t v(\tau,a) - k \triangle v(\tau,a) \leqslant 0\ ;$$

or

$$\mathrm{D}_t v(\tau,a) - k \triangle v(\tau,a) = \mathrm{D}_t u(\tau,a) + \varepsilon - k \triangle u(\tau,a) = \varepsilon > 0$$

si $0 < \tau \leqslant T'$, $a \in \Omega$, ce qui contredit l'inégalité précédente. Donc, pour $0 \leqslant t \leqslant T'$, $x \in \overline{\Omega}$,

$$u(t,x) + \varepsilon t \geqslant \mu = u(\tau, a) + \varepsilon\tau \geqslant 0$$

car $(\tau, a) \in F$, ce qui donne $u(t,x) \geqslant 0$ pour $(t,x) \in [\,0\,,T'\,] \times \overline{\Omega}$ en faisant $\varepsilon \to 0$; en faisant $T' \to T$ et en utilisant la continuité de u, on conclut que $u(t,x) \geqslant 0$ pour $(t,x) \in [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$. ♦

REMARQUE. Observons que le contenu physique de la proposition 8.7.5 et du lemme qui précède est évident, si l'on interprète $u(t,x)$ comme une température ; ainsi, le lemme dit que si la température d'un corps au début est $\geqslant 0$ et que la température sur sa superficie est toujours $\geqslant 0$, alors la température à l'intérieur du corps reste toujours $\geqslant 0$. On en tire le théorème d'unicité suivant.

8.7.6 **Proposition** (*théorème d'unicité*)

Soient $0 < T < \infty$, Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, u, v deux fonctions continues réelles définies dans $[\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$ ayant leurs dérivées partielles $\mathrm{D}_t u$, $\mathrm{D}_{ii} u$, $\mathrm{D}_t v$, $\mathrm{D}_{ii} v$, $1 \leqslant i \leqslant N$, dans $]\,0\,,T\,[\times \Omega$ avec

$$\mathrm{D}_t u = k\,\triangle u + Q(t,x)\,, \quad \mathrm{D}_t v = k\,\triangle v + Q(t,x)\,, \quad (t,x) \in\,]\,0\,,T\,[\times \Omega$$

où k est une constante > 0. Si

$$u(0,x) = v(0,x)\,,\ x \in \overline{\Omega} \quad \textit{et} \quad u(t,x) = v(t,x)\,,\ x \in \mathrm{Fr}\,\Omega\,,\ 0 \leqslant t \leqslant T\,,$$

alors $u(t,x) = v(t,x)$, $(t,x) \in [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$. Le même résultat est valable lorsque $T = \infty$ en remplaçant $[\,0\,,T\,]$ par $[\,0\,,\infty\,[$.

DÉMONSTRATION

Posons $w(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$; alors $w : [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue avec $\mathrm{D}_t w = k\,\triangle w$ dans $]\,0\,,T\,[\times \Omega$,

$$w(t,x) = 0\,, \quad (t,x) \in F = \big(\{0\} \times \overline{\Omega}\big) \cup \big([\,0\,,T\,] \times \mathrm{Fr}\,\Omega\big)\,.$$

De la proposition 8.7.5, on conclut que $w(t,x) = 0$, $(t,x) \in [\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$. L'affirmation pour $T = \infty$ s'obtient du cas $T < \infty$ directement en considérant le cas $[\,0\,,T\,] \times \overline{\Omega}$ pour $T = 1, 2, \ldots$ ♦

REMARQUE. Notons que pour le théorème d'unicité, aucune condition de régularité n'est nécessaire, ni sur Q, ni sur Ω, ni même sur les conditions initiales et au bord.

8.7.7 Solution dans des domaines autres que $\mathbb{R}^N$

Si Ω est un domaine borné, on peut résoudre (8.85) et (8.86), en principe, comme dans le paragraphe 7.4.3, en utilisant les valeurs propres et les fonctions propres de $-\triangle$ dans Ω ; ceci donne les solutions en séries. Si Ω est un domaine non borné, les solutions se présentent sous forme d'intégrales comme dans (8.94) pour $\mathbb{R}^N$; ce point est discuté brièvement dans le paragraphe 7.4.3.

8.8 ÉQUATION DES ONDES

8.8.1 Introduction

L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u \tag{8.106}$$

s'appelle *équation (homogène) des ondes* ; ici, $a > 0$ est une constante et $u = u(t, x)$ avec $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u + F(t, x) \tag{8.107}$$

s'appelle *équation non homogène associée*. Une interprétation physique est de considérer $u(t, x)$ comme la pression et $F(t, x)$ la force externe dans un milieu, au temps t et à la position x. On suppose F et a connus et le problème est de déterminer u ; si x est restreint à un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$, on impose une *condition initiale*

$$u(0, x) = f(x)\,, \quad u'_t(0, x) = g(x)\,, \quad x \in \Omega$$

et une *condition au bord* pour $t > 0$, $x \in \operatorname{Fr} \Omega$, comme expliqué dans le paragraphe 7.3.4 ; souvent, on essaie de déterminer $u(t, x)$ pour $t > 0$, $x \in \Omega$. Nous dirons que (f, g) est la *condition initiale* de l'équation des ondes. Par solution de ces équations, on entend une fonction *continue* $u :]\,0\,, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{D}_t u$, $\mathrm{D}_{tt} u$, $\mathrm{D}_i u$, $\mathrm{D}_{ii} u$, $1 \leqslant i \leqslant N$, existent pour $t > 0$, $x \in \Omega$ et qui vérifie ces équations partout dans $]\,0\,, \infty[\times \Omega$; l'interprétation des conditions initiales (f, g) doit être faite de manière appropriée (comme au § 8.7.1). Notons comme auparavant l'usage des notations D_t, D_{tt}, D_i, D_{ii}, pour $\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial t^2$, $\partial/\partial x_i$, $\partial^2/\partial x_i^2$.

8.8.2 Solutions dans $\mathbb{R}^N$

Nous résolvons l'équation des ondes non homogène (8.107) pour $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$; comme au paragraphe 8.7.2, nous procédons d'abord formellement en

utilisant les transformées de Fourier des fonctions f, g de la condition initiale et des fonctions $x \mapsto F(t,x)$, $x \mapsto u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Posons

$$\widehat{f}(\xi)\,, \quad \widehat{g}(\xi)\,, \quad \widehat{F}(t,\xi)\,, \quad \widehat{u}(t,\xi)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ \xi \in \mathbb{R}^N$$

pour les transformées de Fourier ainsi obtenues (cf. § 8.7.2). L'équation (8.107) se transforme alors en l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}\,(t,\xi) = -a^2 \|\xi\|^2\, \widehat{u}(t,\xi) + \widehat{F}(t,\xi) \tag{8.108}$$

avec

$$\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi)\,, \quad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}\,(0,\xi) = \widehat{g}(\xi)\,. \tag{8.109}$$

Pour ξ fixe, on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre en t, (8.108), qu'il faut résoudre sous la condition initiale (8.109). La solution est immédiate (Ex. 18, sect. 2.8) ; on a

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos\bigl(at\|\xi\|\bigr) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin\bigl(at\|\xi\|\bigr)}{a\|\xi\|} + \int_0^t \widehat{F}(s,\xi)\frac{\sin a(t-s)\|\xi\|}{a\|\xi\|}\,\mathrm{d}s\,. \tag{8.110}$$

Supposons que $H_t(x) = H(t,x)$ est telle que

$$\widehat{H}_t(\xi) = \frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|}\,; \tag{8.111}$$

alors

$$\mathrm{D}_t\widehat{H}_t(\xi) = \widehat{\mathrm{D}_t H_t}(\xi) = \cos t\|\xi\|$$

et

$$\left(\frac{1}{a}\,H_{at}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{\sin at\|\xi\|}{a\|\xi\|}\,, \quad \left(\mathrm{D}_t\frac{1}{a}\,H_{at}\right)^{\wedge}(\xi) = \cos at\|\xi\|\,.$$

De (8.110), on déduit que

$$u(t,x) = \frac{1}{a}\,H_{at} * g(x) + \mathrm{D}_t\left(\frac{1}{a}\,H_{at} * f\right)(x) + \int_0^t \frac{1}{a}\,H_{a(t-s)} * F_s(x)\,\mathrm{d}s \tag{8.112}$$

où $F_s(x) = F(s,x)$.

L'expression $H_t(x)$ vérifiant (8.111) existe pour tout $N \geqslant 1$ mais elle est une distribution tempérée. Démontrons que *pour $N = 3$, H_t est donnée par la formule*

$$\bigl\langle H_t\,,\,\varphi\bigr\rangle = \frac{t}{4\pi}\int_S \varphi(ty)\,\sigma(\mathrm{d}y)\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{8.113}$$

où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (§ 6.4.7) et

$$S = S^2 = \bigl\{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| = 1\bigr\}\,.$$

Pour établir que la distribution tempérée H_t définie par (8.113) est telle que $\widehat{H}_t$ est engendrée par la fonction donnée dans (8.111), on utilise la définition de $\widehat{H}_t$ (§ 6.4.10) :

$$\langle \widehat{H}_t , \varphi \rangle = \langle H_t , \widehat{\varphi} \rangle , \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) .$$

Si H_t est donnée par (8.113), on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle H_t , \widehat{\varphi} \rangle &= \frac{t}{4\pi} \int_S \widehat{\varphi}(ty) \, \mathrm{d}\sigma(y) = \frac{t}{4\pi} \int_S \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \exp(-ity \cdot x) \, \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \left\{ \int_S \exp(-iy \cdot tx) \, \mathrm{d}\sigma(y) \right\} \mathrm{d}x \qquad (8.114) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \frac{\sin t\|x\|}{\|x\|} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

car, pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \exp(-iy \cdot x) \, \mathrm{d}\sigma(y) = \frac{\sin \|x\|}{\|x\|} \qquad (8.115)$$

(en posant $\sin 0/0 = 1$). Pour établir (8.115), on peut procéder comme suit ; posons $I(x)$ pour l'intégrale dans (8.115). On vérifie que pour toute matrice orthogonale A du type $(3, 3)$,

$$I(Ax) = I(x) ;$$

donc $I(x) = I\big((0, 0, r)\big)$ où $r = \|x\|$; notons que pour $x = 0$, (8.115) est évident. Pour $r > 0$, on peut calculer $I\big((0, 0, r)\big)$ en passant aux coordonnées sphériques

$$y_1 = \sin\theta \cos\varphi , \quad y_2 = \sin\theta \sin\varphi , \quad y_3 = \cos\theta , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi , \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$\mathrm{d}\sigma(y) = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi .$$

On a alors

$$I\big((0, 0, r)\big) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-ir\cos\theta} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \left. \frac{\mathrm{e}^{-ir\cos\theta}}{ir} \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\sin r}{r}$$

ce qui établit (8.115) et achève notre démonstration de (8.113).

Il existe des expressions explicites pour H_t lorsque la dimension N est quelconque ; lorsque N *est impair et* $N \geqslant 3$, les formules sont similaires (mais plus compliquées) à (8.113) ; elles sont obtenues en faisant les moyennes des fonctions sur S^{N-1} ; lorsque N *est pair*, on obtient des formules différentes en considérant une équation des ondes dans $\mathbb{R}^N$, N pair, comme une équation similaire en les variables $(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1})$ de $\mathbb{R}^{N+1}$ où les fonctions ne dépendent pas de x_{N+1}. Nous décrivons cette méthode de *descente* dans la suite pour $N = 2$. La distinction entre les dimensions paires et impaires est un fait important dans la théorie des ondes.

Le cas $N = 1$ est très simple ; ici, on pose

$$\langle H_t\,,\,\varphi\rangle = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,,\quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\,; \tag{8.116}$$

alors

$$\begin{aligned}\langle \widehat{H}_t\,,\,\varphi\rangle = \langle H_t\,,\,\widehat{\varphi}\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\widehat{\varphi}(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\left\{\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\mathrm{e}^{-ixy}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ce qui prouve (8.111) pour $N = 1$.

Rappelons du paragraphe 8.1.3 que

$$M_t(\varphi,x) = \frac{1}{\omega_N}\int_{S^{N-1}}\varphi(x+ty)\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

où $S^{N-1} = \{y\in\mathbb{R}^N : \|y\| = 1\}$ et $t > 0$; posons

$$M_{-t}(\varphi,x) = M_t(\varphi,x)\,,\quad M_0(\varphi,x) = \varphi(x)$$

ce qui est raisonnable au vue de l'intégrale définissant $M_t(\varphi,x)$; écrivons

$$M_t\varphi(x) = M_t(\varphi,x)\,.$$

Alors $\varphi\mapsto M_t\varphi(0)$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est une distribution tempérée dans $\mathbb{R}^N$ que nous notons par M_t ; dans $\mathbb{R}^3$, $H_t = tM_t$. Il est clair que, si $\varphi_x(y) = \varphi(x-y)$, alors

$$\begin{aligned}(M_t * \varphi)(x) = \langle M_t\,,\,\varphi_x\rangle = M_t\varphi_x(0) &= \frac{1}{\omega_N}\int_{S^{N-1}}\varphi(x-ty)\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ &= \frac{1}{\omega_N}\int_{S^{N-1}}\varphi(x+ty)\,\mathrm{d}\sigma(y) = M_t\varphi(x)\,.\end{aligned}$$

Donc, dans $\mathbb{R}^3$, la formule (8.112) devient

$$u(t,x) = tM_{at}g(x) + \mathrm{D}_t tM_{at}f(x) + \int_0^t (t-s)M_{a(t-s)}F_s(x)\,\mathrm{d}s \tag{8.117}$$

En utilisant (8.116) pour la définition de H_t dans $\mathbb{R}^1$, la formule (8.112) redonne la solution de d'Alembert $u(t,x)$ déjà vue au paragraphe 7.1.3.

Une formule pour H_t valable dans $\mathbb{R}^N$ (N impair, $N\geqslant 3$, ou N pair, $N\geqslant 2$) est donnée dans Folland [8, p. 178].

8.8.3 Solutions dans $\mathbb{R}^2$

Nous considérons l'équation homogène (8.106) pour $N = 2$ sous la condition initiale (f, g). Pour la résoudre, nous résolvons (8.107) pour $N = 3$, obtenant ainsi $v(t, x_1, x_2, x_3)$ avec

$$v(0, x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)\,, \quad v'_t(0, x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)\,.$$

Posons $u(t, x_1, x_2) = v(t, x_1, x_2, 0)$; alors u vérifie (8.106) dans $\mathbb{R}^2$ et satisfait à la condition initiale (f, g). De (8.117), on a

$$u(t, x_1, x_2) = v(t, x_1, x_2, 0) = tM_{at}\, g(x_1, x_2, 0) + \mathrm{D}_t tM_{at} f(x_1, x_2, 0)\,.$$

Vérifions que

$$tM_{at}\, g(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{y_1^2 + y_2^2 < a^2 t^2} \frac{g(x_1 + y_1, x_2 + y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - y_1^2 - y_2^2}}\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\,. \quad (8.118)$$

En effet,

$$M_{at}\, g(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} g(x_1 + aty_1,\, x_2 + aty_2)\, \mathrm{d}\sigma(y)$$

où $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y_3 = \pm\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}$, $y \in S^2$. Un calcul élémentaire donne

$$\mathrm{d}\sigma(y) = \frac{1}{|y_3|}\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\ ;$$

l'intégrale sur S^2 est formée de deux intégrales, une où $y_3 > 0$ et l'autre où $y_3 < 0$, les deux intégrales étant de valeurs égales. Donc

$$tM_{at} g(x_1, x_2, 0) = \frac{t}{2\pi} \iint_{y_1^2 + y_2^2 < 1} \frac{g(x_1 + aty_1, x_2 + aty_2)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\ ; \quad (8.119)$$

en posant $z_1 = aty_1$, $z_2 = aty_2$, on obtient (8.118).

La formule pour $\mathrm{D}_t tM_{at} f(x_1, x_2, 0)$ est alors

$$\mathrm{D}_t tM_{at} f(x_1, x_2, 0) = \mathrm{D}_t \left\{ \frac{t}{2\pi a} \iint_{y_1^2 + y_2^2 < a^2 t^2} \frac{f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)}{\sqrt{a^2 t^2 - y_1^2 - y_2^2}}\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 \right\} ;$$

la formule de la forme (8.119) est peut-être plus commode pour le calcul de $\mathrm{D}_t\{tM_{at} f\}$.

8.8.4 Unicité des solutions

Le fait essentiel est que *la formule (8.112) fournit la solution unique de l'équation non homogène (8.107).* Cette affirmation reste valable même lorsque la condition initiale (f, g) et la fonction $F(t, x)$ sont des distributions, la solution étant alors une distribution. Si f, g, F sont suffisamment différentiables, la solution u sera de classe C^2 ; pour $N = 3$, il suffit que f soit de classe C^3, g de classe C^2 et F de classe C^2 pour que la solution u soit de classe C^2.

Nous ne démontrons pas ces affirmations. Comme pour les autres équations linéaires, l'unicité des solutions de l'équation non homogène se ramène à l'unicité des solutions de l'équation homogène ; en effet, si u_1, u_2 sont deux solutions de l'équation non homogène (8.107) vérifiant la même condition initiale (f, g), alors $u = u_1 - u_2$ est une solution de l'équation homogène (8.106) vérifiant la condition initiale $(0, 0)$; il suffit alors de démontrer que si $u(0, x) = 0$, $u'_t(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, et u vérifie (8.106), alors $u(t, x) \equiv 0$, ce que l'on peut faire en supposant que u est de classe C^2.

Pour motiver cette dernière affirmation, considérons la solution $u(t, x)$ (donnée par 8.117)) dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation homogène (8.106) avec condition initiale (f, g) (avec $F(t, x) \equiv 0$) ; rappelons que

$$M_{at}\, g(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S g(x + aty)\, \mathrm{d}\sigma(y)$$

où $S = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| = 1\}$. Donc la valeur de $u(t, x)$ dépend seulement des valeurs de f et g dans un voisinage infinitésimal de la *sphère* $S_{at}(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi - x\| = at\}$ (et même des valeurs de g sur $S_{at}(x)$) ; ceci est connu comme le *principe de Huygens* (qui est valable dans toute dimension spatiale impaire). En particulier, *si f, g sont nuls dans une boule fermée $\overline{B}_r(x_0)$, alors $u(t, x) = 0$ pour (t, x) tels que*

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{r}{a}\,, \quad \|x - x_0\| \leqslant r - at$$

car alors, pour $y \in S$, $f(x + aty) = g(x + aty) = 0$, étant donné que

$$\|x + aty - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + at \leqslant r\,.$$

Une démonstration rigoureuse d'unicité se base sur l'établissement direct (indépendant de (8.117)) de l'affirmation qui précède et qui permet de conclure que $u \equiv 0$ si $f \equiv 0$, $g \equiv 0$.

Le principe de Huygens est un peu moins précis dans la dimension 2 comme il ressort des formules (8.118) et (8.119) ; la valeur de $u(t, x)$ dépend maintenant des valeurs de f, g dans un voisinage infinitésimal de la *boule fermée* $\overline{B}_{at}(x)$ (et même des valeurs de g dans cette boule). Cette différence dans le principe de Huygens persiste dans toutes les dimensions spatiales paires.

Cette discussion autour du principe de Huygens permet d'interpréter le nombre $a > 0$ comme la *vitesse de propagation* (de la pression, etc.) ; ceci a déjà été vu explicitement dans le cas de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$ (§ 7.1.3).

Il y a des théorèmes d'unicité pour les solutions de (8.107) lorsque $t > 0$, $x \in \Omega$, un domaine « régulier » de $\mathbb{R}^N$, en imposant les conditions au bord appropriées. Lorsque Ω est un domaine borné « régulier », on peut écrire explicitement les solutions sous forme de séries, en utilisant les valeurs propres et les fonctions propres de $-\triangle$ dans Ω, comme on l'a vu au paragraphe 7.4.4.

8.9 EXERCICES

1 Vérifier les relations suivantes où a, x, b sont dans $\mathbb{R}^N$:

(i) $\nabla\|x-a\|^{\alpha} = \alpha\|x-a\|^{\alpha-2}(x-a)$, $x \neq a$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\triangle\|x-a\|^{\alpha} = \alpha(N+\alpha-2)\|x-a\|^{\alpha-2}$, $x \neq a$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\triangle(fg) = g\triangle f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\triangle g$, où f et g sont deux fonctions réelles de classe C^2 dans une partie ouverte de $\mathbb{R}^N$.

(iv) $\triangle\Big\{\big(c-\|x\|^2\big)\|x-a\|^{-N}\Big\} = 2N\|x-a\|^{-N-2}\big(c-\|a\|^2\big)$, $c \in \mathbb{R}$, $x \neq a$.

(v) $\triangle\Big\{\|x-a\|^2\|x-b\|^{-N}\Big\} = 2N\|a-b\|^2\|x-b\|^{-N-2}$, $x \neq b$.

(vi) $\triangle\left\{\dfrac{c-\|x-a\|^2}{\|x-b\|^N}\right\} = 2N\|x-b\|^{-N-2}\Big(c-\|a-b\|^2\Big)$, $c \in \mathbb{R}$, $x \neq b$.

2 (Notations du § 8.1.2) Soit

$$u(x) = \frac{R^2-\|x-a\|^2}{R\omega_N}\int_{S_R(a)} \frac{\alpha(y)}{\|x-y\|^N}\,\mathrm{d}\sigma(y)$$

où $\alpha : S_R(a) \to \mathbb{R}$ est tel que $\int_{S_R(a)}|\alpha(y)|\,\mathrm{d}\sigma(y) < \infty$. En admettant la possibilité d'échange de $\triangle$ et $\int$, vérifier que $\triangle u(x) = 0$ si $x \notin S_R(a)$. (Utiliser Ex. 1(vi).)

3 Soit u une fonction harmonique dans une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^N$; vérifier que $\mathrm{D}^{\alpha}u$ est harmonique dans Ω pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

4 Soit f une fonction holomorphe dans une partie ouverte Ω de $\mathbb{C}$; démontrer que $|f|$ est une fonction sous-harmonique dans Ω en utilisant la définition du paragraphe 8.3.1 et également en établissant que $\triangle(|f|) = |f|^{-1}|f'|^2$ aux points z tels que $|f(z)| \neq 0$.

5 Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $u : \Omega \to I$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $v = \varphi \circ u$. Etablir les affirmations suivantes :

(i) Si u est harmonique et φ est convexe (resp. concave), alors v est sous-harmonique (resp. surharmonique).

(ii) Si u est sous-harmonique et φ est convexe et croissante, alors v est sous-harmonique.

(iii) Si u est surharmonique et φ est concave et croissante, alors v est surharmonique.

(Utiliser l'inégalité de Jensen pour les intégrales.)

6 Soit u une fonction harmonique dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$. Vérifier que u^2 est sous-harmonique ; démontrer que u^2 est harmonique si et seulement si u est constante. Vérifier que u^+, $\exp u$, u^α (avec $u \geqslant 0$, $\alpha > 1$) sont aussi sous-harmoniques (où $u^+ = \max(u, 0)$).

7 Soit $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ harmonique ; si a, $b \in \mathbb{R}^N$, $d = \|a - b\| > 0$, $r > 0$, posons $B_1 = B_{r+d}(a)$, $B_2 = B_r(b)$. En utilisant le fait que $B_2 \subset B_1$, $u(b) = A_r(u, b)$ et $u \geqslant 0$, démontrer que

$$u(b) \leqslant \left(\frac{r+d}{r}\right)^N u(a)\,.$$

En faisant $r \to \infty$, conclure que $u(b) \leqslant u(a)$; en déduire que u est constante. (Par contre, $u(x) = \|x\|^2$ donne une fonction $\geqslant 0$ sous-harmonique non constante dans $\mathbb{R}^N$.)

8

(i) Soit $u \geqslant 0$ une fonction sous-harmonique dans un domaine contenant $\overline{B}_R(0) \subset \mathbb{R}^N$; démontrer que, pour $\alpha \geqslant 1$ et $\|x\| < R$,

$$\{u(x)\}^\alpha \leqslant \frac{M_R}{C}\,(R - \|x\|)^{-N}$$

où

$$M_R = \int_{B_R(0)} |u(y)|^\alpha \,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \lambda\big(B_R(0)\big) = CR^N\,.$$

(ii) Déduire de (i) que si $u \geqslant 0$ est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^N$, ou si u est harmonique dans $\mathbb{R}^N$, avec $u \in \mathcal{L}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ (pour un $\alpha \geqslant 1$), alors $u \equiv 0$.

(Noter que

$$u^\alpha(x) \leqslant \frac{1}{Cd^N} \int_{B_d(x)} u^\alpha(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{Cd^N} \int_{B_R(0)} u^\alpha(y)\,\mathrm{d}y$$

si $d = R - \|x\|$.)

9 Soit

$$u(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^3 .$$

Démontrer que u est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^3$, avec $0 \leqslant u \leqslant 1$; en déduire qu'il existe des fonctions sous-harmoniques bornées non constantes dans $\mathbb{R}^N$ si $N \geqslant 3$. (Par contre, dans $\mathbb{R}^1$ et $\mathbb{R}^2$, toute fonction sous-harmonique bornée est constante.)

10 Soient

$$\mathrm{D}_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}, \quad C_R = \mathrm{Fr}\ \mathrm{D}_R,\ 0 < R < \infty ;$$

l'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de Dirichlet

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } \mathrm{D}_R, \qquad u = \alpha \quad \text{sur } C_R$$

par la méthode de séparation des variables en passant aux coordonnées polaires. Posons ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant R$)

$$v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \beta(\theta) = \alpha(R\cos\theta, R\sin\theta) ;$$

en introduisant $v(r, \theta) = a(r)b(\theta)$ dans l'équation

$$v''_{rr} + \frac{1}{r}\, v'_r + \frac{1}{r^2}\, v''_{\theta\theta} = 0$$

(cf. (8.70)) obtenir les relations (cf. § 8.6.5)

$$b'' + \mu b = 0, \quad r^2 a'' + r a' - \mu a = 0$$

ce qui donne $\mu = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $b(\theta) = \cos n\theta$ ou $\sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}$, et

$$a(r) = \begin{cases} 1 \text{ ou } \ln r & \text{si } n = 0 \\ r^n \text{ ou } r^{-n} & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On conclut que

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2}\, c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)$$

pour c_n, d_n appropriés ; en écrivant

$$\beta(\theta) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = v(R, \theta),$$

on a $c_0 = a_0$, $c_n R^n = a_n$, $d_n R^N = b_n$, $n \geqslant 1$, d'où

$$u(x, y) = v(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

(Dans ces formules, on peut aussi considérer $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ en ne changeant strictement rien.)

11 (Suite de l'exercice 10) En écrivant

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \beta(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\,, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \beta(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\,, \qquad n \geqslant 0$$

dans la série pour $u(x,y) = v(r,\theta)$, obtenir que

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}\,\beta(t)\,\mathrm{d}t$$

en utilisant la formule

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\varphi + r^2}$$

que l'on établit en se servant de la série géométrique complexe $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. Vérifier que l'expression $u(x,y) = v(r,\theta)$ est identique à la formule intégrale de Poisson (8.28) pour $N = 2$.

12 (Suite de l'exercice 10)

(a) Vérifier que si

(i) $\alpha(x,y) = x$,
(ii) $\alpha(x,y) = y$,
(iii) $\alpha(x,y) = x + y$,
(iv) $\alpha(x,y) = x^2 - y^2$

alors la formule pour $u(x,y)$ donne bien les solutions évidentes.

(b) Pour $\alpha(x,y) = |y|$, $(x,y) \in C_R$, vérifier que

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2R}{\pi} - \frac{4R}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k}\frac{1}{4k^2 - 1}\cos 2k\theta\,.$$

(c) Pour $\alpha(x,y) = \operatorname{sgn} y$, $(x,y) \in C_R$, vérifier que

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\sin(2k+1)\theta$$

($\operatorname{sgn} y = +1$ si $y > 0$, $\operatorname{sgn} y = -1$ si $y < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$).

Un calcul de la série complexe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\,, \quad |z| < 1$$

donne que, pour (c),

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Im} f\left(\frac{r}{R}\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2Rr\sin\theta}{R^2 - r^2}$$

avec

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2Ry}{R^2 - (x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in \mathrm{D}_R .$$

(Notons que dans (c), la condition au bord est donnée par une fonction discontinue sur C_R ; dans cette situation, la notion d'une solution classique n'est pas applicable (§ 8.5.1) ; une discussion générale d'une solution du problème de Dirichlet avec condition au bord discontinue peut être faite en utilisant la notion de résolutivité (§ 8.5.4). Dans le problème simple ici, il suffit d'exiger que $u(x,y) \to \alpha(x_0,y_0)$ à chaque point de continuité $(x_0,y_0) \in C_R$ de α lorsque $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Il reste à démontrer l'unicité de la solution ; nous laissons ceci en exercice.)

13 Soient

$$K(R_1,R_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 < x^2+y^2 < R_2^2\}, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty$$

et $\operatorname{Fr} K(R_1,R_2) = C_{R_1} \cup C_{R_2}$ (notations de l'excercice 10) ; l'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de Dirichlet

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } K(R_1,R_2), \qquad u = \begin{cases} \alpha_1 & \text{sur } C_{R_1} \\ \alpha_2 & \text{sur } C_{R_2} \end{cases}$$

en suivant la méthode de l'exercice 10. Posons

$$v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad \beta_i(\theta) = \alpha_i(R_i\cos\theta, R_i\sin\theta), \ i = 1, 2 .$$

Alors

$$v(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$$

où les A_n, B_n, C_n, D_n sont déterminés comme suit ; écrivant

$$\beta_1(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = v(R_1,\theta)$$

$$\beta_2(\theta) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) = v(R_2,\theta),$$

on a

$$\frac{1}{2} a_0 = A_0 + B_0 \ln R_1, \quad \frac{1}{2} c_0 = A_0 + B_0 \ln R_2$$

$$\begin{aligned} a_n &= R_1^n A_n + R_1^{-n} C_n, & c_n &= R_2^n A_n + R_2^{-n} C_n \\ b_n &= R_1^n B_n + R_1^{-n} D_n, & d_n &= R_2^n B_n + R_2^{-n} D_n, \end{aligned} \qquad n = 1, 2 \ldots$$

ce qui déterminent A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n, $n \geqslant 1$. (Si α_1, α_2 sont des constantes, la solution est très simple ; alors $v(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r$, A_0, B_0 constantes déterminées par $\alpha_1 \equiv (1/2)a_0$, $\alpha_2 \equiv (1/2)c_0$.)

14 (Notations de l'exercice 10) L'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de Dirichlet (extérieur)

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } \overline{D}_R^c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > R^2\right\}, \qquad u = \alpha \quad \text{sur } C_R .$$

Avec $u(x,y) = v(r,\theta)$, $r \geqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\alpha(x,y) = \beta(\theta)$, on a

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2}\, c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \quad r \geqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

les c_n, d_n étant déterminés en posant

$$\beta(\theta) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = v(R,\theta)$$

ce qui donne

$$c_0 = a_0, \quad c_n R^{-n} = a_n, \quad d_n R^{-N} = b_n, \qquad n \geqslant 1,$$

$$u(x,y) = v(r,\theta) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2}\, \beta(t)\, \mathrm{d}t$$

en faisant le calcul indiqué dans l'exercice 11. Contrairement au cas de l'exercice 10, cette solution n'est pas unique car

$$u(x,y) + c(\ln r - \ln R), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

est aussi une solution pour tout choix de $c \in \mathbb{R}$. (On peut démontrer que $u(x,y)$ est l'unique solution *bornée* du problème.)

15 Soit

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < b\right\}.$$

L'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de Dirichlet

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } R$$
$$u(0,y) = 0 = u(a,y), \quad 0 < y < b$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = g(x), \quad 0 < x < a.$$

Voir que

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)$$

où $\varphi_n(0) = f_n$, $\varphi_n(b) = g_n$, $n \geqslant 1$, avec

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x\,, \quad g_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x$$

(car $u(x,0) = f(x)$, $u(x,b) = g(x)$; utiliser les séries en sinus pour f, g dans $[\,0\,,\,a\,]$). De $\triangle u = 0$, déduire que

$$\varphi_n''(y) - \lambda_n \varphi_n(y) = 0\,, \quad \lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2$$
$$\varphi_n(0) = f_n\,, \quad \varphi_n(b) = g_n$$

d'où obtenir que

$$\varphi_n(y) = f_n \frac{\mathrm{sh}\big(n\pi(b-y)/a\big)}{\mathrm{sh}(n\pi b/a)} + g_n \frac{\mathrm{sh}(n\pi y/a)}{\mathrm{sh}(n\pi b/a)}\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

(De même, on résout le problème de Dirichlet lorsque $u(0,y) = \widetilde{f}(y)$, $u(a,y) = \widetilde{g}(y)$, $0 < y < b$, $u(x,0) = u(x,b) = 0$, $0 < x < a$; la somme des deux solutions ainsi obtenues donne la solution du problème de Dirichlet dans R avec une condition quelconque $u = \alpha$ sur $\mathrm{Fr}\,R$. Pour que α soit continue, il faut que f, g, $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ s'accordent aux sommets de R.)

16 (Les notations sont celles de la propoposition 8.2.8) Posons

$$B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N\,, \quad n \geqslant 2\,, \qquad \mathrm{Fr}\,B = S = S_R(0)\,;$$

vérifier qu'une solution du problème de Dirichlet extérieur

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } \mathrm{ext}\,B = \big(\overline{B}\big)^c\,, \qquad u = \alpha \quad \text{sur } S\,,\ \alpha \in C(S)$$

est donnée par

$$u(x) = \frac{\|x\|^2 - R^2}{R\omega_N}\int_S \frac{\alpha(y)}{\|x-y\|^N}\,\mathrm{d}\sigma(y)\,, \quad \|x\| > R\,.$$

Vérifier que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 3$,

$$u(x) + c\Big(R^{-N+2} - \|x\|^{-N+2}\Big)\,, \quad \|x\| \geqslant R$$

est également une solution. (Utiliser la démonstration de la proposition 8.2.8 pour établir que, pour tout $a \in S$, $u(x) \to u(a)$ lorsque $x \to a$, $x \in \mathrm{ext}\,B$; cf. exercice 2 pour l'harmonicité de u dans $\mathrm{ext}\,B$; cf. l'exercice 14 pour $N = 2$; pour $N \geqslant 3$, on peut démontrer que $u(x)$ donne l'unique solution telle que $u(x) \to 0$ lorsque $\|x\| \to \infty$.)

17 Vérifier que l'unique solution du problème de Dirichlet (dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$)

$$\triangle u(x) = 0\,, \quad R_1 < \|x\| < R_2\,, \qquad u(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } \|x\| = R_1 \\ c_2 & \text{si } \|x\| = R_2 \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x) = A + B\|x\|^{-N+2}\,, \quad R_1 \leqslant \|x\| \leqslant R_2$$

où A, B sont déterminés par les équations

$$c_j = A + BR_j^{-N+2}\,, \quad j = 1, 2\,.$$

(Pour $N = 2$, voir l'exercice 14.)

18 L'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de Dirichlet pour $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) par la méthode de séparation des variables : soit

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } B_R\,, \qquad u = \alpha \quad \text{sur } \operatorname{Fr} B = S_R = S_R(0)\,.$$

Ecrire

$$\alpha(R\xi) = \sum_{k,j} \alpha_{kj} Y_{kj}(\xi)\,, \quad \xi \in S_1$$

où $1 \leqslant j \leqslant d_k$ (8.58), $k \geqslant 0$, $\{Y_{kj}\}_{1 \leqslant j \leqslant d_k}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_k$ (§ 8.6.6, 8.6.7) ; alors, si $x = r\xi$, $r = \|x\|$, $\xi \in S_1$, on a

$$u(x) = \sum_{k,j} \alpha_{kj} \left(\frac{r}{R}\right)^k Y_{kj}(\xi)\,, \quad x \in \overline{B}_R$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{R\omega_N} \int_{S_1} \frac{\alpha(y)\,\mathrm{d}\sigma(y)}{\|r\xi - y\|^N}$$

selon la proposition 8.2.8. (Le cas $N = 2$ est traité dans les exercices 10 et 11 ; notons que l'on sait d'avance que, si $u(x) = v(r, \xi)$,

$$v(r, \xi) = \sum_{k,j} a_{kj}(r) Y_{kj}(\xi)\ ;$$

en écrivant $\triangle = L + r^{-2}\,\triangle_\xi^*$ (8.69), on aura $\triangle u = 0$ si

$$\sum_{k,j} \{La_{kj}(r) - r^{-2}k(k+N-2)a_{kj}(r)\} Y_{kj}(\xi) = 0\,.$$

Donc, $a_{kj}(r)$ vérifie l'équation eulérienne

$$r^2 a_{kj}'' + r(N-1)a_{kj}' - k(k+N-2)a_{kj} = 0$$

qui possède les solutions linéairement indépendantes r^k, $r^{-(k+N-2)}$. Pour avoir la continuité en $r = 0$, on retient r^k ; puisque $v(R, \xi) = \alpha(\xi)$, on aura $a_{kj}(R) = \alpha_{kj}$, ce qui donne $a_{kj}(r) = (r/R)^k \alpha_{kj}$.)

19 Soient $N \geqslant 2$, $B_R = B_R(0)$, $S_R = \operatorname{Fr} B_R$, $\alpha : S_R \to \mathbb{R}$ (borélienne) telle que $\int_{S_R} |\alpha(y)| \, d\sigma(y) < \infty$; posons

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_N} \int_{S_R} \frac{\alpha(y)\, d\sigma(y)}{\|x - y\|^N}, \quad y \notin S_R .$$

En étudiant la démonstration de la proposition 8.2.8 et en se reportant à l'exercice 2, démontrer que u est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^N \setminus S_R$ avec

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in B_R}} u(x) = \alpha(\xi), \qquad \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \operatorname{ext} B_R}} u(x) = -\alpha(\xi)$$

en chaque point $\xi \in S_R$ où α est continue ; si $M = \sup_{y \in S_R} |\alpha(y)| < \infty$, alors $|u(x)| \leqslant M$, $x \notin S_R$.

20 Soient $\Omega = \Omega_1 \times]0, b[\subset \mathbb{R}^{N+1}$, $N \geqslant 1$, $0 < b < \infty$; on suppose que Ω_1 est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ où $-\triangle$ possède les valeurs propres λ_n et les fonctions propres ψ_n, $n = 0, 1, \ldots$ Démontrer (en suivant la méthode de l'exercice 15) que la solution du problème de Dirichlet

$$\triangle u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = g(x), & x \in \Omega \\ u(\xi, y) = 0 \quad \text{si } \xi \in \operatorname{Fr} \Omega_1, \ 0 < y < b \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x,y) = \sum_{n \geqslant 0} \psi_n(x)\, \varphi_n(y)$$

avec les φ_n déterminées par les conditions suivantes

$$\varphi_n''(y) - \lambda_n \varphi_n(y) = 0, \quad \varphi_n(0) = f_n, \quad \varphi_n(b) = g_n, \qquad n \geqslant 0$$

où

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} f_n \psi_n(x), \quad g(x) = \sum_{n \geqslant 0} g_n \psi_n(x), \qquad x \in \Omega_1 .$$

(On suppose que les ψ_n forment une base orthogonale de $L^2(\Omega_1)$ et que les f, g sont assez régulières ; noter que l'exercice 15 est un cas particulier de l'exercice 20 qui est, de nouveau, un exemple de la méthode de séparation des variables. On peut imaginer Ω comme étant un domaine cylindrique avec conditions au bord nulles sur les surfaces latérales.)

21 Soient A, B deux opérateurs linéaires symétriques définis dans des sous-espaces vectoriels de $L^2(X)$, $L^2(Y)$ respectivement (X, Y étant deux espaces mesurés, par exemple deux parties appropriées de $\mathbb{R}^M$, $\mathbb{R}^N$ respectivement). Si $\varphi \in L^2(X)$, $\psi \in L^2(Y)$, écrivons $\varphi \otimes \psi \in L^2(X \times Y)$ où $(\varphi \otimes \psi)(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$; posons $L = A + B$ pour l'opérateur linéaire donné dans un sous-espace approprié de $L^2(X \times Y)$ par $L(\varphi \otimes \psi) = A\varphi + B\psi$.

(i) Si $A\varphi = \lambda\varphi$, $B\psi = \nu\psi$, vérifier

$$L(\varphi \otimes \psi) = (\lambda + \nu)(\varphi \otimes \psi)\,.$$

(ii) Supposons que les valeurs propres et les fonctions propres de A, B sont données par $\{\lambda_n, \varphi_n\}$, $\{\nu_n, \psi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, respectivement ; supposons que les $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ forment des bases orthonormales pour $L^2(X)$, $L^2(Y)$ respectivement. Alors démontrer que toute valeur propre c de L est de la forme $\lambda_m + \nu_n$. Supposons que pour tout nombre c,

$$I_c = \big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \lambda_m + \nu_n = c\big\}$$

est un ensemble de cardinalité finie ; démontrer que si $Lf = cf$, $f \neq 0$, alors f est une combinaison linéaire de $\varphi_m \otimes \psi_n$, $(m,n) \in I_c \neq \emptyset$.

(Utiliser le fait que $\big\{\varphi_m \otimes \psi_n\big\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2(X \times Y)$; si $Lf = cf$, $c \neq \lambda_m + \nu_n$, $\forall\, m$, n, alors $f \perp \varphi_m \otimes \psi_n$, $\forall\, m$, n, d'où $f = 0$; si $Lf = cf$ et $(i,j) \notin I_c$, alors vérifier $\big\langle f\,,\, \varphi_i \otimes \psi_j \big\rangle = 0$.)

22 Utiliser l'exercice 21 pour calculer les valeurs propres et les fonctions propres pour $-\triangle$ dans $\Omega = \Omega_1 \times \,]\,0\,,\,b\,[$ vérifiant les hypothèses de l'exercice 20.

23 Soit $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$; en étudiant le développement du paragraphe 8.6.5, vérifier que les fonctions propres de $-\triangle$ dans Ω ne forment pas une base orthogonale pour $L^2(\Omega)$. (Cet exercice montre qu'une condition de régularité sur $\operatorname{Fr}\Omega$ est nécessaire pour la validité de la proposition donnée dans le paragraphe 8.6.1.)

24 Soit $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\big\}$. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ il existe une infinité de solutions linéairement indépendantes du problème de valeurs propres

$$\triangle u + \lambda u = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \operatorname{Fr}\Omega$$

avec $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $u \not\equiv 0$. (Il suffit d'écrire

$$u(x,y) = f(x)g(y)\,, \qquad \begin{cases} f''(x) + (\lambda + \nu)f(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ g''(y) - \nu g(y) = 0 \quad \text{pour } y > 0\,,\ g(0) = 0 \end{cases}$$

où λ, ν sont deux nombres complexes quelconques ; noter que ces fonctions u ne sont pas dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En fait, $\triangle$ (avec condition au bord de Dirichlet), défini de

manière appropriée dans un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$, est un opérateur autoadjoint dont le spectre est $[\,0\,,\,\infty\,[$; le spectre ne contient aucune valeur propre ; ce phénomène est possible parce que Ω est un domaine non borné.)

25 Résoudre l'équation de la chaleur

$$u'_t = k\,u''_{xx}\,, \quad t > 0\,,\ x > 0$$

avec $u(0,x) = f(x)$, $x \geqslant 0$, $u(t,0) = 0$, $t > 0$ en procédant comme suit : poser

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et résoudre l'équation pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ avec $u(0,x) = \widetilde{f}(x)$, en utilisant (8.98) ; on obtient

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (4\pi kt)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4kt}\right) \widetilde{f}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (4\pi kt)^{-1/2} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4kt}\right) - \exp\left(\frac{-(x+y)^2}{4kt}\right) \right\} f(y)\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

(Cette méthode s'appelle la *méthode des images* ; notons que $f(0) = 0$ pour avoir compatibilité entre la condition initiale et la condition au bord $\{0\}$, f étant supposée continue bornée dans $[\,0\,,\,\infty\,[$; alors $\widetilde{f}$ est continue et bornée dans $\mathbb{R}$ avec $\widetilde{f}(0) = f(0) = 0$ de sorte que (8.98) est applicable.) ♦

26 Considérons l'équation de la chaleur

$$u'_t = k\,\triangle u + Q\big(t, \|x\|\big)\,, \quad t > 0\,,\ x \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$$

avec $u(0,x) = f\big(\|x\|\big)$, $x \in \overline{B}_R(0)$ et $u(t,x) = \alpha(t)$ pour $t > 0$, $x \in S_R(0) = \operatorname{Fr} B_R(0)$. On résout cette équation en passant successivement à $v(t,r)$, $w(t,r) = rv(t,r)$, qui vérifient les équations suivantes :

(i) $v'_t = k\big(v''_{rr} + (2/r)v'_r\big) + Q(t,r)$, $t > 0$, $0 < r < R$ avec $v(0,r) = f(r)$, $0 < r \leqslant R$ et $v(t,R) = \alpha(t)$, $t > 0$.

(ii) $w'_t = kw''_{rr} + rQ(t,r)$, $t > 0$, $0 < r < R$ avec $w(0,r) = rf(r)$, $0 \leqslant r \leqslant R$ et $w(t,0) = 0$, $w(t,R) = R\alpha(t)$, $t > 0$.

La solution de l'équation (ii) est possible par la méthode donnée au paragraphe 7.4.3 et à la section 7.5 ; on obtient $u(t,x) = \|x\| w\big(t, \|x\|\big)$. (On peut considérer ce problème comme un modèle possible pour l'évolution de la température du globe terrestre $\overline{B}_R(0)$.)

27 Vérifier que $u(t,x) = \exp(i\lambda t)v(x)$ $(t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N)$ satisfait à l'équation des ondes homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \triangle u\,, \quad a > 0$$

si et seulement si $\triangle v + \big(\lambda/a\big)^2 v = 0$ (équation de Helmholtz). Vérifier que $v(x) = \exp\big(i(\lambda/a)x\cdot\xi\big)$ satisfait cette équation de Helmholtz pour tout choix de $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\|\xi\| = 1$. Conclure que $u(t,x) = \exp i\lambda\big(t + (x/a)\cdot\xi\big)$ vérifie l'équation des ondes homogène donnée pour tout choix de $\lambda \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\|\xi\| = 1$. (Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(t,x)$ s'appelle une *onde plane.*) Soit $\lambda > 0$; posons $f(x) = \exp(i\lambda x/a \cdot \xi)$, $g(x) = i\lambda f(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$; vérifier directement (utiliser (8.115)) que

$$u(t,x) = tM_{at}\, g(x) + \mathrm{D}_t tM_{at} f(x)\,.$$

28 Vérifier que $u(t,x) = \alpha(t + x/a\cdot\xi)$ $(a > 0, \xi \in \mathbb{R}^N, \|\xi\| = 1)$ satisfait à l'équation des ondes homogène de l'exercice 27 pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ (en supposant que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2). On en obtient d'autres solutions par des superpositions appropriées :

$$u(t,x) = \int_{\theta\in\mathbb{R}^m} \int_{\xi\in S^{N-1}} \alpha\left(t + \frac{x}{a}\cdot\xi,\, \theta\right) f(\theta)g(\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

29

(i) Vérifier que si $\alpha \in C^2\big([\,0\,,\,\infty\,[\,\big)$, alors

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x - at > 0 \\ \alpha\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{si } x - at < 0 \end{cases}$$

satisfait l'équation des ondes homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x > 0\,,\ t > 0\,,\ x - at \neq 0$$

avec $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = 0$ pour $x > 0$ (condition initiale) et $u(t,0) = \alpha(t)$, $t > 0$ (condition au bord).

(ii) Considérons la même équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x > 0\,,\ t > 0$$

avec $u(0,x) = f(x)$, $u'_t(0,x) = 0$ pour $x > 0$ (condition initiale) et $u(t,0) = \alpha(t)$, $t > 0$ (condition au bord). Alors

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\big\{\widetilde{f}(x+at) + \widetilde{f}(x-at)\big\} & \text{si } x > at \\ \dfrac{1}{2}\big\{\widetilde{f}(x+at) + \widetilde{f}(x-at)\big\} + \alpha\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) & \text{si } x < at \end{cases}$$

est une solution où $\widetilde{f}$ est le prolongement impair de f (Ex. 25), en supposant que f est de classe $C^2([0, \infty[)$, $f(0) = 0$ et en négligeant les points (t, x) tels que $x = at$.

(On peut interpréter $\alpha(t)$ comme un signal envoyé de la source $x = 0$ avec une vitesse de propagation $a > 0$.)

30 Supposons que $u(t, x)$ est une solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0, \ a > 0$$

avec u de classe C^2 dans $[0, \infty[\times [0, \ell]$; posons

$$E(t) = \int_0^\ell \frac{1}{2}\{u_t'^2(t, x) + a^2 u_x'^2(t, x)\}\, dx, \quad t \geqslant 0.$$

Vérifier que, pour $t \geqslant 0$,

$$E'(t) = \int_0^\ell a^2 \frac{d}{dx}(u_x' u_t')\, dx = a^2 u_x'(t, x) u_t'(t, x)\Big|_{x=0}^{x=\ell} = 0$$

si $u(t, 0) = 0$, $u(t, \ell) = 0$ pour $t \geqslant 0$ (car alors $u_t'(t, 0) = u_t'(t, \ell) = 0$). Conclure que si, de plus, $u(0, x) = 0$, $u_t'(0, x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \ell$, alors $E(t) = 0$, $t \geqslant 0$ (car alors, $E(0) = 0$), ce qui entraîne que $u(t, x) \equiv 0$. En déduire que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(t, x), \quad 0 < x < \ell, \ t > 0$$

avec

$$\begin{cases} u(t, 0) = \alpha(t), \ u(t, \ell) = \beta(t), \ t \geqslant 0 & \text{(condition au bord)} \\ u(0, x) = f(x), \ u_t'(0, x) = g(x), \ 0 \leqslant x \leqslant \ell & \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

possède au plus une solution de classe C^2 dans $[0, \infty[\times [0, \ell]$.

8.10 INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

La littérature concernant l'opérateur laplacien est immense, étant donné que cet opérateur est presque omniprésent dans les applications et dans les développements théoriques. En plus des indications données au paragraphe 7.9.4, nous ajoutons ce qui suit. La théorie autour des fonctions harmoniques s'appelle la *théorie du potentiel*. Un livre récent introductif est de S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey (*Harmonic Function Theory*, Spinger-Verlag, Berlin, 1992) ; notre présentation des fonctions harmoniques sphériques (§ 8.6.6) a utilisé cet ouvrage ainsi que celui de Folland [8] ; la méthode élégante dans la démonstration de la proposition 8.6.7(i) est empruntée de Stein et Weiss (*Introduction to Fourier*

Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, 1971). Un classique sur la théorie des fonctions harmoniques sphériques dans $\mathbb{R}^3$ est le livre de E. W. Hobson (*The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea, New York, 1965, 1re éd. 1931) ; il est utile pour les applications concrètes grâce à une riche collection de formules explicites reliant les différentes fonctions spéciales aux fonctions harmoniques sphériques dans $\mathbb{R}^3$.

La méthode de Perron pour la résolution du problème de Dirichlet s'appelle aussi la méthode PWB (Perron–Wiener–Brelot) ; cette méthode a été beaucoup généralisée durant les années 1940-1960 et elle permet une étude complète des points réguliers pour le problème de Dirichlet. Malheureusement, il n'existe pas d'ouvrage introductif pour cette théorie. On peut consulter le livre de L. L. Helms (*Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1969) qui donne des références aux autres sources. Il faut ajouter que Remak avait donné, indépendamment, une méthode presque identique à celle de Perron (1923), les deux articles étant publiés dans *Mathematische Zeitschrift*. Il y a plusieurs autres méthodes pour établir l'existence des solutions de l'équation $\triangle u = 0$ sous différentes conditions au bord ; on trouvera certaines de ces méthodes dans le livre de Folland [8] et dans l'ouvrage de Dautray et Lions [4] (ce dernier contient les méthodes numériques) ainsi que dans plusieurs autres ouvrages déjà mentionnés au paragraphe 7.9.4.

Le livre de H. S. Carslaw et J. C. Jaeger (*Conduction of Heat in Solids*, Oxford Univ. Press, 2e éd., 1959) est très utile pour les solutions détaillées et explicites qu'il contient pour l'équation de la chaleur ; il reste une référence indispensable pour les applications dans ce domaine.

Un livre classique sur la théorie de la propagation des ondes est celui de J. W. S. Rayleigh (*The Theory of Sound*, 2 vols, Dover Publications, 1945, nouveau tirage de la deuxième édition, 1894-96) ; l'introduction de l'édition Dover donne une explication claire de l'importance de cet ouvrage pour les nombreuses disciplines (telles que l'optique, l'électromagnétisme, l'hydrodynamique) où le phénomène de propagation d'une onde constitue un thème central.

Réponses aux exercices

CHAPITRE 1

1.8

1

(i) $y(x) = x(\ln x + 1)$, $0 < x < \infty$; solution unique et non prolongeable.

(ii) $y(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$, $-1 < x < 1$; solution unique et non prolongeable.

(iii) Toutes les solutions non prolongeables sont données par

$$y(x) = \begin{cases} (x-c)^3 & \text{si } x \leqslant c \\ 0 & \text{si } c < x < d \\ (x-d)^3 & \text{si } x \geqslant d \end{cases}$$

avec $-\infty \leqslant c \leqslant 0 \leqslant d \leqslant \infty$.

3 Les solutions explicites demandées sont : $(t \in \mathbb{R})$ (i) $x(t) = y(t) \equiv 0$; (ii) $x(t) = y(t) \equiv 0$; (iii) $x(t) = y(t) \equiv 1$; (iv) $x(t) = (1/2)(1 + \mathrm{e}^{2t})$, $y(t) \equiv 1$.

CHAPITRE 2

2.8

4

$$R(t,s) = \begin{bmatrix} -1 + 2t/s & 1/s - t/s^2 \\ -2t + 2t^2/s & 2t/s - t^2/s^2 \end{bmatrix}, \qquad x(t) = (t-1)\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

5 Soit

$$R(t,s) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t-s} & 0 \\ \exp\{B(t) - s\} \int_s^t a(u)\, \mathrm{e}^{u - B(u)}\, \mathrm{d}u & \mathrm{e}^{B(t) - B(s)} \end{bmatrix}.$$

7 $$R(t,s) = \exp\left\{ \left(\int_s^t \alpha \right) A + \left(\int_s^t \beta \right) B \right\}.$$

23

(i) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+4}$;

(ii) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \dfrac{\sin \alpha t}{4-\alpha^2}$;

(iii) $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - \dfrac{t}{4}\cos 2t$;

(iv) $x(t) = A\,e^{2t} + B\,e^{3t} + e^{\alpha t}(b_0 + b_1 t)$ où

$$b_0 = \frac{1}{p(\alpha)} - \frac{p'(\alpha)}{p^2(\alpha)}, \quad b_1 = \frac{1}{p(\alpha)}, \quad p(\alpha) = \alpha^2 - 5\alpha + 6 ;$$

(v) $x(t) = A\,e^{2t} + B\,e^{3t} - \dfrac{1}{2}(t^2+2t)\,e^{2t}$;

(vi) en posant $u(t) = a\,e^{-t} + b\,e^{t} + c\cos t + d\sin t$,

$$x(t) = \begin{cases} u(t) + (1/4)t\,e^{t} & \text{si } \alpha = 1 \\ u(t) - (1/4)t\,e^{-t} & \text{si } \alpha = -1 \\ u(t) + e^{\alpha t}/(\alpha^4 - 1) & \text{si } \alpha \neq \pm 1. \end{cases}$$

(vii) $u(t) = e^{t/\sqrt{2}}\left(a\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}} + b\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) + e^{-t/\sqrt{2}}\left(c\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}} + d\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{\cos \alpha t}{\alpha^4+1}$.

24

(i) $x(t) = \displaystyle\int_0^t u(t-s)f(s)\,ds$, où

$$u(t) = \frac{\alpha^{-3/2}}{\sqrt{2}}\left\{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t\sin\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t - \operatorname{sh}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t\cos\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t\right\} ;$$

(ii) $x(t) = \displaystyle\int_0^t u(t-s)\,f(s)\,ds$ où $u(t) = \dfrac{\alpha^{-3/2}}{2}\left\{\operatorname{sh}\alpha^{1/2}t - \sin\alpha^{1/2}t\right\}$.

34

(i) $u(t) = F(1,-1;1;t) = 1 - t$;

(ii) $u(t) = F(i,-i;1;t) = 1 + t + \dfrac{1\cdot 2}{(2!)^2}t^2 + \cdots + \dfrac{1\cdot 2\cdots\left((n-1)^2+1\right)}{(n!)^2}t^n + \cdots$;

(iii) $u(t) = F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2};2;t\right) = 1 + \dfrac{1}{8}t + \cdots + \dfrac{(2n!)^2}{(n!)^4(n+1)2^{4n}}t^n + \cdots$;

(iv) $u(t) = F(-2,1;a;t) = 1 - \dfrac{2}{a}t + \dfrac{2}{a(a+1)}t^2$ si $a \neq 0, -1$;

$v(t) = t^{1-a}F(-a-1, 2-a; 2-a; t) = t^{1-a}(1-t)^{a+1}$.

53

(i) $t, t\,\mathrm{e}^t$.
(ii) e^{t^2}, $t\,\mathrm{e}^{t^2}$.
(iii) $t\sin t$, $t\cos t$.
(iv) e^{-t}, $\mathrm{e}^{-t}\int \exp(t-1/t)\mathrm{d}t$.
(v) $\{1, 1/t\}$ si $a=0$; $\{(1/t)\cos bt\,,\ (1/t)\sin bt\}$ si $a=b^2$, $b>0$;
$\{(1/t)\,\mathrm{e}^{-bt}\,,\ (1/t)\,\mathrm{e}^{bt}\}$ si $a=-b^2$, $b>0$.
(vi) $\{t^{1/2}, \ln t\}$ si $a=1/4$; $\{t^{1/2+b}, t^{1/2-b}\}$ si $a<1/4$, $b=\sqrt{1/4-a}$;
$\{t^{1/2}\cos(b\ln t), t^{1/2}\sin(b\ln t)\}$ si $a>1/4$, $b=\sqrt{a-1/4}$.
(vii) $1+\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{a(a+2)\cdots(a+2n-2)}{(2n)!}\,t^{2n}$;
$t+\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(a+1)(a+3)\cdots(a+2n-1)}{(2n+1)!}\,t^{2n+1}$.

CHAPITRE 7

7.8

1 $u(x,y)=a(x)b(y)$ avec $a''(x)-a'(x)-\lambda a(x)=0$, $b''(y)+\lambda b(y)=0$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$; pour $\lambda=0$, on a $a(x)=\alpha\,\mathrm{e}^x+\beta$, $b(y)=\widetilde{\alpha}y+\beta$; pour $\lambda>0$, on a $a(x)=\alpha\,\mathrm{e}^{c_1x}+\beta\,\mathrm{e}^{c_2x}$, c_1, c_2 étant les deux racines de $c^2-c-\lambda=0$, $b(y)=\widetilde{\alpha}\cos\sqrt{\lambda}\,y+\widetilde{\beta}\sin\sqrt{\lambda}\,y$; pour $-1/4<\lambda<0$, $\lambda=-1/4$, $\lambda<-1/4$, on a des résultats analogues.

$u(x,y)=a(x)+b(y)$ avec $a''(x)-a'(x)=\lambda=-b''(y)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, d'où $a(x)=-\lambda x+\alpha\,\mathrm{e}^x+\beta$, $b(y)=-(\lambda/2)y^2+\widetilde{\alpha}y+\widetilde{\beta}$ (α, $\widetilde{\alpha}$, β, $\widetilde{\beta}$, λ étant des constantes réelles arbitraires).

2 $u(x,y)=\{\sin(x+y)-1\}\,\mathrm{e}^y+1$.

3 $u(x,y)=h(x-y)/\big(1-yh(x-y)\big)$ (u aura des singularités aux points (x,y) où le dénominateur est nul).

11 La solution dans chacun des cas (i)-(iv) est de la forme

$$u(x,t)=\sum_n a_n\exp(-k\lambda_n t)\varphi_n(x)\,,\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\,,\qquad n\geqslant 1$$

où λ_n, φ_n sont les valeurs propres et les fonctions propres de $\varphi''+\lambda\varphi=0$ obtenues avec les conditions aux limites homogènes (CL) appropriées ; pour (i)-(iii) n est entier $\geqslant 1$; pour (iv) n est entier $\geqslant 0$.

(i) (CL) : $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\ell) = 0$; $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $\varphi_n(x) = \left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$;

(ii) (CL) : $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(\ell) = 0$; $\lambda_n = \left(\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\ell}\right)^2$, $\varphi_n(x) = \sin\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{\ell}$;

(iii) (CL) : $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(\ell) = 0$; $\lambda_n = \left(\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\ell}\right)^2$, $\varphi_n(x) = \cos\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{\ell}$;

(iv) (CL) : $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(\ell) = 0$; $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $\varphi_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$ avec $a_0 = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_0^\ell f(x)\,\mathrm{d}x$.

12

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{où } a_n = \frac{2\ell^2 h}{(n\pi)^2 a(\ell - a)}\sin\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right).$$

13

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-\lambda_n t}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_n}{\lambda_n}\right)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_n t})\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + a + (b-a)\frac{x}{\ell}$$

où $\lambda_n = k(n\pi/\ell)^2$, $a_n = (2/n\pi)(b\cos n\pi - a)$, $q_n = (2Q/n\pi)(1 - \cos n\pi)$.

15

$$u(t,x,y) = \sum_{m,n} A_{m,n}\cos(c\sqrt{\lambda_{m,n}}\,t)\,\varphi_{m,n}(x,y) + \sum_{m,n}\frac{B_{m,n}}{c\sqrt{\lambda_{m,n}}}\sin(c\sqrt{\lambda_{m,n}}\,t)\,\varphi_{m,n}(x,y)$$

où $\lambda_{m,n}$, $\varphi_{m,n}$ sont comme dans l'exercice 14, m, $n \geqslant 1$, et

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab}\iint_\Omega F(x,y)\,\varphi_{m,n}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$B_{m,n} = \frac{4}{ab}\iint_\Omega G(x,y)\,\varphi_{m,n}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Bibliographie

La bibliographie contient essentiellement les ouvrages auxquels nous nous sommes référés à plusieurs reprises dans le texte et ceux dont la lecture est recommandée pour l'acquisition d'une information plus détaillée sur les différents sujets traités dans ce volume. D'autres références plus ponctuelles sont placées dans les endroits appropriés du texte.

Une bonne référence générale pour les aspects bibliographiques et historiques des sujets traités est *Dictionary of Scientific Biography* (16 vols, Ed. C. C. Gillispie, Charles Scribher's Sons, New York, 1970-1980).

[1] S. D. CHATTERJI, *Cours d'Analyse*, vols 1 et 2, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.

[2] E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Interscience, New York, 1953-1962.

[4] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique*, 9 tomes, Masson, Paris, 1987-1988.

[5] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.

[6] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse*, tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[7] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, vols 1, 2, 3, Intersciences, New York, 1958-1971.

[8] G. B. FOLLAND, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, 1995.

[9] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations*, Birkhäuser, Basel, 1982.

[10] E. HILLE, *Lectures on ordinary differential equations*, Addison-Wesley, London, 1969.

[11] E. HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley, London, 1976.

[12] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.

[13] W. HUREWICZ, *Lectures on ordinary differential equations*, M. I. T. Press, 1958.

[14] F. JOHN, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[15] E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösugsmethoden und Lösungen*, 2 vols, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967, 1965.

[16] A. KOLMOGOROV, S. FOMINE, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Edition Mir, Moscou, 1974.

[17] J. MAWHIN, N. ROUCHE, *Equations différentielles ordinaires*, 2 vols, Masson, Paris, 1973.

[18] L. PONTRIAGUINE, *Equations différentielles ordinaires*, Edition Mir, Moscou, 1969.

[19] F. RIESZ, B. SZ NAGY, *Functional analysis*, Frederick Ungar, New York, 1955.

[20] W. WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[21] E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1965 (1^{re} éd. 1902).

[22] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, 2 vols, Cambridge University Press, 1959.

Index

A

Abel (N. H.), 291, 549, 570
abscisse de convergence, 533
- absolue, 529, 533
adhérence, 7, 169
aire, 9
Airy (G. B.), 97
Akhiezer (N. I.), 358
algèbre
- non commutative, 363
- normée, 362
alternative de Fredholm, 398
amplitude d'une force, 142
analyse
- d'une fonction périodique, 527
- fonctionnelle, 232
Appell (P.), 161
application, 1
- contractante, 57
approximation
- du premier ordre, 158
- optimale, 218
Arnold (V.), 157
Axler (S.), 737

B

barrière, 681
- locale, 669, 681
base
- algébrique, 211, 369
- canonique, 9, 172
- diagonalisant un opérateur, 392
- hilbertienne, 211
- orthogonale, 215
base orthonormale, 598
- adaptée à un opérateur, 396
- dans un espace préhilbertien, 211
bases préférées, 368
Beltrami (E.), 703
Bendixson (I.), 60
Bernoulli (D.), 113, 234, 635
Bernoulli (J.), 640
Bessel (F. W.), 109, 113, 160, 161, 260
bijectivité, 368
Birkhoff (G. D.), 161
Bohr (N.), 466
Born (M.), 466
borne
- inférieure, 450
- supérieure, 450
boule, 648
- ouverte, 7, 168
Bourdon (P.), 737
Burkhardt (H.), 300, 528

C

calcul
- fonctionnel, 452
- opérationnel, 452
Cantor (G.), 284
Carleson (L.), 5, 274
Carslaw (H. S.), 571, 738
Cartan (E.), 161
Cauchy (A.-L.), 14, 57, 58, 165, 528, 570, 636
Cayley (A.-C.), 79
Cesàro (E.), 245
champ
- de direction, 44
- vectoriel, 56
Chernoff (P. R.), 271
Churchill (R. V.), 571
Clairaut (A.), 635
classe d'équivalence, 176
Coddington (E. A.), 58
coefficients de Fourier, 216, 333
- complexes, 240, 259
- réels, 240, 259
Coifman (R. R.), 359
combinaison
- convexe, 219
- linéaire finie de vecteurs, 211
- linéaire infinie de vecteurs, 211
complétion, 171

composantes connexes, 7
composition de fonctions, 3
condition
- à l'infini, 685
- au bord, 573, 710, 719
- au bord de Dirichlet, 580, 591, 594
- au bord de Neumann, 591, 594
- auxiliaire, 573
- aux limites, 152, 573, 581, 594
- aux limites homogènes, 425
- aux limites périodiques, 621
- d'ellipticité, 595
- d'ellipticité stricte, 595
- de compatibilité, 583
- de Dirichlet, 272, 425
- de la boule extérieure, 683
- de standardisation, 326
- du cône extérieur, 683
- homogène, 592
- initiale, 14, 152, 573, 593, 594, 710
- taubérienne, 549
conditions séparées sur les extrémités, 621
continuité
- d'un champ de direction, 44
- d'une fonctionnelle linéaire, 491
- et bornitude, 469
contrôle des systèmes, 570
convergence absolue uniforme, 404
convolution, 470, 531
corde vibrante, 580
corps
- archimédien, 3
- commutatif, 3
- complet, 3
- ordonné, 3
correspondance, 1
Courant (R.), 234
courbe
- caractéristique, 55, 588
- de Jordan, 55
- intégrale, 44
critère de
- Dini, 270
- Routh-Hurwitz, 140
crochet d'opérateurs, 461
cycle caractéristique, 55

D

D'Alembert (J.), 160, 234, 635
Dautray (R.), 528
décomposition orthogonale d'un espace vectoriel, 393
défauts d'un opérateur, 449
degré de régularité, 712
densité
- associée à une fonction, 5, 276
- d'une mesure, 309
dérivabilité des transformées, 470
dérivée à
- droite, 8
- gauche, 8
dérivées d'une distribution, 309, 492
deuxième problème aux limites, 591
développement
- en série orthogonale, 333
- orthogonal d'une fonction, 354
Dieudonné (J.), 58, 235
Dini (U.), 270
Dirac (P. A. M.), 306
Dirichlet (G.), 243, 272, 567
distance, 218
distribution, 304, 489
- à support compact, 498, 550
- d'ordre fini, 308
- de Dirac, 306, 490
- de Schwartz, 494
- engendrée par une fonction, 305, 490
- impaire, 311
- p-périodique, 311
- paire, 311
- périodique, 499
- symétrique, 311
- tempérée, 467, 489, 494, 497, 498
diviseur de zéro, 363
Doetsch (G.), 537, 571
domaine, 1
- borné, 677, 687
- borné gaussien, 655
- de définition d'une solution, 41
- gaussien, 590, 645
- laplacien, 646
- régulier, 680
Duhamel (J.-M.-C.), 633
Dunford (N.), 622

E

égalité de
- Bessel, 209, 216
- deux fonctions, 468
Einstein (A.), 466
éléments orthogonaux, 167
ensemble
- convexe, 219
- fermé, 7
- fermé dans un ensemble, 7
- ouvert, 7
- ouvert dans un ensemble, 7
- résolvant, 366, 443
entrée ou *input*, 569
équation
- autoadjointe, 120
- autonome, 14
- aux dérivées partielles (EDP), 13, 573
- aux dérivées partielles du premier ordre, 573
- aux variables séparées, 18
- d'Airy, 97, 128
- d'Euler-Lagrange, 638
- d'évolution, 578, 594
- de diffusion, 593, 595
- de Helmholtz, 593, 645
- de la chaleur, 580, 593, 645, 710
- de Poisson, 592, 645
- de Riccati, 148
- de Schrödinger, 586, 596
- de Weber, 151
- des ondes, 577, 580, 594, 645, 719
- déterminante, 104
- différentielle caractéristique, 347
- différentielle ordinaire avec délai, 13
- différentielle ordinaire d'ordre n, 13
- différentielle ordinaire du premier ordre, 13
- du télégraphiste, 634
- eulérienne, 95
- homogène associée, 574
- hyperbolique, 595
- intégrale, 398
- intégrale de Fredholm de première espèce, 399
- intégrale de Fredholm de seconde espèce, 399
- intégrale de seconde espèce, 234
- intégro-différentielle, 13
- linéaire, 14, 151, 573
- linéaire homogène, 15, 65
- linéaire scalaire du premier ordre, 16
- non homogène, 710, 719
- non homogène associée, 719
- non linéaire, 151
- parabolique, 595
- quasi linéaire, 585
Erdélyi (A.), 113
espace
- de Banach, 232
- dual, 307, 491
- hilbertien, 169, 205, 363, 395, 400, 413
- hilbertien séparable, 448
- image, 1
- métrique complet, 57
- préhilbertien, 167, 397
- préhilbertien complexifié, 182
- préhilbertien séparable, 184, 188
espaces
- isomorphes, 212
- normés, 232
état
- lié, 709
- pur, 454, 706
- stationnaire, 709
Euler (L.), 57, 113, 160, 234, 570, 635, 638
extérieur, 7

F

facteur intégrant, 17
famille
- absolument convergente, 202
- absolument sommable, 202
- d'éléments dans J indexée pour I, 1
- sommable de vecteurs, 198
famille orthogonale, 167, 190
- complète, 214
- relativement à un poids, 325
famille orthonormale, 167, 190
- complète, 214
- relativement à un poids, 325
Fatou (P.), 178
Feffermann (C.), 303
Fejér (L.), 244
fermeture, 7
- d'un opérateur, 427

Fischer (E.), 233
Floquet (G.), 155, 161
Folland (G. B.), 643
fonction, 1
- absolument continue, 5, 276
- adhérente, 169
- analytique, 676
- à croissance lente, 497
- à support compact, 8, 489
- à variation bornée, 273, 515
- bijective, 1, 2
- borélienne, 8
- borélienne bornée, 372
- C^1 par morceaux, 6, 277
- caractéristique, 488
- continue, 710
- continue par morceaux, 5, 276
- croissante, 11
- d'interprétation des signaux, 508
- d'onde, 606
- de carré intégrable, 8, 175, 325
- de covariance, 414
- de Dirac, 306
- de Green, 600, 601, 602, 619, 657
- de Perron, 678
- de transfert, 570
- de Rademacher, 218
- décroissante, 11
- elliptique, 151
- essentiellement bornée, 373
- extrémale, 638
- généralisée, 312, 494
- génératrice, 342
- harmonique, 591, 645, 647, 649
- harmonique solide, 700
- harmonique sphérique, 695
- harmonique sphérique de degré k, 695
- indéfiniment dérivable à support compact, 304, 489
- indicatrice d'un ensemble, 5
- injective, 1
- intégrable, 8, 240
- inverse, 2
- Legendre, 700
- lipschitzienne dans un ensemble, 24
- lipschitzienne en un point, 26
- localement absolument continue, 438
- localement höldérienne, 669
- localement intégrable, 304, 490
- localement lipschitzienne dans un ensemble, 24
- localement lipschitzienne en un point, 26
- mesurable, 8
- négative, 11
- noyau, 411
- noyau d'un opérateur intégral, 371
- numérique, 5
- p-périodique, 315
- poids, 325
- positive, 11
- propre, 403, 593, 598
- réciproque, 2
- réelle, 5
- réelle continue, 83
- résolutive, 680
- résolvante, 602
- sous-harmonique, 649, 663, 666, 678
- sous-harmonique continue, 666
- spéciale, 97, 98, 113
- strictement croissante, 11
- strictement décroissante, 11
- strictement négative, 11
- strictement positive, 11
- surharmonique, 649, 663, 666, 680
- surjective, 1
- test, 494
- vectorielle, 65, 72
- vectorielle continue, 65, 72
fonctions
- compatibles, 594
- de Bessel de première espèce, 109
- de Bessel de seconde espèce, 111
- de Bessel sphériques, 115
- hypergéométriques, 145
- hypergéométriques confluentes, 147
fonctionnelle
- continue, 307, 491, 497
- linéaire, 171
- linéaire continue, 304, 489
forme
- bilinéaire, 165
- hermitienne, 163
- hermitienne positive, 164
- hermitienne strictement positive, 164, 166

- linéaire, 163, 171
- linéaire continue, 489
- normale d'une équation, 121
- quadratique, 164
- semi-linéaire, 164
- sesqui-linéaire, 164
- symétrique, 165
formes canoniques, 368
formule
- asymptotique, 485
- d'échantillonnage, 521
- d'intégration, 532
- d'inversion de Fourier, 470
- d'inversion de Laplace, 542
- de sommation partielle d'Abel, 291
- de dérivation, 532
- de Green, 646
- de Leibniz, 90
- de Parseval, 503
- de polarisation, 164
- de récurrence, 331, 342, 347
- de Rodriguez, 335
- fondamentale, 656
- intégrale de Fourier, 512
- intégrale de Poisson, 657, 660, 663
- sommatoire de Poisson, 289, 520
formules de translation et de dilatation, 469, 532
Fourier (J. B.), 233, 528, 636
Fréchet (M.), 235
Fredholm (I.), 234, 637
fréquence
- d'une force, 142
- fondamentale, 606
- naturelle, 606
- naturelle d'un système, 142
Frobenius (G.), 161
frontière, 7
- régulière, 626
Fuchs (L.), 161

G

Gantmacher (F. R.), 140
Gasquet (G.), 359
Gauss (C. F.), 160, 474, 528, 636
Gegenbauer (L.), 332
Gibbs (W.), 293
Gilbarg (D.), 643
Godbillon (C.), 161
Goldstine (H. H.), 640
Gram (J. P.), 181, 234
graphe, 2
- d'un opérateur, 426
Green (G.), 600, 637
Gronwall (T. H.), 60
groupe d'opérateurs unitaires, 607

H

Haar (A.), 234
Hamilton (W.), 79
hamiltonien, 597, 606
Hankel (H.), 115
Hausdorff (F.), 236
Hartman (P.), 58
Hartogs (F.), 105
Heaviside (O.), 570
Heisenberg (W.), 461, 463, 466
Hellinger (E.), 234
Helmholtz (H.), 593
Helms (L. L.), 738
Herivel (F.), 237
Hermite (C.), 161, 328
Hewitt (R. E.), 300
Hewitt (E.), 300, 330
Hilbert (D.), 233, 373, 466, 637
Hill (G. W.), 156
Hille (E.), 156
Hirsch (M.), 58, 78
Hobson (E. W.), 738
holomorphie de la transformée de Laplace, 531
Hörmander (L.), 643
Hunt (R. A.), 5, 274
Hurewicz (W.), 58
Hurwitz (A.), 140, 234
Huygens (C.), 579

I

identité de Lagrange, 614
image, 1, 2, 362
- essentielle, 460
- inverse, 2
inégalité
- de Cauchy-Schwarz, 165
- du triangle, 165
injectivité, 368
intégrale
- de Dirichlet 433, 265

- itérée, 511
- première, 156
intégrales spectrales, 395
intégration par parties, 439
intérieur, 7
intervalle
- compact, 5
- de $\mathbb{R}$, 5
- fermé, 5
- fermé borné, 5
- ouvert, 5
- ouvert borné, 5
isomorphisme, 212
- isométrique, 212

J

Jackson (D.), 358
Jacobi (C. G. J.), 113, 161
Jaeger (J. J.), 571, 738
John (F.), 643
Jordan (C.), 273, 466
Jushkevitch (A. P.), 635

K

Kaczmarz (S.), 358
Kamke (E.), 58
Kashin (B. S.), 359
Katznelson (Y.), 528
Kellogg (O. D.), 234
Kelvin (Lord, W. Thomson), 663
Klein (F.), 161
Kolmogorov (A.), 5, 274
Kummer (E.), 161

L

L'Hôpital (G.), 111
Lagrange (J.-L.), 160, 570, 614, 635, 638
Laplace (P. S.), 529, 570, 703
laplacien, 590
Lebesgue (H.), 235, 250, 273
Legendre (A. M.), 161, 328, 636
lemme de
- Fatou, 178
- Riemann–Lebesgue, 266, 469
Lerch (M.), 436, 540
Levinson (N.), 58
limite
- à droite, 247
- à gauche, 247
- d'une suite de distributions, 310, 493
Lin (C. C.), 159
Lions (J.-L.), 273, 528
Liouville (J.), 152, 161, 234, 613, 636
Lipschitz (R.), 44, 57, 59
loi, 156
- d'une observable sous un état, 454
- de conservation, 156
Lommel (E. C. J.), 113
longueur, 9
Larche (M.), 436
Lützen (L.), 161

M

Mackey (G. W.), 465
Mathieu (E. L.), 156, 161
matrice
- associée à un opérateur, 367, 368, 369
- auto-adjointe, 181
- carrée d'ordre n, 10
- colonne, 9
- complexe, 9
- de Gram, 181
- de type positif, 181
- de type strictement positif, 181
- diagonalisable, 77
- fondamentale, 66
- hermitienne, 181
- réelle, 9, 81
- résolvante, 67
- transposée, 9
- transposée conguguée, 10
- transposée hermitienne, 10
- unitaire, 181, 196
matrices
- commutant, 73
- permutables, 73
Maupertuis (P. L. M.), 635, 640
Mawhin (J.), 58
mécanique quantique moderne, 466
Mercer (J.), 407
mesure
- de Lebesgue, 9
- de Radon, 309
- positive polynôme-complète, 357
- spectrale, 453
méthode
- d'itération de Picard, 28, 57
- de descente, 721
- de Euler-Cauchy-Lipschitz, 57, 59

- de Perron, 678
- de Rayleigh-Ritz, 689
- des approximations successives, 57
- des images, 735
- des images de Kelvin, 663
- variationnelle, 689
Meyer (Y.), 359
Mikusínski (J.), 571
modification harmonique d'une fonction sous-harmonique, 667
moment d'ordre n, 522
moyenne
- de Cesàro, 245
- spatiale, 648
- sur la sphère, 648
multi-indice, 8, 468
multiplicité d'une valeur propre, 366, 444, 598

N

Nagy (B. Sz), 436
Neumann (C.), 234, 637, 113
Nevanlinna (R.), 358
Newton (I.), 60
nombre quantique
- principal, 709
- total, 709
normale unitaire dirigée extérieure, 626
norme, 167, 232, 362
noyau, 362
- de Dirichlet, 243
- de Fejér, 244
- de Gauss, 474
- de l'équation de la chaleur, 602
- de Poisson, 658
- de type positif, 407
- reproduisant, 413

O

observabilité simultanée, 463
observable, 454
- bornée, 460
- discrète, 458
onde plane, 736
opérateur
- à domaine dense, 425, 428
- à domaine symétrique, 425
- à inverse continu, 362
- à résolvant compact, 445
- adjoint, 363, 428
- anti-autoadjoint, 461
- antisyméttrique, 461
- autoadjoint, 365, 366, 429
- autoadjoint compact, 451
- autoadjoint positif, 374, 607
- bijectif, 366
- borné, 361, 363, 426
- borné inférieurement, 450
- borné supérieurement, 450
- compact, 375, 402
- continu, 361, 363, 426
- de Hilbert-Schmidt, 370, 373, 399, 404
- de Laplace-Beltrami, 703
- de multiplication, 442
- de multiplication par une fonction, 372
- de position, 441, 462
- de quantité de mouvement, 462
- de rang fini, 375
- de Schrödinger, 623
- différentiel, 424
- elliptique, 591
- essentiellement autoadjoint, 430
- fermable, 427
- fermé, 426
- hamiltonien, 463
- hermitien, 365
- identité, 363
- linéaire, 361, 171
- linéaire borné, 171
- linéaire continu, 362
- modèle pour les opérateurs autoadjoint, 442
- non borné, 425, 426
- normal, 365, 442
- nul, 363
- positif, 450
- réel, 450
- régulier de Sturm-Liouville, 613
- résolvant, 382, 443
- semi-borné, 450
- symétrique, 366, 426
- symétrique à domaine dense, 429
- unitaire, 365
opérations ponctuelles, 174
ordre d'une EDP, 574
oscillateur harmonique, 152

P
Painlevé (P.), 60
Parseval (M. A.), 216, 260
partie
- borélienne, 8
- bornée, 7
- compacte, 7
- complète dans un ensemble, 169
- connexe, 7
- convexe, 10
- convexe d'un ensemble, 219
- dense, 184
- fermée, 168
- mesurable, 8
- négligeable, 9
- ouverte, 168
- totale, 184
partition
- d'un ensemble, 3
- dénombrable, 3
- finie, 3
Pauling (L.), 465
Peano (G.), 21
pendule mathématique, 151
Perron (O.), 678
phase d'une force, 142
phases d'un système, 56
Picard (E.), 57, 60
Pietsch (A.), 235
Plancherel (M.), 489
Planck (M.), 466
Poincaré (H.), 60, 161, 234, 637
point
- critique, 54
- d'équilibre, 54, 153
- d'équilibre asymptotiquement stable, 153
- d'équilibre stable, 153
- de régularité, 101
- de singularité faible, 101
- de singularité forte, 102
- fixe, 57
- régulier, 54, 101, 680, 683
- régulier de classe C^k, 626
- singulier, 54
- stationnaire, 54
Poisson (S. D.), 289, 528, 636
polynôme
- caractéristique, 89, 369
- d'ordre m, 700
- stable, 140
- trigonométrique, 252, 255
- trigonométrique réel, 255
polynômes
- d'Hermite, 144, 332
- de Chebyshev, 331
- de Gegenbauer, 332
- de Jacobi, 332
- de Laguerre, 332, 343
- de Legendre, 330, 700
- de Legendre associés, 700
- harmoniques homogènes de degré k, 695
- orthogonaux, 239
- orthogonaux classiques, 332
- orthogonaux normalisés, 327
- sphériques, 330
- ultrasphériques, 332
Pontriaguine (L. S.), 58
potentiel, 606
- coulombien, 706
- newtonien, 657, 668
premier problème aux limites, 591
principe
- de Dirichlet, 640
- de Duhamel, 633
- de Huygens, 579, 724
- de localisation, 268, 516
- de superposition, 574, 582
- du maximum, 666
- du minimum, 669
- d'unicité, 676
problème
- aux valeurs propres, 593
- de Cauchy, 14, 580
- de Dirichlet, 591, 680
- de Neumann, 591
- de Sturm-Liouville, 152, 581
- des moments, 356
- du brachistochrone, 639
- mixte, 580
- variationnel, 640
processus stochastique, 487
produit
- cartésien, 2
- scalaire, 164, 167

- scalaire L^2, 174
- scalaire canonique, 172, 173, 176
- scalaire canonique dans $\mathbb{R}$, 10
- tensoriels d'espaces hilbertiens, 704
projecteur, 374
- idempotent, 224
projection
- d'un vecteur, 219
- orthogonale, 192, 223
prolongement
- d'un opérateur, 426
- d'une solution, 41
- impair, 261
- p-périodique, 247
- pair, 261
propriété
- de fermeture, 426
- de Lipschitz en un point, 44
Putzer (E. J.), 80

Q

quasi-valeur propre, 416, 451
quotient de Rayleigh, 689

R

Rademacher (H.), 218
Radon (J.), 309
Ramey (W.), 737
rang d'un opérateur, 375
Rayleigh (Lord, J. W. Strutt), 689, 738
reconstitution d'un signal, 522
Reed (M.), 466, 624
relation
- d'incertitude, 461
- de Parseval, 209
Remak (R.), 738
représentation spectrale, 453
résolvant, 443
résolvante compacte, 624
résonance d'un système, 142
restriction, 2
Riccati (J. F.), 148, 160
Riemann (G. F. B.), 161, 273, 637
Riesz (F.), 233, 358, 436
Ritz (W.), 689
Rodriguez (O.), 335
Rouche (N.), 58
Routh (E. J.), 140
Rutherford (E.), 466

S

Saakyan (A. A.), 359
Schläfli (L.), 115
Schmidt (E.), 234, 373, 637
Schrödinger (E.), 466, 709
Schwartz (L.), 321, 494, 528
Schwarz (H. A.), 165, 637
Segel (L. A.), 159
segment
- fermé, 10, 219
- ouvert, 10
semi-groupe, 603
séparation des
- variables, 575, 581, 704
- zéros, 122
série
- commutativement convergente, 201
- convergente, 197
- d'une famille de vecteurs, 198
- de Fourier complexe, 240, 259, 301, 315
- de Fourier réelle, 240, 259, 324
- sommable au sens de Cesàro, 251
séries
- de Dirichlet, 567
- de Fourier, 239
signal causal, 523
Simon (B.), 466, 624
Smale (S.), 58, 78
solution
- bornée, 730
- classique, 583, 586, 594, 677
- d'une équation, 14, 41, 66
- du problème de Dirichlet, 663
- fondamentale, 526, 654, 655
- non prolongeable, 41
- non triviale, 67, 86
- particulière, 574
solutions
- approchées, 57
- de l'équation homogène, 86
somme
- directe, 182
- d'une famille de vecteurs, 198
- partielle d'une série de Fourier, 245
sortie ou *output*, 569
sous-espace
- hermitien, 398
- propre, 366, 444

- symétrique, 398
- vectoriel, 223
- vectoriel complet, 227
- vectoriel fermé, 227
- vectoriel fermé dans un espace vectoriel, 230
spectre
- continu, 418
- continu d'un opérateur, 451
- de Fourier, 508
- discret d'un opérateur, 451
- d'un opérateur, 366, 443
- ponctuel, 418, 443
- ponctuel d'un opérateur, 367
sphère, 648, 724
Stein (E. M.), 628, 738
Steinhaus (H.), 234, 358
Stieltjes (T. J.), 328, 358
Stone (M. H.), 233, 607
Sturm (C.), 152, 161, 234, 613, 636
suite, 4
- convergeant au sens de Cesàro, 251
- de polynômes orthogonaux relativement à un poids, 326
- de fonctions équicontinues, 380
- finie, 1
- orthogonale complète, 230
- orthogonale totale, 230
support d'une fonction, 189
supremum essentiel, 373
surjectivité, 368
symétrie hermitienne, 164
système
- d'équations différentielles ordinaires, 14, 65, 562
- dynamique, 56
- fondamental, 66, 87
- linéaire, 569
- physique, 454
- structurellement stable, 153
Szegö (G.), 358

T

Taton (R.), 635
Tauber (A.), 549
théorème
- abélien, 546, 549
- fondamental du calcul différentiel et intégral, 439
- spectral, 374, 392, 395
- taubérien, 546, 549
théorème de
- Arzelà-Ascoli, 51
- Cayley-Hamilton, 79
- comparaison, 123
- convergence dominée de Lebesgue, 8
- Dini, 410
- factorisation, 413
- Floquet, 155
- Fubini, 8
- Hartogs, 105
- l'inverse continu, 367
- la divergence, 645
- la moyenne de Gauss, 669
- Lebesgue, 250
- Lerch, 540
- Mercer, 407
- Peano, 21, 50
- Plancherel, 489, 502
- Rademacher-Meshov, 354
- Stone, 607
- unicité, 540
- Weierstrass, 253
- Whitney, 628
théorie
- des systèmes, 570
- du potentiel, 657, 737
- quantique ancienne, 466
Thomae (L. W.), 161
topologie sur un espace, 57
transformation, 1
- de Fourier d'une distribution, 467
- de la variable dépendante, 121
- de la variable indépendante, 121
transformée
- bilatère de Laplace, 529
- de Fourier d'une distribution, 467
- de Fourier en sinus en cosinus, 512
- de Laplace, 529, 530
- de Stieltjes, 568
- des dérivées, 471
translation d'une distribution, 311
Tricomi (F. G.), 358
troisième
- condition au bord, 592
- problème aux limites, 592
Trudinger (N. S.), 643

U

unicité
- de la transformation, 470, 531
- des coefficients de Fourier, 250
- des zéros, 124

V

valeur, 1
- moyenne, 454
- principale, 509
- propre, 366, 444, 593, 598
- propre dégénérée, 598
- propre multiple, 598
- propre simple, 367, 444, 593, 598

variable
- aléatoire standardisée, 488
- indépendante, 573

variance, 460
vecteur propre, 366
vecteurs canoniques, 173
vitesse de propagation, 724
volume, 9
Von Neumann (J.), 233, 463, 466

W

Walter (W.), 58, 78
Watson (G. N.), 113, 114, 145
Weber (H.), 115
Weidmann (J.), 624
Weierstrass (K. T. W.), 253
Weiss (G.), 738
Weyl (H.), 234
Whittaker (E. T.), 145, 152
Widder (D.), 571
Wilbraham (H.), 300
Wilson (E. B.), 465
Witorski (P.), 359
Wronski (H.), 87
wronskien, 87

Z

zéros, 122
- isolés, 122
- simples, 122
- successifs, 122

Zygmund (A.), 5, 274, 284

DATE DUE
DATE DE RETOUR

TRENT UNIVERSITY
0 1164 0441505 5

Cours d'Analyse

3 Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles

Srishti D. Chatterji

L'objectif principal du troisième volume de ce Cours d'Analyse est de donner une introduction à la théorie des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles et d'introduire certains outils de base pour les méthodes mathématiques de la physique, comme les espaces hilbertiens, les séries et l'intégrale de Fourier-Laplace et les distributions.
La première partie présente la théorie fondamentale des équations différentielles ordinaires en utilisant les méthodes analytiques classiques. Le premier chapitre concerne les théorèmes d'existence et d'unicité généraux; le second traite les équations linéaires. La deuxième partie développe les outils de bases pour l'étude des équations aux dérivées partielles: les espaces hilbertiens, les développements orthogonaux, les opérateurs dans les espaces hilbertiens, les transformées de Fourier et de Laplace. Elle contient aussi une introduction à la théorie des distributions. La troisième et dernière partie concerne les équations aux dérivées partielles; le premier chapitre de celle-ci étudie, entre autres, la problématique générale autour des équations linéaires du second ordre, en donnant les solutions formelles pour les équations de Laplace-Poisson, de Schrödinger, de la chaleur et des ondes. Le dernier chapitre présente quelques démonstrations précises concernant le laplacien et ses valeurs propres. Outil de travail conçu pour les étudiants en mathématiques et physique dans leurs deuxième et troisième années d'études, la richesse et la complétude de son index en font un manuel de référence pour tout mathématicien.

Après ses études à l'Université de Lucknow et à l'Indian Statistical Institute de Calcutta, **Srishti D. Chatterji** obtient son doctorat en statistiques mathématiques de la Michigan State University, E. Lansing, USA, en 1960.
Il est depuis 1970 professeur ordinaire de mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne après avoir occupé divers postes d'enseignement et de recherche en Europe, en Amérique du Nord et en Australie. Ses recherches concernent différents domaines d'analyse liés à la théorie de l'intégration et des probabilités. Il s'intéresse tout particulièrement à l'histoire des mathématiques des 19^{e} et 20^{e} siècles et aux fondements de la physique théorique.

ISBN 2-88074-350-8

9 782880 743505

Presses polytechniques et universitaires romandes